REALNA FUNKCIJA VIŠE NEZAVISNO PROMJENLJIVIH

Opšti oblik (eksplicitni) glasi:

$$y = f(x_1,x_2,...,x_n), \quad (x_1,...,x_n) \in D \subset R^n.$$

Za n = 2, tj. za slučaj realne funkcije od dvije nezavisno promjenljive, obično koristimo oznake x i y za nezavisno promjenljive i z za odgovarajuću vrijednost funkcije i pišemo:

$$z = f(x,y).$$

PARCIJALNI IZVODI

Pretpostavimo da je argument y konstanta, funkciju z = f(x,y) možemo smatrati funkcijom jednog argumenta - x - i ispitivati postojanje granične vrijednosti

$$f'_x(x, y) = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x}$$

$$f'_y\left(x, y\right) = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}$$

•

Primjer 1. Prvi parcijalni izvodi funkcije $z = xe^y$ su:

$$z'_x = e^y \qquad z'_y = xe^y$$

Primjer 2. Prvi parcijalni izvodi funkcije $z = y^2$, su

$$z'_x = 0 \qquad z'_y = 2y$$

Npr. u tački, (2,3) su:

$$z'_x = 0 \qquad z'_y = 6$$

Primjer 3. Neka je p_1 cijena proizvoda A, p_2 - cijena proizvoda B, x_1 i x_2 odgovarajuće tražnje i neka tražnja proizvoda A zavisi od cijene p_2 proizvoda B i obrnuto, tj. $x_1 = f_1(p_1,p_2)$ i $x_2 = f_2(p_1,p_2)$. Tada se elastičnost tražnje x_1 u odnosu na cijenu p_1 zove **parcijalna elastičnost**:

$$E_1(p_1) = \frac{p_1}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1}$$

Elastičnost (ukrštena) tražnje x_1 u odnosu na cijenu p_2 je

$$E_1(p_2) = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2}$$

Analogno:

$$E_2\left(p_1\right) = \frac{p_1}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \qquad E_2\left(p_2\right) = \frac{p_2}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_2}$$

Parcijalna elastičnost $E_1(p_1)$ približno predstavlja procenat rasta (smanjenja) tražnje proizvoda A, ako se njegova cijena poveća za 1%, a cijena p_2 proizvoda B ostane ista. Parcijalna elastičnost $E_2(p_1)$ predstavlja (približno) procenat rasta (smanjenja) tražnje drugog proizvoda ako je njegova cijena nepromijenjena, a cijena proizvoda A se poveća za 1%.

DRUGI PARCIJALNI IZVODI

U opštem slučaju prvi parcijalni izvodi funkcije $z = f(x,y)$ su takođe funkcije istih argumenata, pa ima smisla govoriti o eventualnom postojanju njihovih parcijalnih izvoda. Ukoliko postoje, te izvode zovemo **drugim parcijalnim** izvodima funkcije $z = f(x,y)$ i označavamo sa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\text{ili} \quad z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}$$

Primjer 4. Prvi parcijalni izvodi funkcije $z = x^2 - 2y^2 + 3xy$ su

$$z'_x = 2x + 3y \qquad z'_y = -4y + 3x$$

Drugi parcijalni izvodi date funkcije su prvi parcijalnih izvodi prvih parcijalnih izvoda:

$$z''_{xx} = 2 \quad z''_{xy} = 3 \quad z''_{yx} = 3 \quad z''_{yy} = -4$$

Drugi parcijalni izvodi z''_{xy} *i* z''_{yx} zovu se mješoviti.

- **Mješoviti izvodi, ako su neprekidni, su jednaki**

TOTALNI DIFERENCIJAL

Ako je $z = f(x,y)$ funkcija sa neprekidnim parcijalnim izvodima, definišemo njen **totalni diferencijal** dz kao izraz

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

gdje su dx i dy diferencijali argumenata x i y.

Drugi totalni diferencijal d^2z je izraz

.

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy$$

EKSTREMNE VRIJEDNOSTI

Za funkciju $z = f(x,y)$ kažemo da u tački (a,b) ima **maksimum** ako je $f(x,y) < f(a,b)$ za svaku tačku $(x,y) \neq (a,b)$ iz neke okoline tačke (a,b).
Ako je, $f(x,y) > f(a,b)$, kažemo da u tački (a,b) funkcija $z = f(x,y)$ ima **minimum**.
Ako u tački (a,b) funkcija $z = f(x,y)$ ima maksimum (minimum), onda se vrijednost $f(a,b)$ zove **maksimum (minimum) funkcije**. Minimum i maksimum se zovu i **ekstremne vrijednosti**.

Neophodan uslov da diferencijabilna funkcija $z = f(x,y)$ u tački (a,b) ima ekstremnu vrijednost je

$$f'_x(a,b) = 0 \qquad f'_y(a,b) = 0$$

Tačke u kojima su parcijalni izvodi jednaki nuli zovu se **stacionarne** (**kritične**) tačke diferencijabilne funkcije.

Primjer 1. Stacionarne tačke funkcije $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$ su rješenja sistema jednačina

$$2 - 2x = 0$$
$$8 - 4y = 0$$

tj. data funkcija ima jednu stacionarnu tačku $(1,2)$.

Dovoljan uslov (bez dokaza) da u stacionarnoj tački (a,b) funkcija z = f(x,y) ima ekstremum da izraz

$$W(a,b) = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2$$

bude pozitivan. Ako je, pritom,

$z''_{xx} < 0$ (tada je i $z''_{yy} < 0$) funkcija ima maksimum, ako je

$z''_{xx} > 0$ (tada je i $z''_{yy} > 0$) - minimum.

Ako je W(a,b) < 0, funkcija nema ekstremum, a ako je W(a,b) = 0 pitanje ostaje otvoreno.

Izraz W(x,y) zove se **diskriminanta** funkcije z = f(x,y).

Primjer 2. Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

Rješenje: Stacionarne tačke date funkcije su tačke (3,3) i (0,0) - rješenja sistema jednačina

$$z'_x = 0$$
$$z'_y = 0$$

tj. sistema $3x^2 - 9y = 0$, $3y^2 - 9x = 0$. Drugi parcijalni izvodi su

$$z''_{xx} = 6x \quad z''_{xy} = -9 \quad z''_{yy} = 6y$$

Kako je $W(3,3) = 18 \cdot 18 - 81 > 0$, to u tački (3,3) funkcija ima ekstremum. Još je $z''_{xx} = 18 > 0$

pa je taj ekstremum minimum: $z_{min} = z(3,3) = -27$. U tački (0,0) je $W(0,0) = 0 \cdot 0 - 81 < 0$, tj. u tački (0,0) data funkcija nema ekstremum.

Ako promjenljive x i y nijesu međusobno nezavisne nego su vezane nekom relacijom $g(x,y) = 0$ onda ekstremnu vrijednost funkcije $z = f(x,y)$ zovemo **uslovni** (**relativni**) ekstremum. Rješavanjem jednačine $g(x,y) = 0$ po x ili po y, ako je to moguće, određivanje relativnog ekstremuma se svodi na određivanje ekstremuma funkcije jednog argumenta. Ako, pak, iz jednačine $g(x,y) = 0$ ni jednu od nepoznatih ne možemo izraziti u eksplicitnom obliku, relativni ekstremum određujemo kao ekstremum tzv. **Lagranžove funkcije** $F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, gdje je λ parametar koji treba odrediti.

Potreban uslov: Stacionarne tačke određujemo iz sistema jednačina

$$F'_x = 0$$

$$F'_y = 0$$

$$g(x,y) = 0$$

Dovoljan uslov: Ako je drugi totalni diferencijal d^2F u stacionarnoj tački (a,b,λ), uz uslov $\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$ pozitivan, funkcija u toj tački dostiže uslovni maksimum, a ako je negativan uslovni minimum. Uslov

$$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$$

dobija se diferenciranjem uslova $g(x,y) = 0$.

Primjer 3. Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije $z = 6 - 4x - 3y$, ako je $x^2 + y^2 = 1$.

Rješenje: Lagranžova funkcija u navedenom primjeru je

$F(x,y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Stacionarne tačke se dobijaju iz sistema

$$-4 + 2\lambda x = 0$$

$$-3 + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Rješenja navedenog sistema jednačina su

$$\lambda_1 = \frac{5}{2} \qquad x_1 = \frac{4}{5} \qquad y_1 = \frac{3}{5}$$

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2} \qquad x_2 = -\frac{4}{5} \qquad y_2 = -\frac{3}{5}$$

Kako je $d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$, to je

$$d^2F\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{5}{2}\right) = 5\left(dx^2 + dy^2\right) > 0$$

$$d^2F\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},-\frac{5}{2}\right) = -5\left(dx^2 + dy^2\right) < 0$$

(pretpostavljamo da dx i dy nijesu istovremeno jednaki nuli)

$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ $\Rightarrow$ ima uslovni minimum, $z_{min} = 1$, a u tački

$\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ $\Rightarrow$uslovni maksimum, zmax = 11.

Primjetimo da ovdje, u cilju određivanja znaka d^2F, nije bilo potrebno diferencirati uslov.