HOMOGENE FUNKCIJE

Za funkciju z = f(x,y) kažemo da je **homogena funkcija sa stepenom homogeniteta k**, ako je za svako t

$f(tx,ty) = t^k \cdot f(x,y)$.

- Primjer 1. Funkcija f(x,y) = ax + by je homogena i k = 1 jer je:

$f(tx,ty) = atx + bty = t(ax + by) = t \cdot f(x,y)$.

- Primjer 2. Funkcija

$$f(x,y) = \frac{x}{y} - 3 + 2\frac{x^2}{y^2}$$

je homogena i k = 0 jer je:

$$f(tx,ty) = \frac{tx}{ty} + 2\frac{t^2x^2}{t^2y^2} - 3 = t^o f(x,y)$$

Homogene funkcije. Ojlerova teorema

- Za funkciju $z = f(x,y)$ kažemo da je homogena funkcija sa stepenom homogeniteta k, ako je za svako t: $f(tx,ty) = t^k \cdot f(x,y)$.

- **Ojlerova teorema: Za homogenu funkciju stepena homogenosti k važi:**

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = k \cdot f(x,y)$$

- Analogno tvrđenje važi i za homogenu funkciju sa $n \geq 3$ nezavisno promjenljivih.

Dokaz Ojlerove teoreme (n=2)

- $\forall t \in R$, $f(tx,ty) = t^k \cdot f(x,y)$ (jer je f homogena funkcija). Uvedimo smjenu $u = tx$, $v = ty$ i primjenimo teoremu o totalnom izvodu složene funkcije:

$$f_t(u,v) = f_u^{`} \cdot u_t' + f_v^{`} \cdot v_t' = k \cdot t^{k-1} \cdot f(x,y) \Leftrightarrow$$

$$f_v^{`}$$

$$\Leftrightarrow x f_u^{`} + y f_v^{`} = k \cdot t^{k-1} \cdot f(x,y).$$

- Kako tvrđenje važi $\forall t \in R$, to stavljajući t=1 dobija se:

$$x \cdot f_x' + y \cdot f_y' = k \cdot f(x,y)$$

Kob-Daglasova funkcija proizvodnje

- $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ je homogena stepena $\alpha+\beta$

$$Q(jK, jL) = A(jK)^{\alpha}(jL)^{\beta}$$

$$A(jK)^{\alpha}(jL)^{\beta} = Aj^{\alpha} j^{\beta} K^{\alpha} L^{\beta}$$

$$= Aj^{\alpha+\beta} K^{\alpha} L^{\beta} = j^{\alpha+\beta} AK^{\alpha} L^{\beta}$$

$$= j^{\alpha+\beta} Q$$

Kob-Daglasova funkcija

- $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$

1) Funkcija je homogena stepena $\alpha+\beta$
2) Ako $\alpha + \beta=1$, funkcija je linearno homogena

Metoda najmanjih kvadrata

- Često za neku funkciju imamo podatke za samo konačno mnogo vrijednosti argumenata
- Npr., tražnju nekog proizvoda možemo utvrditi samo pri konačno mnogo cijena, troškove - samo za konačno mnogo vrijednosti proizvodnje, itd.
- Da bi i na ispitivanje takve zavisnosti mogli da primijenimo matematički aparat, određujemo neku funkciju definisanu na intervalu, a koja “dobro” odražava zavisnost izraženu poznatim podacima.

- Obično uzimamo funkciju iz nekog od sljedećih skupova:

$$\{y \mid y = ax + b\}, \{y \mid y = ax^2 + b\}, \{y \mid y = ax^2 + bx\}, \left\{y \mid y = a + \frac{b}{x}\right\}, \{y \mid y = ab^x\}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - vrijednosti argumenta x

$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ - odgovarajuće vrijednosti funkcije

Prema **principu (metodi) najmanjih kvadrata** smatraćemo da, od svih funkcija datog skupa, funkcija y = y(a,b) **najbolje odražava** zavisnost veličina x i $\bar{y}$ ako zbir

$$G(a, b) = (y_1 - \bar{y}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_2)^2 + \ldots + (y_n - \bar{y}_n)^2$$

gdje je $y_i = y(a,b)(x_i)$, ima najmanju vrijednost.

- Kada funkcija G(a,b) ima najmanju vrijednost?
- Ako su njeni parcijalni izvodi (ako postoje) jednaki nuli, tj.

$$\frac{\partial G}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial G}{\partial b} = 0$$

- **Normalne jednačine** funkcije y = y(a,b).
- Njihovim rješavanjem (kao sistema) dobijamo parametre a i b, odnosno onu funkciju datog oblika koja po metodu (principu) najmanjih kvadrata najbolje odražava zavisnost datih veličina
- Analogno se metodom najmanjih kvadrata određuje funkcija datog oblika koja je određena sa tri ili više parametara i koja po tom principu najbolje odražava zavisnost datih podataka.

Primjer

Naći normalne jednačine funkcije y = ax + b.

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$ dati podaci (uzorak). Tada je

$$G(a,b) = \left(ax_1 + b - \overline{y}_1\right)^2 + \left(ax_2 + b - \overline{y}_2\right)^2 + \ldots + \left(ax_n + b - \overline{y}_n\right)^2$$

$$\frac{\partial G}{\partial a} = 0 \Rightarrow 2\left(ax_1 + b - \overline{y}_1\right)x_1 + 2\left(ax_2 + b - \overline{y}_2\right)x_2 + \ldots + 2\left(ax_n + b - \overline{y}_n\right)x_n = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial b} = 0 \Rightarrow 2\left(ax_1 + b - \overline{y}_1\right) + 2\left(ax_2 + b - \overline{y}_2\right) + \ldots + 2\left(ax_n + b - \overline{y}_n\right) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \quad a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i$$

Npr. za uzorak (-3,1), (-1,2), (1,2) i (3,3) od svih linearnih funkcija, najbolje ga odražava y = 0,3x + 2.

Funkcija tražnje tri proizvoda je $q_1 = 5\frac{p_2}{p_1} + 9\frac{p_3}{p_1}$

Pokazati da je zbir parcijalnih elastičnosti jednak nuli, tj.

$$E_{q_1}(p_1) + E_{q_1}(p_2) + E_{q_1}(p_3) = 0$$

$$E_{q_1}(p_1) + E_{q_1}(p_2) + E_{q_1}(p_3) =$$

$$\frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_1} + \frac{p_2}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_2} + \frac{p_3}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_3} =$$

$$\frac{p_1}{q_1}\left(-5\frac{p_2}{p_1^{\;2}} - 9\frac{p_3}{p_1^{\;2}}\right) + \frac{p_2}{q_1}5\frac{1}{p_1} + \frac{p_3}{q_1}9\frac{1}{p_1} = 0$$

II način: Funkcija tražnje proizvoda A je homogena stepena homogeniteta 0, jer

$$q_1(tp_1,tp_2,tp_3)=5\frac{tp_2}{tp_1}+9\frac{tp_3}{tp_1}=5\frac{p_2}{p_1}+9\frac{p_3}{p_1}=q_1$$

$$E_{q_1}(p_1)+E_{q_1}(p_2)+E_{q_1}(p_3)=$$

$$\frac{p_1}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_1}+\frac{p_2}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_2}+\frac{p_3}{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_3}=$$

$$\frac{1}{q_1}\underbrace{\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial q_1}{\partial p_2}+p_3\frac{\partial q_1}{\partial p_3}\right)}_{=0 \text{ po Ojlerovoj teoremi}}=0$$

Neka je $x = f(p_1,p_2)$ funkcija tražnje proizvoda A i B čije su cijene p_1 odnosno p_2. Ako je x homogena funkcija sa stepenom homogeniteta k dokazati da je zbir parcijalnih elastičnosti te funkcije k.

Rešenje.

Treba dokazati da je $E_x(p_1) + E_x(p_2) = \frac{p_1}{x} x'_{p_1} + \frac{p_2}{x} x'_{p_2} = k$

Pođimo od Ojlerove teoreme (x je homogena!):

$$p_1 x'_{p_1} + p_2 x'_{p_2} = k \cdot x$$

Poslije dijeljenja sa $x = x(p_1,p_2)$ dobijamo

$$\frac{p_1}{x} x'_{p_1} + \frac{p_2}{x} x'_{p_2} = k$$, što je i trebalo dokazati.

Naći lokalni ekstremum funkcije $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

za x,y,z > 0.

Rješenje.

$$u'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0$$

$$u'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0$$

$$u'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0$$

Iz prve jednačine $\left(\frac{y}{2x}\right)^2 = 1$

pa kako su x,y > 0 to se dobija $\frac{y}{2x} = 1$

Uvrštavanjem u drugu, dobija se

$\left(\frac{z}{y}\right)^2 = \frac{y}{2x} = 1$ odakle je $\frac{z}{y} = 1$

Na kraju, iz treće jednačine $\frac{1}{z^2} = \frac{z}{y} = 1$ pa je z = 1 (jer je z > 0),

a otuda y = 1 i x = 1/2.

Dakle, dobili smo jednu stacionarnu tačku.

Dovoljan uslov: Iskoristićemo tzv. Silvesterov kriterijum za n = 3.

Formirajmo determinante

$$D_3 = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \left| u''_{xx} \right|$$

Ako u stacionarnoj tački važi da je $D_3>0$, $D_2>0$ i $D_1>0$ tada se u njoj dostiže lokalni minimum, a ako je $D_3<0$, $D_2>0$ i $D_1<0$ - lokalni maksimum.

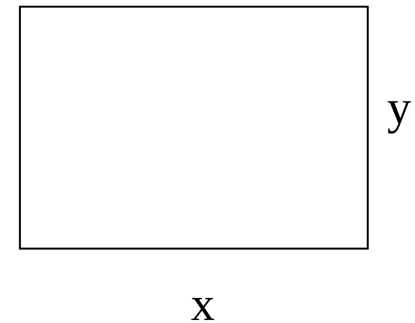
Poslije računa dobija se $D_1 = 4>0$, $D_2=8>0$ i $D_3=32>0$, pa funkcija u tački (1/2,1,1) ima lokalni minimum: $u_{min} = 4$.

Od svih pravougaonika datog obima O, odrediti onaj najveće površine

Rešenje.

Neka su mu stranice x i y (kao na slici).

Treba naći maksimum funkcije $P=x\cdot y$ uz uslov $2x+2y=O$



Pošto se y (ili x) može zraziti iz uslova ne mora se koristiti Lagranžova funkcija.

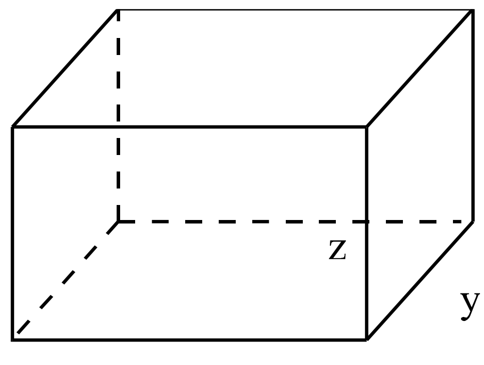
$y=(O-2x)/2 \Rightarrow P=x\,(O-2x)/2=Ox/2-x^2 \Rightarrow$

$P'=O/2-2x=0 \Rightarrow x=O/4=y$

Dakle, maksimalnu površinu ima kvadrat.

Od kartona kvadratnog oblika površine $3K^2$ napraviti kutiju bez poklopca maksimalne zapremine.

Rešenje.



Označimo stranice kutije sa x, y, z (kao na slici). Treba naći maksimum funkcije $V = x\cdot y\cdot z$ uz uslov $xy + 2xz + 2yz = 3K^2$.

Formirajmo Lagranžovu funkciju

$F = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 3K^2)$.

Otuda

$$F'_x = yz + \lambda y + 2\lambda z = 0$$

$$F'_y = xz + \lambda x + 2\lambda z = 0$$

$$F'_z = xy + 2\lambda x + 2\lambda y = 0$$

$$xy + 2xz + 2yz = 3K^2$$

Kako je x,y,z > 0, dobija se (množiti prvu sa x, drugu sa y, treću sa z, a zatim ih sabrati) $xyz + 2\lambda K^2 = 0$, pa se lako dobija da je $x = K$, $y = K$, $z = K/2$ i $\lambda = K/4$. Nađimo sada d^2F.

$d^2F = 2(z + \lambda)dxdy + 2(y + 2\lambda)dxdz + 2(x + 2\lambda)dydz$, a otuda

$$d^2F\left(K, K, \frac{K}{2}\right) = K\left(\frac{1}{2}dxdy + dxdz + dydz\right)$$

Diferencirajući uslov dobija se

$ydx + xdy + 2zdx + 2xdz + 2zdy + 2ydz = 0$, pa za tačku

$$\left(K, K, \frac{K}{2}\right) \quad \text{važi} \quad dz = -\frac{1}{2}(dx + dy)$$

$$d^2F\left(K, K, \frac{K}{2}\right) = -\frac{1}{2}K\left(dx^2 + dxdy + dy^2\right) < 0$$

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0$$

Dakle, $\left(K, K, \frac{K}{2}\right)$

je tačka uslovnog maksimuma za funkciju $V = xyz$:

$$V_{max} = \frac{K^3}{2}$$

Primijetimo da je tražena kutija kvadratne osnove.