OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Teorema 1. (Rolova) Ako je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna na segmentu $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu (a,b) i $f(a)=f(b)$, tada postoji tačka $c\in(a,b)$ za koju je $f'(c)=0$.

Teorema 2. (Langražova) Ako je funkcija $f:[a,b]\to R$ neprekidna na segmentu $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu (a,b), tada postoji tačka $c\in(a,b)$ takva da važi $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Teorema 3. (Košijeva) Ako su funkcije $f:[a,b]\to R$ i $g:[a,b]\to R$ neprekidne na segmentu $[a,b]$ i diferencijabilne na intervalu (a,b), pri čemu je $g'(x)\neq 0,\ x\in(a,b)$, tada postoji tačka $c\in(a,b)$ takva da je $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Teorema 4. (Lopitalova pravila) Neka su funkcije f i g diferencijabilne u nekoj okolini tačke x_0 i neka je $g'(x)\neq 0$ za $x\in O(x_0), x\neq x_0$.

- Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ i ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tada postoji $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i pri tome je $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
- Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ i ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tada postoji $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i pri tome je $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Lopitalovo pravilo se može koristiti i za izračunavanje graničnih vrijednosti sa neodređenostima koje se simbolički mogu zapisati kao: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$ što će se vidjeti iz sljedećeg primjera.

Primjer 1. Koristeći Lopitalovo pravilo izračunati sljedeće granične vrijednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$, ***b***) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+2x+1}{e^x}$, ***c***) $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln x$, ***d***) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{1}{1}=1,$$

$$b)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+2x+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x^3+2x+1\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(3x^2+2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(6x\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{e^x}=\frac{6}{+\infty}=0,$$

$$c)\ \lim_{x\to 0+} x\cdot\ln x=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}\left(-x\right)=0,$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\sin x\right)'}{\left(x\sin x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)'}{\left(\sin x+x\cos x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0,$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty=e^{\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\cos x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot\left(-\sin x\right)}{2x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x}}=e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Definicija 1. Neka funkcija f u tački x_0 ima konačan n-ti izvod $f^{(n)}\left(x_0\right)$ .Polinom

$$T_n\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{\left(x-x_0\right)}{1!}f'\left(x_0\right)+\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2!}f''\left(x_0\right)+\ldots+\frac{\left(x-x_0\right)^n}{n!}f^{(n)}\left(x_0\right)$$

je **Tejlorov polinom** *n*-tog stepena funkcije f u tački x_0 .

Specijalno za $x_0=0$ polinom $T_n\left(x\right)$ je **Maklorenov polinom**.

Teorema 5. (Tejlorova formula) Neka je funkcija f diferencijabilna $(n+1)$ puta na intervalu (a,b) koji sadrži tačku x_0. Tada za svaku tačku $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$ postoji tačka c između x i x_0 takva da važi Tejlorova formula:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x)$$

gdje je $R_n(x) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$, $c = x_0 + \theta \cdot (x - x_0)$, $0 < \theta < 1$

ostatak Tejlorove formule u Langražovom obliku.
Specijalno, za $x_0 = 0$ Tejlorova formula se naziva Maklorenova formula.

Primjer 2. Napisati Maklorenovu formulu za funkciju $f(x) = e^x$.
Kako je $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$, to je

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$, gdje je tačka c između 0 i x.

Teorema 6.

- $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a,b)$ ako i samo ako je $f(x) = const.$ za svako $x \in (a,b)$.
- Ako je $f'(x) > 0$ za svako $x \in (a,b)$, tada je funkcija f strogo rastuća na intervalu (a,b), tj. $(\forall x_1, x_2 \in (a,b))\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (oznaka $f \uparrow\uparrow$).
- Ako je $f'(x) \geq 0$ za svako $x \in (a,b)$, tada je funkcija f monotono rastuća na intervalu (a,b), tj.
  $(\forall x_1, x_2 \in (a,b))\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (oznaka $f \uparrow$).
- Ako je $f'(x) < 0$ za svako $x \in (a,b)$, tada je funkcija f strogo opadajuća na intervalu (a,b), tj. $(\forall x_1, x_2 \in (a,b))\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (oznaka $f \downarrow\downarrow$).
- Ako je $f'(x) \leq 0$ za svako $x \in (a,b)$, tada je funkcija f monotono opadajuća na intervalu (a,b), tj.
  $(\forall x_1, x_2 \in (a,b))\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ (oznaka $f \downarrow$).

Definicija 2.

- Tačka x_0 je **tačka lokalnog minimuma funkcije** f ako postoji okolina $O(x_0)$ tačke x_0 takva da je $f(x_0) < f(x)$ za $\forall x \in O(x_0), x \neq x_0$.
- Tačka x_0 je **tačka lokalnog maksimuma funkcije** f ako postoji okolina $O(x_0)$ tačke x_0 takva da je $f(x_0) > f(x)$ za $\forall x \in O(x_0), x \neq x_0$.
- Tačke lokalnog minimuma i maksimuma nazivamo **tačkama lokalnih ekstremuma**, a vrijednost funkcije u tim tačkama nazivamo **ekstremumima funkcije**.

Teorema 7. (Fermaova) Ako diferencijabilna funkcija u tački x_0 ima lokalni ekstremum, tada je $f'(x_0) = 0$.

Teorema 8. Neka je funkcija f diferencijabilna na intervalu koji sadrži tačku x_0 za koju je $f'(x_0) = 0$. Tada:

- Ako je $f'(x) > 0$ za $x < x_0$ i $f'(x) < 0$ za $x > x_0$, tada je x_0 tačka lokalnog maksimuma.
- Ako je $f'(x) < 0$ za $x < x_0$ i $f'(x) > 0$ za $x > x_0$, tada je x_0 tačka lokalnog minimuma.

Teorema 9.

- Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, tada je x_0 tačka lokalnog minimuma funkcije f.
- Ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, tada je x_0 tačka lokalnog maksimuma funkcije f.

Primjer 3. Odrediti intervale monotonosti i ekstremne vrijednosti funkcija:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 7$, b) $y = x + \frac{4}{x}$.

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 7 \quad \Rightarrow \quad y' = 3x^2 - 4x + 1 = 3 \cdot (x-1) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$,

$$y' > 0 \quad \Rightarrow \quad \cdot (x-1) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty) \quad f \uparrow\uparrow,$$

$$y' < 0 \quad \Rightarrow \quad \cdot (x-1) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \quad f \downarrow\downarrow$$

$$y' = 0 \quad \text{za} \quad x = 1 \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$$

Pošto posmatrana funkcija lijevo od tačke $x = \frac{1}{3}$ raste, a desno od te tačke opada, to zaključujemo da je tačka $x = \frac{1}{3}$ tačka lokalnog maksimuma. Dakle, $T_{\max}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$. Lijevo od tačke $x = 1$ posmatrana funkcija opada, a desno od te tačke raste, pa je tačka $x = 1$ tačka lokalnog minimuma. Dakle, $T_{\min}(1,7)$.

b) $y = x + \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$

$y' > 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x+2) > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \quad f \uparrow\uparrow$

$y' < 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x+2) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-2,2) \quad f \downarrow\downarrow$

$y' = 0$ za $x = -2 \quad \vee \quad x = 2$

Posmatrana funkcija lijevo od tačke $x = -2$ raste, desno od te tačke opada, pa je tačka $x = -2$ tačka lokalnog maksimuma. Dakle, $T_{\max}(-2,-4)$. Lijevo od tačke $x = 2$ posmatrana funkcija opada, a desno od te tačke raste, pa je tačka $x = 2$ tačka lokalnog minimuma. Dakle, $T_{\min}(2,4)$.

Definicija 3. Neka je funkcija f diferencijabilna na intervalu (a,b).

- Za funkciju f kažemo da je konveksna na intervalu (a,b) ako za svako $x_0 \in (a,b)$ i za svako $x \in (a,b)$ važi $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
- Za funkciju f kažemo da je konkavna na intervalu (a,b) ako za svako $x_0 \in (a,b)$ i za svako $x \in (a,b)$ važi $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
- Ako pri prelasku kroz tačku x_0 grafik funkcije f iz konveksnosti prelazi u konkavnost (ili iz konkavnosti prelazi u konveksnost) tada tačku x_0 nazivamo prevojnom tačkom funkcije f.

Teorema 10. Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na intervalu (a,b).

- Ako je $f''(x) \geq 0$ na (a,b) tada je f konveksna na intervalu (a,b).
- Ako je $f''(x) \leq 0$ na (a,b) tada je f konkavna na intervalu (a,b).

Teorema 11. Ako je x_0 prevojna tačka funkcije f tada je $f''(x_0) = 0$.

Teorema 12. Ako pri prolasku kroz tačku x_0 drugi izvod funkcije f mijenja znak, tada je x_0 prevojna tačka funkcije f.

Primjer 4. Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti kao i moguće prevojne tačke funkcija: a) $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$, b) $y = \ln\left(1 + x^2\right)$.

a) $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = 3x^2 - 10x + 3 \quad \Rightarrow \quad y'' = 6x - 10$

$$y'' > 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - 10 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{5}{3} \quad f \cup$$

$$y'' < 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - 10 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{5}{3} \quad f \cap$$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

Lijevo od tačke $x = \frac{5}{3}$ posmatrana funkcija je konkavna, a desno od te tačke je konveksna, pa je tačka $x = \frac{5}{3}$ prevojna tačka, tj. $P\left(\frac{5}{3}, -\frac{88}{27}\right)$.

b) $y = \ln\left(1 + x^2\right) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{2 \cdot \left(1 + x^2\right) - 2x \cdot 2x}{\left(1 + x^2\right)^2} =$

$$= \frac{2 \cdot \left(1 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

$$y'' > 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - x) \cdot (1 + x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \quad f \cup$$

$$y'' < 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - x) \cdot (1 + x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1, 1) \quad f \cap$$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 1$$

Kako drugi izvod posmatrane funkcije prolazeći kroz tačke $x = -1$ i $x = 1$ mijenja znak, to su $x = -1$ i $x = 1$ prevojne tačke tj. $P_1(-1, 0)$, $P_2(1, 0)$.

Definicija 4.

- Prava $x = a$ je vertikalna asimptota funkcije $y = f(x)$ ako je bar jedna od graničnih vrijednosti $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ jednaka $+\infty$ ili $-\infty$.

- Prava $y = n$ je horizontalna asimptota funkcije $y = f(x)$ ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = n$ ili $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = n$.
- Prava $y = kx + n$ je kosa asimptota funkcije $y = f(x)$ ako postoje granične vrijednosti $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ i $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right)$.

Prilikom crtanja grafika funkcije $y = f(x)$, potrebno je odrediti:

1. oblast definisanosti, ponašanje funkcije na krajevima domena,
2. asimptote,
3. presjeke sa koordinatnim osama,
4. znak funkcije,
5. intervale monotonosti i ekstremne vrijednosti,
6. konveksnost, konkavnost i prevojne tačke.

Primjer 5. Ispitati tok i nacrtati grafike funkcija:

a) $y = \frac{x}{1+x^2}$, b) $y = \frac{1}{x^2-1}$, c) $y = xe^{-x}$

$a)\ y = \frac{x}{1+x^2}$

1. $D = R$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = -0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = +0$$

2. $x = 0$ ***horizontalna asimptota***

3. $x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad N(0,0)$

$y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad N(0,0)$

4. $y > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$

$y < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

5. $y' = \dfrac{1+x^2 - x \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

$y' > 0 \quad \Rightarrow \quad (1-x)\cdot(1+x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1,1) \quad f \uparrow\uparrow$

$y' < 0 \quad \Rightarrow \quad (1-x)\cdot(1+x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \quad f \downarrow\downarrow$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 1$

$T_{\min}\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right), \quad T_{\max}\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

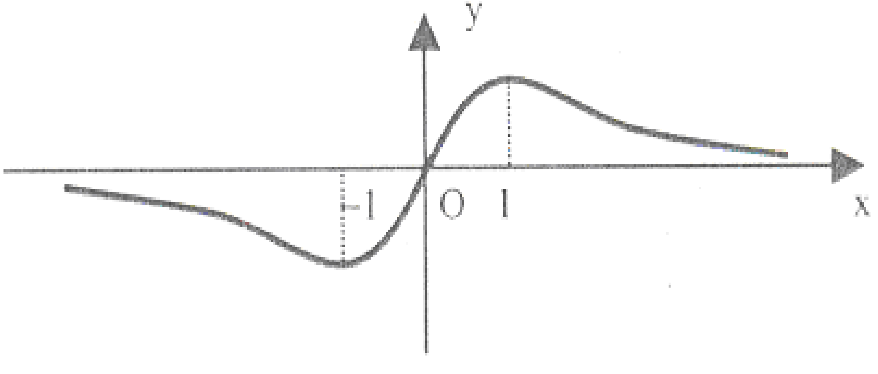
6. $y'' = \dfrac{-2x\cdot\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \dfrac{2x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$

$y'' > 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot\left(x^2-3\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\sqrt{3},0\right) \cup \left(\sqrt{3},+\infty\right) \quad f \cup$

$y'' < 0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot\left(x^2-3\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\sqrt{3}\right) \quad f \cap$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = -\sqrt{3} \quad \vee \quad x = \sqrt{3}$

$P_1(0,0), \quad P_2\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right), \quad P_3\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$



b) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$

1. $D: x^2-1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq \pm 1$ ***tj.*** $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-1}=+0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-1}=+0,\quad \lim_{x\to-1-}\frac{1}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{(-1-\varepsilon)^2-1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon+\varepsilon^2}+\infty,$$

$$\lim_{x\to-1+}\frac{1}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{(-1+\varepsilon)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{-2\varepsilon+\varepsilon^2}-\infty,$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{1}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{(1-\varepsilon)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{-2\varepsilon+\varepsilon^2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{1}{x^2-1}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{(1+\varepsilon)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon+\varepsilon^2}=+\infty$$

2. $x=-1,\quad x=1$ ***vertikalne asimptote***

$y=0$ ***horizontalna asimptota***

3. $x=0 \quad\Rightarrow\quad y=-1 \quad A(0,-1)$

nema nula

4. $y>0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)\cdot(x+1)>0 \quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$y<0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)\cdot(x+1)<0 \quad\Rightarrow\quad x\in(-1,1)$

5. $y'=-\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^2}\cdot 2x$

$y'>0 \quad\Rightarrow\quad x<0\cap D \quad f\uparrow\uparrow$

$y'<0 \quad\Rightarrow\quad x>0\cap D \quad f\downarrow\downarrow$

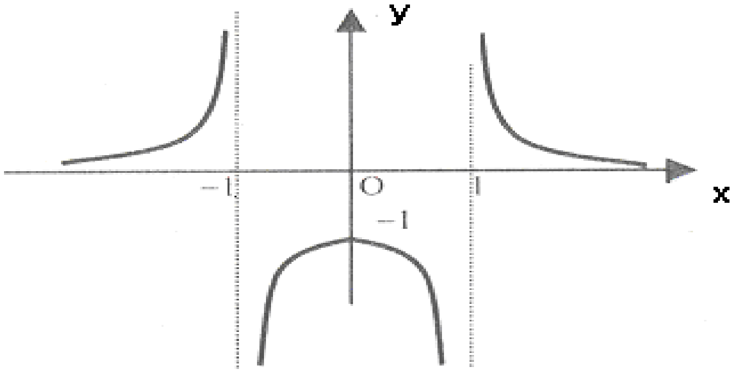
$y'=\boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad x=0$ $\qquad\qquad T_{\max}(0,-1)$

6. $y''=\dfrac{-2\cdot\left(x^2-1\right)^2+2x\cdot2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\dfrac{2\cdot\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$

$y''>0 \quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \quad f\cup$

$y''<0 \quad\Rightarrow\quad x\in(-1,1) \quad f\cap$

nema prevojnih tačaka



c) $y = x \cdot e^{-x}$

1. $D = R$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = +0$

2. $x = 0$ horizontal na asimptota

3. $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad N(0,0)$

4. $y > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$

$y < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

5. $y' = e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1 - x)$

$y' > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1 \quad f \uparrow\uparrow$

$y' < 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1 \quad f \downarrow\downarrow$

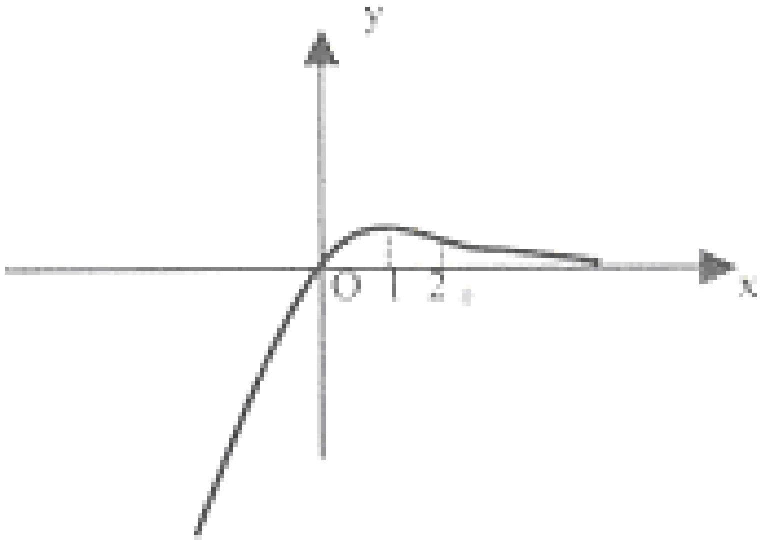
$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ $\qquad T_{\max}(1, e^{-1})$

6. $y'' = e^{-x}(-1)(1 - x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x - 2)$

$y'' > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2 \quad f \cup$

$y'' < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 2 \quad f \cap$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ $\qquad P(2, 2e^{-2})$



ZADACI ZA VJEŽBU

1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

2. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\dfrac{4x}{4-x^2}$.

3. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\dfrac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$.

4. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\dfrac{3x-x^2}{x-4}$.

5. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\dfrac{x-2x^2}{2\cdot(1-x)^2}$.

6. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

7. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\ln\frac{x-3}{x+2}$.

8. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\ln\frac{x-2}{x+1}$.

9. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=x\cdot\frac{\ln x-1}{\ln x+1}$.

10. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$.

11. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=(x-1)\cdot e^{\frac{1}{x-1}}$.

12. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x+1}}$.

13. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=(x-2)\cdot e^{\frac{1}{x-2}}$.

14. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=x\cdot e^{\frac{1}{1-x}}$.

15. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=x\cdot e^{\frac{1}{x-2}}$.

16. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=x\cdot e^{\frac{x}{1-x}}$.

17. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$.

18. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$.

19. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=x+\ln\frac{x}{x+1}$.