15. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

- Razmatraćemo samo linearne diferencij. jednačine drugog reda (LDJ II reda) sa konstantnim koeficijentima

Linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima

- Linearna diferencijalna jednačina drugog reda

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

- Ako su P(x) i Q(x) konstante (tj. P(x) = a i Q(x) = b) , tada je

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

- Linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Rešenje diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Zamjenom funkcije $y = e^{kx}$, $k \in R$, u homogenoj jednačini dobija se

$$e^{kx}(k^2 + ak + b) = 0$$

koja ima rješenje ako i samo ako je

$$k^2 + ak + b = 0$$

-**karakteristična jednačina**

Rešenje homogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima

- Zavisno od diskriminante $d = a^2 - 4b$ imamo tri slučaja:
- $d > 0$. Jednačina ima dva realna i različita korijena k_1 i k_2, pa su funkcije $y_1 = e^{k_1 x}$ i $y_2 = e^{k_2 x}$

i rješenja jednačine.

Otuda je opšte rješenje jednačine funkcija

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

Primjer: $y'' - 5y' + 6y = 0$ $(k_1 = 2, k_2 = 3)$

- d = 0. U ovom slučaju je $k_1=k_2=-1/2a$ i jedino rješenje jednačine je funkcija

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}ax}$$

Zamjenom funkcije $\mathrm{y}_2 = \mathrm{xe}^{-\frac{1}{2}\mathrm{ax}}$

i njenih izvoda u jednačini zaključujemo da je i ta funkcija jedno rješenje, pa je opšte rešenje homogene jednačine

$$\mathrm{y} = \mathrm{c}_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{ax}} + \mathrm{c}_2\mathrm{xe}^{-\frac{1}{2}\mathrm{ax}}$$

Pr. $y''-4y'+4y=0$ $(k_1=k_2=2)$

- d < 0. Korijeni karakteristične jednačine u ovom slučaju su konjugovano - kompleksni brojevi

$$k_1 = \alpha - \beta i,\ k_2 = \alpha + \beta i,\ \alpha = -\frac{1}{2}a,\ \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$$

Provjerom se utvrđuje da su $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ rešenja, pa je opšte rešenje

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right)$$

Pr. $y'' + 2y' + 2y = 0$ $(\alpha = -1,\ \beta = 1)$

Nehomogena jednačina

- Ako je y_h rešenje homogene, a y_p jedno partikularno rešenje nehomogene diferencijalne jednačine, tada je opšte rešenje $y_o=y_h+y_p$
- Partikularno rešenje se može tražiti npr. metodom varijacije konstanti ili metodom pogađanja (za određene tipove f(x))

Pr. $y''=2$, $y=c_1+c_2x+x^2$

Diskretno vrijeme: diferencne jednačine

$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$. **Prva razlika**

- $\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta[f(x+1) - f(x)] =$

$f(x+2) - f(x+1) - [f(x+1) - f(x)] =$

$= f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$. **Druga razlika**.

- Slično **n-ta razlika**
- Uvedemo li oznaku $f(x) = y_x$, biće
- $f(x+ i) = y_{x+i}$, $i = 1,2,\ldots,n$ i $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$, odakle je
- $y_{x+1} = y_x + \Delta y_x$

- Svaka vrijednost y_{x+i}, i = 1,2,...,n se takođe može izraziti preko vrijednosti funkcije i njenih razlika u tački:
- $\Delta y_{x+1} = y_{x+2} - y_{x+1} \Rightarrow y_{x+2} = y_{x+1} + \Delta y_{x+1} =$

$= y_x + \Delta y_x + \Delta y_{x+1}$

- Druga razlika funkcije y_x u tački x je
- $\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = \Delta(y_{x+1} - y_x) =$

$y_{x+2} - y_{x+1} - y_{x+1} + y_x = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x$, tj.

- $\Delta y_{x+1} = \Delta^2 y_x + \Delta y_x$. Otuda
- $y_{x+2} = y_x + 2\Delta y_x + \Delta^2 y_x$

- Prema tome svaku jednačinu oblika

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n}) = 0$$

- možemo zamijeniti jednačinom oblika

$$g(x, y_x, \Delta y_x, \ldots, \Delta^n y_x) = 0.$$

- Gornju jednačinu zovemo **diferencnom jednačinom**
- **Riješiti diferencnu jednačinu** znači naći funkciju $f(x) = y_x$ koja zadovoljava tu jednačinu, tj. čijom zamjenom i zamjenom njenih razlika data jednačina prelazi u identitet. I ova jednačina ima **opšta** i **partikularna** rješenja zavisno od toga da li sadrži proizvoljne konstante ili ih ne sadrži.

diferencne jednačine prvog reda

- Diferencnu jednačinu oblika

$y_{x+1} - ay_x = f(x)$ gdje je a konstanta zovemo **linearnom diferencnom jednačinom I reda** (sa konstantnim koeficijentima)

Tvrđenje: Ako je $y_x = y(x)$ partikularno rješenje linearne jednačine i $y(x,c)$ opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine, onda je $y(x) + y(x,c)$ opšte rješenje linearne jednačine.

• Jednačina

$y_{x+1} - ay_x = 0$ ima rešenje $y_x = a^x$, pa nehomogena jednačina $y_{x+1} - ay_x = b$ ima rešenje

$$y_x = \frac{b}{1-a} + ca^x$$

Pr. $y_{x+1}+y_x=1$, $(a=-1, b=1)$

Diferencne jednačine drugog reda

- Diferencnu jednačinu oblika

$$ay_{x+2} + by_{x+1} + cy_x = 0$$

  zovemo **homogenom linearnom diferencnom jednačinom II reda** (sa konstantnim koeficijentima)
- Smjenom $y_x = \lambda^x$ dobija se karakteristična jednačina $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

- Neka su λ_1, λ_2 rješenja ove kvadratne jednačine. Tada diferencna jednačina ima rješenje:

za $D = b^2 - 4ac > 0$, $\quad y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x$

za $D = 0$, $\quad y_x = C_1\lambda_1^x + C_2 x\lambda_1^x$ (ovdje je $\lambda_1 = \lambda_2$).

za $D < 0$, $\quad y_x = \rho^x\left(C_1 \cos\theta x + C_2 \sin\theta x\right)$

gdje je $\lambda_{1/2} = \rho(\cos\theta x \pm i \cdot \sin\theta x)$

(za kompleksan broj $z = a + bi$, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

i $tg\theta = b/a$).

Pr. Koji je opšti član niza kod kojeg je svaki naredni član poluzbir prethodna dva?

$y_n=(y_{n-1}+y_{n-2})/2$, $\quad \lambda_1=1, \lambda_2=-1/2$