

NEODREĐENI INTEGRAL

Za funkciju $F(x)$ kažemo da je **primitivna** funkcija funkcije $f(x)$ ako je

$$F'(x) = f(x).$$

Funkcija, na primjer $F(x) = x^2$ je primitivna funkcija za funkciju $f(x) = 2x$ jer je $(x^2)' = 2x$.

Iz diferencijalnog računa je poznato da je izvod zbira jednak zbiru izvoda, kao i da je izvod konstante jednak nuli, tj.

$$[F(x) + c]' = F'(x)$$

za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$.

Odatle slijedi zaključak:

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, onda je i $F(x) + c$ primitivna funkcija za $f(x)$.

$\{F(x) + c\}$, gdje je c proizvoljna konstanta zovemo **neodređeni integral** funkcije $f(x)$ i označavamo sa

$$\int f(x)dx$$

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Funkciju $f(x)$, tada, zovemo **podintegralnom** funkcijom.

Izračunati neodređeni integral funkcije $f(x)$ znači odrediti skup $\{F(x) + c\}$, tako da je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ i c proizvoljna konstanta.

Primjeri

Primjer 1. Neodređeni integral funkcije $f(x) = 2x$ je

$$\int 2x dx = x^2 + c$$

jer je $(x^2 + c)' = 2x$.

Primjer 2.

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\left[\int f(x) dx \right]' = [F(x) + c]' = f(x)$$

**izvod neodređenog integrala jednak je
podintegralnoj funkciji.**

Važi i obratno

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

Tablica

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

Primjeri

Izračunati:

a) $\int (x^3 - 2e^x) dx$ e) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x \right) dx$

b) $\int (\cos x - \sqrt[3]{x^2}) dx$

c) $\int a \cdot 2^x dx$

d) $\int \left(\frac{a}{\sin^2 x} - b \right) dx$

METODE INTEGRACIJE

Metoda zamjene se sastoji u uvođenju nove promjenljive, tako da se neodređeni integral funkcije oblika $f[g(x)]g'(x)$ svodi na neodređeni integral funkcije $f(t)$:

Uvedimo novu promjenljivu t tako da je $g(x) = t$ i, dakle, $g'(x)dx=dt$

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(t)dt$$

tj. ako je $F(t)$ primitivna funkcija za $f(t)$, onda je $F[g(x)]$ primitivna funkcija za $f[g(x)]g'(x)$.

Primjeri

Primjer 1. Izračunati $I = \int (x^2 + 3)^5 2x dx$

Podintegralna funkcija je oblika $f[g(x)]g'(x)$ gdje je $f(x) = x^5$ i $g(x) = x^2 + 3$, pa se zamjenom $x^2 + 3 = t$, odakle je $2x dx = dt$, dobija

$$\int (x^2 + 3)^5 2x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{6} (x^2 + 3)^6 + c$$

Primjer 2. Neodređeni integral $\int \sqrt{2x-3} dx$

zamjenom $2x - 3 = t$ i $2dx = dt$, svodimo na

$$I = \int \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-3)^3} + c$$

Metoda parcijalne integracije se sastoji u tome što se podintegralni izraz $f(x)dx$ predstavi u obliku proizvoda funkcije $u(x) \equiv u$ i diferencijala funkcije $v(x) \equiv v$:

$$f(x)dx = u(x) \cdot dv(x) = u \cdot dv$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du = \int f(x)dx \quad (*)$$

Primjer 5. Izračunati $I = \int x e^x dx$

Rješenje: Podintegralni izraz $x e^x dx$ predstavimo u obliku $u(x)v'(x)dx$: $u(x) = x$, $v'(x)dx = e^x dx$

Diferenciranjem prvog i integracijom drugog izraza, dobijamo:

$$du(x) = dx \quad \text{i} \quad \int v'(x)dx = \int e^x dx$$

$$v(x) + c_1 = e^x + c_2, \quad \text{ili} \quad v(x) = e^x + c.$$

No, obzirom na formulu (*) (desna strana već sadrži proizvoljnu konstantu) možemo uzeti da je $c = 0$, pa je $v(x) = e^x$. Primjenimo li, sada, formulu (*), imaćemo:

$$I = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

Integracija racionalnih funkcija

- Prvo razmotrimo kako se izvodi integracija racionalne funkcije oblika

$$\frac{1}{x^2 + px + q}$$

čiji imenilac nema realnih nula ($D < 0$), tj. $q - p^2/4 > 0$.

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + c$$

Smjena $x + p/2 = t \Rightarrow dx = dt$ i $q - p^2/4 = a^2$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c$$

- integracija racionalnih funkcija čiji je imenilac oblika

$$P_n(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_t)^{k_t} (x^2 + px + q)^{l_1} \dots (x^2 + rx + s)^{l_t}$$

$$x_i \neq x_j, i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, t\}, 4q - p^2 \neq 4s - r^2,$$

$$x_1, x_2, \dots, x_t, p, q, \dots, r, s \in \mathbb{R}, k_1, k_2, \dots, k_t \in \mathbb{N},$$

$$q - \frac{p^2}{4} > 0, \dots, s - \frac{r^2}{4} > 0$$

$$f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

• $Q_m(x)$ – polinom stepena m

• $P_n(x)$ – polinom stepena n

$f(x)$ je **prava** ako je $m < n$

- Neka je koeficijent uz stepen x^n imenioca $P_n(x)$ broj 1. Tada pravu racionalnu funkciju možemo predstaviti u obliku **zbira prostih razlomaka**, tj. u obliku:

$$f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1-1}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-x_1} +$$

$$+ \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{B_1}{x-x_2} + \dots + \frac{L_{k_t}}{(x-x_t)^{k_t}} + \dots + \frac{L_1}{x-x_t} +$$

$$+ \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^{l_1}} + \dots + \frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^{l_t}}$$

$A_{k_1}, \dots, A_1, B_{k_2}, \dots, B_1, \dots, R, S$ Konstante koje se određuju iz uslova identičnosti dva polinoma

Primjer

Racionalna funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

je prava jer je stepen brojioca (0) manji od stepena imenioca (2). Koeficijent uz najveći stepen imenioca je 1, nule imenioca su $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ tj. realne su i jednostruke, pa datu funkciju možemo predstaviti u obliku:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \equiv \frac{A(x - 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}$$

Iz identičnosti slijedi da je $(A + B)x - (2A + B) = 1$, odnosno $A + B = 0$ i $2A + B = -1$, tj. $A = -1$, $B = 1$, pa je

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \equiv \frac{-1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}$$

$\int \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} dx$ je tablični. Za $k_1=1$ $\int \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} dx = A_{k_1} \ln|x-x_1| + c$

a za $k_1 \neq 1$ $\int \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} dx = A_{k_1} \int (x-x_1)^{-k_1} dx = A_{k_1} \frac{(x-x_1)^{-k_1+1}}{-k_1+1} + c$

Razmotrimo integral funkcije $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^l}$

gdje x^2+px+q nema realnih nula

integral $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^l} dx$

se odmah rešava smjenom $x^2+px+q=t$,
odakle je $(2x+p)dx=dt$

Slično se i integral može srediti (za $P \neq 0$)

$$\int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^l} dx = \frac{P}{2} \int \frac{2x + \frac{2Q}{P}}{(x^2 + px + q)^l} dx =$$

$$\frac{P}{2} \int \frac{2x + P - P + \frac{2Q}{P}}{(x^2 + px + q)^l} dx = \frac{P}{2} \int \frac{2x + P}{(x^2 + px + q)^l} dx + \frac{P}{2} \int \frac{-P + \frac{2Q}{P}}{(x^2 + px + q)^l} dx =$$

$$\frac{P}{2} \int \frac{2x + P}{(x^2 + px + q)^l} dx + \frac{P}{2} \left(\frac{2Q}{P} - P \right) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^l} dx$$

Radi se smjenom
(slajd 17)

Razmatramo na
narednim slajdovima

Razmatranjem integrala I_l , u potpunosti je opisana integracija racionalnih funkcija

$$I_l = \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^l} dx$$

Za $l=1$, već je riješeno na slajdu broj 1. Neka je, sada, $l>1$. Kako je $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (4q - p^2)/4$ (dobijeno dopunom do potpunog kvadrata), to se uzimajući istu smjenu kao na slajdu 1:

$$x + p/2 = t \Rightarrow dx = dt \text{ i } (4q - p^2)/4 = a^2$$

dobija

$$I_l = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^l}$$

Riješimo integral $I_l = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^l}$

$$I_l = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^l} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{l-1}} -$$

$$- \frac{1}{a^2} \int \frac{x \cdot x}{(x^2 + a^2)^l} dx = \frac{1}{a^2} I_{l-1} - \frac{1}{a^2} I.$$

Kod integrala I primijenimo

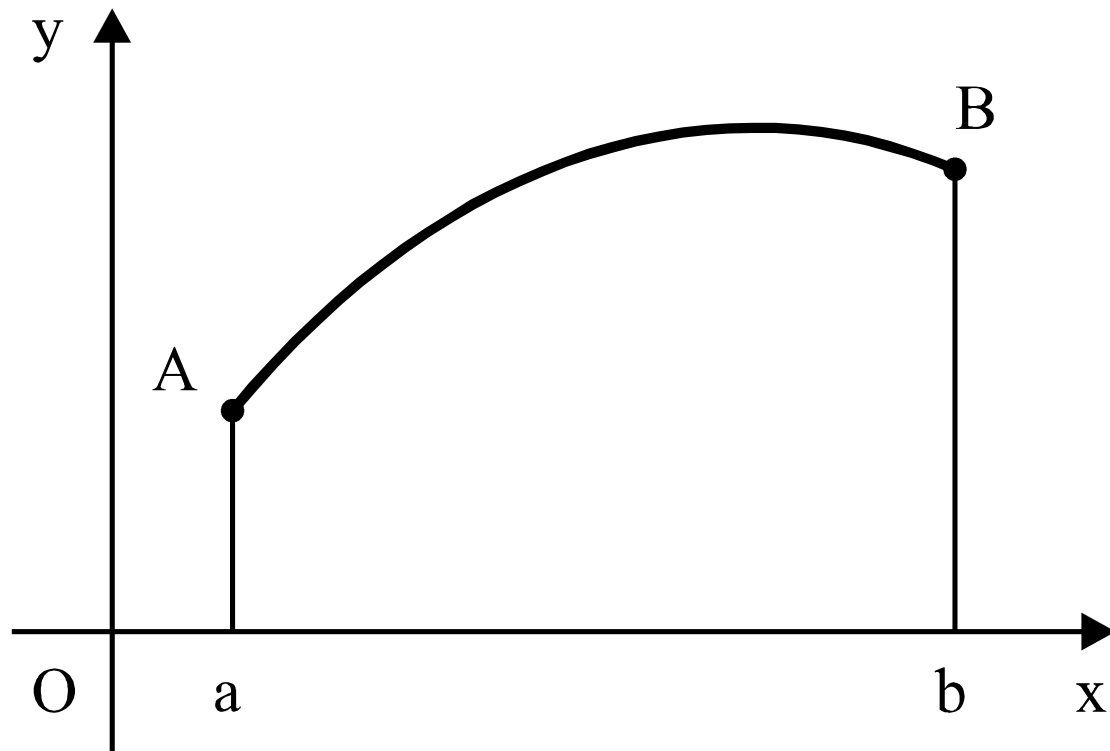
parcijalnu integraciju sa $u = x$, $dv = \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^l}$

Nakon računa (v se računa smjenom $x^2 + a^2 = t$), dobija se

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^l} dx = \frac{x}{2(1-l)(x^2 + a^2)^{l-1}} - \frac{1}{2(1-l)} I_{l-1}$$

$$\Rightarrow I_l = \frac{1}{2(l-1)a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{l-1}} + \frac{2l-3}{2(l-1)a^2} I_{l-1}$$

Određeni integral



Problem određivanja površine krivolinijske figure može se svesti na određivanje površine ograničene dijelom grafika neprekidne pozitivne funkcije $y = f(x)$, odgovarajućim intervalom na Ox osi i ordinatama funkcije koje odgovaraju krajevima tog intervala. Takvu figuru zovemo **krivolinijskim trapezom**

Neka je $y = f(x)$
funkcija neprekidna na
intervalu $[a,b]$, x_i tačke
tog intervala, takve da
je

$$x_0 \equiv a < x_1 < x_2 < \dots$$

$$< x_{n-1} < x_n \equiv b$$

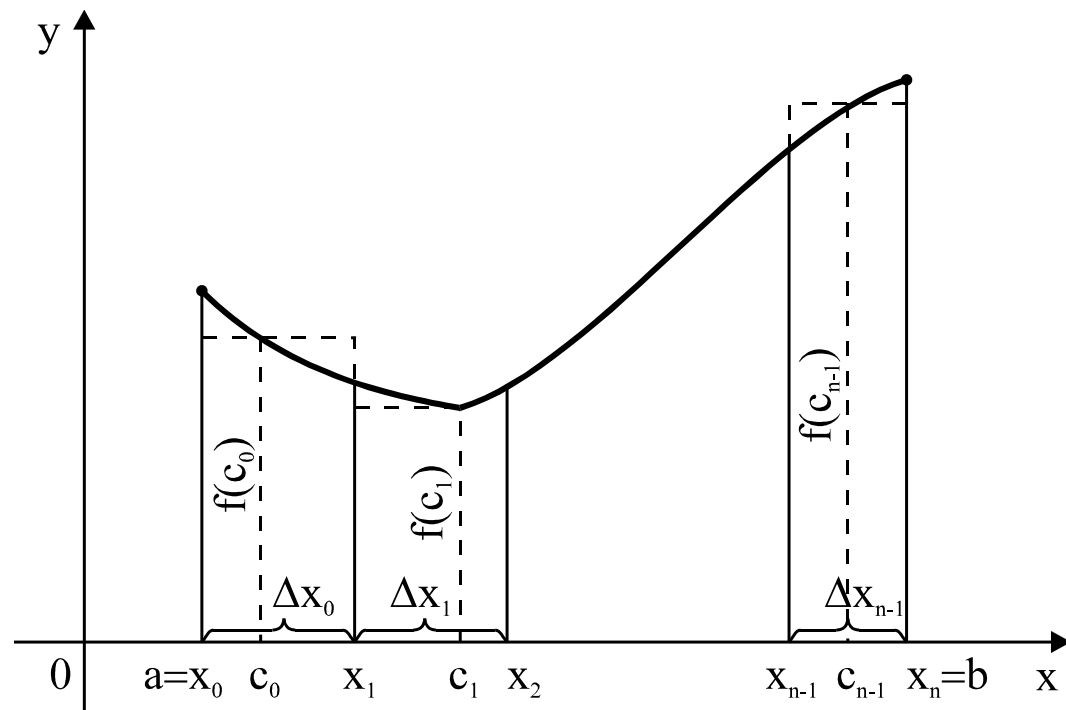
$$\text{ i } c_i, i = 1, 2, \dots, n-1$$

tačke intervala $[x_i, x_{i+1}]$.

Zbir

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(c_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_{i-1})\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

zove se **n-ta integralna suma** funkcije $y = f(x)$ na
intervalu $[a,b]$.



Graničnu vrijednost n-te integralne sume funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$ kad $n \rightarrow \infty$, i $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, zovemo **određenim integralom** funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a,b]$ i označavamo sa

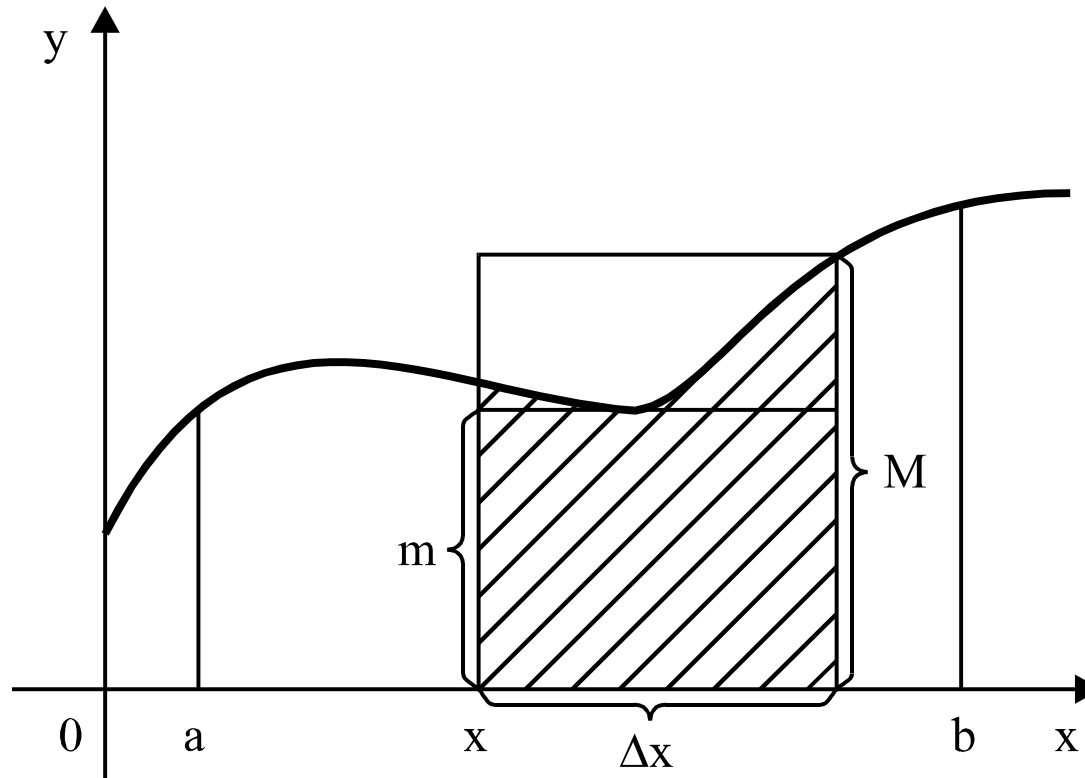
$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_{i-1})\Delta x_i, \quad \max \Delta x_i \rightarrow 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_{i-1})\Delta x_i$$

VEZA IZMEĐU ODREĐENOG I NEODREĐENOG INTEGRALA

Označimo sa $P(x)$ površinu ograničenu grafikom neprekidne, pozitivne funkcije $y = f(x)$, ordinatama $f(a)$ i $f(x)$ i intervalom $[a, x]$, $x < b$ i sa $\Delta P(x)$ priraštaj te površine ako se x promijeni za $\Delta x > 0$ (šrafirani dio).



Ako su m i M najmanja i najveća vrijednost funkcije $f(x)$ na intervalu $[x, x + \Delta x]$, onda je

$$m \cdot \Delta x \leq \Delta P(x) \leq M \cdot \Delta x \text{ tj. } m \leq \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} \leq M$$

$$\text{Kako je } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m = f(x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = f(x) \Rightarrow$$

$$P'(x) = f(x) \Rightarrow P(x) \text{ primitivna funkcija funkcije } f(x).$$

$F(x)$ proizvoljna primitivna funkcija za $f(x) \Rightarrow$

$$P(x) = F(x) + c \Rightarrow P(b) = F(b) + c \quad \text{i} \quad P(a) = F(a) + c.$$

Iz $P(x) = \int_a^x f(x)dx$ slijedi

$$P(a) = 0 \text{ i, dakle, } F(a) = -c,$$

$$P(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)|_a^b$$

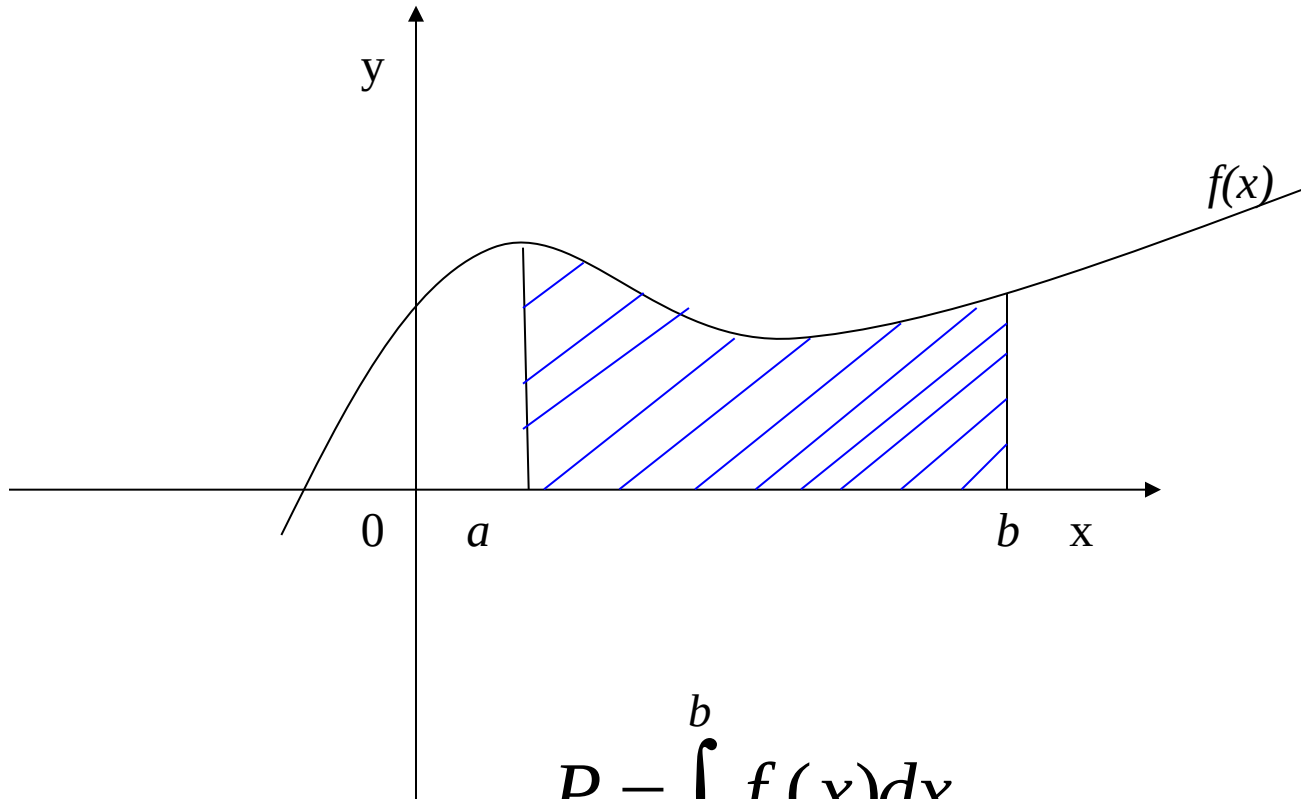
Njutn-Lajbnicova formula

Primjer 1. Izračunati $I = \int_1^{11} (2x + 3)dx$

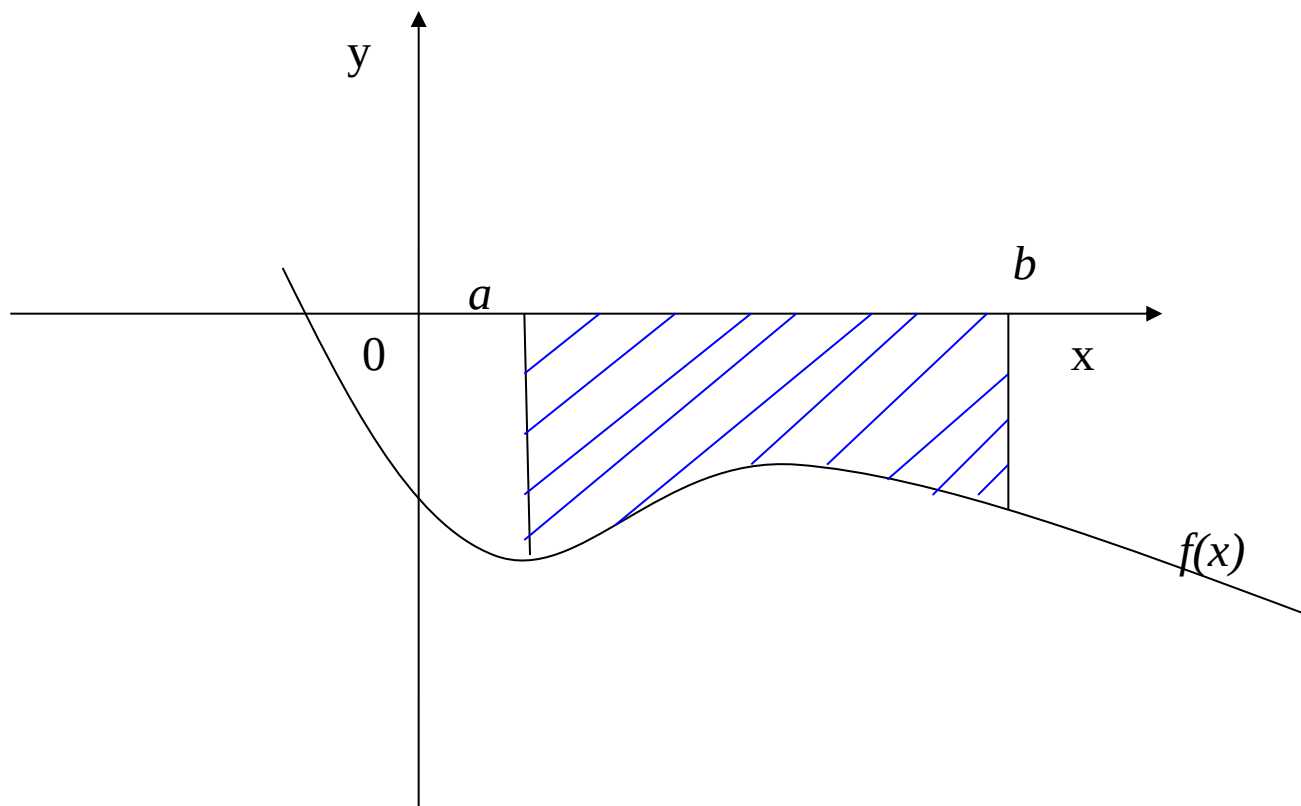
Jedna od primitivnih funkcija funkcije $f(x) = 2x + 3$ je $F(x) = x^2 + 3x$, pa je

$$I = F(x)|_1^{11} = F(11) - F(1) = 154 - 4 = 150$$

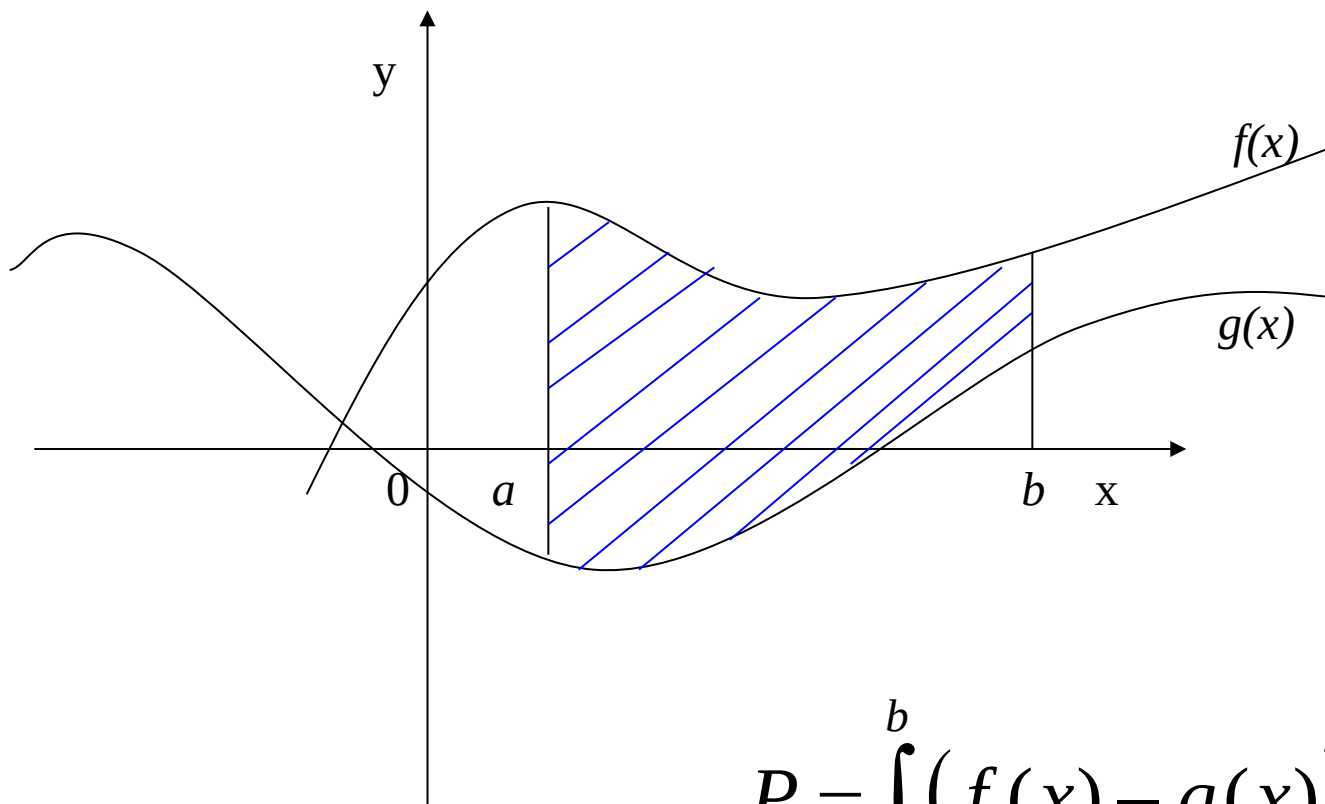
Računanje površine



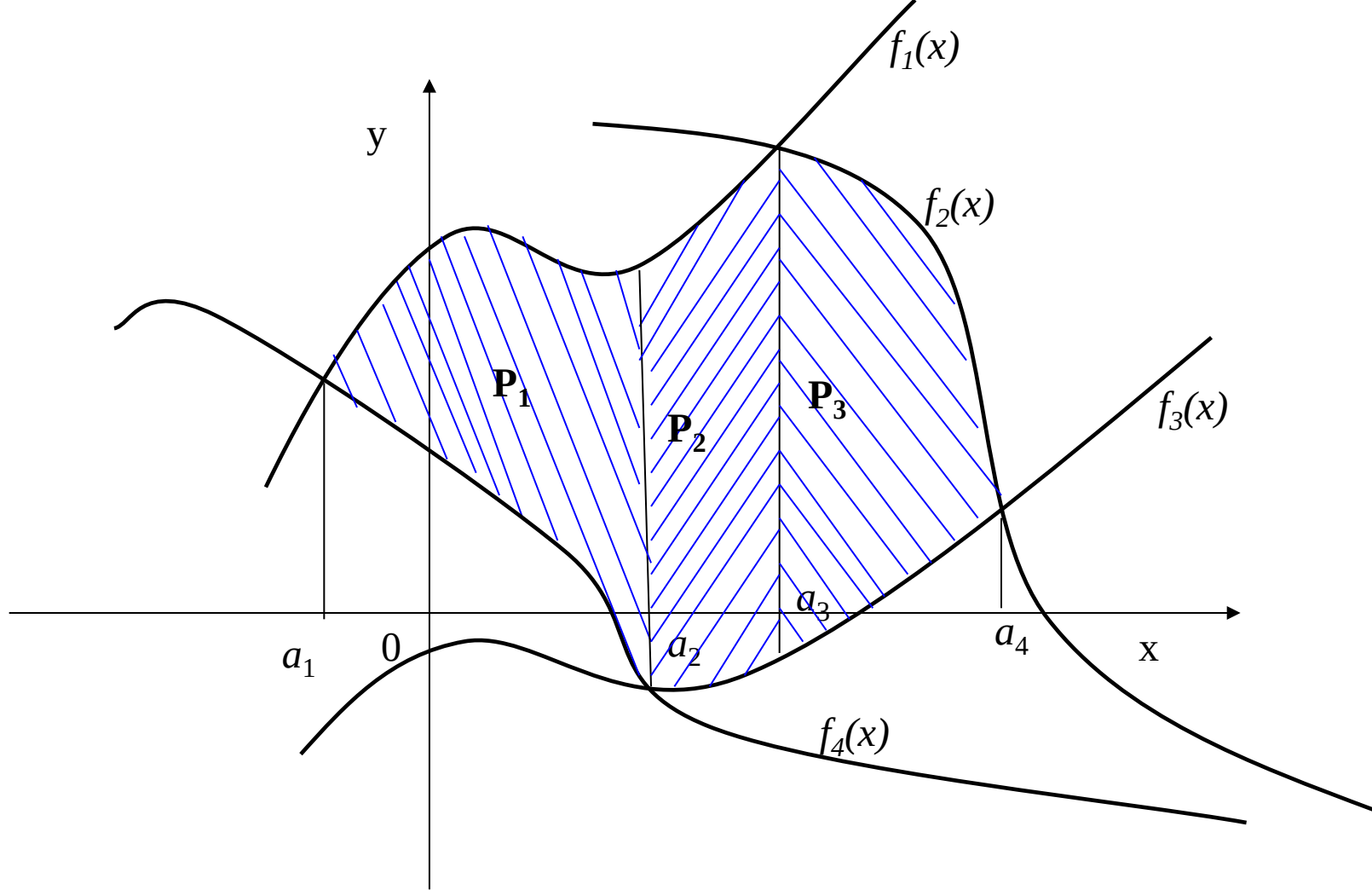
$$P = \int_a^b f(x) dx$$



$$P = - \int_a^b f(x) dx$$



$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

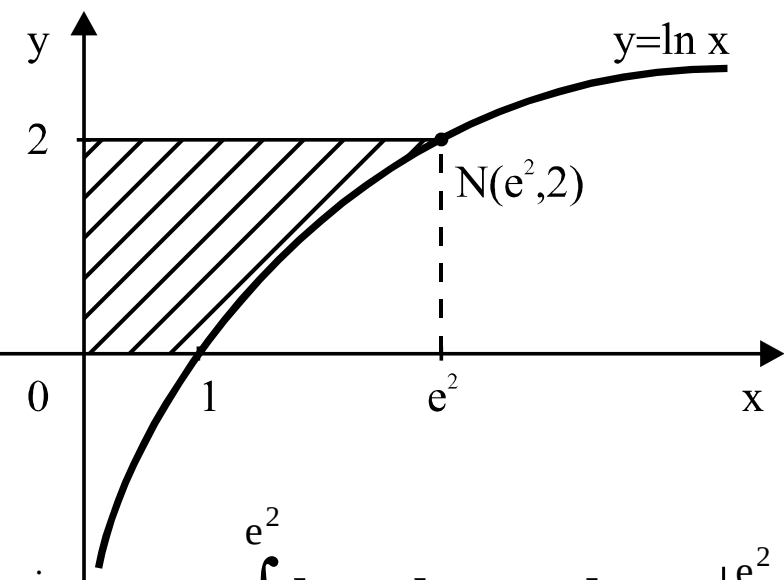


$$P = P_1 + P_2 + P_3 =$$

$$\int_{a_1}^{a_2} (f_1(x) - f_4(x)) dx + \int_{a_2}^{a_3} (f_1(x) - f_3(x)) dx + \int_{a_3}^{a_4} (f_2(x) - f_3(x)) dx$$

Primjer

Izračunati površinu ograničenu koordinatnim osama, pravom $y = 2$ i grafikom funkcije $y = \ln x$ integracijom:
a) duž Ox-ose, b) duž Oy-ose.

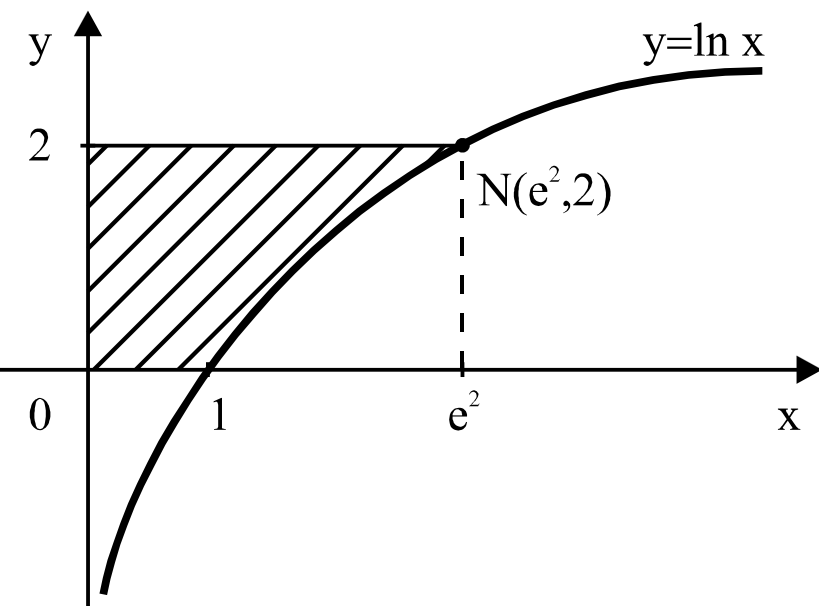


$$P = P_{\square OAMN} - \int_1^{e^2} \ln x dx = 2e^2 - \int_1^{e^2} \ln x dx$$

$\int_1^{e^2} \ln x dx$ radimo parcijalnom integracijom: $u = \ln x$; $dv = dx$, pa je $du = dx/x$ i $v = x$. Otuda je:

$$\int_1^{e^2} \ln x dx = x \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{x}{x} dx = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$$

pa se dobija $P = 2e^2 - e^2 - 1 = e^2 - 1$.



b) Duž y-ose je za integraciju jednostavniji slučaj jer je

$$P = \int_0^2 f(y) dy \quad \text{gdje je } f(y) = e^y \text{ (iz } y = \ln x \Rightarrow x = e^y \text{). Dakle,}$$

$$P = \int_0^2 e^y dy = e^y \Big|_0^2 = e^2 - 1$$

Nesvojstveni integral

- Beskonačne granice integracije
- Neograničena podintegralna funkcija

Beskonačne granice integracije

- $F(\infty)$ and $F(-\infty)$ ne postoje, jer $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$.

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

- U tom slučaju primjenjuje se koncept granične vrijednosti.

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Neograničena podintegralna funkcija

- I pored toga što su granice integracije konačne, integral može biti nesvojstveni ako je podintegralna funkcija neograničena na $[a, b]$. Ponovo primjenjujemo koncept limesa.

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx.$$

Primjeri

$$\text{a)} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$$

$$\text{b)} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\text{c)} \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$$

Neke ekonomske primjene integrala

Od granične do ukupne funkcije
Investicije i akumulacija kapitala

Od granične do ukupne funkcije

- Diferenciranjem ukupne funkcije (npr. troškova) dobija se granična funkcija
- Integracijom granične funkcije dobija se ukupna

Investicije i akumulacija kapitala

- Akumuliranje kapitala je proces uvećavanja datog kapitala
- Kapital = $K(t)$.

$$\frac{dK}{dt} = I(t)$$

$$K(t) = \int I(t) dt$$