

# PRVI IZVOD

Neka je  $y = f(x)$  funkcija definisana na intervalu  $[a,b]$ ,  $x_0$  unutrašnja tačka tog intervala,  $\Delta x$  ( $\neq 0$ ) priraštaj argumenta i  $\Delta y$  odgovarajući priraštaj funkcije. Ako postoji granična vrijednost količnika priraštaja funkcije i priraštaja argumenta, kad priraštaj argumenta teži nuli, onda za funkciju  $y = f(x)$  kažemo da je **diferencijabilna u tački  $x_0$** . Graničnu vrijednost količnika priraštaja funkcije  $\Delta y$  i priraštaja argumenta  $\Delta x$ , kad  $\Delta x \rightarrow 0$ , zovemo (**prvim**) **izvodom funkcije u tački  $x_0$**  i označavamo sa

$$y'_{x_0} \text{ ili sa } f'(x_0)$$

$$y'_{x_0} \equiv f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Primjer 1. Naći izvod funkcije  $f(x) = \sqrt{x}$

u tačkama a)  $x_0 = 3$ , b)  $x_0 = c$ ,  $c > 0$ .

Rješenje: Kako je a)

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{3 + \Delta x} - \sqrt{3}$$

$$y'(3) = f'(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + \Delta x} - \sqrt{3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3 + \Delta x - 3}{\Delta x (\sqrt{3 + \Delta x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Na isti način dobijamo da je b):

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$

Ako funkcija ima izvod u svakoj tački nekog intervala, kažemo da je **diferencijabilna na tom intervalu**. U tom slučaju svakoj vrijednosti argumenta  $x$  iz tog intervala odgovara vrijednost prvog izvoda  $f'(x)$  date funkcije, pa je prvi izvod funkcije  $y = f(x)$  na tom intervalu (na kome je diferencijabilna) takođe neka funkcija. Tu funkciju zovemo **izvodnom** ili **marginalnom** funkcijom funkcije  $f(x)$  i označavamo sa  $y'$  ili  $f'(x)$ , tj.

$$y' \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Operaciju nalaženja izvoda date funkcije zovemo **diferenciranje**, a dio matematike čiji je predmet diferenciranje i primjena izvoda - **diferencijalni račun**.

# NEPREKIDNOST I DIFERENCIJABILNOST

T: Ako je funkcija diferencijabilna, tada je ona neprekidna

Dokaz: 
$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0$$

$$\text{Dakle, } \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$$

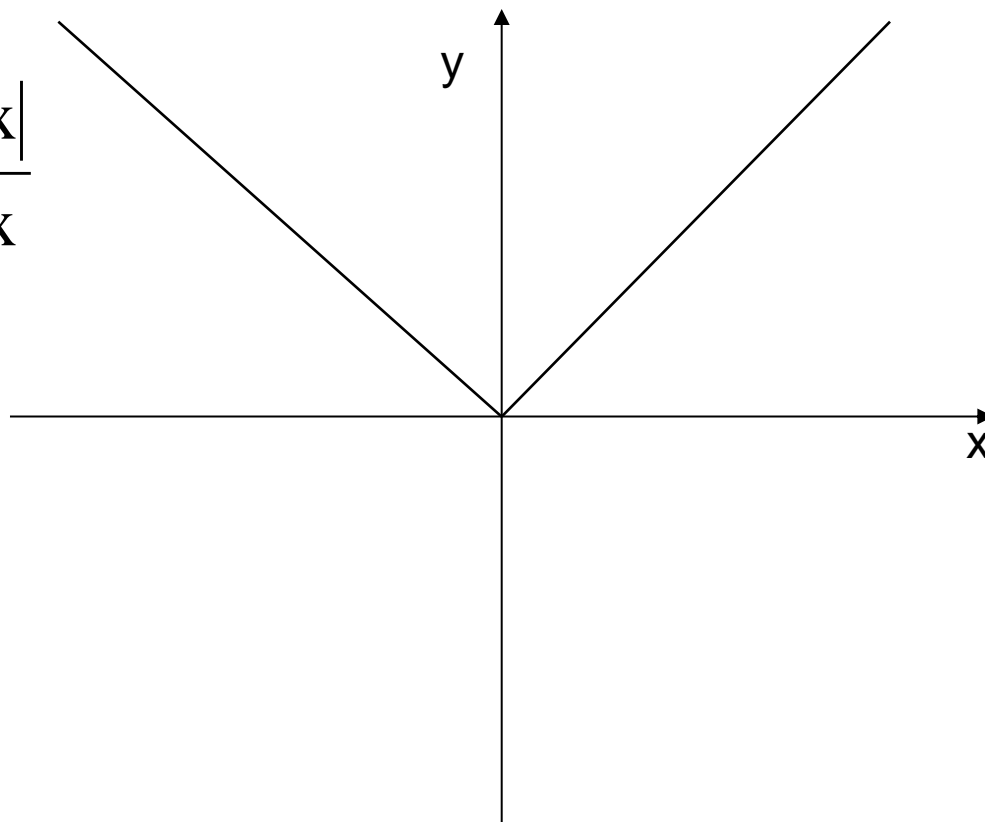
Obrnuto tvrđenje - da iz neprekidnosti slijedi diferencijabilnost - nije tačno.

Primjer. Funkcija  $f(x) = |x|$  je neprekidna za svako  $x \in \mathbb{R}$ . Međutim, u tački  $x = 0$ , data funkcija nema izvod, jer je

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$$



# Tablica izvoda

	$y$	$y'$
1.	$c$	$0$
2.	$x^n,$	$nx^{n-1}$
3.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
4.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
5.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
6.	$a^x$	$a^x \ln a$
7.	$e^x$	$e^x$

# Tablica izvoda

$$8. \quad \underset{y}{\sin x} \qquad \underset{y'}{\cos x}$$

$$9. \quad \cos x \qquad -\sin x$$

$$10. \quad \operatorname{tg} x \qquad \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$11. \quad \operatorname{ctg} x \qquad -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$12. \quad \arcsin x \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13. \quad \arccos x \qquad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. \quad \operatorname{arctg} x \qquad \frac{1}{1+x^2}$$

$$15. \quad \operatorname{arcctg} x \qquad -\frac{1}{1+x^2}$$

# IZVOD ZBIRA, PROIZVODA I KOLIČNIKA

$$\left[ f(x) \pm g(x) \right]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\left[ f(x) \cdot g(x) \right]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$



## Primjer. Naći izvode

$$a) y = xe^x, \quad y' = (x)' e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$$

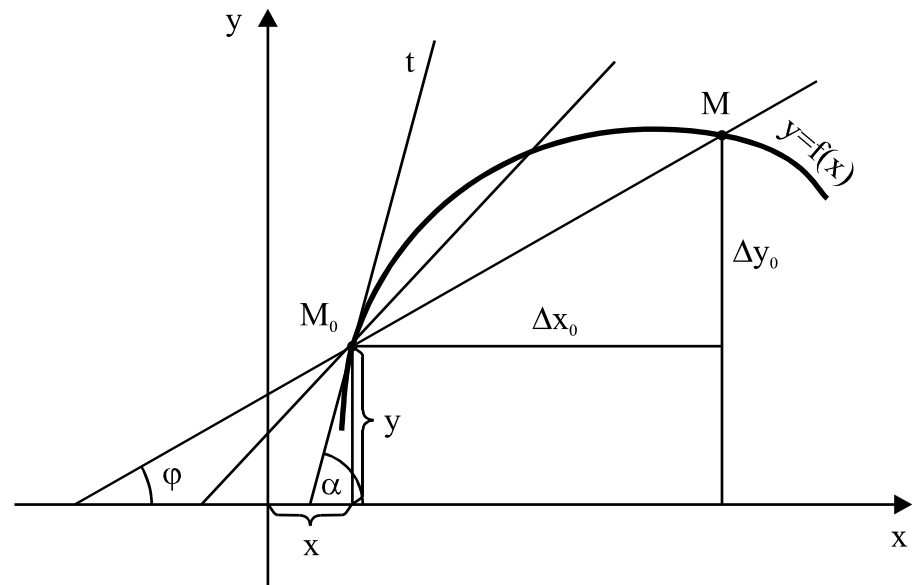
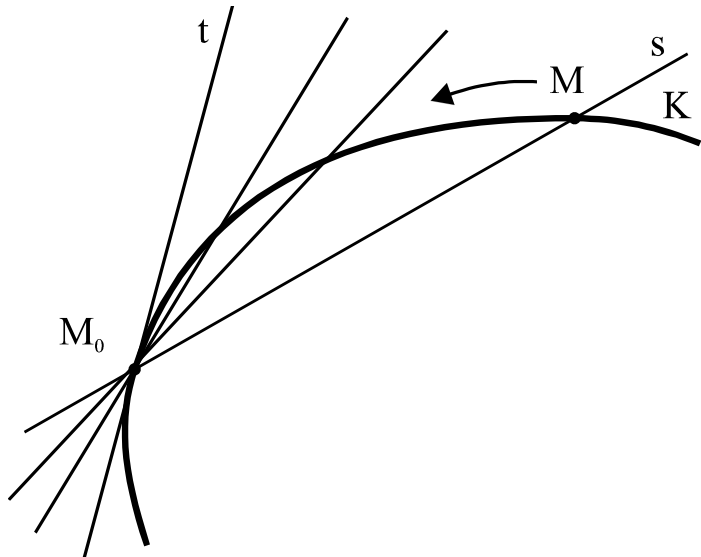
$$b) y = e^x \ln x, \quad y' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$$

$$c) y = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \quad y' = \frac{(x^2)' (x^2 - 1) - x^2 (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$\frac{2x \cdot (x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

# GEOMETRIJSKO TUMAČENJE IZVODA

Prvi izvod funkcije  $y = f(x)$  u tački  $x_0$  geometrijski predstavlja koeficijent pravca tangente grafika u tački  $M_0(x_0, y_0)$ .



Ako je  $k_t$  koeficijent pravca tangente i  $k_s$  koeficijent pravca sječice  $M_0M$ , onda je, prema definiciji tangente,

$$k_t = \lim_{M \rightarrow M_0} k_s$$

$$k_s = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}, \text{ a } M \rightarrow M_0 \Leftrightarrow \Delta x_0 \rightarrow 0$$

$$k_t = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

Određivanje koeficijenta pravca tangente se, dakle, svodi na određivanje granične vrijednosti

PRIMJER 1. Naći koeficijent pravca tangente grafika funkcije  $y = x^2 + 3x + 2$  u tački čija je apscisa  $x_0 = 1$ .

RJEŠENJE: Kako je koeficijent  $k(x)$  pravca tangente jednak prvom izvodu, to je

$$k(x) = y' = 2x + 3$$

i, za  $x = 1$ ,  $k(1) = 5$ .

# DIFERENCIJAL FUNKCIJE

Neka je  $y = f(x)$  funkcija diferencijabilna na intervalu  $(a,b)$  i neka je na tom intervalu njen izvod neprekidna funkcija.

Proizvod prvog izvoda  $y_x'$  i priraštaja argumenta  $\Delta x$  u tački  $x \in (a,b)$  zovemo **diferencijalom** funkcije  $y = f(x)$  u tački  $x$  i označavamo sa  $dy$  ili  $df(x)$ , tj.

$$dy = df(x) = y_x' \cdot \Delta x$$

Specijalno, diferencijal funkcije  $y = x$  je

$$dy = dx = 1 \cdot \Delta x \quad \text{ili} \quad \Delta x = dx,$$

pa iz  $dy = y' \cdot \Delta x$ , dobijamo

$$dy = y' dx \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

# IZVODI VIŠEG REDA

Pretpostavimo da funkcija  $y = f(x)$  ima izvod na intervalu  $(a,b)$  i označimo taj izvod sa  $g(x)$ , tj.

$$f'(x) = g(x).$$

Ako funkcija  $g(x)$  ima izvod  $g'(x)$  u svakoj tački intervala  $(a,b)$  onda se taj izvod zove **drugi izvod** funkcije  $f(x)$  na intervalu  $(a,b)$ . Za drugi izvod funkcije  $y = f(x)$  koristimo neku od sledećih oznaka:

$$y_x^{(2)}, y_x'', \frac{d^2 y}{dx^2}, f''(x)$$

Analogno se definišu i označavaju **izvodi n-tog reda** funkcije  $y = f(x)$ ,  $n > 3$ :

$$y_x^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n}, f^{(n)}(x)$$

# ELASTIČNOST FUNKCIJE

Neka je  $y = f(x)$  data funkcija - pravilo po kome veličina  $y$  zavisi od veličine  $x$ . Ta zavisnost veličine  $y$  od veličine  $x$  postaje “očiglednija” ako znamo koliku procentualnu promjenu veličine  $y$  izaziva promjena veličine  $x$  za, na primjer, 1%. U cilju procjene takve zavisnosti uvodimo pojam elastičnosti funkcije u tački.

Prethodno ćemo definisati **relativni priraštaj argumenta** i **relativni priraštaj funkcije** u tački  $x$  kao količnike priraštaja argumenta i samog argumenta, odnosno priraštaja funkcije i same funkcije, tj.:

$$\frac{\Delta x}{x} \quad \text{i} \quad \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \equiv \frac{\Delta y}{y}$$

**Elastičnošću** diferencijabilne funkcije  $y = f(x)$  u tački  $x$  zovemo izraz

$$E_y(x) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Ako uzmemo da je  $y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$  dobija se

$$E_y(x) \approx \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta y}{y} \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} \approx E_y(x) \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

Ako pretpostavimo da je  $\frac{\Delta x}{x} = 1\%$  dobija se

$$\frac{\Delta y}{y} \approx E_y(x)\% \quad 16$$



# Tumačenje

Elastičnost funkcije u nekoj tački kazuje koliki je približno relativni priraštaj funkcije u procentima ako relativni priraštaj argumenta iznosi 1%. Drugim riječima: ako se argument  $x$  sa vrijednosti  $x_0$  poveća na  $x_0 + 1\%x_0$ , onda se funkcija  $y(x)$  sa vrijednosti  $y(x_0)$  promijeni (poveća ili smanji) približno za  $Ey(x_0)\%y_0$  tj. na  $y_0 + Ey(x_0)\%y_0$ .

Apsolutnu vrijednost elastičnosti zovemo **koeficijentom elastičnosti** i označavamo sa  $\eta$ :  $\eta(x) = |Ey(x)|$ .

Ako je  $\eta(x) > 1$  kažemo da je u tački  $x$  funkcija **elastična**, ako je  $\eta(x) < 1$  - **neelastična**.

# TEOREME O SREDNJOJ VRIJEDNOSTI

**Rolova teorema:** Ako je  $y = f(x)$  funkcija neprekidna na intervalu  $[a,b]$  i diferencijabilna na intervalu  $(a,b)$  i ako je  $f(a) = f(b) = 0$ , onda postoji bar jedna tačka  $c \in (a,b)$  takva da je  $f'(c) = 0$ .

Dokaz: (nije obavezan!)

$f$  diferencijabilna  $\Rightarrow f$  neprekidna  $\Rightarrow$  postojanje najmanje i najveće vrijednosti  $m$  i  $M$  funkcije  $f(x)$  na intervalu  $[a,b]$ .

Ako je  $m = M$  funkcija je konstantna:  $f(x) = k$ ,  $x \in (a,b)$  pa je za svako  $x \in (a,b)$ ,  $f'(x) = 0$ , tj. za tačku  $c$  možemo uzeti proizvoljnu tačku iz  $(a,b)$ .

Neka je  $m \neq M$ . Tada je  $M \neq 0$  ili  $m \neq 0$ . Neka je  $M \neq 0$ .

Označimo sa  $c$  onu vrijednost argumenta  $x$  za koju je  $f(x) = M$ . Kako je  $f(a) = f(b) = 0$  i  $M \neq 0$ , to je  $c \neq a$  i  $c \neq b$ , dakle  $c \in (a,b)$ . U tački  $x = c$  funkcija ima najveću vrijednost na intervalu  $[a,b]$ , pa je, za  $c + \Delta x \in (a,b)$ ,  $f(c+\Delta x) \leq f(c)$ , i, ako je  $\Delta x > 0$ :

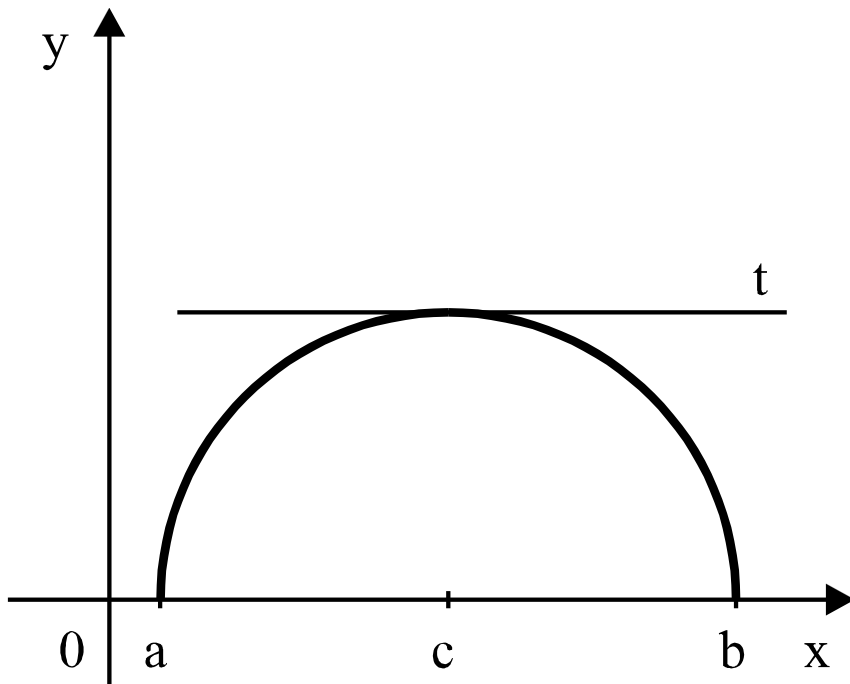
$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

Prema pretpostavci, postoji granična vrijednost izraza na lijevoj strani kad  $\Delta x \rightarrow 0$  i ta granična vrijednost je  $f'(c)$ . Iz osobina granične vrijednosti slijedi da je  $f'(c) \leq 0$  (1).

Za  $\Delta x < 0$  isti količnik nije negativan pa nije negativna ni njegova granična vrijednost, tj.  $f'(c) \geq 0$  (2)

Iz (1) i (2) slijedi tvrđenje, tj. postojanje tačke  $c$  u kojoj je  $f'(c) = 0$ .

Geometrijsko tumačenje Rolove teoreme je sledeće:  
**U bar nekoj tački grafika funkcije  $y = f(x)$  koja se anulira u tačkama  $a$  i  $b$  i koja je neprekidna na intervalu  $[a,b]$  i diferencijabilna na intervalu  $(a,b)$  tangenta je paralelna  $x$ -osi.**



**NAPOMENA:** Rolova teorema važi i ako se u pretpostavci uslov  $f(a) = f(b) = 0$  zamijeni uslovom  $f(a) = f(b)$ .

**Lagranžova teorema: Ako je  $y = f(x)$  funkcija neprekidna na intervalu  $[a,b]$  i diferencijabilna na intervalu  $(a,b)$ , onda postoji tačka  $c \in (a,b)$ :**

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dokaz: (nije obavezan!) Označimo sa  $g(x)$  sledeću funkciju:

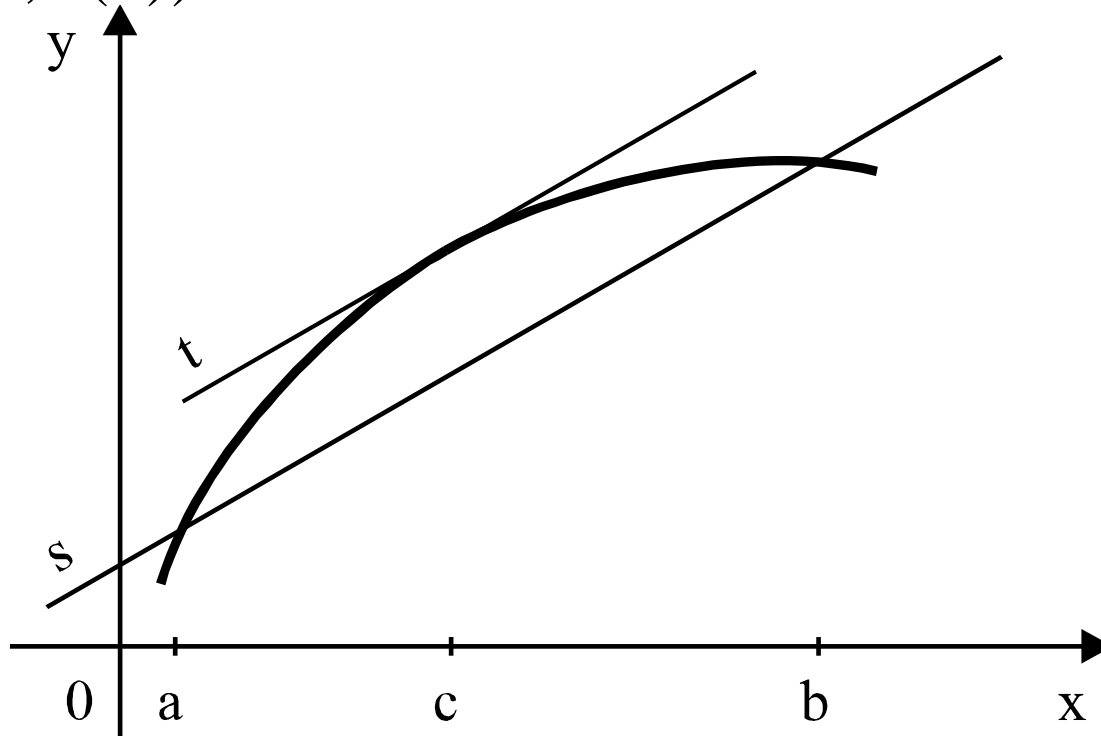
$$g(x) = [f(x) - f(a)](b - a) - [f(b) - f(a)](x - a).$$

Funkcija  $g(x)$  je diferencijabilna na intervalu  $(a,b)$  (kao zbir proizvoda diferencijabilnih funkcija) i još je  $g(a) = g(b) = 0$ , što znači da ispunjava uslove Rolove teoreme. Postoji,

dakle, tačka  $c \in (a,b)$  takva da je

$$g'(c) = f'(c)(b - a) - [f(b) - f(a)] = 0, \text{ tj. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Geometrijski:** U bar jednoj tački  $c \in (a,b)$  tangenta grafika funkcije neprekidne na intervalu  $[a,b]$  i diferencijabilne na intervalu  $(a,b)$  paralelna je sječici određenoj tačkama  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$



**Košijeva teorema:** Ako su  $f(x)$  i  $g(x)$  funkcije neprekidne na intervalu  $[a,b]$  i diferencijabilne na intervalu  $(a,b)$  i ako je  $g'(x) \neq 0$ , onda postoji tačka  $c \in (a,b)$  takva da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Primjer.

Primjenom Lagranžove teoreme, lako se dokazuje da ako je prvi izvod  $f$ -je jednak 0, tada je ta funkcija konstantna! (lijeva strana relacije na slajdu 20 je 0, pa je  $f(x)=f(a)$ - const, za svako  $x$  sa intervala  $(a,b)$ ).

## Tajlorova formula (bez dokaza):

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

gdje je  $c$  neki broj iz intervala  $(a, x)$ . Izraz

$$G = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{zove se **ostatak** .}$$

Primjer. Primjenjujući Tajlorovu formulu na funkciju  $f(x) = e^x$ , za  $a = 0$  i  $n = 7$ , imaćemo

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^7}{7!} + \frac{e^c}{8!} x^8$$

Za  $x = 1$ , odbacujući poslednji sabirak, dobijamo da je

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2,718154\dots$$



$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + G$$

Maclaurinov red- prikazuje razvoj funkcije  $f(x)$  oko nule ( $a=0$ )

**Lopitalovo pravilo** (bez dokaza): Neka su  $f(x)$  i  $g(x)$  diferencijabilne funkcije čija je granična vrijednost, kad  $x \rightarrow a$ , nula i neka količnik njihovih izvoda ima granicu  $A$  kad  $x \rightarrow a$ . Tada je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Napomena. Pravilo se primjenjuje i na oblik  $\infty/\infty$ . Ostali neodređeni izrazi se svode na  $0/0$  ili  $\infty/\infty$ .

Primjer . Primjenjujući Lopitalovo pravilo ( oblik  $0(-\infty)$  sveli smo na  $-\infty/\infty$  !) dobijamo da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

# Monotonost funkcije

Već smo vidjeli da rastuća f-ja (iz  $\Delta x > 0$  slijedi  $\Delta y > 0$ ) ima prvi izvod pozitivan ili jednak nuli (tj. koefic. pravca tangente je pozitivan ili 0 - vidjeti grafik na slajdu 9). Analogno, za opadajuću f-ju (kod nje iz  $\Delta x > 0$  slijedi  $\Delta y < 0$ ) izvod je negativan ili 0. Kod crtanja grafika f-ja trebaće nam obrat tog tvrđenja. Pokazuje se da se ispitivanje monotonosti diferencijabilne funkcije svodi se na ispitivanje znaka prvog izvoda (formalan dokaz se izvodi korišćenjem Lagranžove teoreme i pretpostavke monotonosti):

**Na intervalu na kome je prvi izvod pozitivan funkcija raste; na intervalu na kome je prvi izvod negativan funkcija opada**

**Primjer.  $y = \ln x$  je stalno rastuća, jer je u domenu prvi izvod  $(1/x)$  stalno pozitivan.**

## ODREĐIVANJE INTERVALA MONOTONOSTI

Za funkciju  $y = f(x)$  kažemo da **raste**, oznaka  $y \uparrow$ , na intervalu  $(a,b) \subset D$  ako je za svako  $x_1 < x_2$ ,  $x_1, x_2 \in (a,b)$  ispunjena nejednakost

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Ako je, uz iste pretpostavke

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

kažemo da, na intervalu  $(a,b) \subset D$ , funkcija  $f(x)$  **ne opada**.

Analogno se definišu **opadanje** ( $y \downarrow$ ) i **nerašćenje** funkcije na nekom intervalu.

Intervale rašćenja i intervale opadanja zovemo **intervalima monotonosti** funkcije.

Određivanje intervala monotonosti zovemo još i ispitivanje **toka** funkcije.

Neka je  $y = f(x)$  funkcija diferencijabilna na intervalu  $[a,b]$  i neka na tom intervalu raste. Tada uz uslove,

$$x_0 \in (a,b), \Delta x_0 > 0 \text{ i } x_0 + \Delta x_0 \in (a,b)$$

važi jednakost

$$f(x_0 + \Delta x_0) > f(x_0),$$

odnosno

$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) > 0.$$

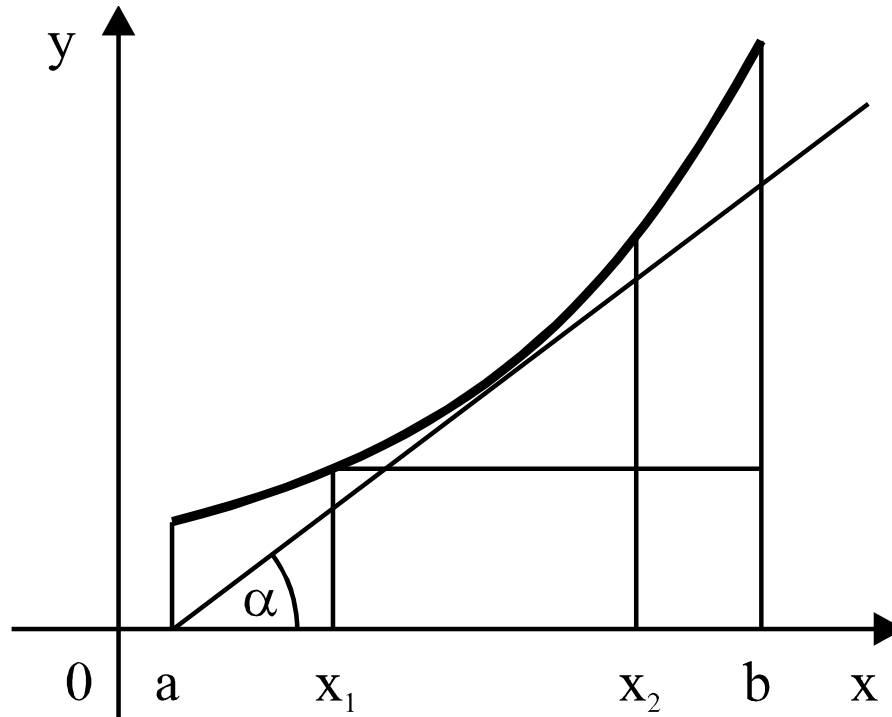
No, tada je i količnik  $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$  pozitivan, a njegova granična

vrijednost kad  $\Delta x_0 \rightarrow 0$  nenegativna, tj.

$$\lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(x_0) \geq 0$$

Iz pretpostavke da diferencijabilna funkcija raste, slijedi nenegativnost izvoda.

**Geometrijski:** Tangenta grafika diferencijabilne funkcije koja raste na intervalu  $[a,b]$  je ili paralelna x-osi ili sa njom gradi oštar ugao (slika 1).



Slika 1.

Pretpostavimo, sada, da je na intervalu  $[a,b]$  funkcija  $f(x)$  diferencijabilna i da je  $f'(x) > 0$ ,  $x \in [a,b]$ . Ako su  $x_1$  i  $x_2$ ,  $x_1 < x_2$  proizvoljne tačke intervala  $[a,b]$ , onda, prema Lagranžovoj teoremi, postoji tačka  $c \in (x_1, x_2)$  takva da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Kako je, po pretpostavci,  $f'(c) > 0$  i  $x_2 > x_1$ , to je

$$f(x_2) > f(x_1)$$

za svako  $x_1, x_2$  iz intervala  $[a,b]$ , što znači da na intervalu  $[a,b]$  funkcija raste.

**Geometrijski:** Ako tangenta grafika funkcije  $y = f(x)$  u proizvoljnoj tački  $x \in [a,b]$  gradi sa x-osom oštar ugao, onda na intervalu  $[a,b]$  funkcija raste (slika 1).

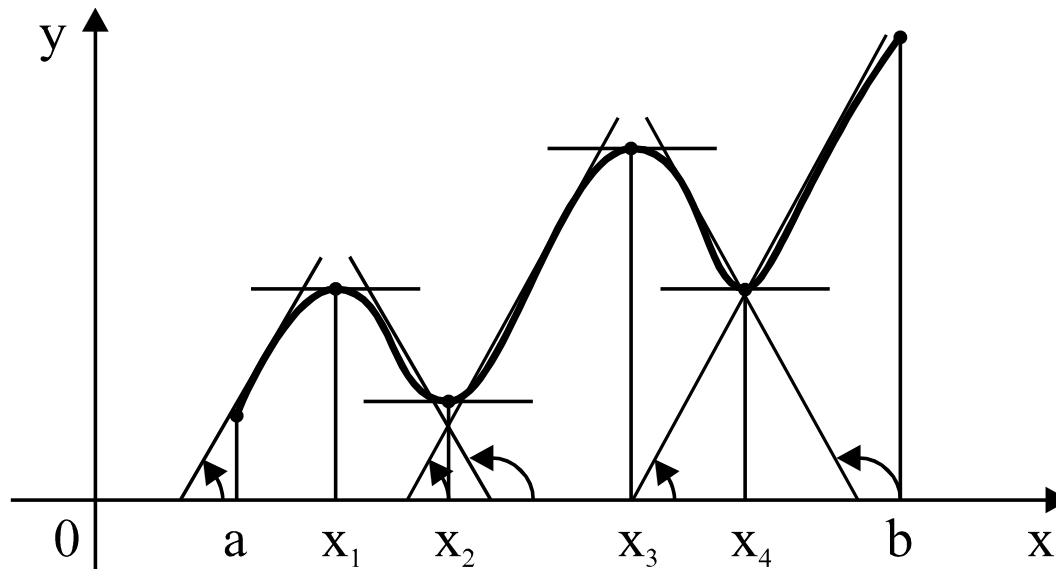
**Na intervalu na kome je prvi izvod pozitivan funkcija raste;**

**na intervalu na kome je prvi izvod negativan - funkcija opada.**



## EKSTREMNE VRIJEDNOSTI FUNKCIJE

Važnu ulogu u ispitivanju funkcije imaju one tačke iz intervala definisanosti u kojima funkcija prelazi iz rašćenja u opadanje ili iz opadanja u rašćenje. Na slici 2. su to tačke  $x_1$  i  $x_3$  odnosno  $x_2$  i  $x_4$ .



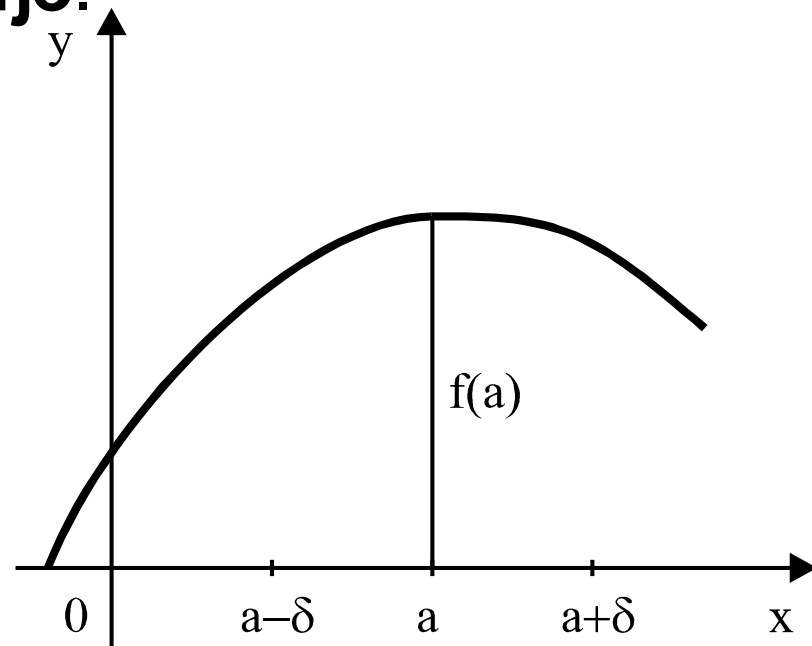
Slika 2.

Kažemo da u tački  $x = a \in D_f$  funkcija  $f(x)$  ima **maksimum** ako postoji neka okolina tačke  $a$  u kojoj je  $f(a)$  najveća vrijednost. Tako, funkcija čiji je grafik dat na sl. 2 za  $x = x_3$  ima maksimum jer je na intervalu  $(x_2, x_4)$  koji sadrži tačku  $x_3$ ,  $f(x_3)$  najveća vrijednost. Vrijednost  $f(a)$  se zove **maksimum funkcije**.

Simbolički: funkcija  $y = f(x)$  za  $x = a$  ima maksimum  $f(a)$ , ako postoji neka okolina tačke  $a$  takva da je

$$f(a) > f(x)$$

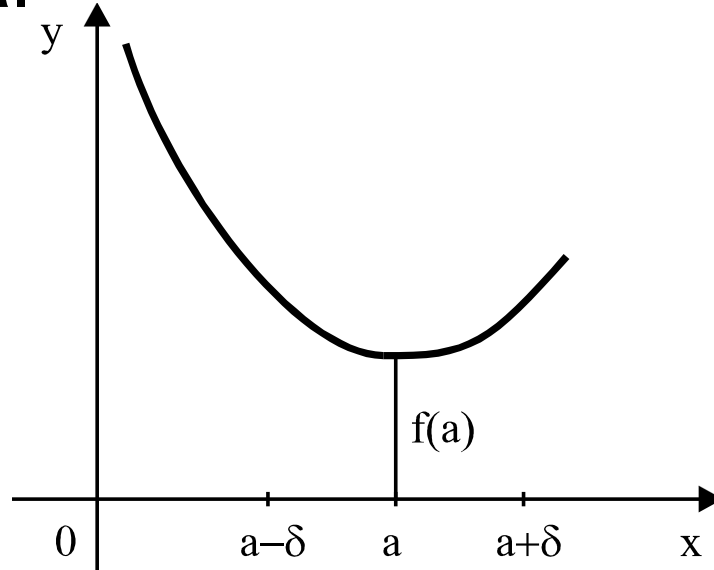
za svako  $x \neq a$  iz te okoline (sl. 3.).



Slika 3.

Analogno se definiše i **minimum** funkcije sl. 4.

Minimum i maksimum zovemo **ekstremnim vrijednostima**.



Slika 4.

**Teorema (potreban uslov):** Ako u tački  $x = a$  diferencijabilna funkcija ima ekstremnu vrijednost, onda je u toj tački prvi izvod jednak nuli.

**Teorema (dovoljan uslov):** Ako je u stacionarnoj tački  $x=a$  drugi izvod različit od 0, onda u toj tački f-ja ima ekstremnu vrijednost, i to: ako je drugi izvod u stacionarnoj tački pozitivan- minimum, u suprotnom (drugi izvod negativan)- maksimum

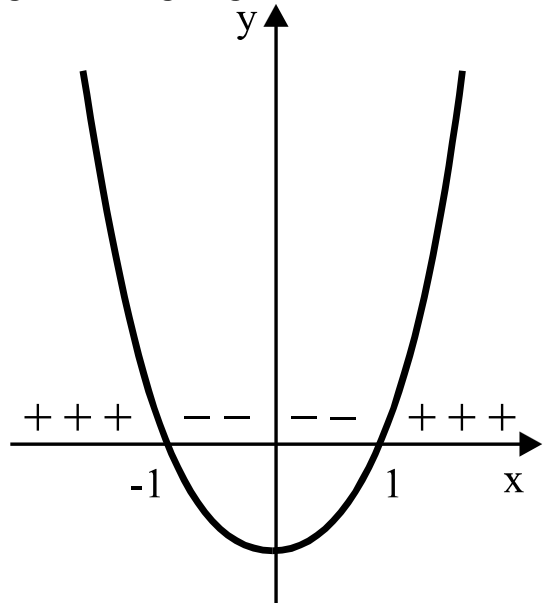
## POTREBAN I DOVOLJAN USLOV:

Diferencijabilna funkcija u tački  $x = a$  ima ekstremnu vrijednost ako i samo ako je  $x = a$  nula prvog izvoda i ako, prolazeći kroz tu tačku, prvi izvod mijenja znak. Pritom, ako prvi izvod mijenja znak sa + na - funkcija ima maksimum, ako mijenja sa - na + ima minimum.

Nule prvog izvoda zovu se **stacionarne** ili **kritične** tačke.

**Primjer.** Odrediti ekstremne vrijednosti funkcije  $y = x^3 - 3x + 1$ .

Rešenje: Nule prvog izvoda (stacionarne-kritične tačke) su rješenja jednačine  $3x^2 - 3 = 0$ , tj.  $x_1 = -1$  i  $x_2 = 1$ .



Prolazeći kroz tačku  $x = -1$  prvi izvod mijenja znak (i to sa + na - pa u toj tački data funkcija ima maksimum:

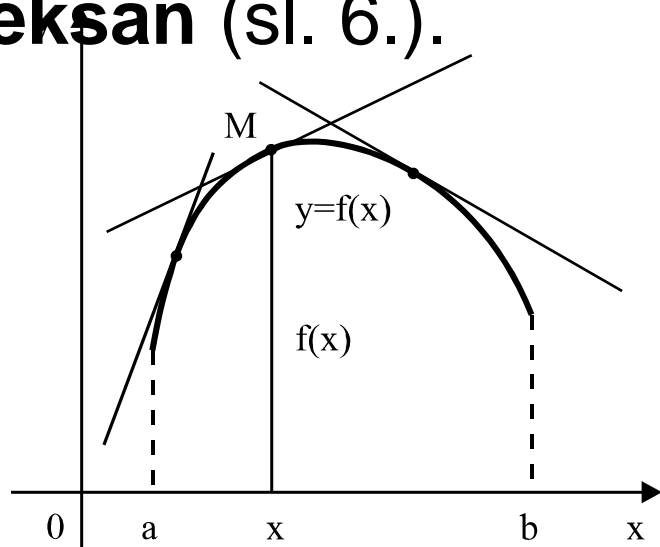
$$y_{\max} = y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3.$$

Prolazeći kroz tačku  $x = 1$  prvi izvod mijenja znak i to sa - na +, pa u ovoj tački data funkcija ima minimum:

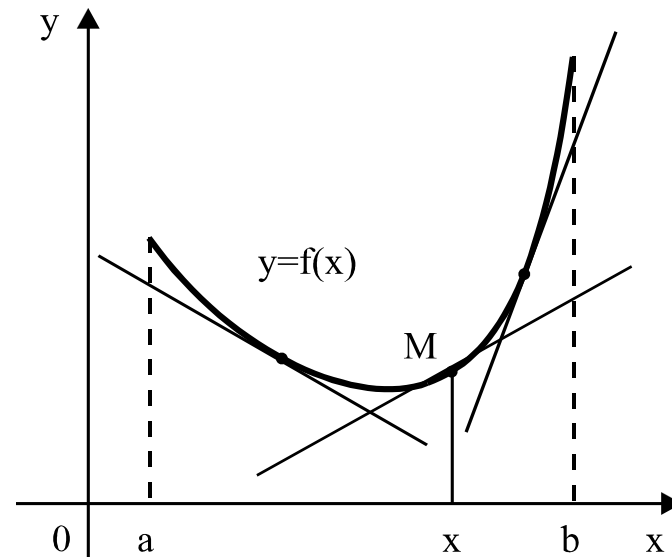
$$y_{\min} = y(1) = -1.$$

# KONVEKSNOST I KONKAVNOST. PREVOJNE TAČKE

Ako su ordinate proizvoljne tačke grafika funkcije  $y = f(x)$  čije apscise pripadaju intervalu  $(a,b)$  manje ili jednake od odgovarajućih ordinata tangente  $t$ , onda kažemo da je na intervalu  $(a,b)$  grafik funkcije  $y = f(x)$  **konkavan** (sl. 5.). Ako su, uz iste pretpostavke, ordinate tangente manje ili jednake od odgovarajućih ordinata grafika funkcije, kažemo da je na intervalu  $(a,b)$  grafik funkcije **konveksan** (sl. 6.).



Slika 5.



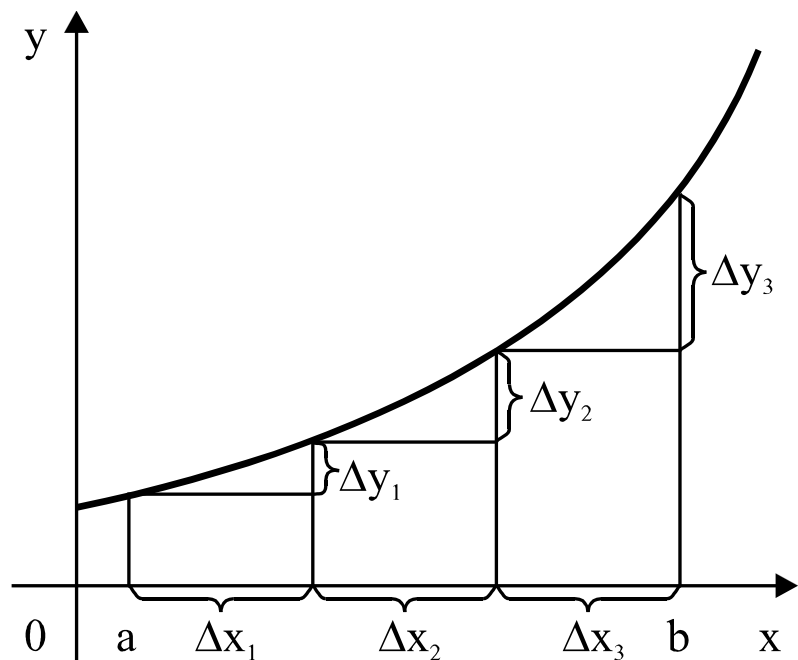
Slika 6.

**Ako je grafik funkcije konkavan  $y = f(x)$ , drugi izvod je nepozitivan; ako je drugi izvod negativan, grafik je konkavan .**

**Na intervalu konveksnosti drugi izvod funkcije  $y = f(x)$  je nenegativan; na intervalu na kome je drugi izvod pozitivan, grafik funkcije je konveksan.**

**Tačka  $P(a, f(a))$  je prevojna tačka (tj. tačka koja razdvaja konveksan od konkavnog dijela) grafika  $f$ -je  $y$  akko je drugi izvod u toj tački jednak 0, i prolazeći kroz tu tačku drugi izvod mijenja znak.**

**Brzina rasta neprekidne funkcije:** F-ja  $y = f(x)$  koja raste na intervalu  $(a,b)$  kažemo da, na tom intervalu, **raste sve brže** ili da **raste progresivno**, ako jednakim priraštajima argumenta odgovaraju sve veći priraštaji funkcije.



Iz definicije slijedi da, za funkciju koja raste sve brže:

$$0 < \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots$$

$$\Rightarrow \Delta y_1 < \Delta y_2 < \Delta y_3 < \dots$$

Na intervalu  $(a,b)$  funkcija  $y = f(x)$  koja ima drugi izvod raste sve brže ako i samo ako je

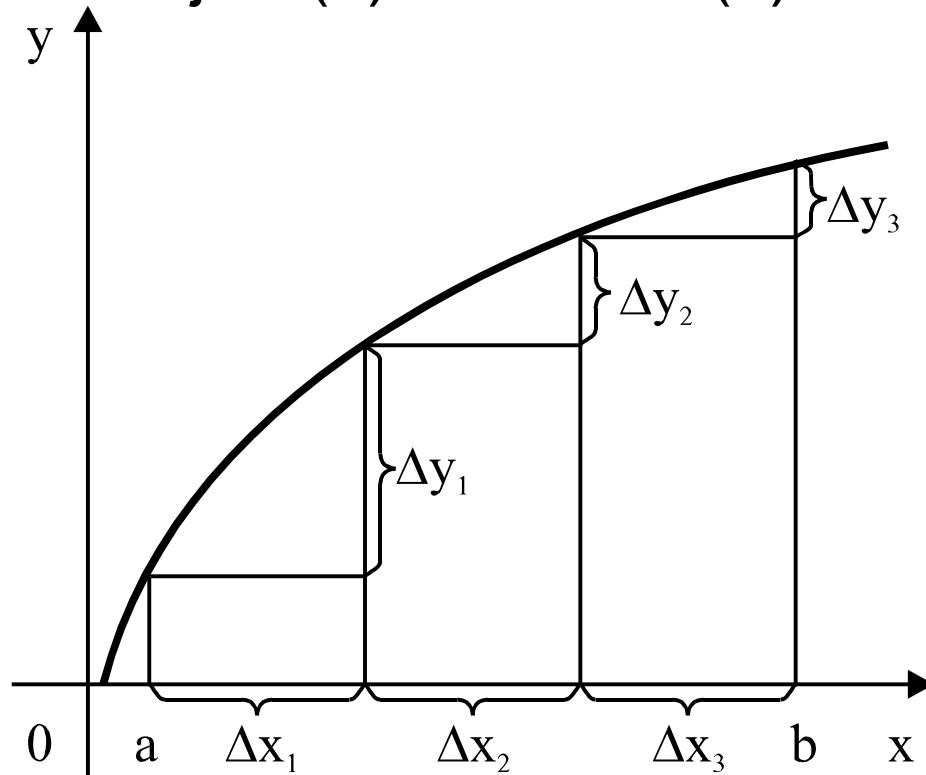
$$f''(x) > 0 \quad \text{i} \quad f'''(x) > 0,$$

za svako  $x \in (a,b)$ .

Za funkciju  $y = f(x)$  koja raste na intervalu  $(a,b)$  kažemo da, na tom intervalu, **raste sve sporije (degresivno)** ako jednakim priraštajima argumenta odgovaraju sve manji priraštaji funkcije, tj.:

$$0 < \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots \Rightarrow \Delta y_1 > \Delta y_2 > \Delta y_3 > \dots$$

na intervalu  $(a,b)$ , funkcija  $y = f(x)$  raste sve sporije ako i samo ako je  $f'(x) > 0$  i  $f''(x) < 0$ .





# KARAKTERISTIKE FUNKCIJE. GRAFIK

**Ispitati funkciju** znači odrediti:

1. Oblast definisanosti  $D_f$
2. Parnost, neparnost, periodičnost
3. Nule funkcije
4. Neprekidnost, ponašanje u prekidnim tačkama, vertikalne asimptote
5. Horizontalne i kose asimptote
6. Znak funkcije
7. Tok, ekstremne vrijednosti
8. Konveksnost, konkavnost, prevojne tačke
9. Grafik.