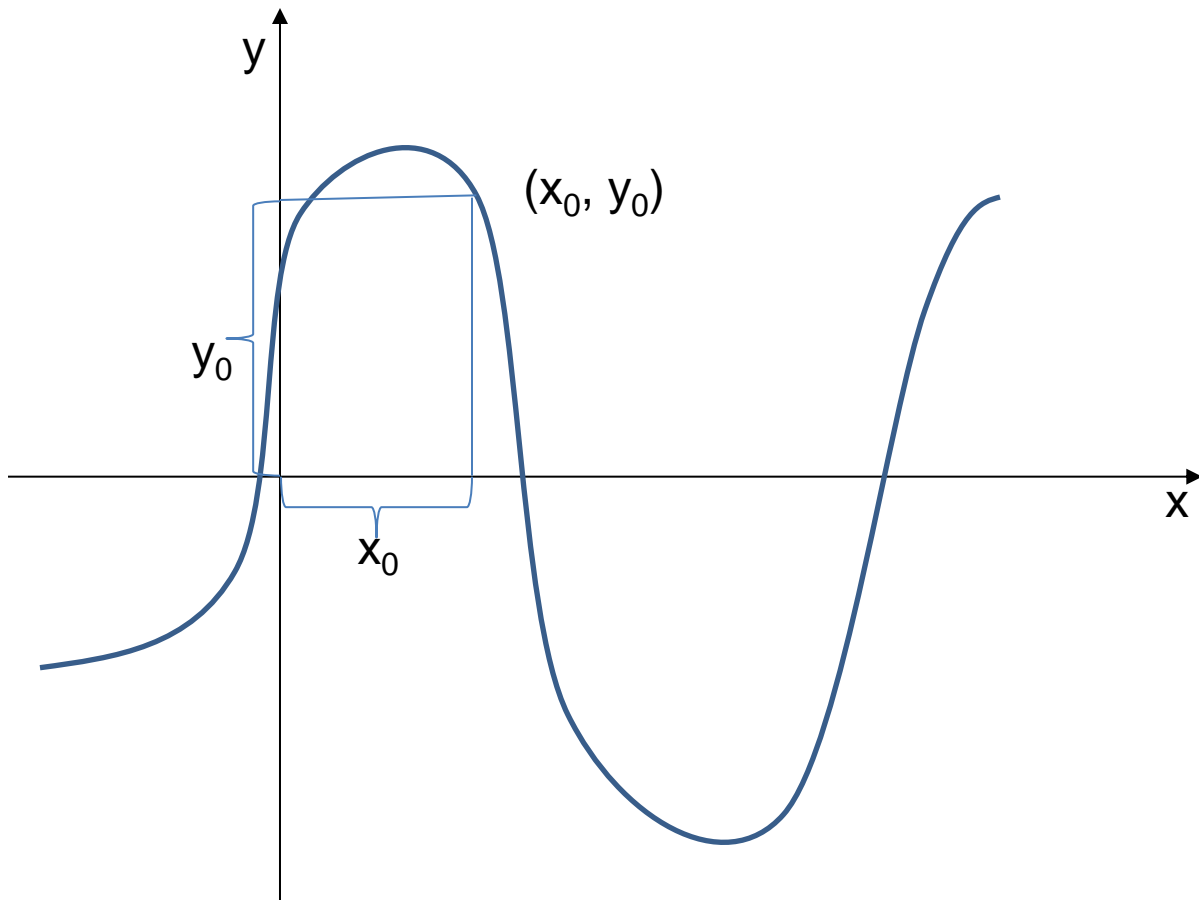


REALNA FUNKCIJA

- Funkciju f čiji je skup vrijednosti V podskup skupa \mathbb{R} realnih brojeva zovemo **realnom funkcijom**. Ako je, pritom, oblast definisanosti D neki podskup skupa \mathbb{R}^n uređenih n -torki realnih brojeva, kažemo da je f realna funkcija od **n realnih nezavisno-promjenljivih**.
- Na primjer, $f(x,y,z) = x + 2y - z$, $x,y,z \in \mathbb{R}$ je realna funkcija od tri nezavisno-promjenljive x,y,z .

- Neka je f realna funkcija jedne nezavisno-promjenljive čiji je domen $D \subset \mathbb{R}$. Kako svakom uređenom paru realnih brojeva odgovara jedna tačka Dekartove ravni, to svakom paru $(x_0, f(x_0))$ odgovarajućih vrijednosti argumenta i funkcije $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ odgovara jedna (jedina) tačka Dekartove ravni Oxy . Skup svih tačaka Dekartove ravni koje odgovaraju uređenim parovima $(x, f(x))$, $x \in D$ zove se **grafik funkcije f** .



Nizovi

Realnu funkciju jedne realne promjenljive čija je oblast definisanosti skup prirodnih brojeva zovemo **nizom**. Nezavisnu promjenljivu niza obično označavamo sa n , a odgovarajuću vrijednost funkcije sa $a(n)$ ili, češće, sa a_n . Vrijednost niza za dato n zovemo i **članom** niza.

Za niz a_n kažemo da **monotono raste** ako je $a_n < a_{n+1}$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako je $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, kažemo da niz a_n **ne opada**. Analogno se definiše **monotono opadanje** odnosno **nerašćenje** niza a_n .

Za niz a_n kažemo da je **ograničen** ako postoji realan broj $M > 0$, takav da je $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Primjeri nizova

Primjer 1. Niz $a_n = \frac{1}{n}$ monotono opada jer je, $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$

Ovaj niz je i ograničen jer je, $\forall n \in \mathbb{N} \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq 1$

Primjer 2. Niz $(-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ za $n = 1, 2, \dots$ ima vrijednosti $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

i, očigledno, nije monoton. Kako je $\left| (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \right| = \frac{n+1}{n} \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$ dati niz je ograničen.

ARITMETIČKI NIZ

ARITMETIČKI NIZ ili **ARITMETIČKA PROGRESIJA** je niz od n realnih brojeva kod kojih je razlika svaka dva uzastopna člana ovog konačnog niza (proizvoljnog i njemu prethodnog) konstanta.

Neka je d konstantna razlika odnosno *diferencija* .

Slijede relacije:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

Odnosno

$$a_i = a_1 + (i - 1)d, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ARITMETIČKI NIZ

Primjenjujući poslednju relaciju imamo da je:

$$a_1 + a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n - 2)d = a_1 + (n - 1)d$$

Odnosno

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$$

Na isti način se provjerava da važi:

$$a_1 + a_n = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$$

ARITMETIČKI NIZ

Kako je za: $i - k \in \{1, 2, \dots, n\}$ i $i + k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $i, k \in \mathbb{N}$

$$a_{i-k} = a_1 + (i - k - 1)d$$

$$a_{i+k} = a_1 + (i + k - 1)d$$

To je

$$a_{i-k} + a_{i+k} = 2a_1 + 2(i - 1)d = 2[a_1 + (i - 1)d] = 2a_i$$

Odnosno:

$$a_i = \frac{a_{i-k} + a_{i+k}}{2}$$

Proizvoljni član aritmetičkog niza je aritmetička sredina dva u odnosu na njega simetrična člana.

ARITMETIČKI NIZ

Zbir prvih n članova aritmetičkog niza je: $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + K + a_n$

Kako je, takođe: $\sum_{i=1}^n a_i = a_n + a_{n-1} + K + a_2 + a_1$

Slijedi: $2 \sum_{i=1}^n a_i = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + K + (a_n + a_1) = n \cdot (a_1 + a_n)$

Odnosno:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

GEOMETRIJSKI NIZ

GEOMETRIJSKI NIZ je niz n realnih brojeva takvih da je količnik svaka dva uzastopna člana (proizvoljnog i njemu prethodnog) konstantan.

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

K

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_i^2 = a_{i-k} \cdot a_{i+k}$$

proizvoljni član a_i , $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ je geometrijska sredina dva u odnosu na njega simetrična člana

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n$$

Zbir prvih n uzastopnih članova geometrijskog niza

GEOMETRIJSKI NIZ

GEOMETRIJSKI NIZ je niz n realnih brojeva takvih da je količnik svaka dva uzastopna člana (proizvoljnog i njemu prethodnog) konstantan.

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

K

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_i^2 = a_{i-k} \cdot a_{i+k}$$

proizvoljni član a_i , $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ je geometrijska sredina dva u odnosu na njega simetrična člana

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n$$

Zbir prvih n uzastopnih članova geometrijskog niza

Konvergenција niza

Za niz a_n kaŕemo da **konvergira broju a** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, za svako $n > n_0$. Za niz a_n koji konvergira broju a kaŕemo, takoŕe, da ima **graničnu vrijednost** ili **granicu** a i pišemo:

$$a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{ili} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

a čitamo a_n teŕi a, kad n teŕi beskonačnosti ili limes a_n , kad n teŕi beskonačnosti, jednak je a.

Kako $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, to konvergenciju niza a_n broju a moŕemo da definišemo i na sledeći naćin:

Niz a_n **konvergira broju a** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0$$

- Za niz koji ne konvergira nekom broju kažemo da **divergira**.
- Ako za proizvoljni broj $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $a_n > M$, $\forall n > n_0$, onda za niz a_n (koji je, očigledno, divergentan jer nije ograničen) kažemo, takođe, da **konvergira plus beskonačnosti** i pišemo

$$a_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty \quad \text{ili} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

- Za (divergentan) niz a_n kažemo da **konvergira beskonačnosti** ili da je **beskonačno veliki**, ako za dato $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $|a_n| > M$, $\forall n > n_0$. Simbolički:

$$a_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \quad \text{ili} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

OPERACIJE SA GRANIČNIM VRIJEDNOSTIMA NIZOVA

Neka su a_n i b_n dva niza koji konvergiraju broju a odnosno b . Tada je niz $a_n + b_n$, $(a_n b_n)$ i za $b_n \neq 0$ i

$b \neq 0$, $\frac{a_n}{b_n}$) takođe konvergentan i njegova je

granica $a + b$ $(ab, \frac{a}{b})$.

Dokaz (za zbir)

Iz konvergencije nizova a_n i b_n slijedi da postoje brojevi n_0' i n_0'' takvi da je

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_0' \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_0''$$

gdje je ε proizvoljan broj. Tada je

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

za svako n veće od n_0' i n_0'' . Dakle, za proizvoljno dato $\varepsilon > 0$ postoji broj n_0 (na primjer, $n_0 = \max(n_0', n_0'')$) takvo da je

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0$$

što znači da niz $a_n + b_n$ konvergira ka broju $a + b$

Primjer 1. Ako je a_n niz koji konvergira broju a i $b_n = c$ konstantni niz, onda je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$$

Primjer 2. Izvlačenjem činioca n^2 iz brojioca i imenioca

niza $a_n = \frac{n^2 - 3}{5n^2 + 4n}$ niz a_n postaje količnik dva

konvergentna niza $a_n = \frac{1 - \frac{3}{n^2}}{5 + \frac{4}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{4}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n}} = \frac{1 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{5 + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1 - 3 \cdot 0}{5 + 4 \cdot 0} = \frac{1}{5}$$

Neka tvrđenja

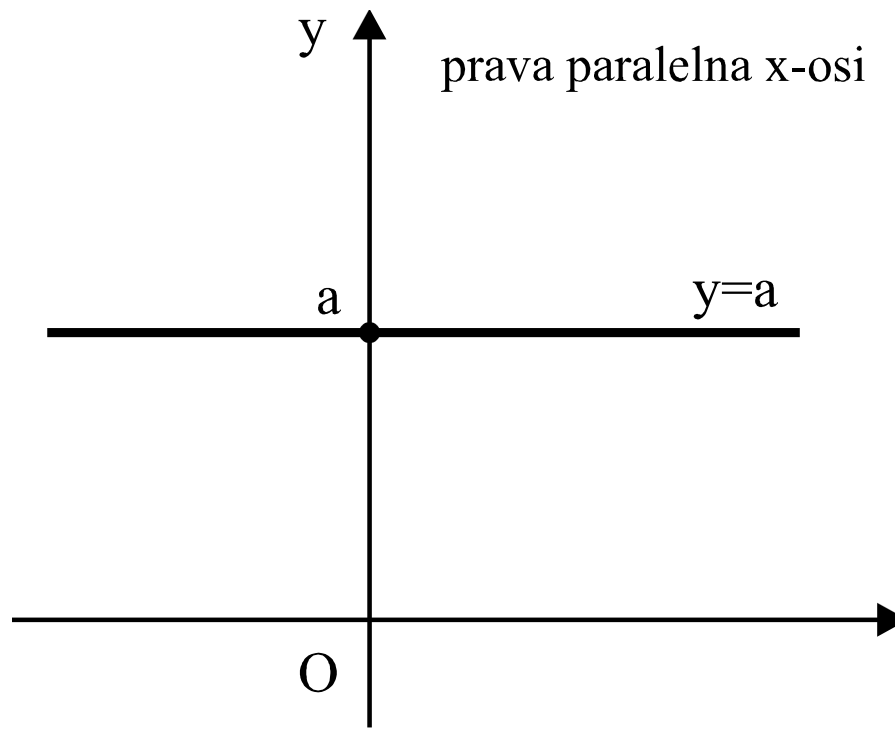
- **Ako niz a_n ima granicu, onda je ta granica jednoznačna.**
- **Svaki konvergentni niz je ograničen.**
- **Svaki ograničeni neopadajući ili nerastući niz konvergira.**

Ojlerov broj $e \approx 2,718$

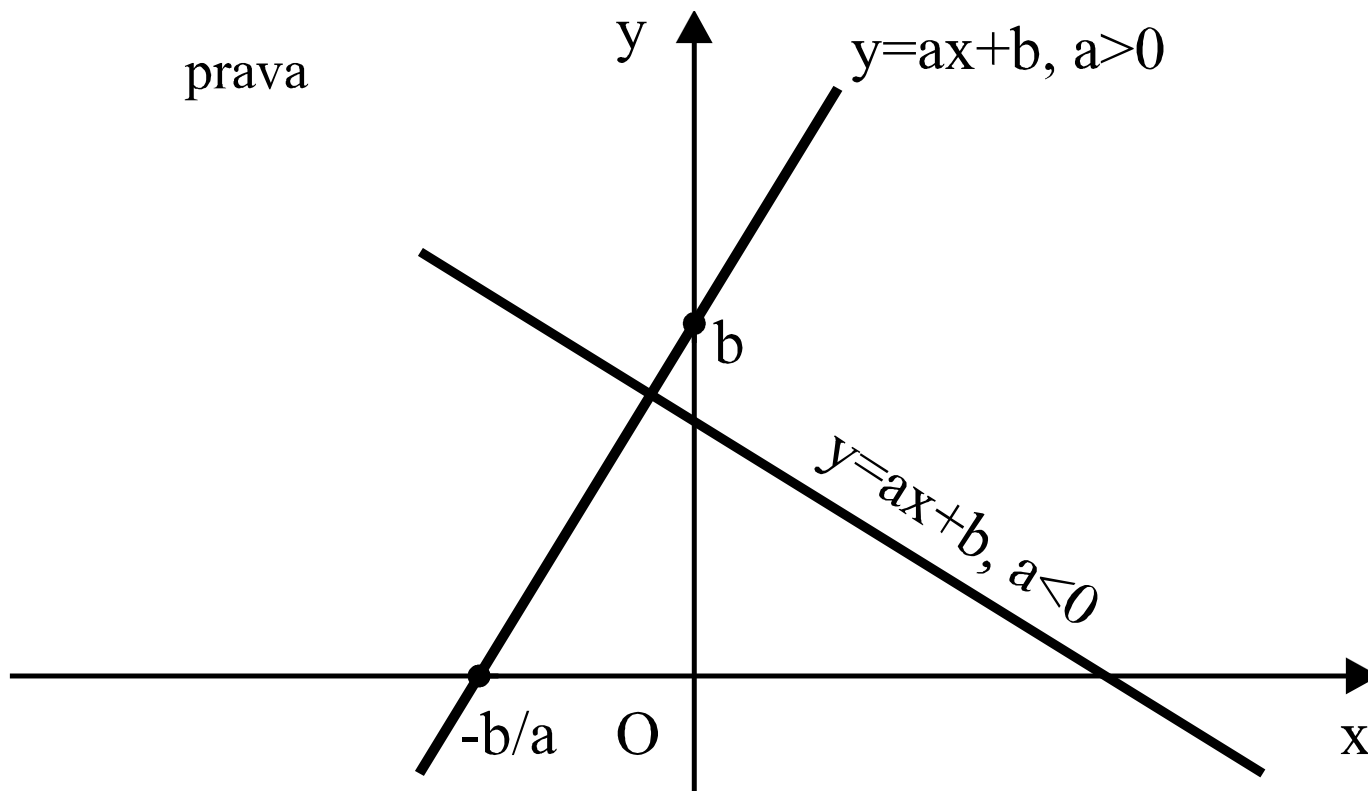
$$e \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m$$

REALNA FUNKCIJA JEDNE REALNE PROMJENLJIVE

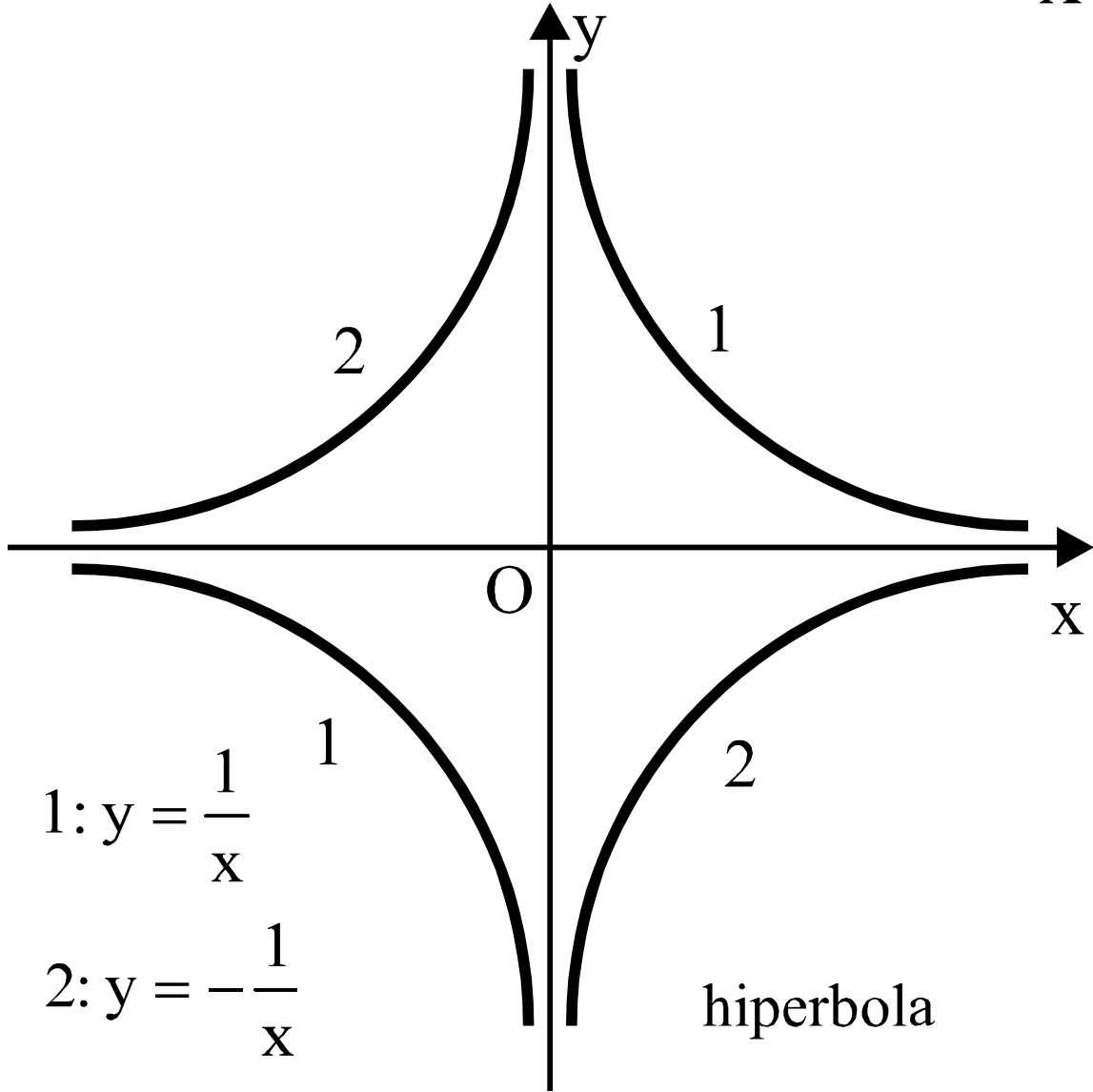
- Domen je $D=(a,b)\subset\mathbb{R}$, tj $f:(a, b)\rightarrow\mathbb{R}$
- **osnovne elementarne funkcije**
- Konstantna funkcija $y = a$, $a \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$



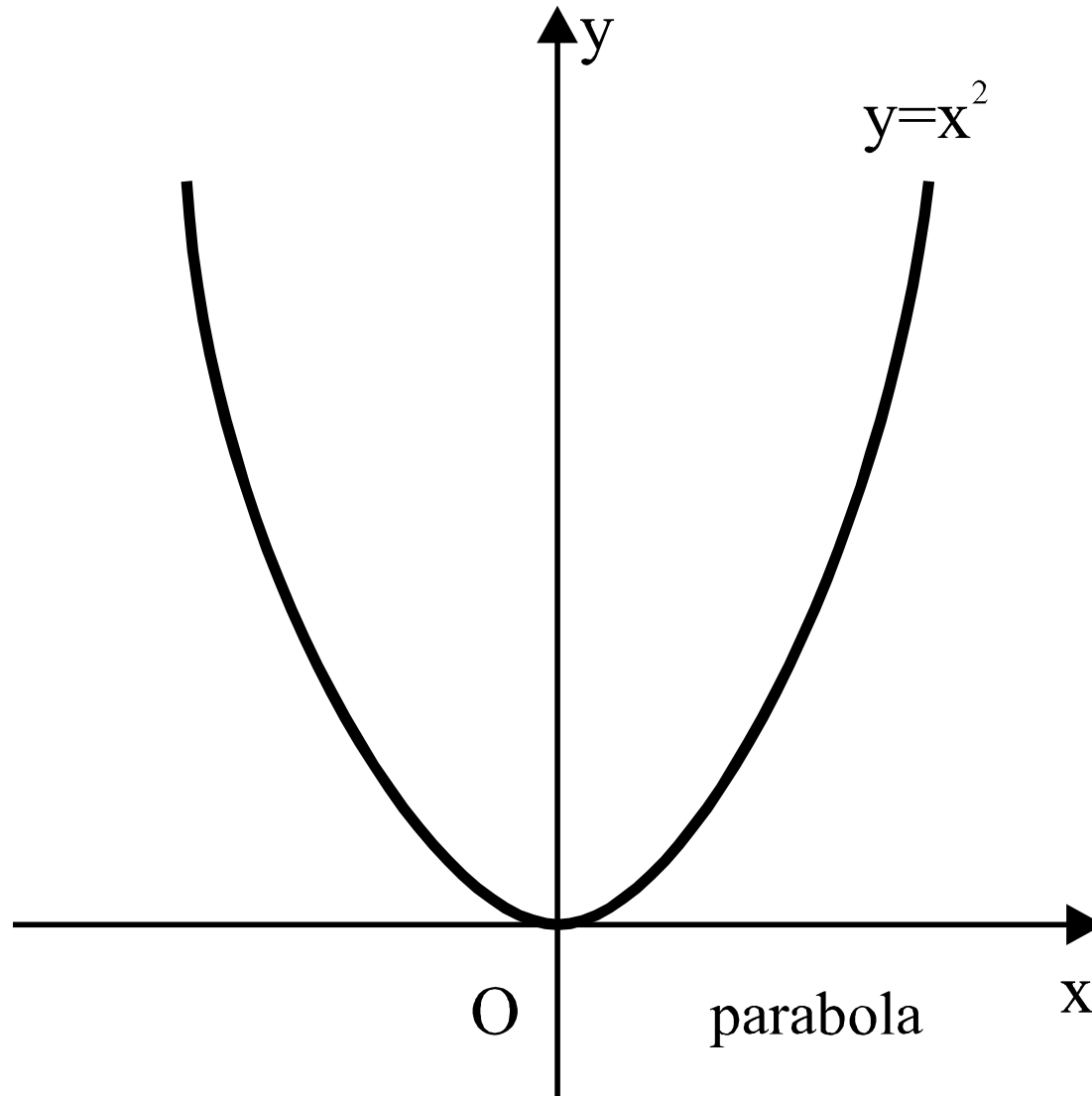
- Linearna funkcija $y = ax + b$, $a \neq 0$, $D = \mathbb{R}$



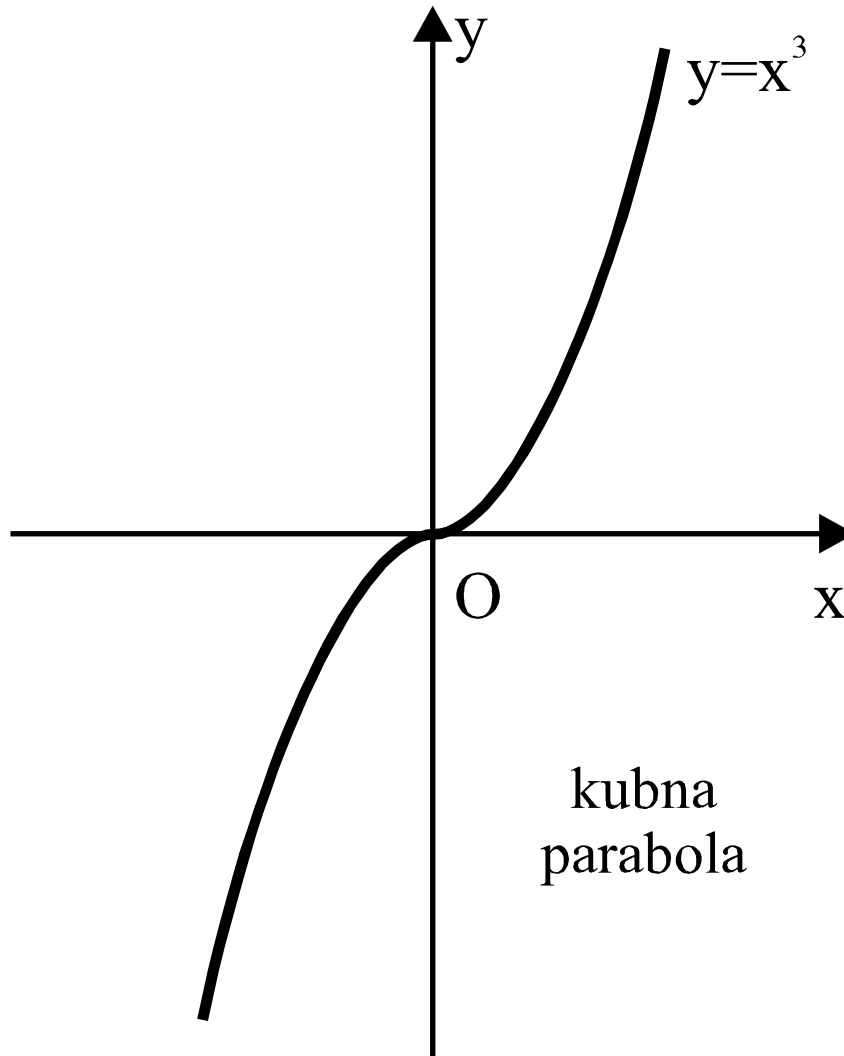
Funkcija obrnute proporcionalnosti , $y = \frac{a}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



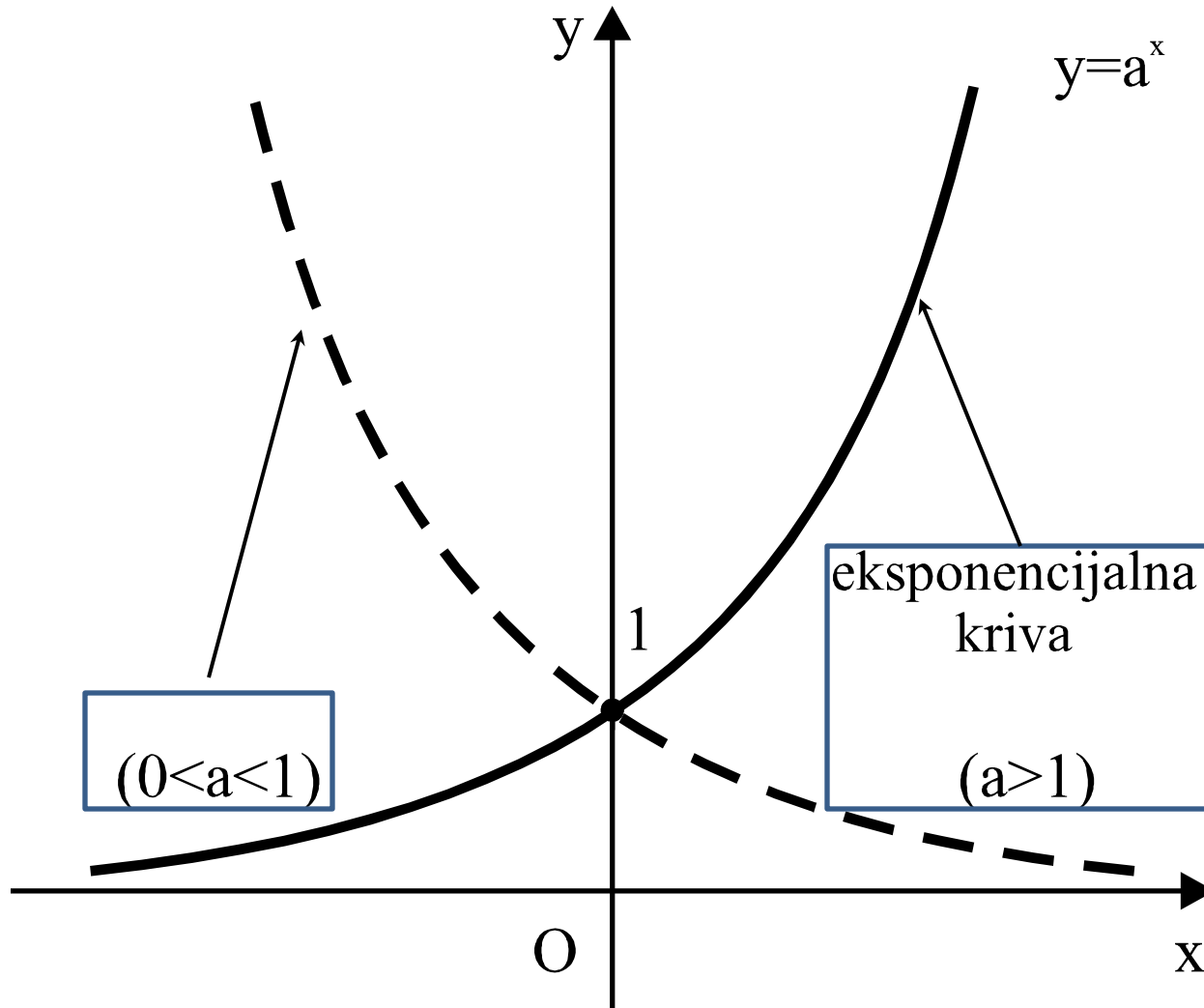
Kvadratna funkcija $y = ax^2$, $D = \mathbb{R}$



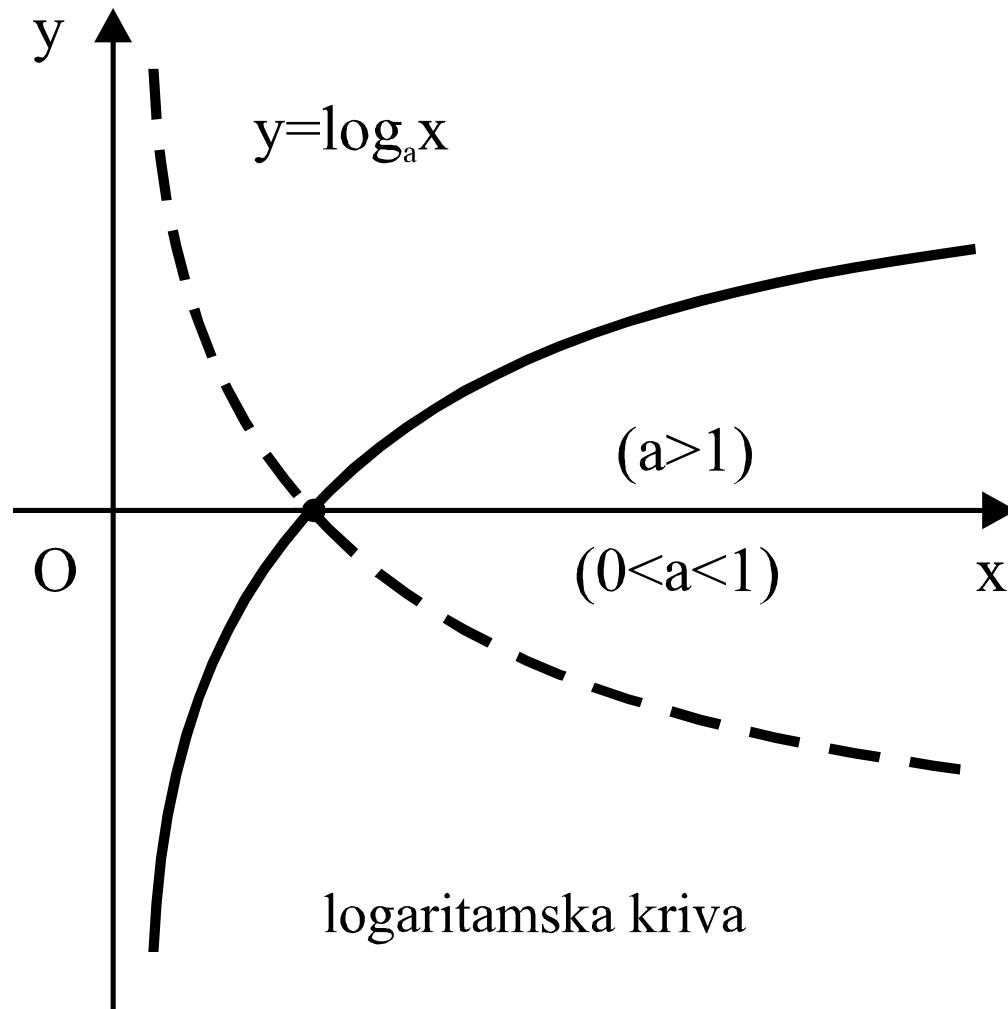
Kubna funkcija $y = x^3$, $D = \mathbb{R}$



Eksponencijalna funkcija $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $D = \mathbb{R}$

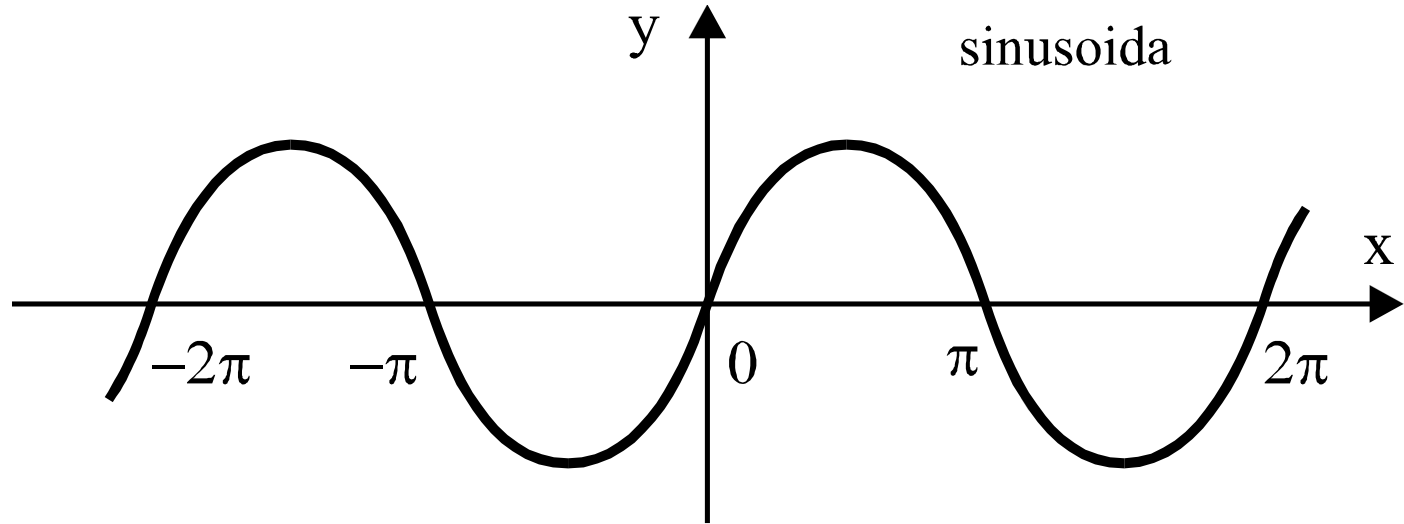


Logaritamska funkcija $y = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $D = \mathbb{R}^+$

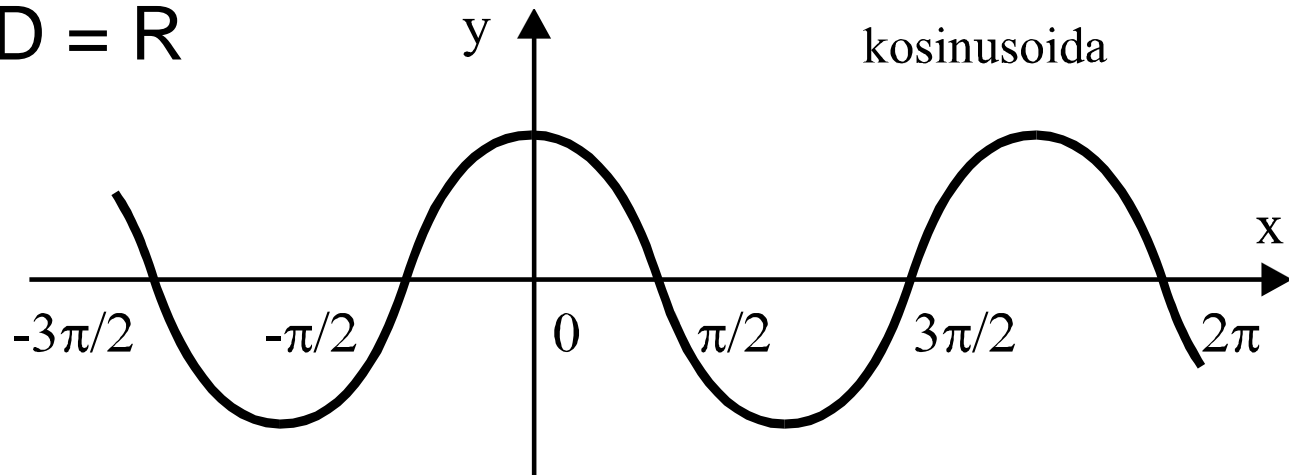


- Trigonometrijske funkcije:

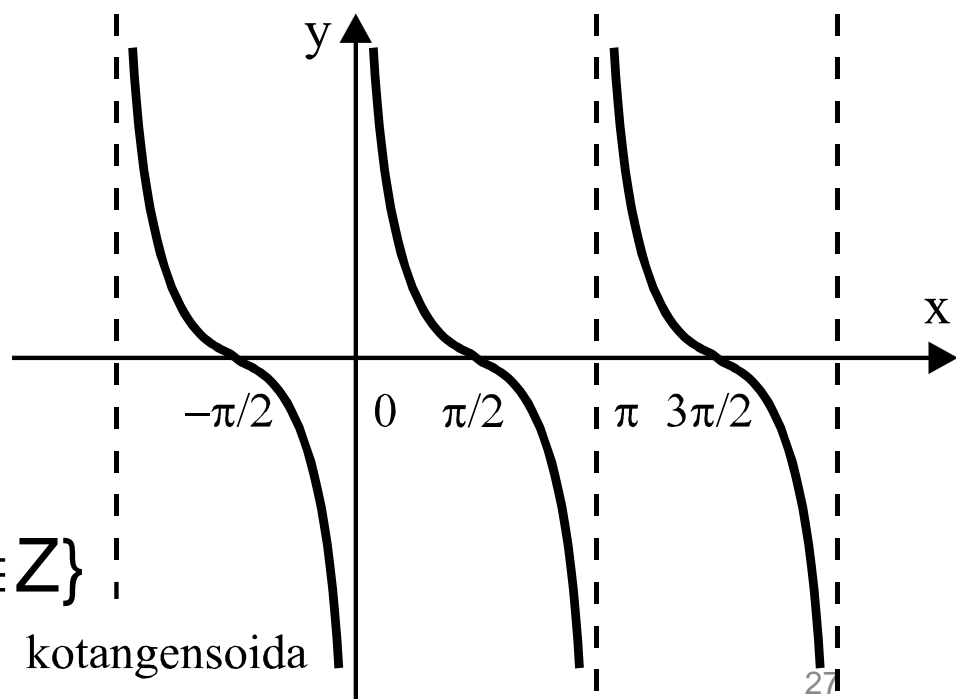
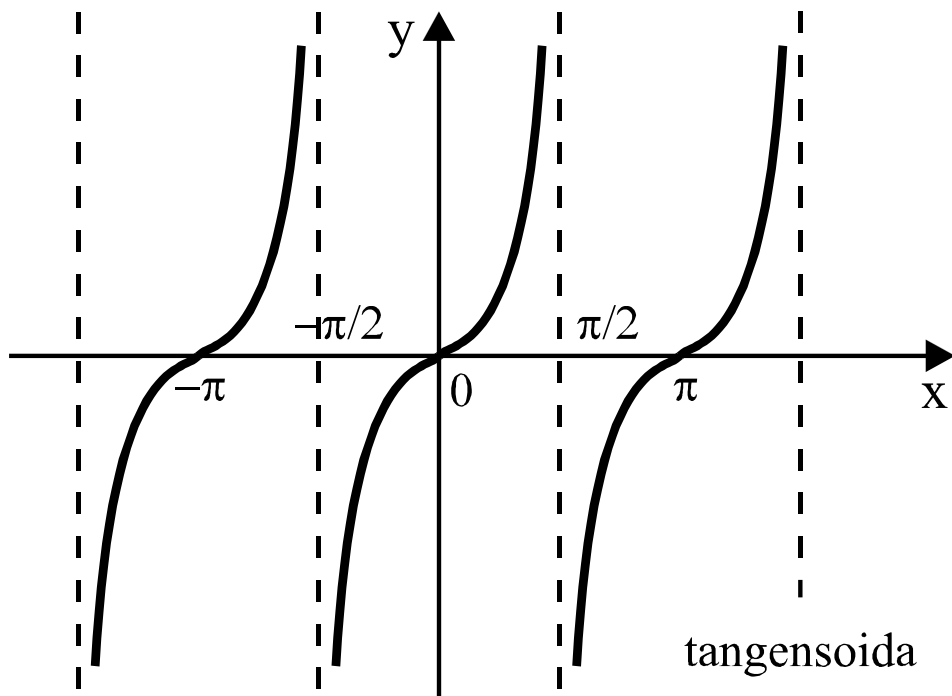
$$y = \sin x, D = \mathbf{R}$$



$$y = \cos x, D = \mathbf{R}$$



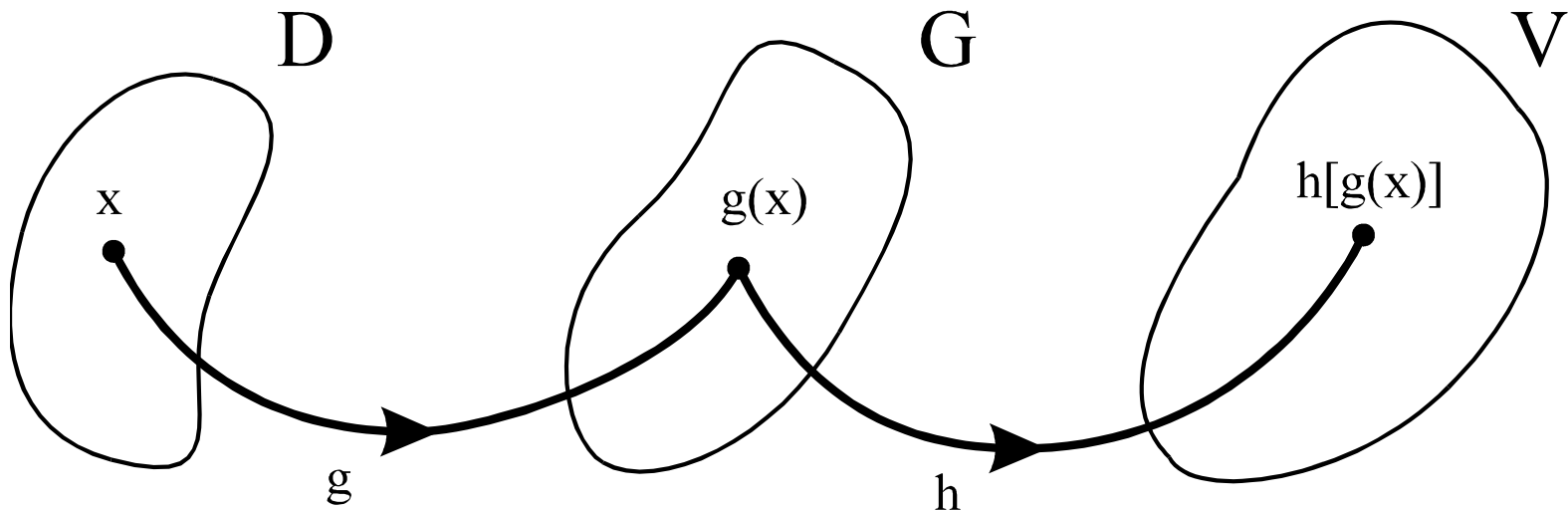
$$y = \operatorname{tg}x, D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k-1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}.$$



$$y = \operatorname{ctg}x, D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

SLOŽENA FUNKCIJA

Neka je D oblast definisanosti i G skup vrijednosti funkcije g i, dalje, G - oblast definisanosti i V skup vrijednosti funkcije h



Ako je x proizvoljni element skupa D , onda njemu odgovara (tačno) jedan element $g(x)$ skupa G , a ovome (tačno) jedan element $h[g(x)]$ skupa V . Na taj način svakom elementu $x \in D$ odgovara tačno jedan element $h[g(x)]$ skupa V . Preslikavanje $x \rightarrow h[g(x)]$ je, dakle, funkcija čiji je domen D i skup vrijednosti V . Tako određena funkcija, označimo je sa f , zove se **kompozicija** funkcija g i h , oznaka $h \circ g$, tj

$$f(x) = (h \circ g)(x) = h[g(x)]$$

Za funkciju f kažemo, takođe, da je **složena** funkcija argumenta x .

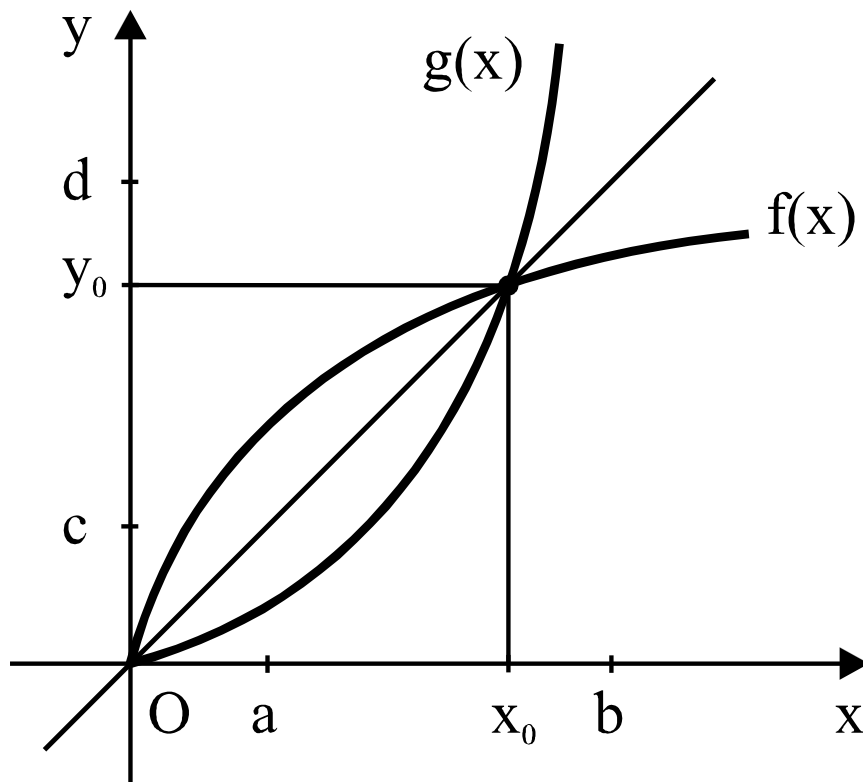
Primjeri

PRIMJER 1. Ako je $g(x) = 2x - 1$ i $h(x) = \log x$, onda je kompozicija funkcija g i h funkcija
 $f(x) = (h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(2x - 1) = \log(2x - 1)$.

PRIMJER 2. Funkcija $f(x) = (x - 3)^4$ je kompozicija funkcija $g(x) = x - 3$ i $h(x) = x^4$.

INVERZNA FUNKCIJA

Pretpostavimo da je $y = f(x)$ funkcija definisana i monotona na intervalu $D = (a,b)$ i da joj je skup vrijednosti interval $V=(c,d)$ tj. $x \in (a,b) \Rightarrow f(x) \in (c,d)$



Tada, za svako $y_0 \in (c,d)$, postoji jedno jedino $x_0 \in (a,b)$ takvo da je $y = f(x_0)$. Dakle, postoji funkcija $x = g(y)$ čiji je domen (c,d) , skup vrijednosti (a,b) i pri čemu je $f[g(y)] = y$.

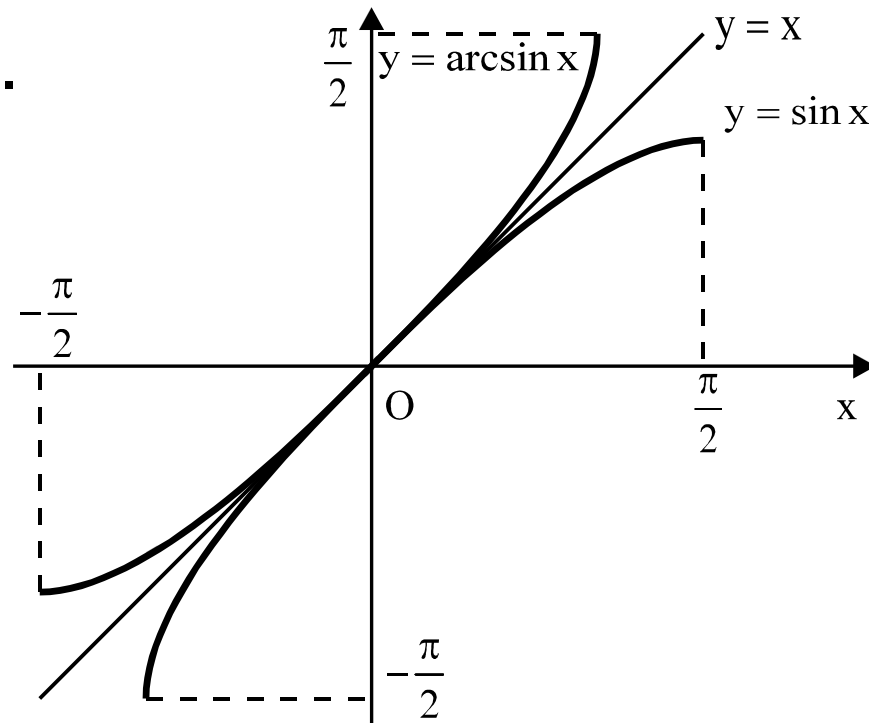
Ako, sada, u funkciji g argument označimo sa x , a zavisno promjenljivu sa y dobijamo funkciju $y = g(x)$ za koju kažemo da je **inverzna** funkciji $y = f(x)$. Inverznu funkciju funkcije f označavamo sa f^{-1} .

Iz definicije slijedi da, ako tačka $M(x,y)$ pripada grafiku funkcije $y = f(x)$, onda tačka $M_1(y,x)$ pripada grafiku njoj inverzne funkcije (ukoliko postoji). To znači da su grafici funkcije $y = f(x)$ i njoj inverzne funkcije $y = g(x)$ simetrični u odnosu na pravu $y = x$.

Primjer 1. Funkcija $y = \sin x$ je monotona na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i njen skup vrijednosti je interval $[-1, 1]$,

pa postoji funkcija $g: (-1, 1) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

pri čemu svakom $y \in [-1, 1]$ pridružujemo ono $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ za koje je $y = \sin x$.



GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE

Koristeći pojam granične vrijednosti niza definisaćemo graničnu vrijednost funkcije $y = f(x)$ u datoj tački.

Neka je $y = f(x)$ funkcija definisana u nekoj okolini tačke a sem, možda, u samoj tački a i

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

proizvoljni niz koji konvergira tački a i za koji postoji niz odgovarajućih vrijednosti funkcije, tj. niz

$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$

Ako za svaki takav niz x_n odgovarajući niz vrijednosti funkcije konvergira istom broju A , kažemo da u tački $x = a$ funkcija ima graničnu vrijednost A , a pišemo:

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} A \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Primjer 1. Uzmimo funkciju $f(x) = x^2$ i tačku $a = 2$. Niz

$$x_n = 2 + \frac{1}{n}$$

konvergira i njegova granica je $a = 2$. Niz odgovarajućih vrijednosti funkcije je

$$\left(2 + \frac{1}{1}\right)^2, \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2, \dots \Rightarrow 9, \frac{25}{4}, \dots, \frac{4n^2 + 4n + 1}{n^2}, \dots$$

(ili $x^2 \rightarrow 4$, ako $x \rightarrow 2$)

Ovaj niz konvergira i njegova granica je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{n^2} = 4$

Ako uzmemo proizvoljni drugi niz x_n koji konvergira broju 2, onda odgovarajući niz vrijednosti funkcije $f(x_n)$

konvergira broju $A = 4$. Prema tome,

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

Pretpostavimo da funkcija $y = f(x)$ ima sledeću osobinu: za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon)$ takvo da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za svako $x \neq a$ za koje je $|x - a| < \delta$. Dokazaćemo da, tada, u tački $x = a$ funkcija ima granicu A , tj. da

$f(x_n) \rightarrow A$, za svaki niz $x_n \rightarrow a$.

Zaista, iz konvergencije niza x_n i navedene (pretpostavljene) osobine funkcije $f(x)$ sledi da postoji broj n_0 takav da je

$$|x_n - a| < \delta, n > n_0$$

No, tada je i

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon, za n > n_0$$

što znači da niz $f(x_n)$ konvergira broju A , odnosno da u tački $x = a$ funkcija ima granicu A .

Dokazuje se i tvrđenje obrnuto prethodnom: ako je $y = f(x)$ funkcija koja u tački $x = a$ ima granicu A onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je

$|f(x) - A| < \varepsilon$, za svako x za koje je $|x - a| < \delta$.

Graničnu vrijednost funkcije, zato možemo da definišemo na sledeći način:

Broj A je **grančna vrijednost** ili **granica funkcije** $f(x)$ u tački $x = a$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je:
 $|f(x) - A| < \varepsilon$, za svako $x \neq a$ za koje je $|x - a| < \delta$.

Primjer 2. Funkcija $f(x) = c$ (=konstanta) u svakoj tački $x = a$ ima granicu $A = c$ jer je za proizvoljno $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - A| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

za svako x iz (proizvoljne) δ -okoline tačke $x = a$, pa je

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

Primjer 3. Funkcija $f(x) = x$ u svakoj tački $x = a$ ima granicu $A = a$ jer je za proizvoljno $\varepsilon > 0$

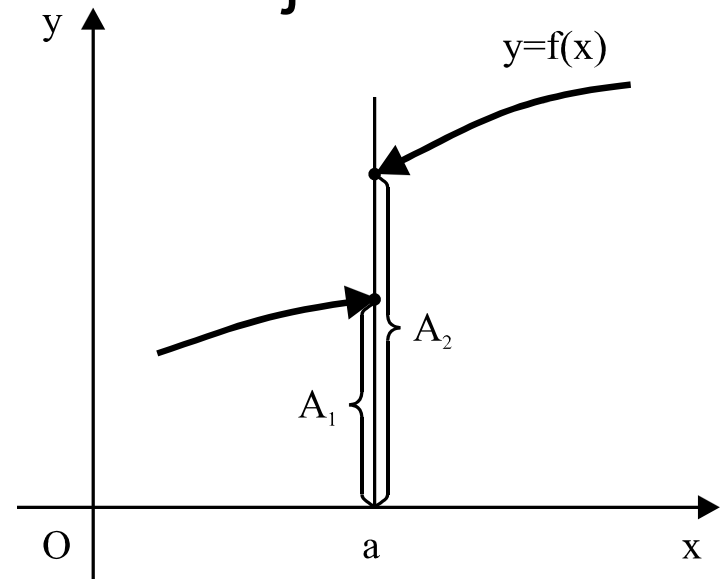
$$|f(x) - A| = |x - a| < \varepsilon, \quad \forall x: |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Pored granične, definišu se i lijeva i desna granična vrijednost funkcije:

Za broj A kažemo da je **desna** granična vrijednost ili **desna** granica funkcije $f(x)$ u tački $x = a$ ako za svaki niz x_n koji konvergira tački a i čiji su članovi veći od a odgovarajući niz vrijednosti funkcije $f(x)$ konvergira broju A . Analogno se definiše **lijeva** granična vrijednost. Za desnu i lijevu graničnu vrijednost koristimo oznake:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_2$$

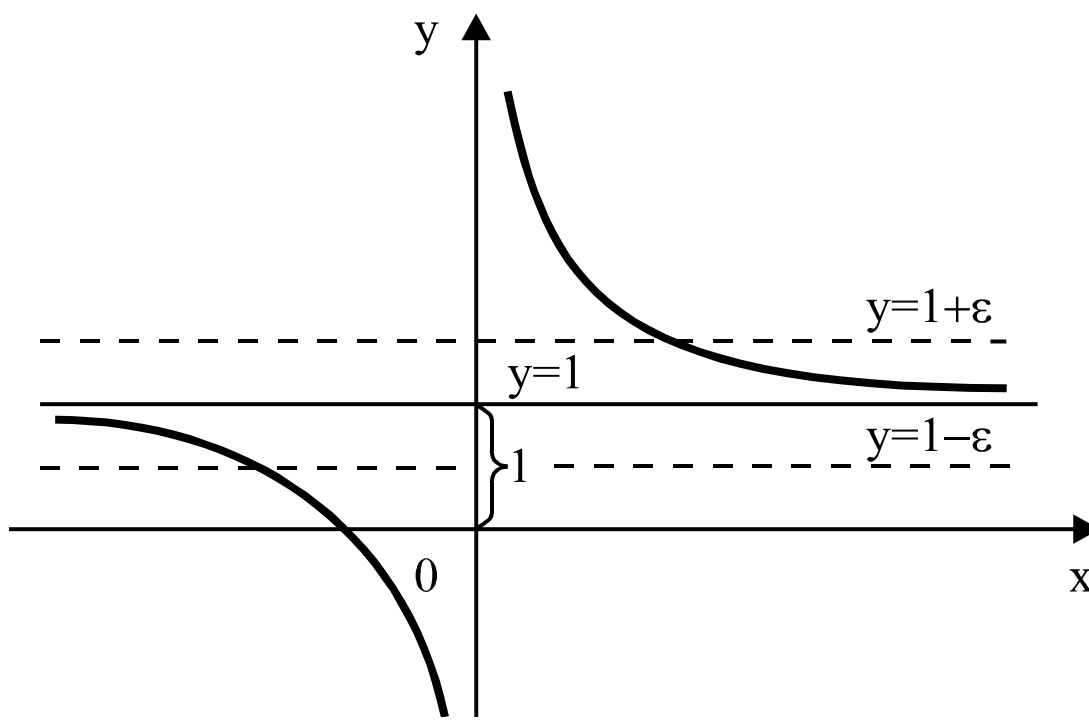
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_1$$



Primjer 5. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

u tački $x = 0$ ima desnu granicu $A_1 = 2$ i lijevu granicu $A_2 = 0$



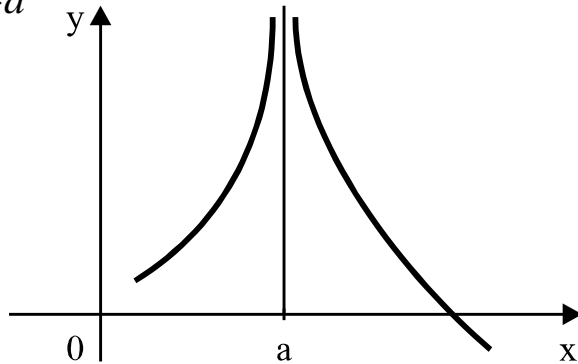
Ako je $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ili $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

onda se prava $y = A$ zove **horizontalna asimptota** grafika funkcije $f(x)$.

Vertikalna asimptota

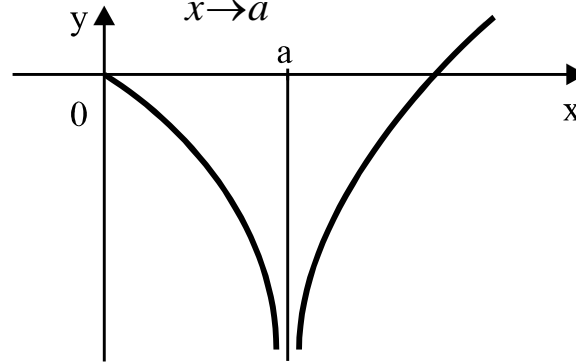
Ako je funkcija $f(x)$ kad $x \rightarrow a$ ili $x \rightarrow a+0$, ili $x \rightarrow a-0$, beskonačno velika veličina, onda se prava $x = a$ zove **vertikalna asimptota** grafika te funkcije. Iz definicija granične vrijednosti i vertikalne asimptote slijedi da grafik funkcije može da ima vertikalnu asimptotu $x = a$ samo ako je tačka a kraj otvorenog intervala na kome je funkcija definisana.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



$$x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



$$x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

Slično za $x \rightarrow a+0$, ili $x \rightarrow a-0$

NEDOREĐENI IZRAZI

Granične vrijednosti izraza $\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$ $\frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$

gdje su $\alpha_1(x)$ i $\alpha_2(x)$ beskonačno male, a $\beta_1(x)$ i $\beta_2(x)$ beskonačno velike veličine kad $x \rightarrow a$ pripadaju klasi tzv. neodređenih izraza.

Naime, označimo li, uslovno, sa “0” beskonačno malu, a sa “ ∞ ” beskonačno veliku pozitivnu veličinu i sa “1” funkciju čija je granica 1, kad $x \rightarrow a$, onda se izrazi oblika

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0$$

zovu neodređeni izrazi kad $x \rightarrow a$.

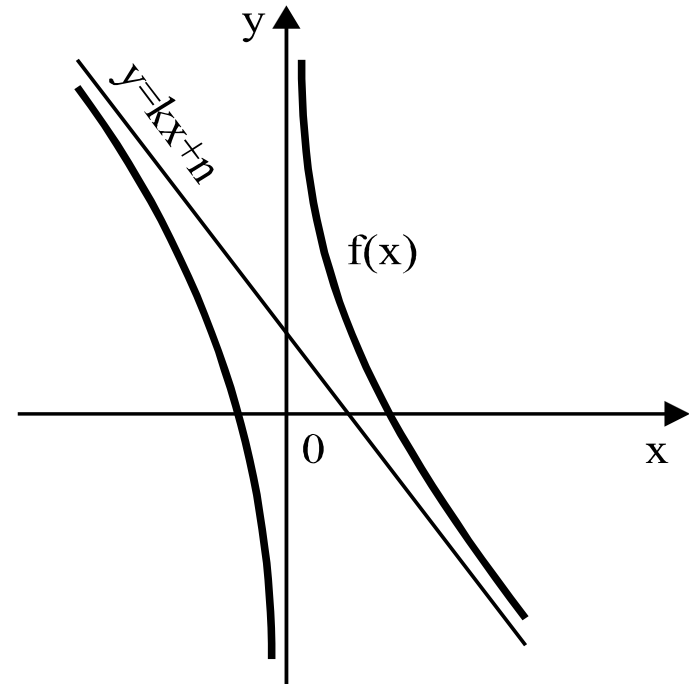
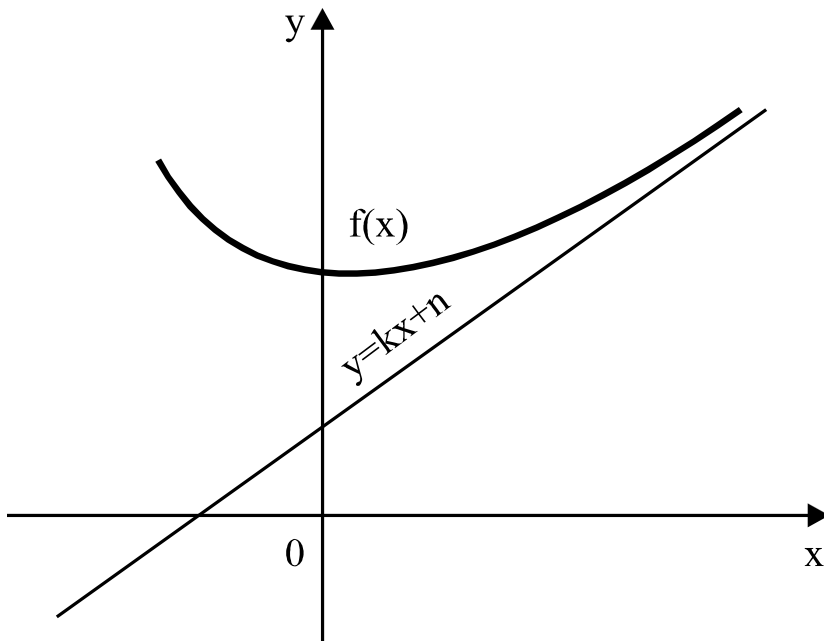
KOSA ASIMPTOTA

Za pravu $y = kx + n$ kažemo da je **kosa** asimptota grafika funkcije $y = f(x)$ ako je

$\lim[f(x) - (kx + n)] = 0$, kad $x \rightarrow +\infty$ ili $x \rightarrow -\infty$

Oдавде

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$



Teoreme

T1. Ako su $f(x)$ i $g(x)$ funkcije koje u tački $x = a$ imaju granice A i B , onda i funkcije $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ i (ako

je u nekoj okolini tačke a $g(x) \neq 0$ i $B \neq 0$), $\frac{f(x)}{g(x)}$

imaju granične vrijednosti u tački $x = a$ i te granične

vrijednosti su, redom $A \pm B$, $A \cdot B$, $\frac{A}{B}$

T2. Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ u tački $x = a$ imaju istu granicu A i ako je $h(x)$ funkcija za koju u nekoj okolini tačke a važe nejednakosti

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

onda i funkcija $h(x)$ u tački $x = a$ ima granicu A .

NEPREKIDNOST FUNKCIJE

Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je **neprekidna u tački** $x = x_0$, ako u toj tački ima graničnu vrijednost i ako je ta granična vrijednost jednaka vrijednosti funkcije u tački x_0 , tj. ako je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Za tačku u kojoj funkcija nije neprekidna, a u čijoj je nekoj okolini definisana, kažemo da je tačka **prekida** funkcije.

Primjeri

•Primjer 1. Funkcija $f(x) = 2x + 3$ je neprekidna u svakoj tački $x_0 \in \mathbb{R}$ jer je definisana u nekoj (čak svakoj) okolini te tačke i, pritom,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (2x + 3) = 2x_0 + 3 = f(x_0)$$

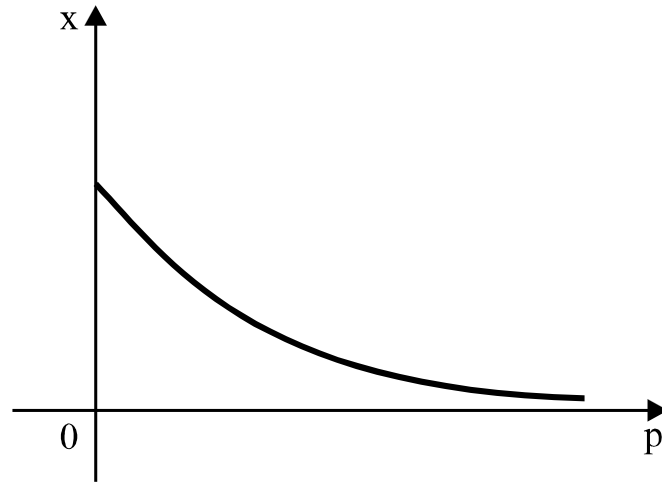
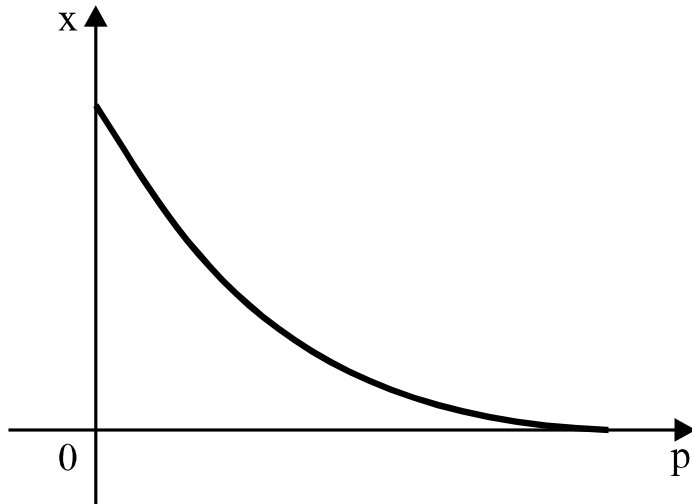
Primjer 2. Funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$

u tački $x = 2$ nema graničnu vrijednost (ima samo lijevu i desnu), pa u toj tački, dakle, nije neprekidna.

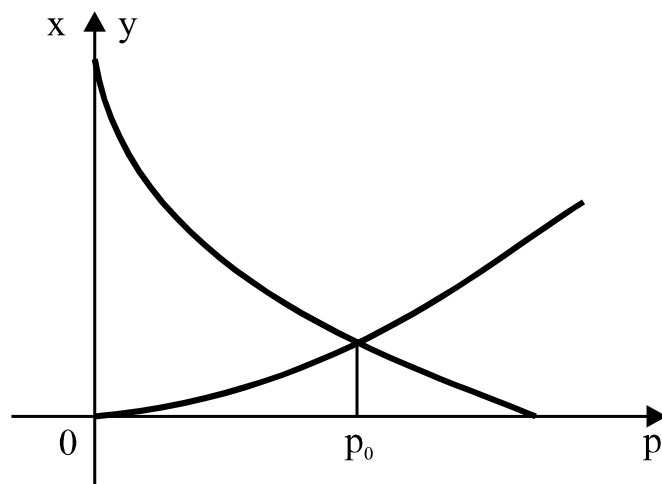
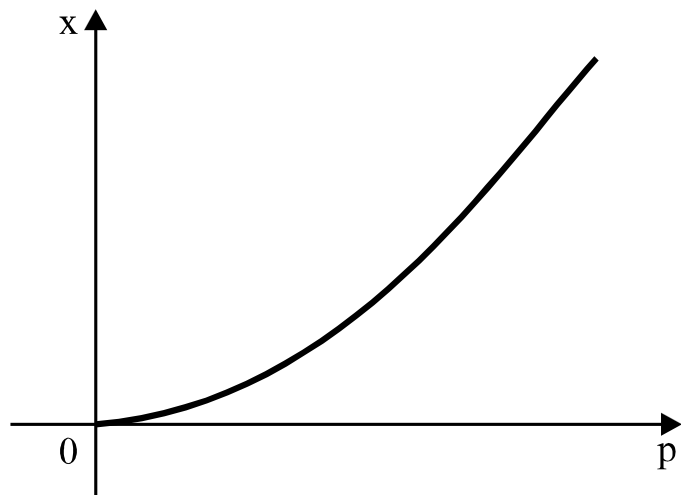
Ekonomске funkcije

- Osnovne ekonomske veličine (kategorije)
- Cijena
- Tražnja
- Ponuda
- Proizvodnja
- Prihod
- Troškovi
- Dobit

- Pretpostavka
- sa rastom cijene tražnja opada; najveću vrijednost, max, ima pri cijeni $p = 0$, dok najmanju vrijednost dostiže ili nedostiže zavisno od toga da li je u pitanju luksuzni proizvod (cigareta, automobil) ili proizvod od vitalnog značaja (hljeb, lijek)

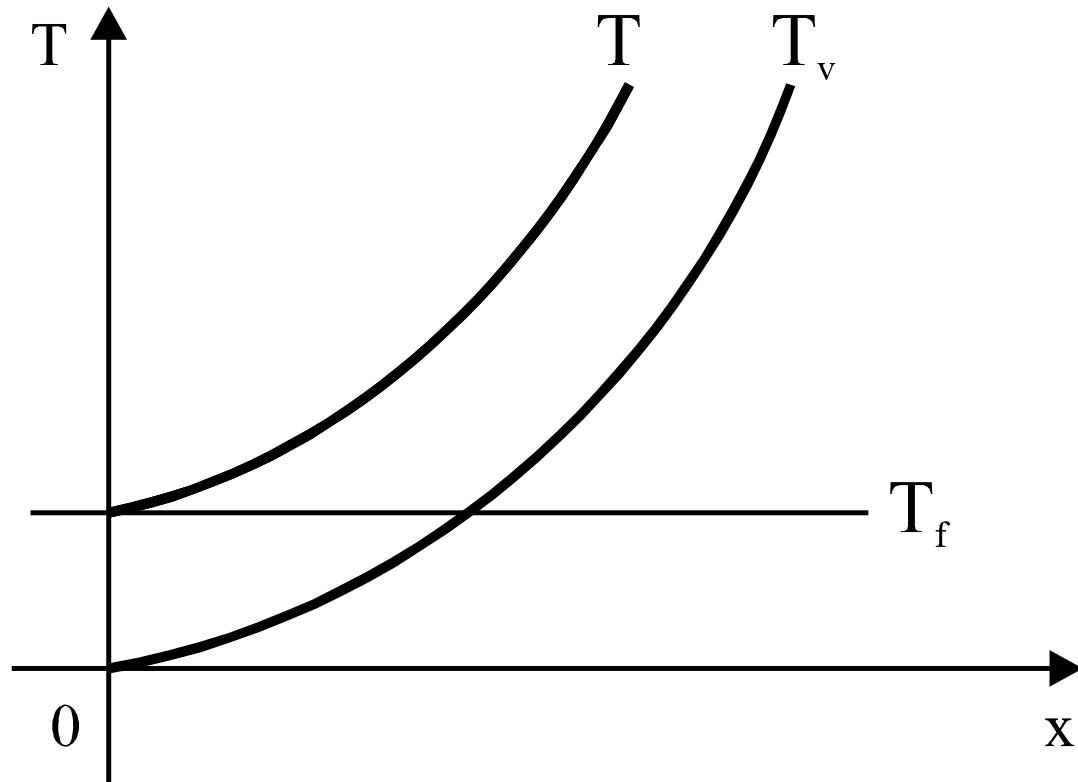


- Ponuda sa cijenom raste. Proizvod se nudi pri cijeni pri kojoj se traži, pa su oblasti definisanosti ponude i tražnje iste.



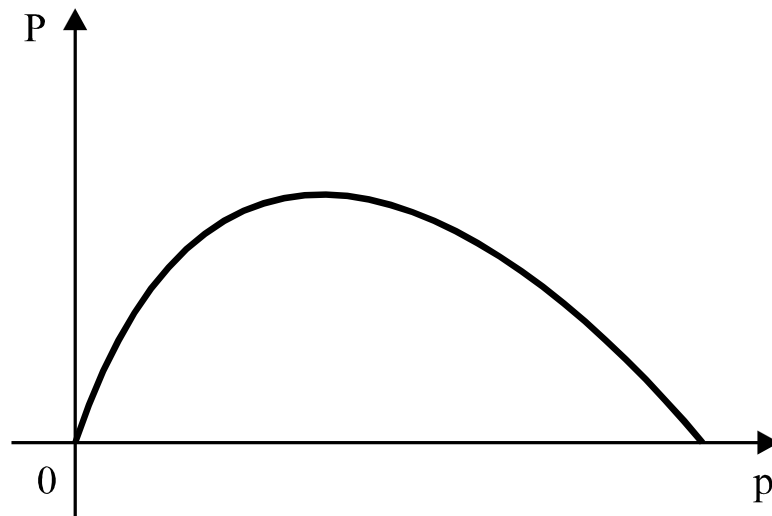
Iz pretpostavke o neprekidnosti funkcije tražnje i ponude nekog proizvoda i monotonosti tih funkcija slijedi da postoji neka vrijednost p_0 argumenta p za koju se te funkcije izjednačavaju. Tu vrijednost argumenta p zovemo **ravnotežnom cijenom**.

- Troškovi T rastu sa proizvodnjom. Pri proizvodnji $x = 0$ troškovi takođe postoje (na primjer, zbog amortizacije) i te troškove zovemo **fiksni** (oznaka T_f) za razliku od **varijabilnih** T_v nastalih zbog proizvodnje. (Ukupni) troškovi su zbir fiksnih i varijabilnih troškova

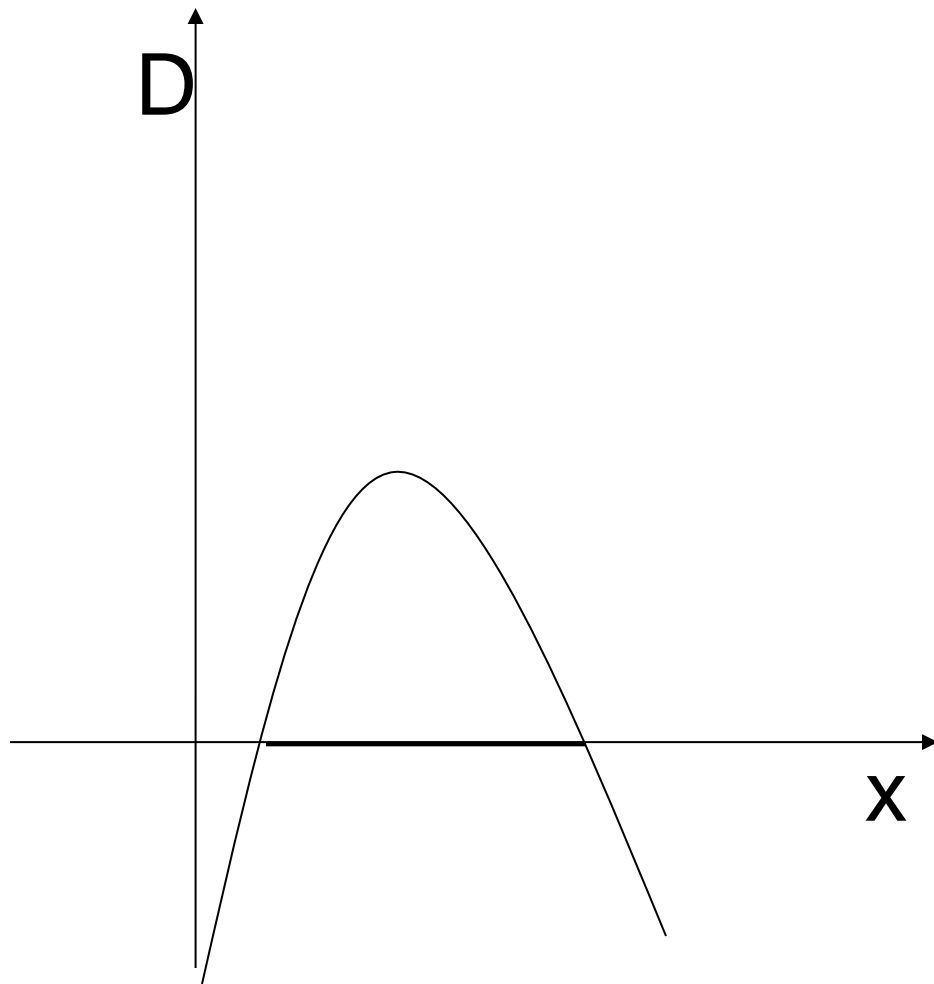


- **Prosječni troškovi** pri proizvodnji x su troškovi po jedinici proizvodnje:
$$\bar{T} = \frac{T}{x}$$

Prihod je jednak proizvodu cijene i tražnje (proizvodnje). Pretpostavljamo da, do određene cijene, prihod raste, a zatim opada. Pri cijeni $p = 0$ i prihod je $P = 0$



- Dobit $D(x)$ pri proizvodnji x je razlika odgovarajućih prihoda i troškova: $D(x) = P(x) - T(x)$.



Interval proizvodnje na kome je dobit pozitivna zove se **interval rentabiliteta**, a njegovi krajevi su **donja i gornja granica rentabiliteta**.