1 Orijentacija

1.1 Orijentacija ravni

Za trougao $A_0A_1A_2$ se kaže da se *orijentisan* ako su mu tjemena uredjena trojka (A_0, A_1, A_2). Za orijentisane trouglove $A_0A_1A_2$ i $B_0B_1B_2$ se kaže da su *nadovezani* ako pripadaju jednoj ravni i ako je $A_1 = B_0$ i $A_2 = B_1$. *Lanac* orijentisanih trouglova je konačan niz orijentisanih trouglova u kojem su svaka dva uzastpona člana nadovezana. Početak lanca je njegov prvi član, a kraj lanca njegov poslednji član. Za lanac se kaže da je zatvoren ako mu se početak i kraj poklapaju.

Lanac koji se sastoji od orijentisanih trouglova $A_iA_{i+1}A_{i+2}$, gdje je $0 \leq i \leq n-2$, $n > 2$ označavaćemo sa $A_0A_1 \ldots A_n$. Ukoliko je lanac zatvoren koristi se oznaka $A_0A_1 \ldots A_{n-3}$ pri čemu se podrazumijeva da je $A_{n-2} = A_0$, $A_{n+1} = A_1$ i $A_{n+2} = A_2$.

Kaže se da lanac povezuje trouglove Δ i Δ' ako je njegov početak Δ a kraj Δ'.

Theorem 1. *Za svaka dva orijetisana trougla Δ i Δ' ravni π postoji lanac koji ih povezuje.*

Proof. Neka je $\Delta = A_0A_1A_2$ i $\Delta' = B_0B_1B_2$. Neka je C tačka ravni π takva da je $C \neq B_0$ i C ne pripada pravoj odredjenoj tačkama A_1 i A_2. Neka je dalje C_2 tačka ravni π koja ne pripada ni jednoj od pravih A_2C_1, C_1B_0 i B_0B_1. Lanac $\mathcal{L} = A_0A_1A_2C_1C_2B_0B_1B_2$ povezuje orijentisane trouglove Δ i Δ'. $\square$

Za par nadovezanih orijentisanih trouglova $A_0A_1A_2$ i $A_1A_2A_3$ se kaže da čine *preorijentaciju* ako su tačke A_0 i A_3 sa raznih strana prave A_1A_2. *Parnost* lanca $\mathcal{L}$ je parnost broja preorijentacija medju parovima uzastopnih trougla u tom lancu.

Navodimo bez dokaza sledeća tvrdjenja, s obzirom da su dokazi analogni odgovarajućim dokazima u slučaju prave.

Theorem 2. *Zatvoreni lanci su parni.*

Corollary 1. *Lanci koji imaju zajednički početak i kraj su iste parnosti.*

Za dva orijentisana trougla se kaže da su u relaciji istosmjernosti ako je svaki lanac koji ih povezuje paran.

Theorem 3. *Relacija istosmjernosti na skupu svih orijentisanih trouglova neke ravni je relacija ekvivalencije koja sve orijentisane trouglove te ravni razlaže na dvije klase ekvivalencije.*

Klase ekvivalencije na koje relacija istosmjernosti razlaže sve orijentisane trouglove jedne ravni nazivamo orijentacijam ili smjerovima ravni. Dakle, svaka ravan ima dvije orijentacije.

1.2 Orijentacija prostora

Za tetraedar $A_0A_1A_2A_3$ se kaže da je orijentisan ako njegova tjemena predstavljaju uredjenu četvorku (A_0, A_1, A_2, A_3). Za tetraedre $A_0A_1A_2A_3$ i $B_0B_1B_2B_3$ se kaže da su nadovezani ako je $A_1 = B_0$, $A_2 = B_1$, $A_3 = B_2$. Lanac orijentisanih tetraedara je niz orijentisanih tetraedara u kojem su svaka dva uzasopna tetraedra nadovezana. Kao i u slučaju prave i ravni pokazuje se da za svaka dva orijentisana tetraedra postoji lanac koji ih spaja.

Za par nadovezanih tetraedara $A_0A_1A_2A_3$ i $A_1A_2A_3A_4$ se kaže da čini preorijentaciju ako se tačke A_0 i A_4 nalaze sa različitih strana ravni $A_1A_2A_3$. Parnost lanca orijentisnih tetraedara je parnost broja preorijentacija medju parovima uzastopnih tetraedara tog lanca. Kao i ranije važe tvrdjenja:

Theorem 4.

1. *Zatvoreni lanci su parni.*
2. *Lanci koji imaju isti početak i kraj su iste parnosti.*

Za dva orijentisana tetraedra se kaže da su u relaciji istosmjernosti ako je svaki lanac koji ih povezuje paran.

Theorem 5. *Relacija istosmjernosti na skupu svih orijentisanih tetraedara je relacija ekvivalencije koja sve orijentisane tetraedre razlaže na dvije klase ekvivalencije.*

Klase ekvivalencije na koje relacija istosmjernosti razlaže sve orijentisane tetraedre i nazivamo orijentacijama ili smjerovima prostora. Dakle, prostor ima dvije orijentacije.

2 Rogalj

Neka je u prostoru zadat konačan skup polupravih $a_1, \dots, a_n$ sa zajedničkim tjemenom O. Geometrijski lik koji se sastoji od uglova $\angle[a_1, a_2]$, $\angle[a_2, a_3], \dots, \angle[a_{n-1}, a_n]$, $\angle[a_n, a_1]$, pri čemu bilo koja dva uzastopna ugla u ovom nizu ne pripadaju istoj ravni, naziva se *rogljastom površi*. Obilježava se sa $Oa_1a_2 \dots a_n$. Za poluprave $a_1, \dots, a_n$ se kaže da su ivice, za tačku O da je tjeme, dok se za uglove $\angle[a_1, a_2]$, $\angle[a_2, a_3], \dots, \angle[a_{n-1}, a_n]$, $\angle[a_n, a_1]$ kaže da su strane ili pljosni rogljaste površi. Za dvije strane rogljaste površi se kaže da su susjedne ako imaju zajedničku ivicu.

Za rogljastu površ $Oa_1a_2 \dots a_n$ se kaže da je *prosta* ako ne postoje dvije strane te površi koje imaju zajedničkih tačaka, osim što svake dvije susjedne strane imaju zajedničku ivicu i i što sve strane sadrže tjeme O te površi. U protivnom se kaže da je rogljasta površ složena.

Neka je $Oa_1 \dots a_n$ rogljasta površ i neka su A i B dvije tačke koje joj ne pripadaju. Ako postoji poligonska linija koja spaja tačke A i B a sa $Oa_1 \dots a_n$ nema zajedničkih tačaka, onda se kaže da su tačke A i B sa iste strane rogljaste površi i to se zapisuje sa $A, B \ddot{-} Oa_1 \dots a_n$. U protivnom se kaže da su A i B sa različitih strana $Oa_1 \dots a_n$ i to se zapisuje sa $A, B \div Oa_1 \dots a_n$. Navodimo bez dokaza teoremu:

Theorem 6. *Relacija sa iste strane proste rogljaste površi je relacija ekvivalencije koja skup svih tačaka prostora van te površi razlaže na dvije klase ekvivalencije.*

Svaka od klasa ekvivalencije sa iste strane rogljaste površi naziva se n-tostranim rogljem, a površ $Oa_1 \dots a_n$ naziva se njegovom granicom. Za trostrani rogalj se kaže da je triedar.

3 Poliedar

Za dvije poligonske površi se kaže da su susjedne ako imaju jednu zajedničku ivicu i osim tačaka te ivice nemaju drugih zajedničkih tačaka. Za konačan niz poligonskih pobrši se kaže da je lanac ako su svake dvije uzastopne površi tog niza susjedne. Za skup poligonskih površi se kaže da je povezan ako se svake dvije površi tog skupa mogu povezati lancem sastavaljenim od poligonskih površi tog skupa.

Konačan, povezan skup zatvorenih poligonskih površi naziva se poliedarskom površi ako važi:

1. ako površi zadatog skupa imaju jedno zajedničko tjeme, tada unutrašnji uglovi tih površi koje imaju to tjeme zajedničko pripadaju stranama jedne rogljaste površi koja sem strana koje sadrže pomenute uglove nema drugih strana;

2. svaka duž koja pripada ivici neke poligonske površi zadatog skupa, pripada najviše još jednoj od ivica neke druge površi zadatog skupa.

Za poligonske površi koje sačinjavaju poliedarsku površ se kaže da su pljosni ili strane te poliedarske površi. Tjemenima i ivicama poliedarske površi nazivaju se tjemena i ivice njenih strana.

Za poliedarsku površ se kaže da je prosta ako ne postoje dvije strane te površi koje imaju zajedničkih tačaka osim što susjedne strane imaju zajedničku ivicu i što strane koje pripadaju stranama jedne rogljaste površi imaju zajedničko tjeme. U protivnom, ako takve dvije strane postoje za površ se kaže da je složena.

Na sličan način kao i u slučaju poligona dokazuju se sledeće teoreme.

Theorem 7. *Neka je ω poliedarska površ, a i b poluprave sa istim tjemenom O, takvim da $O \notin \omega$, pri čemu poluprave a i b ne sadrže ni jedno tjeme i ne sijeku ni jednu ivicu površi ω. Brojevi presječnih tačaka $k(a)$ i $k(b)$ polupravih a i b sa površi ω su iste parnosti.*

Na osnovu ove teorme kao i u slučaju poligona se definiše pojam unutrašnjosti i spoljašnjosti proste poliedarske površi. Tačka $O \notin \omega$ pripada unutrašnjosti poliedarske površi ω ako svaka polupravа sa tjemenom O koja ne sadrži ni jedno tjeme i ne siječe ni jednu ivicu površi ω, siječe površ ω u nepranom broju tačaka. U protivnom se kaže da tačka O pripada spoljašnjosti površi ω.

Theorem 8. *Unutrašnjost i spoljašnjost poliedarske površi su neprazni skupovi.*

Unutrašnjost poliedarske površi se naziva otvorenim poliedrom, a površ ω granicom te površi. Unija otvorenog poliedra i njegove granice naziva se zatvorenim poliedrom.

Rod poliedarske površi, opisno rečeno je broj rupa koje ima odnosno ograničava ta površ. Recimo, fudbalska lopta je poliedarska površ nultog roda jer nema rupa, dok je šlauf poliedarska površ roda 1 jer ograničava jednu rupu. Važi sledeća teorema:

Theorem 9. *Ako je T broj tjemena, I broj ivica i P broj strana poliedarske površi nultog roda, to je*

$$T - I + P = 2. \tag{1}$$

Jendakost (1) je poznata pod nazivom Ojlerova formula za poliedarske površi nultog roda.

Definition 1. *Za poliedar se kaže da je topološki pravilan ako*

1. *svaka njegova strana ima isti broj ivica,*
2. *svaki njegov rogalj ima isti broj ivica.*

Theorem 10. *Postoji tačno pet neizomorfnih topološki pravilnih poliedara kojima je granica poliedarska površ nultog roda. To su tetraedar, heksaedar, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar.*