EUKLIDSKA I HIPERBOLIČKA GEOMETRIJA

UNIVERZITET U BEOGRADU

Zoran Lučić

Euklidska i hiperbolička

GEOMETRIJA

drugo izdanje

TOTAL DESIGN i MATEMATIČKI FAKULTET

BEOGRAD

1997.

Za izdavače: Branko Gavrić i dr Zoran Kadelburg

Posvećeno seni

Dragomira Lopandića
(1929–1981)

PREDGOVOR

Knjiga pred vama je udžbenik geometrije nastao iz skripti koje su studenti matematike na Beogradskom univerzitetu koristili poslednjih osam godina. Sastoji se iz uvoda i 5 poglavlja podeljenih na ukupno 35 odeljaka.

U uvodu su ukratko izložena znanja koja se pretpostavljaju prilikom deduktivnog zasnivanja geometrije. Prikazana je, u najkraćem, i istorija osnova geometrije.

Prvo poglavlje je posvećeno prvim dvema grupama aksioma, aksiomama veze i rasporeda i njihovim posledicama. U njemu su definisani najznačajniji geometrijski objekti: duž, poligon, poluprava, poluravan, poluprostor, ugaona linija, ugao, diedar, poligonska površ, rogljasta površ, rogalj, poliedarska površ, poliedar, i dokazana su njihova osnovna svojstva. Na kraju, uveden je i pojam orijentacije prave, ravni i prostora.

U drugom poglavlju, posle uvođenja aksioma podudarnosti i dedukovanja njihovih prvih posledica, uvedeni su pojmovi izometrije i podudarnosti likova. Njima je posvećen najveći deo ove knjige. Zahvaljujući definisanju ovih dvaju pojmova omogućeno je uvođenje značajnih geometrijskih relacija i skupova. To su, pre svega: prav ugao, upravnost, refleksije, pramenovi i snopovi pravih i ravni, epicikli i episfere.

Treće poglavlje se odnosi na geometrijsku neprekidnost. U njemu su, posle uvođena Arhimedove i Kantorove aksiome, dokazane Dedekindova teorema i teoreme o presecima pravih i epicikala. Zatim je utemeljena teorija merenja duži i uglova i definisana sličnost. Dokazane su i četiri Ležandrove teoreme, a zatim su definisani pravilni poligoni i poliedri. Na kraju je uveden i pojam paralelnosti.

U četvrtom poglavlju ukratako je izložena euklidska geometrija. Klasifikovane su izometrije i sličnosti euklidske ravni i prostora, dokazane su Pitagorina teorema o razloživoj jednakosti i Talesova teorema, ispitane su osnovne osobine homotetije, potencije i inverzije i, na posletku, izložena je teorija merenja površi.

Poslednje, peto poglavlje, posvećeno je hiperboličkoj geometriji. U njemu se dokazuje da se defekt površi može smatrati njenom merom, dokazuju se osobine paralelnosti koje hiperboličku geometriju bitno razlikuju od euklidske, a dokazuju se i osobine hiperparalelnosti. Klasifikovane su izometrije hiperboličke ravni i prostora, određeni su svi pramenovi i snopovi, njima pridruženi epicikli i episfere, a utemeljena je i geometrija orisfere. Uvedeni su pojmovi asimptotskih poligona i poliedara i funkcija Lobačevskog, a dokazano je i da defekt asimptotskog poligona ima osobine mere. Jedan odeljak ovog poglavlja posvećen je modelima hiperboličke ravni i prostora, a na posletku je izložena kratka istorija paralelnosti.

Želim da iskažem svoju zahvalnost mnogobrojnim studentima matematike koji su u mnogome uticali na konačnu formu ovog udžbenika. Njihove primedbe na skripta iz kojih su pripremali ispit iz Osnova geometrije bile su za mene valjano uputstvo. Svojim kolegama koji su čitali delove ove knjige, pre svega Dragoslavu Ljubiću, a zatim Vladimiru Jankoviću i Gojku Kalajdžiću, veoma sam zahvalan na savetima i sugestijama. Zahvalnost dugujem i Marku Nikoliću, Nebojši Vasiljeviću, Dejanu Vesiću i Aleksandru Bakiću koji su mi pomogli u pripremi teksta za štampu.

Matematički fakultet
Beograd, 25. maj 1994.

Zoran Lučić

SADRŽAJ

UVOD

O deduktivnoj metodi. U izgradnji bilo koje valjano zasnovane naučne teorije nije moguće sve pojmove definisati i sve stavove dokazati. Da bi se odredio sadržaj nekog pojma nužno se koriste drugi pojmovi, a da bi se, sa svoje strane, odredio sadržaj tih pojmova bez ulaženja u cirkularno definisanje, mora se pribegavati novim pojmovima, itd. Na taj način započinje proces koji, ako ga nastavimo do u beskonačnost, možemo okarakterisati kao beskonačnu regresiju. Zahteve jasnoće i kritičnosti u definisanju ne možemo zadovoljiti ni kružnim definisanjem pojmova ni beskonačnim upućivanjem na neke druge pojmove, nego samo priznanjem da proces definisanja neophodno započinje pojmovima koji nisu definisani. Takve pojmove zvaćemo *osnovnim* ili *nedefinisanim pojmovima*. Sve ostale pojmove čiji sadržaj izvodimo korišćenjem osnovnih pojmova zvaćemo *izvedenim* ili *definisanim pojmovima*, a iskaze kojima se određuje sadržaj izvedenih pojmova zvaćemo *definicijama*.

Na isti način, da bi se utvrdila istinitost nekog stava neophodno je pozvati se na druge stavove, a ovaj postupak opet, ako ne uđemo u cirkulano dokazivanje, vodi u beskonačnu regresiju. Stoga proces utvrđivanja istinitosti stavova neke teorije započinjemo stavovima čiju istinitost pretpostavljamo. Takve stavove zvaćemo *osnovnim stavovima* ili *aksiomama*. Sve ostale stavove čiju istinitost izvodimo iz aksioma zvaćemo *teoremama* ili *dokazanim stavovima*, a postupak njihovog utvrđivanja zvaćemo *dokazom*.

Jedna od važnih disciplina koja se može zasnovati u skladu sa navedenim principima je logika. Ako se bilo koja druga naučna teorija zasniva na istim principima, onda se ona obično zasniva i na već utemeljenoj logici. Logika se tada, da kažemo, već pretpostavlja. Pojmove logike u takvim okolnostima upotrebljavamo u formulacijama aksioma, definicija i teorema bez bližeg određenja, a logičke stavove primenjujemo u dokazima ne izvodeći njihovu istinitost. Prilikom izgradnje neke matematičke discipline pokatkad je veoma podesno koristiti ne samo logiku već i neku, na istim principima prethodno već zasnovanu matematičku disciplinu. Ove discipline koje zajedno sa logikom prethode izgradnji neke matematičke discipline zvaćemo *pretpostavljenim disciplinama*. Logika je pretpostavljena disciplina aritmetici, a za izgradnju geometrije podesno je pretpostaviti i logiku (zajedno sa teorijom skupova) i aritmetiku (zajedno sa teorijom realnih brojeva).

Metoda izgradnje neke discipline u strogoj saglasnosti sa prethodno navedenim principima naziva se *deduktivnom* ili *aksiomatskom metodom*, a na taj način zasnovane discipline nazivaju se *deduktivnim* ili *aksiomatskim teorijama*. Sam skup osnovnih pojmova i aksioma naziva se *aksiomatskim sistemom*.

Zamenimo li osnovne pojmove neke deduktivne teorije odgovarajućim promenljivama $x, y, z, \dots$, aksiome (i svi ostali stavovi) te teorije postaće predikatske formule $A(x, y, z, \dots), B(x, y, z, \dots), C(x, y, z, \dots), \dots$ koje $x, y, z, \dots$ sadrže kao slobodne promenljive. Tada za proizvoljno izabrane objekte $X, Y, Z, \dots$ možemo ustanoviti da li *zadovoljavaju aksiome*, drugim rečima da li su predikatske formule $A, B, C, \dots$ istinite kada promenljive $x, y, z, \dots$ zamenimo sa $X, Y, Z, \dots$, ili nisu. U prvom slučaju kažemo da su objekti $X, Y, Z, \dots$ *model* ili *realizacija aksiomatskog sistema* deduktivne teorije, ili, jednostavnije, da oni čine *model deduktivne teorije*, a u drugom, da nisu model te teorije. Ako su objekti $X, Y, Z, \dots$ koji zadovoljavaju aksiome neke deduktivne teorije $\mathcal{T}_1$ (osnovni ili definisani), pojmovi neke druge teorije $\mathcal{T}_2$, tada kažemo da su aksiome teorije $\mathcal{T}_1$ *interpretirane unutar teorije* $\mathcal{T}_2$, a da je unutar deduktivne teorije $\mathcal{T}_2$ moguće naći *interpretaciju aksiomatskog sistema teorije* $\mathcal{T}_1$. Kazaćemo da je tada načinjen *model teorije* $\mathcal{T}_1$ *unutar teorije* $\mathcal{T}_2$.

Prilikom izgradnje neke deduktivne teorije u velikoj meri postoji sloboda izbora osnovnih pojmova i aksioma te teorije. Dva aksiomatska sistema date teorije smatraćemo ekvivalentnim ako se svaki pojam jednog od tih dvaju sistema može definisati pomoću pojmova drugog sistema i ako se svaki stav jednog od tih sistema može dedukovati iz stavova drugog. Nisu jedino teorijski razlozi odlučujući u davanju prednosti jednom aksiomatskom sistemu nad drugim, već u tome značajnu ulogu imaju i drugi, na prvi pogled manje značajni činioci, pre svega praktični, didaktički, pa čak i estetski.

Postojanje slobode u izboru aksiomatskog sistema nikako ne znači i odsustvo bilo kakvih zahteva u izboru osnovnih pojmova i aksioma neke deduktivne teorije. Prvo svojstvo skupa aksioma neke deduduktivne teorije koje se uvek zahteva, jeste da taj sistem bude *neprotivrečan* (*konzistentan* ili *saglasan*); to znači da se iz njega ne mogu dedukovati i neki stav i njegova negacija, drugim rečima, da se od svaka dva protivrečna stava bar jedan ne može dokazati. Budući da iz nekonzistentnog sistema aksioma sledi bilo koji stav, on nema nikakvih vrednosti, pa je neprotivrečnost ne samo prvi i najvažniji već i bezuslovan zahtev svakog aksiomatskog sistema.

Drugo svojstvo koje može imati neka deduktivna teorija, jeste *potpunost*. Ako se za svaka dva protivrečna stava formulisana u pojmovima teorije o kojoj je reč i teorija koje su pretpostavljene, bar jedan od tih stavova može dokazati, onda se za tu aksiomatsku teoriju kaže da je *potpuna*. Za iskaz kojem se u zadatoj teoriji može dokazati negacija kazaćemo da se može *oboriti* u toj teoriji. Dakle, aksiomatski sistem će biti potpun ako se svaki stav formulisan pojmovima aksiomatske teorije, može dokazati ili oboriti. Potpunost je osobina aksiomatskog sistema koja nije od istog značaja kao i neprotivrečnost. Ako je neki aksiomatski sistem neprotivrečan, on će biti logički vredan i ako nije potpun. Nedostatak nepotpunog aksiomatskog sistema je u tome što se u njemu neki stavovi ne mogu ni dokazati ni oboriti. Ako je neki aksiomatski sistem nekonzistentan, neophodno je ukloniti neke od njegovih aksioma koji ga čine nekonzistentnim. Ako je sistem nepotpun, onda se mogu dodati neke aksiome koji će omogućiti da dokažemo ili oborimo one stavove koji se mogu formulisati u pojmovima teorije, a ne mogu se ni dokazati ni oboriti.

Treća osobina aksiomatskog sistema na kojoj se najmanje insistira je *nezavisnost aksioma i osnovnih pojmova*. Njome se iziskuje da se ni jedna aksioma ne može dedukovati iz ostalih aksioma, i da se ni jedan od osnovnih pojmova ne može definisati pomoću ostalih osnovnih pojmova aksiomatskog sistema. Svođenje broja osnovnih pojmova i aksioma neke deduktivne teorije na minimum najčešće za posledicu ima usložnjavanje dokaza, pa stoga dedukovanje pojedinih stavova, pa i delova te teorije, može da postane zamorno, a sama teorija glomazna i nepregledna. Stoga se ne smatra neoprostivim odustajanje od ovog zahteva u izgradnji neke deduktivne teorije.

O Euklidovim Elementima. Prvi pokušaji stvaranja deduktivnih teorija sežu dve i po hiljade godina u prošlost. Elementi Hipokrata sa Hiosa, napisani sredinom petog veka stare ere, prvi je pokušaj sistematizacije geometrijskih znanja. Na nesreću, njegov rukopis do nas nije dospeo, no Simplikije (VI vek nove ere), jedan od poslednjih neoplatoničara, u svojim komentarima Aristotelove Fizike preneo je jedan deo Eudemove Istorije geometrije iz druge polovine IV veka stare ere (pisane verovatno −334. godine), u kojoj se komentarišu Hipokratovi Elementi. Naslov Elementi latinski je prevod grčkog Στοιχεῖα i, u antičko vreme, uobičajeno se odnosio na deduktivno zasnovanu geometriju.

Zahvaljujući neoplatoničaru Proklu (410–485), jednom od starešina atinske škole na njenom zalasku koji je, kao i Simplikije, citirao izvesne delove izgubljene Eudemove istorije geometrije, znamo da je Leon, verovatno pod uticajem samog Platona, oko 370. godine stare ere sastavio nove Elemente, da je, zatim, tridesetak godina posle Leona, opet za potrebe Platonove škole, još potpunije Elemente napisao Teudije iz Magnezije, a dopunio ih je Hermotim iz Kolofona. Ovo Teudijevo delo i njegove dopune koje je sačinio Hermotim izgubljeni su tokom istorije i njihov značaj u istoriji matematike se ogleda, pre svega, u uticaju na Euklida kod stvaranja njegovog naučnog dela.

Neuporedivo najčuveniju, najčitaniju i najuticajniju raspravu sa naslovom Elementi napisao je oko 300. godine stare ere Euklid (oko −365 do −275), učenik Platonove Akademije i osnivač geometrijske škole u Aleksandriji. Budući da je više od dva milenijuma to Euklidovo delo bilo osnov svakog obrazovanja, njegov uticaj na kulturu čovečanstva bio je ogroman. Euklid je, blagodareći Elementima, postao učitelj svih potonjih naraštaja jer nijedan od udžbenika geometrije napisanih pre njega nije mogao da se održi, a posle njega stolećima nije načinjen ni pokušaj da se geometrija drugojačije utemelji. Zahvaljujući Elementima geometrija je vekovima doživljavana kao savršenstvo i stoga se prema njoj ravnalo svako drugo sistematisano znanje.

Euklidovi Elementi se sastoje iz 13 knjiga i u njima su postupno izložena osnovna geometrijska znanja onoga vremena. Prvih šest knjiga se odnose na planimetriju i, najkraće rečeno, u njima se razvija geometrija trouglova, četvorouglova, krugova, poligona, proporcija i sličnosti. Naredne četiri se odnose na geometrijsku teoriju brojeva, a među tvrđenjima dokazanim u ovim knjigama ističu se IX.20 i X.9 u kojima se dokazuje da ima neograničeno mnogo prostih brojeva i da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. Poslednje tri knjige se odnose na stereometriju — jedanaesta knjiga je uvod u stereometriju, dvanaesta se bavi piramidama, konusima i cilindrima, a trinaesta pravilnim poliedrima.

Prvu knjigu Elemenata Euklid započinje nizom definicija (ukupno 23) kojima se uvode prvi geometrijski pojmovi poput tačke, prave, ravni, ugla, kruga itd. Navodimo sve definicije pruzete iz prevoda Euklidovih Elemenata Antona Bilimovića:

1. Tačka je ono što nema delova.
2. Linija je dužina bez širine.
3. Krajevi linije su tačke.
4. Prava je linija ona, koja za tačke na njoj podjednako leži.
5. Površina je ono što ima samo dužinu i širinu.
6. Krajevi površine su linije.
7. Ravan je površina koja za prave na njoj podjednako leži.
8. Ugao u ravni je uzajamni nagib dveju linija u ravni koje se seku i koje ne leže u istoj pravoj.
9. Ako su linije koje obrazuju ugao prave, ugao se zove pravolinijski.
10. Ako prava, koja stoji na drugoj pravoj, obrazuje sa ovom dva susedna jednaka ugla, svaki od njih je prav, a podignuta prava zove se normala na onoj na kojoj stoji.
11. Tup ugao je onaj koji je veći od pravog.
12. Oštar je onaj koji je manji od pravog.
13. Granica je ono što je kraj ma čega.
14. Figura je ono što je omeđeno ili jednom ili sa više granica.
15. Krug je ravna figura omeđena takvom jedinom linijom (koja se zove periferija), da su sve prave povučene od jedne tačke, koja se nalazi u samoj figuri, prema toj liniji (prema periferiji kruga) međusobno jednake.
16. Ova tačka zove se središte kruga.
17. Prečnik kruga je svaka prava što prolazi kroz središte kruga a ograničena je sa svake strane periferijom kruga; on polovi krug.
18. Polukrug je figura ograničena prečnikom i njime odvojenom periferijom kruga; središte polukruga je isto kao i središte kruga.

19. Pravolinijske figure su one koje su ograničene pravama; trostrane su ograničene sa tri, četvorostrane sa četiri, mnogostrane sa više od četiri prave.
20. Od trostranih figura jednakostrani trougao ima tri jednake strane, jednakokraki ima samo dve jednake strane, a raznostrani ima tri nejednake strane.
21. Dalje, od trostranih figura je pravougli trougao onaj koji ima prav ugao, tupougli koji ima tup ugao, a oštrougli koji ima tri oštra ugla.
22. Od četvorostranih figura kvadrat je jednakostran i sa pravim uglovima; pravougaonik je sa pravim uglovima, no nije sa jednakim stranama; romb sa jednakim stranama, no nije sa pravim uglovima; rombiod sa jednakim naspramnim stranama, no nije jednakostran ni sa pravim uglovima. Ostale četvorostrane figure neka se zovu trapezi.
23. Paralelne su one prave, koje se nalaze u istoj ravni i koje se, produžene u beskrajnost na obe strane, ne seku jedna sa drugom.

Nije teško primetiti da ovo nisu stroge definicije već samo kratka objašnjenja elementarnih geometrijskih pojmova izložena sa namerom da u svesti čitaoca stvore intuitivne pretstave. Razumeti da se u deduktivno izloženoj teoriji svi pojmovi ne mogu definisati, podjednako je složeno kao i shvatiti da se svi stavovi deduktivne teorije ne mogu dokazati. Budući da Euklid u svojim Elementima ne dokazuje sve stavove već, bez provere, pretpostavlja da važe neki iskazi koje on naziva aksiomama i postulatima, postavlja se pitanje zašto on sve pojmove pokušava da definiše. Da bismo odgovorili na ovo pitanje napomenimo, najpre, da je sadržaj pojmova koji se ne definišu u nekoj deduktivnoj teoriji, određen aksiomama koje se na te pojmove odnose. Međutim, osnovni pojmovi mogu se interpretirati na više različitih načina pa, stoga, ako tačku, pravu i ravan ne definišemo već pretpostavimo da su sadržaji tih pojmova poznati, tada tačka, prava i ravan može biti bilo koja trojka objekata koja zadovoljava aksiome geometrije. Sjajan učenik Platonove Akademije, Euklid nije hteo da dopusti da tačke, prave i ravni budu interpretirane bilo kako drukčije do kao idealni objekti Platonovog sveta ideja. Stoga je svesno načinio konfuziju i svaki pojam objasnio definicijom.

Osnovne stavove geometrije Euklid je podelio na aksiome i postulate. U različitim prepisima Elemenata koji su do nas dospeli, broj postulata i aksioma varira. Obično se prihvata da je Euklid zasnovao geometriju na 5 postulata i 9 aksioma. Najpre navedimo kako glase postulati kako je to učinjeno u Elementima:

„Neka se pretpostavi:
1. Da se može povući od svake tačke ka svakoj drugoj tački prava linija.
2. I da ograničena prava može biti produžena u svom pravcu neprekidno.
3. I da se može opisati od svakog središta svakim rastojanjem krug.
4. I da su svi pravi uglovi jednaki međusobno.
5. I da će se, ako jedna prava u preseku sa drugim dvema obrazuje sa iste strane dva unutrašnja ugla čiji je zbir manji od dva prava ugla, te dve prave, beskrajno produžene, seći i to sa one strane sa koje su ovi

uglovi manji od dva prava."

Kako primećujemo, postulati iskazuju neke geometrijske istine. Prva tri postulata su konstruktivnog karaktera i na njima je vekovima zasnivana teorija geometrijskih konstrukcija. Svojom složenošću ističe se peti postulat koji svaki od ostalih postulata višestruko premašuje već svojom dužinom. Time je peti postulat izazvao podozrenje poznavalaca Euklidovog dela koji su smatrali da, zbog svoje neelementarnosti, peti postulat treba dedukovati iz ostalih aksioma geometrije, a nikako ne pristati na to da bude jedan od osnovnih stavova.

Kao i postulati, u Euklidovim Elementima i aksiome su osnovna tvrđenja. One se, većinom, od postulata razlikuju svojim karakterom koji nije isključivo geometrijski. Navedimo ih:

1. Oni (objekti) koji su jednaki istom (objektu) jednaki su međusobno.
2. I ako se jednakim (objektima) dodaju jednaki (objekti) celine su jednake.
3. I ako se od jednakih (objekata) oduzmu jednaki (objekti) ostaci su jednaki.
4. I ako se nejednakim (objektima) dodaju jednaki (objekti) celine su nejednake.
5. I udvostručeni jednaki (objekti) jednaki su međusobno.
6. I polovine od jednakih (objekata) jednake su međusobno.
7. I oni (geometrijski objekti) koji se mogu poklopiti jedanaki su međusobno.
8. I celina je veća od dela.
9. I dve prave ne ograničavaju oblast.

Samo su sedma i deveta aksioma, za razliku od ostalih, geometrijskog karaktera. U nekim prepisima Elemenata deveta aksioma se navodi kao šesti postulat, što dokazuje da su prepisivači kroz vekove sebi dopuštali da prave manje intervencije u tekstu koji su prepisivali.

Euklidovi nastavljači. Još iz antičkih vremena geometrijska istraživanja su se kretala u dva suprotstavljena pravca. Sa jedne strane aksiomatika je dopunjavana i proširivana da bi se iz osnovnih stavova mogla dedukovati sva geometrijska tvrđenja, a sa druge strane, dugotrajni i naporni su bili pokušaji da se Euklidova aksiomatika redukuje izostavljanjem petog Euklidovog postulata iz spiska osnovnih stavova.

Već prvi nastavljači Euklidovog dela ustanovili su da postulati i aksiome na kojima počivaju Elementi nisu dovoljni da se iz njih izvedu sva geometrijska tvrđenja. U prvoj knjizi svoje rasprave O sferi i cilindru, Arhimed (-287 do -212) je dopunio Euklidovu aksiomatiku sa pet novih aksioma. Prva od njih je tvrđenje da je „prava najkraća od svih linija koje imaju zajedničke krajeve". Poslednju, petu aksiomu Arhimed je preuzeo od Eudoksa (oko -408 do -355). Njome se pretpostavlja da „od dveju nejednakih linija, dveju nejednakih površina ili dvaju nejednakih tela, veća veličina biće manja od one veličine koja se dobija kada manju umnožimo potreban broj puta". Ova aksioma i danas služi kao jedan od osnovnih stavova geometrije; to je tzv. Arhimedova, ili Eudoks-Arhimedova aksioma prestiživosti.

I posle Arhimeda ređali su se pokušaji da se temelji geometrije upotpune. Ipak, tokom mnogih stoleća, sve do početka devetnaestog veka, niko nije suštinski unapredio osnove geometrije izložene u Elementima. Bilo je u tom periodu sjajnih uspeha u matematici koji se ogledaju, pre svega, u stvaranju novih matematičkih teorija: izgrađena je simbolička algebra, zasnovana je analitička geometrija, a nakon toga i diferencijalni i integralni račun. Tako unapređen matematički aparat omogućio je rešavanje mnogih geometrijskih problema, pa ipak, u osnovima geometrije suštinski se ništa nije promenilo od vremena Euklida i Arhimeda.

Ispitivanja iz teorije paralelnih koja se odnose na peti Euklidov postulat izdvajaju se kao važan pogled na osnove geometrije. Već najstariji tumači Elemenata, primetivši da Euklid dokazuje mnogo elementarnija tvrđenja, smatrali su da je taj postulat ozbiljan nedostatak u sistemu, smetnja koju treba ukloniti. Generacije Euklidovih nastavljača i pasioniranih ljubitelja geometrije odgonetale su pitanje petog Euklidovog postulata kroz narednih dvadeset stoleća i više. Nakon mnoštva pokušaja da se, najčešće indirektnim postupkom, izvede njegov dokaz, tek u devetnaestom veku konačno je razrešeno ovo pitanje dokazom da peti Euklidov postulat ne zavisi od ostalih aksioma geometrije. Tako se dospelo do prvog geometrijskog rezultata od Euklidovih vremena, koji je znatno unapredio osnove geometrije. U delu Nikolaja Lobačevskog (Николай Иванович Лобачевский 1792–1856) i Janoša Boljaja (Bolyai Janos 1802–1860) prvi put je izražena misao da peti postulat ne zavisi od ostalih aksioma geometrije te da se, stoga, ne može izvesti iz ostalih postulata. Time je prošireno shvatanje samog smisla geometrije i načinjen korak u jedan sasvim novi geometrijski svet.

Rezultati Lobačevskog i Boljaja postali su sasvim jasni tek krajem devetnaestog veka kada je konačno formiran pogled na logičke principe zasnivanja geometrije i kada je, prvi put, geometrija logički korektno utemeljena. Sledeći napore trojice geometričara sa kraja devetnaestog veka: Peana, Paša i Veronezea, David Hilbert (1862–1943) je u svom delu Osnove geometrije koje je izdato 1899. godine, geometriju zasnovao na neprotivrečnom, nezavisnom i potpunom sistemu aksioma.

Za razliku od Euklidovih Elemenata u Hilbertovim Osnovama geometrije nema opisivanja osnovnih geometrijskih pojmova: tačke, prave, ravni itd. Hilbert na samom početku jednostavno kazuje:

> „Mi zamišljamo tri različita sistema stvari: stvari prvog sistema nazivamo *tačkama* i označavamo ih sa $A, B, C, \ldots$; stvari drugog sistema nazivamo *pravama* i označavamo ih sa $a, b, c, \ldots$; stvari trećeg sistema nazivamo *ravnima* i označavamo ih sa $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$; tačke se nazivaju *elementima linearne geometrije*, a tačke, prave i ravni se nazivaju *elementima prostorne geometrije* ili *elementima prostora*.

Mi zamišljamo tačke, prave i ravni u izvesnim međusobnim odnosima i označavamo ove odnose rečima *„ležati"*, *„između"*, *„podudarno"*, *„paralelno"*, *„neprekidno"*; tačan i za matematičke svrhe potpun opis ovih odnosa postiže se pomoću *aksioma geometrije.*

Aksiome geometrije možemo podeliti u pet grupa; svaka pojedinačno od ovih grupa izražava izvesne povezane osnovne činjenice našeg opažaja. Mi ćemo ove grupe aksioma nazvati na sledeći način:

I 1–8. aksiome veze,
II 1–4. aksiome rasporeda,
III 1–5. aksiome podudarnosti,
IV aksioma paralelnosti,
V 1–2. aksiome neprekidnosti."

I danas, skoro sto godina nakon izlaska Osnova geometrije kojima su i pored priznanja za njihov „izvanvremensku valjanost" u tom vremenu izrečene i mnoge zamerke, geometrija počiva na principima koje je utemeljio Hilbert. Značaj Hilbertovih Osnova geometrije ogleda se u tome što je njihova formalistička koncepcija stvorila preduslov za istraživanja koja se odnose na potpunost, neprotivrečnost i nezavisnost aksiomatskog sistema.

GEOMETRIJA PORETKA

Osnovni pojmovi i osnovni stavovi geometrije. Pojmove tačke, prave i ravni Euklid je uveo u geometriju definicijama 1, 4 i 7 kojima započinje svoje Elemente. Kako smo već primetili, ovo nisu stroge definicije već samo kratka i nejasna objašnjenja elementarnih geometrijskih pojmova. Zaista, kako razumeti pravu kao „liniju koja za tačke na njoj podjednako leži" ili ravan kao „površinu koja za prave na njoj podjednako leži"? Arhimed je definisao pravu kao „najkraću od svih linija koje imaju zajedničke krajeve" i ta definicija prave je, zahvaljujući Ležandru (A.M. Legendre 1752–1833) koji je preuzeo u svojim Elementima geometrije iz 1794. godine, dospela do mnogih kasnijih udžbenika geometrije. U svojim Načelima geometrije iz 1889. godine Peano (1858–1932) je karakterisao pravu kao skup koji se sastoji iz tačaka A i B, svih tačaka između njih, svih tačaka sa one strane tačke A sa koji nije B i svih tačaka sa one strane tačke B sa koji nije A, a ravan kao ukupnost pravih koje sadrže: tačku A i neku tačku duži $[BC]$ ili tačku B i neku tačku duži $[CA]$ ili tačku C i neku tačku duži $[AB]$, pri čemu su A, B, C tri nekolinearne tačke. U Hilbertovim Osnovama geometrije tačke, prave i ravni su tri „sistema stvari" koji se ne definišu.

Sledeći ideje iskazane u Osnovima geometrije Borsuka i Šmieleve (K. Borsuk, W. Szmielew) iz 1955. godine, osnovnim pojmovima geometrije smatraćemo: skup $\boldsymbol{S}$, dve klase $\mathcal{L}$ i $\mathcal{P}$ njegovih podskupova, i dve relacije: tročlanu relaciju $\mathcal{B}$ i četvoročlanu relaciju $\mathcal{C}$, koje su definisane na skupu $\boldsymbol{S}$.

Skup $\boldsymbol{S}$ zvaćemo *prostorom*, a njegove elemente *tačkama* i obeležavamo ih velikim latinskim slovima $A, B, C, \ldots$ Elemente klase $\mathcal{L}$ zvaćemo *pravama* i obeležavamo ih malim latinskim slovima $a, b, c, \ldots$ Elemente klase $\mathcal{P}$ zvaćemo *ravnima* i obeležavamo ih malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Neprazne skupove tačaka zvaćemo *likovima* ili *figurama*. Ukupan broj tačaka nekog lika Φ obeležavaćemo sa $|\Phi|$ samo ako je taj broj konačan. Ako neki lik Φ pripada ravni α, zvaćemo ga *ravnim*, a reći ćemo i da je *Φ u ravni α*, a ako ne pripada ni jednoj ravni, za njega ćemo reći da je *prostoran*. Ako lik Φ pripada pravoj a, reći ćemo da je *Φ na pravoj a* i zvaćemo ga *linearnim*. Ako su likovi Φ i Φ' *istovetni*, drugim rečima ako svaka tačka koja pripada jednom od tih likova, pripada i drugom, pisaćemo $\Phi = \Phi'$. U suprotnom, reći ćemo da su likovi Φ i Φ' *različiti* ili da su *razni* i pisaćemo $\Phi \neq \Phi'$. Ako neka tačka ne pripada datom geometrijskom liku, za nju ćemo reći da je *van* tog lika. Za likove koji imaju neprazan presek reći ćemo da se *seku*.

Relaciju $\mathcal{B}$ zvaćemo relacijom *između* ili relacijom *poretka tačaka na pravoj*, a formulu $\mathcal{B}(A, B, C)$ čitaćemo: tačka B je između tačaka A i C.

Relaciju $\mathcal{C}$ zvaćemo relacijom *podudarnosti*, a formulu $\mathcal{C}(A, B, C, D)$ čitaćemo: par tačaka (A, B) je podudaran paru tačaka (C, D). Umesto $\mathcal{C}(A, B, C, D)$ koristićemo i oznaku $(A, B) \cong (C, D)$.

Osnovne stavove (ili aksiome) geometrije svrstavamo u pet grupa. Prvu grupu kojom se izražavaju skupovni odnosi među tačkama, pravama i ravnima nazivamo *aksiomama pripadanja* ili *aksiomama incidencije*. Osnovne osobine relacije $\mathcal{B}$ izražavaju se drugom grupom aksioma, *aksiomama rasporeda*. Aksiome treće grupe se tiču relacije $\mathcal{C}$ i nazivamo ih *aksiomama podudarnosti*. *Aksiome neprekidnosti* sačinjavaju četvrtu grupu, a peta grupa aksioma se sastoji od samo jedne aksiome, *aksiome paralelnosti*.

U skladu sa idejama Janoša Boljaja iskazanim u njegovom Apendiksu iz 1832. godine, geometriju zasnovanu na prve četiri grupe aksioma zvaćemo *apsolutnom geometrijom*. U zavisnosti od toga koju ćemo aksiomu izabrati da bude jedina aksioma pete grupe, Plejferovu ili aksiomu Lobačevskog, zasnovaćemo *euklidsku* ili *hiperboličku geometriju*.

Geometrija koja je zasnovana na prvim dvema grupama aksioma već je dovoljno složena da je možemo izdvojiti u posebnu celinu. Tu geometriju koja se bavi međusobnim skupovnim odnosima tačaka, pravih i ravni i relacijom poretka tačaka na pravoj, zvaćemo *geometrijom poretka*.

1. Aksiome pripadanja i njihove posledice

Za Hilberta su tačke, prave i ravni tri „sistema stvari" koji se ne definišu, a njihovi međusobni odnosi se označavaju, između ostalog, i rečju „ležati", pri čemu se „tačan i za matematičke svrhe potpun" opis ovog odnosa postiže pomoću aksioma prve grupe ili, kako ih on naziva, „aksioma veze". Mi ćemo te aksiome, kako smo već naveli, zvati aksiomama pripadanja. No, pre uvođenja ovih aksioma definisaćemo nekoliko značajnih pojmova vezanih za skupovne odnose među tačkama, pravama i ravnima.

Ako tri ili više tačaka pripada jednoj pravoj, reći ćemo da su *kolinearne*. U suprotnom, zvaćemo ih *nekolinearnim*. Nadalje, ako četiri ili više tačaka pripada jednoj ravni, reći ćemo da su te tačke *koplanarne*. U suprotnom, zvaćemo ih *nekoplanarnim*. Za dve ili više pravih ćemo takođe reći da su *koplanarne* ako sve pripadaju istoj ravni. U protivnom, zvaćemo ih *nekoplanarnim*, a dve nekoplanarne prave zvaćemo i *mimoilaznim*. Dve ili više pravih ili ravni zvaćemo *konkurentnim* ako sve sadrže istu tačku. Za dve ili više ravni reći ćemo da su *koaksialne* ako je njihov presek neka prava.

Aksiome pripadanja. Prvu grupu sačinjavaju sledeće aksiome:

Aksioma I1: *Svaka prava sadrži najmanje dve razne tačke.*

Aksioma I2: *Postoji najmanje jedna prava koja sadrži dve tačke.*

Aksioma I3: *Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke.*

Aksioma I4: *Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke.*

Aksioma I5: *Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri tačke.*

Aksioma I6: *Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke.*

Aksioma I7: *Ako dve razne tačke neke prave pripadaju jednoj ravni, onda svaka tačka te prave pripada istoj ravni.*

Aksioma I8: *Ako dve razne ravni imaju jednu zajedničku tačku, onda one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku.*

Aksioma I9: *Postoje četiri nekoplanarne tačke.*

Prve četiri od navedenih devet aksioma nazivamo *planimetrijskim* jer se odnose na geometriju ravni, a poslednjih pet *stereometrijskim* jer se odnose na geometriju prostora. Geometrija koja je zasnovana samo na planimetrijskim aksiomama naziva se *planimetrijom*, a ona koja počiva i na planimetrijskim i na stereometrijskim aksiomama *stereometrijom*.

Posledice aksioma pripadanja. Budući da se sve posledice prve grupe aksioma dokazuju bez ikakvih teškoća, bićemo slobodni da navedene teoreme ne dokažemo već da prepustimo čitaocima da se zabave dedukujući ih, redom, iz navedenih aksioma.

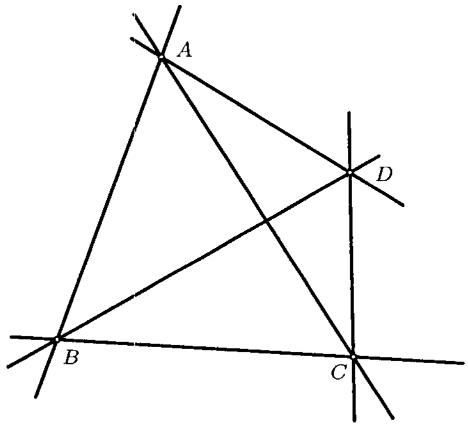
Teorema 1.1: *Ako su tri tačke nekolinearne, tada su svake dve od njih međusobno različite.* □

Teorema 1.2: *Ako su četiri tačke nekoplanarne, tada su svake dve od njih međusobno različite.* □

Teorema 1.3: *Ako su četiri tačke nekoplanarne, tada su svake tri od njih nekolinearne.* □

Teorema 1.4: *Postoje četiri razne tačke, šest raznih pravih, četiri razne ravni.* □

Međutim, iz aksioma pripadanja ne sledi da postoji pet raznih tačaka. Zaista, ako su A, B, C, D četiri nekoplanarne tačke čije je postojanje pretpostavljeno aksiomom I9, neposredno se dokazuje da je:



Slika 1a

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \{A, B, C, D\},\\
\mathcal{L} &= \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\},\\
\mathcal{P} &= \{\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}\},
\end{aligned}$$

model u kojem su zadovoljene sve aksiome pripadanja. Budući da se u tom modelu skup $\mathcal{S}$ sastoji samo iz četiri tačke, iz aksioma pripadanja ne sledi postojanje pet raznih tačaka. Na isti način, iz aksioma prve grupe ne sledi postojanje više od šest pravih i postojanje više od četiri ravni.

Teorema 1.5: *Postoje tri nekolinearne tačke.* □

Teorema 1.6: *Postoji jedinstvena prava koja sadrži dve razne tačke.* □

Pravu koja sadrži tačke A i B obeležavaćemo sa AB, a ako hoćemo da istaknemo da prava a sadrži tačke A i B, obeležavaćemo je sa $a(AB)$. Za pravu AB ćemo reći da je *određena* tačkama A i B, a kazaćemo i da prava AB *povezuje* tačke A i B ili da *jednu* od tih dveju tačaka *povezuje sa drugom.*

Teorema 1.7: *Postoji jedinstvena ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke.* □

Ravan koja sadrži nekolinearne tačke A, B i C obeležavaćemo sa ABC. Ako hoćemo da naglasimo da ravan π sadrži te tri tačke, obeležavaćemo je sa $\pi(ABC)$. Za ravan ABC reći ćemo da je *određena* tačkama A, B i C.

Teorema 1.8: *Postoji jedinstvena ravan koja sadrži pravu i tačku koja joj ne pripada.* □

Ravan koja sadrži pravu a i tačku A obeležavaćemo sa aA, ili sa $\pi(aA)$ ako hoćemo da istaknemo da je π ravan koja sadrži pravu a i tačku A. Za ravan aA reći ćemo da je *određena* pravom a i tačkom A.

Teorema 1.9: *Postoji jedinstvena ravan koja sadrži dve razne prave koje se seku.* □

Ravan koja sadrži prave a i b obeležavaćemo sa ab, ili sa $\pi(ab)$ ako nam je cilj da naglasimo da je π ravan koja sadrži prave a i b. Za ravan ab ćemo reći da je *određena* pravama a i b.

Teorema 1.10: *Postoje dve mimoilazne prave.* □

Teorema 1.11: *Presek dveju raznih pravih je najviše jedna tačka.* □

Ako je tačka A presek pravih a i b, reći ćemo da se te dve prave *seku u tački* A, ili da jedna od tih dveju pravih *seče* drugu *u tački* A. Tačku A zvaćemo i *presečnom tačkom* pravih a i b.

Teorema 1.12: *Presek prave i ravni koja je ne sadrži je najviše jedna tačka.* □

Ako je presek prave a i ravni α tačka A, reći ćemo da prava *a prodire ravan* α *u tački* A, a reći ćemo i da je tačka A *prodor* prave *a kroz ravan* α.

Teorema 1.13: *Ako dve razne ravni imaju zajedničku tačku, njihov presek je prava.* □

Pravu s koja pripada dvema raznim ravnima α i β zvaćemo *presečnom prvom* tih dveju ravni, a za ravni α i β reći ćemo da se *seku duž prave* s.

Teorema 1.14: *Ako se svake dve prave iz nekog podskupa klase* $\mathcal{L}$ *seku, onda su prave iz tog podskupa konkurentne ili koplanarne.* □

ZADACI:

1. Pretpostvimo da uz ostale aksiome prve grupe, umesto aksiome I4 važi aksioma I4$'$: svaka ravan sadrži najmanje jednu tačku. Iz tako uvedenih aksioma prve grupe izvesti kao posledicu aksiomu I4.

2. Ako se prave a i b seku, a prave c i d su koplanarne i sa a i sa b, a ne pripadaju ravni ab, dokazati da se i prave c i d seku.

3. Neka su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka koje pripadaju raznim ravnima, takve da se AA', BB' i CC' seku u istoj tački, i neka se parovi pravih AB i $A'B'$, BC i $B'C'$, AC i $A'C'$ seku. Dokazati da su tada presečne tačke ovih parova pravih kolinearne (Dezargova teorema). Da li tvrđenje važi u slučaju da su svi ostali uslovi isti, samo što su ravni ABC i $A'B'C'$ istovetne?

2. Aksiome rasporeda i njihove prve posledice

U Euklidovim Elementima poredak tačaka na pravoj nigde nije izdvojen već se podrazumevao budući da je intuitivno bio jasno određen zahvaljujući poređenju dužina. Tek 1832. godine Gaus (C.F. Gauss 1777–1855) je primetio da neke prostije stavove o rasporedu tačaka na pravoj treba usvojiti kao aksiome, a da pojam „između" treba strogo uvesti. U svojim **Predavanjima o novijoj geometriji** iz 1882. godine, Paš (M. Pasch 1843–1930) je aksiomatski uveo raspored tačaka na pravoj nezavisno od pojma merenja. Njegov sistem aksioma upotpunili su kasnije Peano u svojim Načelima geometrije i Hilbert koji je, kako smo već istakli, u svojim Osnovama geometrije tačke zamišljao u međusobnom odnosu koji je izražavao rečju „između". Time je Hilbert pojam „između" prihvatio kao jedan od osnovnih pojmova geometrije, a njegov potpun opis postigao je pomoću druge grupe aksioma. Oznaku $\mathcal{B}$ tročlane relacije „između" u geometriju su uveli Borsuk i Šmieleva u svojim Osnovima geometrije.

Aksiome rasporeda. Aksiomama druge grupe karakterišemo jedan od osnovnih pojmova geometrije, tročlanu relaciju $\mathcal{B}$.

Aksioma II1: *Ako je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada su A, B, C tri razne kolinearne tačke.*

Aksioma II2: *Ako je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada je $\mathcal{B}(C, B, A)$.*

Aksioma II3: *Ako je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada nije $\mathcal{B}(A, C, B)$.*

Aksioma II4: *Ako su A i B dve razne tačke, tada postoji tačka C takva da je $\mathcal{B}(A, B, C)$.*

Aksioma II5: *Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, tada je $\mathcal{B}(A, B, C)$ ili $\mathcal{B}(B, C, A)$ ili $\mathcal{B}(C, A, B)$.*

Aksioma II6: *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i p prava koja pripada ravni ABC, ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P takvoj da je $\mathcal{B}(B, P, C)$, tada prava p seče pravu CA u tački Q takvoj da je $\mathcal{B}(C, Q, A)$ ili pravu AB u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(A, R, B)$.*

Samo poslednja od navedenih aksioma rasporeda, tzv. *Pašova aksioma*, odnosi se na geometriju ravni. Prvih pet aksioma se odnose na geometriju prave i nazivaju se *linearnim*, no, one nam ne omogućavaju izgradnju potpune geometrije poretka tačaka na pravoj. Preciznije, postoje tvrđenja o rasporedu tačaka na pravoj koja su posledica navedenih šest aksioma, ali se ne mogu dokazati samo pomoću prvih pet navedenih aksioma rasporeda. Da bismo samo linearnim aksiomama izgradili geometriju poretka tačaka na pravoj, neophodno je dodati još neke aksiome. One su, međutim, pored ostalih, posledice i Pašove aksiome. Stoga ih i ne navodimo kao aksiome već kao njihove posledice — to su teoreme 2.4, 2.5 i 2.6.

Prve posledice aksioma rasporeda. U aksiomi II5 pretpostavili smo da za kolinearne tačke A, B, C važi najmanje jedna od triju relacija $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(B, C, A)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$. Dokažimo najpre da važi najviše jedna od tih triju relacija:

Teorema 2.1: *Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, tada važi tačno jedna od sledećih triju relacija:*

$$\mathcal{B}(A, B, C), \quad \mathcal{B}(B, C, A), \quad \mathcal{B}(C, A, B).$$

Dokaz: Aksiomom II5 je pretpostavljeno da važi bar jedna od navedenih relacija. Dokažimo da važi samo jedna od njih. Budući da time razmatranje neće izgubiti na opštosti, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{B}(A, B, C)$. Tada, na osnovu aksiome II3, nije $\mathcal{B}(A, C, B)$ pa, na osnovu aksiome II2, nije $\mathcal{B}(B, C, A)$. Nije ni $\mathcal{B}(C, A, B)$ jer iz $\mathcal{B}(A, B, C)$, na osnovu aksiome II2, sledi da je $\mathcal{B}(C, B, A)$, a odavde, na osnovu aksiome II3, da nije $\mathcal{B}(C, A, B)$. Dakle, ako važi jedna od navedenih relacija, druge dve ne važe. □

Prethodna teorema i aksioma II1 omogućavaju važnu karakterizaciju skupa tačaka jedne prave:

Teorema 2.2: *Ako su A i B dve razne tačke, tada tačka X pripada pravoj AB ako i samo ako je istovetna sa nekom od tih dveju tačaka ili je zadovoljena neka od sledećih triju relacija*

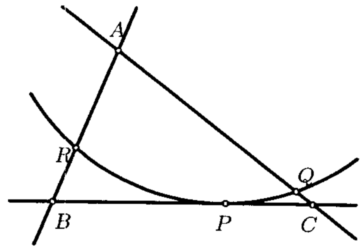
$$\mathcal{B}(A, B, X), \quad \mathcal{B}(B, X, A), \quad \mathcal{B}(X, A, B). \qquad \square$$

Ovu karakterizaciju skupa tačaka prave zvaćemo *prvim Peanovim stavom.*

Pašovom aksiomom smo pretpostavili da prava p seče bar jednu od pravih CA i AB u tačkama Q ili R takvim da je $\mathcal{B}(C, Q, A)$ ili $\mathcal{B}(A, R, B)$. Sledećom teoremom ustanovićemo da prava p koja zadovoljava navedene uslove seče tačno jednu od tih dveju pravih.

Teorema 2.3: *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, a P, Q, R tačke takve da je $\mathcal{B}(B, P, C)$, $\mathcal{B}(C, Q, A)$, $\mathcal{B}(A, R, B)$, tada su P, Q, R nekolinearne tačke.*

Dokaz: Kako je $\mathcal{B}(C, Q, A)$ i $\mathcal{B}(A, R, B)$, na osnovu aksiome II1 sledi da su tačke Q i R različite od A pa, kako se nalaze na različitim pravama, na osnovu aksiome I3, i one će biti međusobno različite. Na isti način se dokazuje da se tačka P razlikuje i od Q i od R.



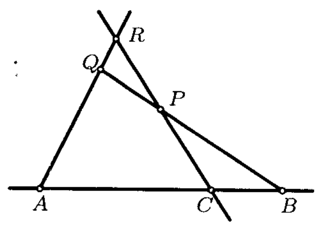
Slika 2a

Pretpostavimo da su tačke P, Q, R kolinearne. Tada, na osnovu prethodne teoreme, važi tačno jedna od triju relacija

$$\mathcal{B}(P,Q,R), \quad \mathcal{B}(Q,R,P), \quad \mathcal{B}(R,P,Q).$$

Budući da time razmatranje neće izgubiti na opštosti, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{B}(R,P,Q)$. Tada su A, R i Q tri nekolinearne tačke i BC prava u ravni ARQ, koja ne sadrži A, seče pravu RQ u tački P takvoj da je $\mathcal{B}(R,P,Q)$, a prave AQ i AR u tačkama C i B takvim da nije ni $\mathcal{B}(Q,C,A)$ ni $\mathcal{B}(A,B,R)$, što protivreči Pašovoj aksiomi. Dakle, P, Q, R su nekolinearne tačke. □

Teorema 2.4: *Ako su A i B dve razne tačke, tada postoji tačka C koja je između njih.*



Slika 2b

Dokaz: Neka je P tačka van prave AB (egzistencija te tačke sledi iz teoreme 1.5) i neka su Q i R tačke takve da je $\mathcal{B}(B,P,Q)$ i $\mathcal{B}(A,Q,R)$ (njihova egzistencija sledi iz aksiome II4). Kako su A, B, Q tri nekolinearne tačke, a RP prava koja ne sadrži A, seče pravu BQ u tački P takvoj da je $\mathcal{B}(B,P,Q)$ i pravu QA u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(A,Q,R)$, prava RP, na osnovu Pašove aksiome, seče pravu AB u tački C takvoj da je $\mathcal{B}(A,C,B)$. □

Za konačan skup kolinearnih tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n > 3$, kazaćemo da je *linearno uređen* i pisaćemo $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ako je $\mathcal{B}(A_i, A_j, A_k)$ kad god je $1 \leq i < j < k \leq n$. Ako je

$$\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n),$$

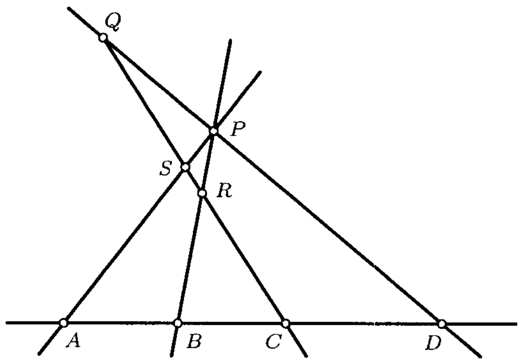
tada je, na osnovu definicije linearno uređenog skupa tačaka i aksioma rasporeda,

$$\mathcal{B}(A_n, A_{n-1}, \ldots, A_{i+1}, A_i, \ldots, A_1),$$

a nije

$$\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_{i+1}, A_i, \ldots, A_n).$$

Teorema 2.5: *Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(B,C,D)$, onda je $\mathcal{B}(A,B,C,D)$.*



Slika 2c

Dokaz: Neka je P proizvoljna tačka van prave kojoj pripadaju tačke A, B, C, D, a Q tačka takva da je $\mathcal{B}(D,P,Q)$. Budući da je $\mathcal{B}(B,C,D)$ i $\mathcal{B}(D,P,Q)$, iz Pašove aksiome primenjene na tačke B, D, P i pravu QC, sledi da prava QC seče PB u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(P,R,B)$. Na isti način, iz $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(B,R,P)$, na osnovu Pašove aksiome primenjene na tačke A, B, P i pravu QC, sledi da QC seče AP u tački S takvoj da je $\mathcal{B}(P,S,A)$. Kako prava QC seče PA u tački S takvoj da je $\mathcal{B}(P,S,A)$, a pravu DP u tački Q takvoj da je $\mathcal{B}(D,P,Q)$, biće, opet na osnovu Pašove aksiome, ovog puta primenjene na tačke P, A, D i pravu QC, $\mathcal{B}(A,C,D)$.

Budući da iz $\mathcal{B}(B,C,D)$ i $\mathcal{B}(A,B,C)$, na osnovu aksiome II2, sledi da je $\mathcal{B}(D,C,B)$ i $\mathcal{B}(C,B,A)$, na osnovu prethodnog će biti $\mathcal{B}(D,B,A)$, pa je otuda, na osnovu iste aksiome, i $\mathcal{B}(A,B,D)$. Dakle, biće i $\mathcal{B}(A,B,C,D)$. □

Teorema 2.6: *Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(A,C,D)$, tada je $\mathcal{B}(A,B,C,D)$.*

Dokaz: Neka je P proizvoljna tačka van prave kojoj pripadaju tačke A, B, C, D, a Q tačka takva da je $\mathcal{B}(D,P,Q)$. Kako je $\mathcal{B}(A,C,D)$ i $\mathcal{B}(D,P,Q)$, iz Pašove aksiome primenjene na tačke A, D, P i pravu QC, sledi da prava QC seče AP u tački S takvoj da je $\mathcal{B}(P,S,A)$. Na isti način, iz $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(P,S,A)$, na osnovu Pašove aksiome primenjene na tačke A, B, P i pravu QC, sledi da QC seče BP u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(B,R,P)$. Kako prava QC seče BP u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(P,R,B)$, a pravu PD u tački Q takvoj da je $\mathcal{B}(D,P,Q)$ biće, opet na osnovu Pašove aksiome ovog puta primenjene na tačke D, P, B i pravu QC, $\mathcal{B}(B,C,D)$.

Budući da je $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(B,C,D)$, biće i $\mathcal{B}(A,B,C,D)$ na osnovu teoreme 2.5. □

Teorema 2.7: *Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(A,B,D)$ i ako je C tačka različita od D, tada je ili $\mathcal{B}(A,B,C,D)$, ili je $\mathcal{B}(A,B,D,C)$.*

Dokaz: Kako su A, C, D tri razne kolinearne tačke važiće tačno jedna od sledećih relacija: $\mathcal{B}(A, C, D)$, $\mathcal{B}(C, D, A)$, $\mathcal{B}(D, A, C)$. Ako je $\mathcal{B}(A, C, D)$, tada iz $\mathcal{B}(A, B, C)$, na osnovu teoreme 2.6, sledi da je $\mathcal{B}(A, B, C, D)$. Ako je $\mathcal{B}(C, D, A)$, biće i $\mathcal{B}(A, D, C)$, pa iz $\mathcal{B}(A, B, D)$, opet na osnovu teoreme 2.6, sledi da je $\mathcal{B}(A, B, D, C)$. Ako bi važila poslednja od triju navedenih relacija: $\mathcal{B}(D, A, C)$, tada bi iz relacije $\mathcal{B}(A, B, D)$, tj. $\mathcal{B}(D, B, A)$, na osnovu teoreme 2.6, sledilo da je $\mathcal{B}(D, B, A, C)$, dakle i $\mathcal{B}(B, A, C)$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $\mathcal{B}(A, B, C)$. □

Teorema 2.8: *Ako je $\mathcal{B}(A, C, B)$ i $\mathcal{B}(A, D, B)$, i ako su tačke C i D međusobno različite tačke, tada je ili $\mathcal{B}(A, D, C, B)$ ili $\mathcal{B}(A, C, D, B)$.*

Dokaz: Ako je $\mathcal{B}(A, D, C)$, tada će, na osnovu teoreme 2.6 i pretpostavke da je $\mathcal{B}(A, C, B)$, da bude $\mathcal{B}(A, D, C, B)$. Ako pretpostavimo da nije $\mathcal{B}(A, D, C)$, tada će, na osnovu teoreme 2.1, da bude ili $\mathcal{B}(D, C, A)$ ili $\mathcal{B}(C, A, D)$. Ne može da bude $\mathcal{B}(C, A, D)$ jer iz $\mathcal{B}(B, C, A)$, na osnovu teoreme 2.5, sledi da je $\mathcal{B}(B, A, D)$, što protivreči pretpostavci da je $\mathcal{B}(A, D, B)$. Dakle, biće $\mathcal{B}(D, C, A)$, tj. $\mathcal{B}(A, C, D)$, pa kako je i $\mathcal{B}(A, D, B)$, na osnovu teoreme 2.6, biće i $\mathcal{B}(A, C, D, B)$. □

ZADACI:

1. Dokazati da prava sadrži neograničeno mnogo tačaka.

2. Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke, a P, Q, R tačke pravih BC, CA i AB, takve da je $\mathcal{B}(B, P, C)$, $\mathcal{B}(C, Q, A)$ i $\mathcal{B}(A, R, B)$. Dokazati da se prave BQ i CR seku u tački S takvoj da je $\mathcal{B}(B, S, Q)$ i $\mathcal{B}(C, S, R)$, a da se prave AP i QR seku u tački T takvoj da je $\mathcal{B}(A, T, P)$ i $\mathcal{B}(Q, T, R)$.

3. Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke i M, N tačke takve da prava MN seče prave BC i AC u tačkama P i Q takvim da je $\mathcal{B}(B, P, C)$, $\mathcal{B}(C, Q, A)$ i $\mathcal{B}(M, P, N, Q)$. Dokazati da onda prava AN seče pravu BC u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(B, R, C)$ i $\mathcal{B}(A, N, R)$.

3. Duž i poligon

Prihvativši način na koji je Platon razumevao geometrijske pojmove Euklid je usvojio definicije osnovnih geometrijskih objekata i izložio ih na početku prve knjige svojih Elemenata. Pojam duži se ne nalazi istaknut među tim pojmovima zato što u geometriji Starog veka prava nije bila „aktualno neograničena“ već se, u skladu sa drugim postulatom, mogla produžavati, te je, stoga, bila „potencijalno beskrajna“. Tako shvaćena prava imala je i funkciju prave i funkciju duži.

Duž. Neka su A i B dve razne tačke. Skup svih tačaka između A i B zvaćemo *otvorenom duži* AB i obeležavaćemo je sa (AB). Tačke A i B zvaćemo njenim *temenima* ili *krajevima*. Uniju otvorene duži AB i njenih krajeva zvaćemo *zatvorenom duži* i obeležavaćemo je sa $[AB]$. Uniju otvorene duži AB i jednog njenog kraja, A ili B, zvaćemo *poluotvorenom duži* i obeležavaćemo je sa $[AB)$ ili $(AB]$ u zavisnosti od toga koja od dveju tačaka, A ili B, pripada poluotvorenoj duži AB. Da li je neka duž AB otvorena, zatvorena ili poluotvorena naglašavaćemo samo ako je to od značaja, inače ćemo je, jednostavno, zvati *duž* AB. Za duž AB reći ćemo da *povezuje* ili *spaja* tačke A i B.

Iz teorema 2.4 i 2.5 neposredno sledi da je ukupan broj tačaka bilo koje duži neograničen. Sledeći stav je neposredna posledica teoreme 2.8.

Teorema 3.1: *Ako je C tačka otvorene duži AB, tada tačka D koja nije istovetna sa C pripada otvorenoj duži AB ako i samo ako pripada tačno jednoj od otvorenih duži AC i CB.* □

Teorema 3.2: *Neka su A, B, C tri kolinearne tačke. Presek otvorenih duži AB i BC je prazan ako i samo ako je $\mathcal{B}(A, B, C)$.*

Dokaz: Ako pretpostavimo da je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada iz prethodne teoreme sledi da je $(AB)\cap(BC) = \emptyset$. Na osnovu iste teoreme iz $\mathcal{B}(B, C, A)$ sledi da je $(BC) \subset (BA)$, pa je $(AB) \cap (BC) = (BC)$. Na isti način, iz $\mathcal{B}(C, A, B)$ sledi da je $(AB) \subset (BC)$, a odatle da je $(AB) \cap (BC) = (AB)$. □

Sledeći stav se dokazuje konačno mnogo puta primenjujući teoremu 3.1.

Teorema 3.3: *Ako je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, tada tačka X koja je različita od tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pripada otvorenoj duži A_1A_n ako i samo ako pripada tačno jednoj od otvorenih duži A_iA_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.* □

Drugim rečima, ako je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, tada je (A_iA_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-1$, konačan niz disjunktnih otvorenih duži koje pripadaju nekoj pravoj. Dokažimo da važi i obratno.

Teorema 3.4: *Ako je (A_iA_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $n > 3$, konačan niz disjunktnih duži koje pripadaju nekoj pravoj, tada je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.*

Dokaz: Za $n = 3$ tvrđenje je tačno na osnovu teorema 3.2 i 3.1. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za svaki prirodan broj n takav da je $3 \leq n \leq m$ i dokažimo da je tačno i za $n = m + 1$.

Na osnovu indukcijske pretpostavke je

$$\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_m) \quad \text{i} \quad \mathcal{B}(A_2, A_3, \ldots, A_{m+1}),$$

pa samo treba dokazati da je $\mathcal{B}(A_1, A_i, A_{m+1})$ kada je $2 \leq i \leq m$. To, međutim, sledi iz $\mathcal{B}(A_1, A_i, A_m)$ i $\mathcal{B}(A_i, A_m, A_{m+1})$, na osnovu teoreme 2.5. □

Teorema 3.5: *Svaki konačan skup $\mathcal{A}$, kolinearnih tačaka, $|\mathcal{A}| > 3$, može se linearno urediti na tačno dva načina.*

Dokaz: Za $|\mathcal{A}| = 3$ tvrđenje je posledica teoreme 2.1 i aksiome II2. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno ako je $3 \leq |\mathcal{A}| \leq m$ i dokažimo da je tačno i za $|\mathcal{A}| = m+1$.

Razmotrimo najpre pitanje broja načina na koje se skup

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}\}$$

može linearno urediti. Ako pretpostavimo da je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1})$, tada je i $\mathcal{B}(A_{m+1}, A_m, \ldots, A_1)$. Ako je $p_1, p_2, \ldots, p_{m+1}$ permutacija brojeva $1, 2, \ldots, m+1$, iz

$$\mathcal{B}(A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_{m+1}})$$

sledi da je

$$\{A_{p_1}, A_{p_{m+1}}\} = \{A_1, A_{m+1}\}$$

jer su A_1 i A_{m+1} jedine tačke skupa $\mathcal{A}$ koje nisu između nekih drugih dveju tačaka toga skupa. Budući da zbog toga razmatranje neće izgubiti na opštosti, možemo pretpostaviti da je $p_1 = 1$ i da je $p_{m+1} = m+1$. Kako je A_2 jedina tačka skupa $\mathcal{A}$ takva da između A_1 i A_2 nema više tačaka toga skupa, biće $p_2 = 2$. Ponovivši ovaj postupak konačno mnogo puta, zaključićemo da je $p_i = i$, $2 \leq i \leq m$. Dakle, skup $\mathcal{A}$ se može urediti ili na 0 ili na 2 načina, pa je dovoljno dokazati postojanje jednog takvog uređenja.

Neka je $X \in \mathcal{A}$ i neka je $\mathcal{D} = \mathcal{A} \setminus \{X\}$. Na osnovu indukcijske hipoteze skup $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ se može linearno urediti. Neka je $\mathcal{B}(D_1, D_2, \ldots, D_m)$. Tada je ili $\mathcal{B}(X, D_1, D_m)$ ili $\mathcal{B}(D_1, D_m, X)$ ili $\mathcal{B}(D_m, X, D_1)$.

Ako je $\mathcal{B}(X, D_1, D_m)$, tada je na osnovu teoreme 3.2, $(XD_1) \cap (D_1 D_m) = \emptyset$, pa su zbog toga, i na osnovu teoreme 3.3, duži $(XD_1), (D_1 D_2), \ldots, (D_{m-1} D_m)$ disjunktne. Kako su time zadovoljeni uslovi teoreme 3.4, biće $\mathcal{B}(X, D_1, D_2, \ldots, D_m)$.

Ako je $\mathcal{B}(D_1, D_m, X)$, tada je $\mathcal{B}(X, D_m, D_1)$, pa je na osnovu već dokazanog, $\mathcal{B}(X, D_m, D_{m-1}, \ldots, D_1)$.

Ako je $\mathcal{B}(D_m, X, D_1)$, tj. $\mathcal{B}(D_1, X, D_m)$, tada tačka X, na osnovu teoreme 3.3, pripada tačno jednoj od duži $(D_i D_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Ako je to duž $(D_j D_{j+1})$, iz teorema 3.1 i 3.4 sledi da je

$$\mathcal{B}(D_1, D_2, \ldots, D_j, X, D_{j+1}, \ldots, D_m). \qquad \square$$

Konveksnost. Geometrijski lik Φ zvaćemo *konveksnim* ako sve tačke duži čija temena pripadaju liku Φ, takođe pripadaju tom liku. Iz teorema 2.8 i 3.3, za $n = 4$, neposredno sledi da je svaka duž konveksan lik. Ako tačke A i B pripadaju svakom od konveksnih likova familije $\mathcal{F}$, tada i duž (AB) pripada svakom od likova te familije. Time je dokazan sledeći stav:

Teorema 3.6: *Presek proizvoljne familije konveksnih likova je konveksan lik.* $\square$

Poligon. Neka je dat uređen skup $n+1$ tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Skup koji se sastoji od tih $n+1$ tačaka i tačaka n otvorenih duži $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ nazivamo *poligonskom linijom* i obeležavamo je sa $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$. Tačke $A_1, A_2, \ldots,$

A_{n+1} nazivamo njenim *temenima*, a duži $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}$, bez obzira na to da li su otvorene ili zatvorene, *ivicama* ili *stranicama* poligonske linije za koju kažemo da *povezuje* ili *spaja* tačke A_1 i A_{n+1}. Uzastopne tačke u nizu $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ zvaćemo *susednim temenima poligonske linije* $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, a ivice te poligonske linije sa zajedničkim temenom zvaćemo *susednim ivicama.*

Ako su tačke A_1 i A_{n+1} istovetne, poligonsku liniju $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ kod koje bilo koja tri njena uzastopna temena nisu kolinearne tačke, nazivamo *zatvorenom poligonskom linijom*, *poligonom* ili *mnogouglom* $A_1A_2 \dots A_n$. Ako tačke A_1 i A_{n+1} nisu istovetne, za poligonsku liniju $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ kažemo da je *otvorena.* Uzastopne tačke u cikličnom nizu $A_1, A_2, \dots, A_n$ zvaćemo *susednim temenima poligona* $A_1A_2 \dots A_n$, a ivice tog poligona sa zajedničkim temenom zvaćemo *susednim ivicama.*

Ako poligon ima $3, 4, 5, \dots$ ivica, zvaćemo ga *trouglom*, *četvorouglom*, *petouglom*,... Uopšte, poligon $A_1A_2 \dots A_n$ koji ima n temena i isto toliko ivica zvaćemo i *n-touglom.* Za njega ćemo reći da je *složen* ili *prost* u zavisnosti od toga imaju li bilo koje dve njegove ivice $[A_1A_2], [A_2A_3], \dots, [A_nA_1]$, sem susednih, zajedničkih tačaka ili ne. Duži koje spajaju nesusedna temena poligona zvaćemo njegovim *dijagonalama.*

Razlaganje. Za tačke A i B lika Φ kažemo da su *povezive* tačke toga lika ako postoji poligonska linija (ili duž) koja ih spaja, takva da svaka tačka te poligonske linije (ili duži) pripada liku Φ. Ako su svake dve tačke A i B nekog geometrijskog lika Φ povezive, taj geometrijski lik nazivamo *povezanim.* Povezani geometrijski lik zvaćemo i *oblašću.* Iz definicije neposredno sledi da je svaki konveksan geometrijski lik povezan.

Ako likovi $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ pripadaju liku Φ i ako je relacija povezivosti parova tačaka definisana na liku $\Phi \backslash (\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots \cup \Phi_n)$ relacija ekvivalencije koja skup svih tačaka lika $\Phi \backslash (\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots \cup \Phi_n)$ razlaže na $m > 1$, klasa ekvivalencije — $\Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_m$ — kazaćemo da likovi $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ *razlažu* lik Φ na likove $\Phi'_1, \Phi'_2, \dots, \Phi'_m$.

Sledeća dva tvrđenja su posledica definicije pojma razlaganja, već dokazanih teorema 3.1 i 3.3, i činjenice da je svaka duž konveksan geometrijski lik.

Teorema 3.7: *Svaka tačka C otvorene duži AB razlaže tu duž na dve otvorene duži, AC i CB.* □

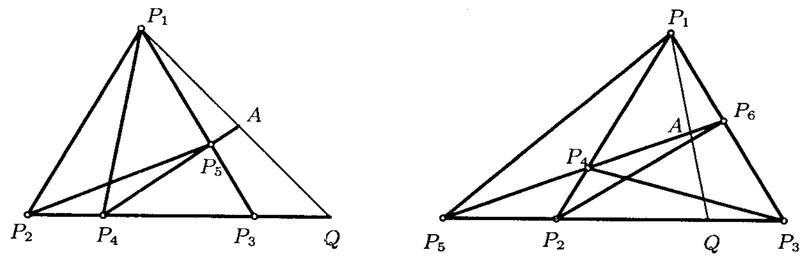
Teorema 3.8: *Ako je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$, tada tačke $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ razlažu duž (A_1A_n) na duži (A_iA_{i+1}), $i = 1, 2, \dots, n-1$.* □

Silvesterov problem. Baveći se geometrijom rasporeda Silvester (J.J. Sylvester 1814–1897) je 1893. godine formulisao sledeći zadatak:

> „Dokazati da nije moguće rasporediti konačno mnogo tačaka jedne ravni tako da svaka prava koja sadrži dve tačke sadrži i treću, osim kada sve tačke pripadaju jednoj pravoj.“

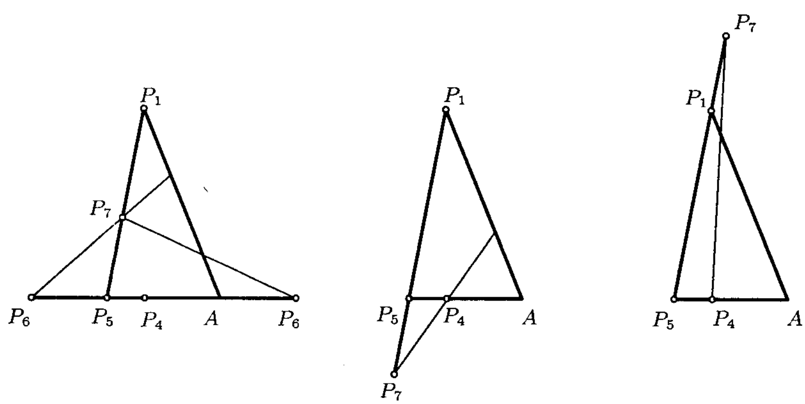
Ni on, ni bilo ko od njegovih savremenika nije mogao da dokaže navedeno tvrđenje. Problem je bio zaboravljen četrdeset godina dok ga nisu obnovili Jovan Karamata i Erdeš (P. Erdös) 1933. godine, a Galai (T. Gallai) ga je iste godine na zadovoljavajući način rešio. U sledećih dvadeset pet godina nađeno je još nekoliko rešenja ovog zadatka, no sva ta rešenja su počivala na pojmovima rastojanja i podudarnosti. U svom **Uvodu u geometriju** Kokseter (H.S.M. Coxeter) je 1961. godine izložio dokaz koji zahteva znanje samo geometrije poretka. Izložićemo taj dokaz uz formulaciju Silvesterovog problema koju je 1951. godine predložio Mockin (T. Motzkin).

Teorema 3.9: *Ako n tačaka ravni ne pripada jednoj pravoj, tada postoji prava koja sadrži tačno dve od tih tačaka.*



Slika 3a

Dokaz: Neka je $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ skup koji se sastoji iz n tačaka jedne ravni takvih da su P_1, P_2 i P_3 nekolinearne. Prave koje povezuju tačku P_1 sa ostalim tačkama toga skupa seku pravu P_2P_3 u najviše $n-1$ tačaka. Neka je Q tačka ove prave različita od svake od tih presečnih tačaka. Prava P_1Q osim P_1 ne sadrži ni jednu drugu tačku zadatog skupa.



Slika 3b

Prave koje povezuju parove tačaka zadatog skupa $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ seku pravu P_1Q u najviše $\binom{n-1}{2}+1$ tačaka. Ako je P_1A jedna od duži na koje te tačke razlažu pravu P_1Q, prave koje povezuju parove tačaka skupa $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ ne seku duž P_1A. Tačka A pripada pravoj koja sadrži bar dve tačke zadatog skupa. Neka prava P_4P_5 sadrži tačku A i neka i tačka P_6 pripada toj pravoj jer, ako takva tačka ne bi postojala, teorema bi bila dokazana. Lako se proverava da tačke zadatog skupa možemo tako označiti da duž AP_5 sadrži P_4, a ne sadrži P_6. Dokazaćemo da prava P_1P_5 sadrži samo dve tačke zadatog skupa.

Ako prava P_1P_5 sadrži neku tačku P_7, tada prava P_6P_7 seče duž P_1A ili prava P_4P_7 seče tu duž. Zaista, ako je $\mathcal{B}(P_1, P_7, P_5)$, tada prva P_6P_7, na osnovu Pašove aksiome primenjene na tačke P_1, P_5, A i tu pravu, seče duž P_1A, a ako je $\mathcal{B}(P_1, P_5, P_7)$ ili $\mathcal{B}(P_5, P_1, P_7)$, tada prava P_4P_7, iz istog razloga, seče duž P_1A. $\square$

ZADACI:

1. Dokazati da, ako je lik Φ razložen likom $\Phi_1 \subseteq \Phi$ na likove $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_n$, a lik Φ'_i likom $\Phi_2 \subseteq \Phi'_i$ na likove $\Phi''_1, \ldots, \Phi''_m$, tada lik $\Phi_1 \cup \Phi_2$ razlaže Φ na likove $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_{i-1}, \Phi''_1, \ldots, \Phi''_m, \Phi'_{i+1}, \ldots, \Phi'_n$.

2. Ako je $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ konačan skup od n $(n > 2)$ duži jedne prave, od kojih svake dve imaju bar jednu zajedničku tačku, dokazati da svih n duži imaju bar jednu zajedničku tačku. Ako je $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ konačan skup od n $(n > 3)$ konveksnih likova jedne ravni, od kojih svaka tri imaju najmanje jednu zajedničku tačku, dokazati da svih n likova ima bar jednu zajedničku tačku (Helly 1913.). Formulisati i dokazati odgovarajuće tvrđenje za konveksne likove u prostoru.

4. Poluprava, poluravan, poluprostor

Pojam poluprave nije našao mesto u Euklidovim Elementima budući da se prava, u skladu sa drugim postulatom, mogla produžavati u svom pravcu, te je zbog toga bila „potencijalno beskrajna“. Tako shvaćena prava imala je i funkciju poluprave. Iz sličnih razloga Euklid u svojim Elementima nije definisao ni poluravan ni poluprostor.

Poluprava. Ako su O, A i B tri tačke neke prave l takve da ni jedna od tačaka A i B nije istovetna sa O, i ako pri tome nije $\mathcal{B}(A, O, B)$, tada kažemo da su tačke A i B prave l *sa iste strane tačke* O, i pišemo $A, B \doteq O$. U protivnom, ako je $\mathcal{B}(A, O, B)$, kažemo da su tačke A i B *sa raznih strana* tačke O, i pišemo $A, B \div O$.

Teorema 4.1: *Relacija sa iste strane tačke O neke prave l je relacija ekvivalencije koja skup ostalih tačaka te prave razlaže na dve klase ekvivalencije.*

Dokaz: Refleksivnost i simetričnost relacije se dokazuju neposredno. Dokažimo tranzitivnost, drugim rečima dokažimo da iz $A, B \doteq O$ i $B, C \doteq O$ sledi $A, C \doteq O$. U tom cilju pretpostavimo suprotno, tj. da su $A, C \div O$. Tada je $\mathcal{B}(A, O, C)$. Kako su $A, B \doteq O$ biće, na osnovu teoreme 2.1, ili $\mathcal{B}(A, B, O)$ ili $\mathcal{B}(B, A, O)$. Iz $\mathcal{B}(A, B, O)$ i $\mathcal{B}(A, O, C)$, na osnovu teoreme 2.6, sledi da je $\mathcal{B}(B, O, C)$, a iz $\mathcal{B}(B, A, O)$ i $\mathcal{B}(A, O, C)$, na osnovu teoreme 2.5, da je $\mathcal{B}(B, O, C)$. Dakle, u svakom slučaju biće $B, C \div O$ što protivreči pretpostavci. Time je dokazana i tranzitivnost relacije sa iste strane tačke.

Kako na pravoj l, na osnovu aksioma I1 i II4, postoje tačke X i Y takve da je $\mathcal{B}(X, O, Y)$, broj klasa ekvivalencije relacije sa iste strane tačke je veći od jedan. Ako bi broj klasa ekvivalencije bio veći i od dva, postojala bi tačka Z takva da su $X, Z \div O$ i $Y, Z \div O$. Tada je $\mathcal{B}(Z, O, X)$ i $\mathcal{B}(Z, O, Y)$ pa, na osnovu teoreme 2.7, nije $\mathcal{B}(X, O, Y)$, što protivreči pretpostavci. Dakle, broj klasa ekvivalencije nije veći od dva. □

Svaku klasu ekvivalencije relacije sa iste strane tačke O neke prave zvaćemo *otvorenom polupravom*, a tačku O njenim *temenom*, njenim *početkom* ili *krajem*. Uniju otvorene poluprave i njenog temena zvaćemo *zatvorenom polupravom*. Otvorenu polupravu sa temenom O koja sadrži neku tačku X obeležavaćemo sa (OX), a zatvorenu polupravu sa $[\![OX)$. Da li je poluprava sa temenom O, koja sadrži tačku X, otvorena ili zatvorena naglašavaćemo samo kada je to u nekom razmatranju od značaja inače ćemo je, jednostavno, zvati *polupravom* OX. Primenom teoreme 2.6 neposredno se dokazuje da je svaka poluprava konveksan lik.

Iz prethodne teoreme i definicije povezivosti parova tačaka sledi da je relacija sa iste strane proizvoljne tačke O prave l relacija povezivosti definisana na liku $l \backslash \{O\}$, pa stoga, tačka O razlaže pravu l na dve otvorene poluprave koje nazivamo *komplementnim*. I odgovarajuće zatvorene poluprave ćemo zvati *komplementnim*. Otvorenu polupravu komplementnu polupravoj OX obeležavaćemo sa $[\![OX)^c$, a odgovarajuću zatvorenu polupravu sa $(OX)^c$. Ako su A i B dve razne tačke prave l, tada svaka tačka X te prave koja je različita od A i B pripada ili duži (AB) ili jednoj od dveju otvorenih polupravih koje su komplementne polupravama AB ili BA. Zaista, na osnovu teoreme 2.1 važi tačno jedna od relacija $\mathcal{B}(A, X, B)$, $\mathcal{B}(X, B, A)$, $\mathcal{B}(B, A, X)$. Prva od tih triju relacija je zadovoljena ako i samo ako je $X \in (AB)$. Druga od relacija je zadovoljena ako i samo ako su $X, A \div B$, tj. ako i samo ako X pripada polupravoj $[\![BA)^c$. Slično, treća od relacija je zadovoljena ako i samo ako X pripada polupravoj $[\![AB)^c$. Štaviše, tačke A i B razlažu pravu l na tri oblasti, otvorenu duž (AB) i dve otvorene poluprave $[\![AB)^c$ i $[\![BA)^c$, zato što proizvoljne dve tačke X i Y iz dveju različitih (od triju naznačenih) oblasti nisu povezive tačke lika $l \backslash \{A, B\}$, budući da je između tačaka X i Y bar jedna od tačaka A, B.

Ako je zadato n raznih tačaka neke prave l, te tačke, na osnovu teoreme 3.5, možemo označiti sa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tako da važi $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Kako, na osnovu teoreme 3.8, tačke $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ razlažu duž (A_1A_n) na $n-1$ duži, tačke $A_1, A_2, \ldots, A_n$, na osnovu prethodnog, razlažu pravu l na $n-1$ duži i dve poluprave. Time je dokazano sledeće tvrđenje:

Teorema 4.2: *Skup od n raznih tačaka neke prave l razlaže tu pravu na $n-1$ otvorenih duži i dve otvorene poluprave.* □

Poluravan. Ako su A i B dve tačke neke ravni π i p prava te ravni koja ne sadrži ni jednu od tih tačaka i koja ne seče duž AB, tada kažemo da su tačke A i B *sa iste strane prave p* i pišemo $A, B \doteq p$. Ako prava p, naprotiv, seče duž AB, kažemo da su A i B *sa raznih strana prave p* i pišemo $A, B \div p$ ili $\mathcal{B}(A, p, B)$.

Teorema 4.3: *Relacija sa iste strane prave p neke ravni π je relacija ekvivalencije koja skup svih tačaka ravni π van prave p razlaže na dve klase ekvivalencije.*

Dokaz: Svojstva refleksivnosti i simetričnosti relacije sa iste strane prave slede direktno iz definicije. Dokažimo još da iz $A, B \doteq p$ i $B, C \doteq p$ sledi $A, C \doteq p$. Razlikovaćemo dva slučaja:

(i) Ako tačke A, B, C pripadaju nekoj pravoj l, onda ta prava ili ne seče p, odakle neposredno sledi $A, C \doteq p$, ili seče pravu p u nekoj tački O. Tada su $A, B \doteq O$ i $B, C \doteq O$, pa su, na osnovu teoreme 4.1, i $A, C \doteq O$. Odavde sledi $A, C \doteq p$.

(ii) Ako su tačke A, B, C nekolinearne i ako pretpostavimo $A, C \div p$, tada bi, na osnovu Pašove aksiome, prava p sekla još jednu od duži AB i BC, što protivreči pretpostavci. Time je dokazana tranzitivnost relacije sa iste strane prave.

Kako postoji tačka X van p, tačka O na pravoj p i tačka Y takva da je $\mathcal{B}(X, O, Y)$ pa, dakle, i $X, Y \div p$, broj klasa ekvivalencije je veći od jedan. Ako bi broj klasa ekvivalencije bio veći i od dva, postojala bi tačka Z takva da $X, Z \div p$ i $Y, Z \div p$. Tada bi prava p sekla svaku od duži XY, YZ, ZX, što protivreči teoremi 2.3 ako su tačke X, Y, Z nekolinearne, a teoremi 3.1 ako su X, Y, Z kolinearne. Dakle, broj klasa ekvivalencije nije veći od dva. □

Svaku klasu ekvivalencije relacije sa iste strane prave p neke ravni zvaćemo *otvorenom poluravni*, a pravu p njenom *granicom* ili *rubom*. Uniju otvorene poluravni i njene granice zvaćemo *zatvorenom poluravni*. Otvorenu poluravan sa granicom p, koja sadrži neku tačku X obeležavaćemo sa (pX), a zatvorenu poluravan sa $[pX)$. Da li je poluravan sa granicom p, koja sadrži tačku X, otvorena ili zatvorena naglašavaćemo samo kada je to u nekom razmatranju od značaja, inače ćemo je, jednostavno, zvati *poluravni pX*. Ako je prava AB granica neke poluravni koja sadrži tačku X, tu poluravan označavaćemo sa (ABX) ako je ona otvorena, a sa $[ABX)$ ako je zatvorena. Neposredno se dokazuje da je svaka poluravan konveksan lik.

Teorema 4.4: *Ako su tačke A i B sa raznih strana neke prave p, tada svaka poligonska linija koja povezuje A i B seče pravu p.*

Dokaz: Ako neka poligonska linija koja povezuje A i B ne bi sekla p, tada bi njena temena, pa stoga, i ostale njene tačke, bila sa iste strane prave p sa koje je i tačka A i tačka B, što je u suprotnosti sa teoremom 4.3. □

Iz prethodnih dveju teorema i definicije povezivosti parova tačaka sledi da je relacija sa iste strane proizvoljne prave p ravni π, relacija povezivosti definisana na liku $\pi\backslash\{p\}$, pa stoga, prava p razlaže ravan π na dve otvorene poluravni koje nazivamo *komplementnim*. I odgovarajuće zatvorene poluravni ćemo zvati *komplementnim*. Otvorenu poluravan komplementnu poluravni pX obeležavaćemo sa $[\![pX)^c$, a odgovarajuću zatvorenu poluravan sa $(\!pX)^c$.

Neka su a i b dve prave ravni π koje se seku u tački O. Ako su A i A' tačke prave a takve da je $\mathcal{B}(A,O,A')$, B i B' tačke prave b takve da je $\mathcal{B}(B,O,B')$, i P,Q,R,S tačke takve da je $\mathcal{B}(A,P,B)$, $\mathcal{B}(B,Q,A')$, $\mathcal{B}(A',R,B')$, $\mathcal{B}(B',S,A)$, preseci $(\!aB)\cap(\!bA)$, $(\!aB)\cap(\!bA')$, $(\!aB')\cap(\!bA')$, $(\!aB')\cap(\!bA)$ će sadržati, redom, tačke P,Q,R,S, pa će biti neprazni. Budući da su poluravni konveksni likovi, i njihovi preseci će biti konveksni likovi, dakle, i oblasti. Štaviše, prave a i b razlažu ravan π na četiri otvorene oblasti, od kojih je svaka presek dveju poluravni sa granicama a i b. Zaista, preseci poluravni su oblasti, a proizvoljne dve tačke X i Y iz dveju različitih (od četiriju naznačenih) oblasti nisu povezive tačke lika $\pi\backslash\{a,b\}$ budući da su tačke X i Y sa raznih strana bar jedne od pravih a,b.

Ako su $a_1,a_2,\ldots,a_n$ međusobno različite prave ravni π, svaka od njih, na osnovu teoreme 4.3, razlaže π na dve otvorene poluravni. Budući da su poluravni konveksni likovi, i preseci poluravni će biti konveksni likovi, pa će, stoga, biti i oblasti. Pretpostavimo da ima ukupno k takvih konveksnih oblasti i obeležimo ih sa $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k$. Ako je X proizvoljna tačka ravni π, koja ne pripada ni jednoj od pravih $a_1,a_2,\ldots,a_n$, za svaku pravu a_i tačka X pripada tačno jednoj poluravni sa granicom a_i, pa stoga, X pripada tačno jednoj od oblasti $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k$. Štaviše, $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k$ su klase ekvivakencije relacije povezivosti parova tačaka definisane na liku $\pi\backslash\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ jer proizvoljne dve tačke X i Y iz dveju različitih oblasti $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k$ nisu povezive tačke lika $\pi\backslash\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ budući da su tačke X i Y sa raznih strana bar jedne od pravih $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Stoga prave $a_1,a_2,\ldots,a_n$ razlažu ravan π na oblasti $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k$.

Teorema 4.5: *Konačan skup od n pravih neke ravni π od kojih se svake dve seku, a bilo koje tri i više pravih se ne seku u jednoj tački, razlaže tu ravan na*

$$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

oblasti od kojih je svaka presek n otvorenih poluravni kojima su granice zadate prave.

Dokaz: Ako $n-1$ pravih razlaže π na

$$\frac{1}{2}[(n-1)^2+n-1+2]$$

konveksnih oblasti, te prave će seći n-tu pravu u $n-1$ tačaka koje će, na osnovu teoreme 4.2, razložiti tu pravu na $n-2$ duži i dve poluprave. Ako je ω jedna od oblasti na koje $n-1$ pravih razlaže π i ako n-ta prava ima zajedničkih tačaka sa ω, neposredno se dokazuje da oblast ω ima tačaka sa svake strane n-te prave. Ako n-ta prava nema zajedničkih tačaka sa ω, sve tačke oblasti ω su sa iste strane te prave. Kako n-ta prava ima zajedničkih tačaka sa n pomenutih oblasti, svaka od duži i polupravih na koje $n-1$ tačaka n-te prave razlažu tu pravu će pripadati nekoj od tih oblasti. Štaviše, svaka od tih oblasti će imati tačaka sa raznih strana te prave, a ni jedna od drugih oblasti neće, pa će ukupan broj oblasti od kojih je svaka presek n poluravni kojima su granice zadate prave, biti

$$\frac{1}{2}[(n-1)^2+n-1+2]+n=\frac{1}{2}(n^2+n+2). \qquad \square$$

Poluprostor. Ako su A i B dve razne tačke i π ravan koja ne sadrži ni jednu od tih tačka i koja ne seče duž AB, tada kažemo da su tačke A i B *sa iste strane ravni* π i pišemo $A,B \doteq \pi$. Ako ravan π, naprotiv, seče duž AB, kažemo da su A i B *sa raznih strana ravni* π i pišemo $A,B \div \pi$ ili $\mathcal{B}(A,\pi,B)$. Dokaz sledeće teoreme ćemo izostaviti budući da se izvodi neposrednom primenom teoreme 4.3.

Teorema 4.6: *Relacija sa iste strane ravni π je relacija ekvivalencije koja skup svih tačaka prostora van ravni π razlaže na dve klase ekvivalencije.* $\square$

Svaku klasu ekvivalencije relacije sa iste strane ravni π zvaćemo *otvorenim poluprostorom*, a ravan π njegovom *granicom* ili *rubom*. Uniju otvorenog poluprostora i njegove granice zvaćemo *zatvorenim poluprostorom*. Otvoreni poluprostor sa granicom π, koji sadrži neku tačku X, obeležavaćemo sa (πX), a zatvoreni poluprostor sa $[\![\pi X)$. Da li je poluprostor sa granicom π, koji sadrži tačku X, otvoren ili zatvoren naglašavaćemo samo kada je to u nekom razmatranju od značaja, inače ćemo ga, jednostavno, zvati *poluprostorom* πX. Ako je ravan ABC granica nekog poluprostora koja sadrži tačku X, taj poluprostor označavaćemo sa $(ABCX)$ ako je otvoren, a sa $[\![ABCX)$ ako je zatvoren. Neposredno se dokazuje da je svaki poluprostor konveksan geometrijski lik. U analogiji sa teoremom 4.4 može se dokazati sledeći stav:

Teorema 4.7: *Ako su tačke A i B sa raznih strana neke ravni π, tada svaka poligonska linija koja povezuje A i B seče ravan π.* $\square$

Iz prethodnih dveju teorema i definicije povezivosti parova tačaka sledi da je relacija sa iste strane proizvoljne ravni π relacija povezivosti definisana na liku $\boldsymbol{S}\setminus\{\pi\}$, pa stoga, ravan π razlaže prostor $\boldsymbol{S}$ na dva otvorena poluprostora koje nazivamo *komplementnim*. I odgovarajuće zatvorene poluprostore ćemo zvati *komplementnim*. Otvoreni poluprostor komplementan poluprostoru πX obeležavaćemo sa $[\![\pi X)^c$, a odgovarajući zatvoreni poluprostor sa $(\pi X)^c$.

Na isti način na koji se dokazuje da dve prave koje se seku, razlažu ravan kojoj pripadaju na četiri oblasti koje su preseci parova poluravni, može se dokazati da dve ravni koje se seku, razlažu prostor na četiri oblasti koje su preseci parova poluprostora kojima su te ravni rubovi. Štaviše, važi i sledeće tvrđenje koje se dokazuje u analogiji sa dokazom teoreme 4.5.

Teorema 4.8: *Konačan skup od n ravni od kojih svake tri imaju samo jednu zajedničku tačku, a bilo koje četiri ravni iz tog skupa nemaju zajedničkih tačaka, razlaže prostor na*

$$\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$$

oblasti od kojih je svaka presek n poluprostora kojima su granice zadate ravni. □

ZADACI:

1. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, dokazati da ne postoji prava koja seče poluprave komplementne polupravama AC, CB, BA.

2. Ako svaka tačka neke prave p pripada bar jednoj polupravoj iz nekog konačnog skupa $\mathcal{A}$ polupravih te prave, dokazati da u skupu $\mathcal{A}$ postoje dve poluprave takve da svaka tačka prave p pripada bar jednoj od tih dveju polupravih. Ako svaka tačka neke ravni π pripada bar jednoj poluravni iz nekog konačnog skupa $\mathcal{A}$ poluravni te ravni, dokazati da u skupu $\mathcal{A}$ postoje tri poluravni takve da svaka tačka ravni π pripada bar jednoj od tih triju poluravni.

5. Ugao i diedar

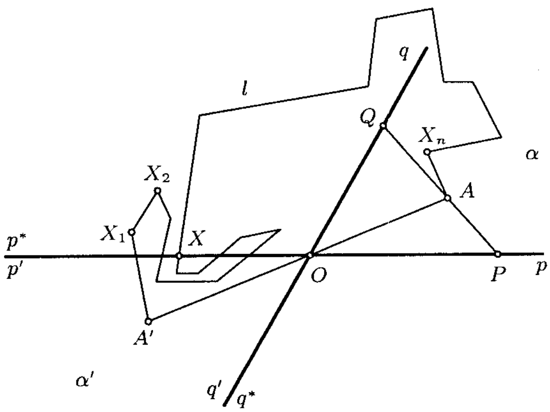
Ugaona linija i ugao. Skup koji se sastoji iz tačaka dveju raznih zatvorenih polupravih p i q sa zajedničkim temenom O nazivamo *ugaonom linijom pq*. Obeležavaćemo je sa $\angle pq$. Poluprave p i q zvaćemo *kracima*, a tačku O *temenom ugaone* linije pq.

Neka je pq ugaona linija u ravni π, i A i B dve tačke te ravni koje ne pripadaju $\angle pq$. Ako postoji poligonska linija (ili duž) koja pripada π i povezuje A i B, a sa $\angle pq$ nema zajedničkih tačaka, tada kažemo da su A i B *sa iste strane ugaone linije* pq, i pišemo $A, B \doteq \angle pq$. Ako takva poligonska linija (ili duž) ne postoji, kažemo da su A i B *sa raznih strana* $\angle pq$, i pišemo $A, B \div \angle pq$. U posebnom slučaju kada su poluprave p i q komplementne, relacija sa iste strane ugaone linije je, kako je već dokazano u prethodnom odeljku, relacija povezivosti definisana na liku $\pi \backslash \{p \cup q\}$, koja taj lik razlaže na dve klase ekvivalencije. Dokažimo da to tvrđenje važi i kada je pq proizvoljna ugaona linija.

Teorema 5.1: *Relacija sa iste strane ugaone linije pq je relacija ekvivalencije koja skup svih tačaka ravni π u kojoj su p i q, van $\angle pq$, razlaže na dve klase ekvivalencije.*

Dokaz: Neposredno se dokazuje da je relacija sa iste strane ugaone linije pq, relacija ekvivalencije. Dokažimo da ona skup tačaka ravni π van $\angle pq$ razlaže na dve klase.

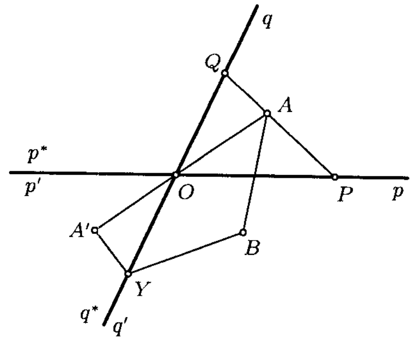
Ako su poluprave p i q komplementne, teorema je već dokazana.



Slika 5a

Stoga pretpostavimo da poluprave p i q ne pripadaju jednoj pravoj i da su P i Q, redom, tačke tih dveju polupravih različite od temena O ugaone linije pq. Pretpostavimo, zatim, da je A tačka između tačaka P i Q, da su p' i q' poluprave komplementne, redom, polupravama p i q, a da su p^* i q^* prave koje, redom, sadrže p i q. Obeležimo sa A' tačku takvu da je $\mathcal{B}(A, O, A')$ i dokažimo da su $A, A' \div \angle pq$.

Ako pretpostavimo da su $A, A' \dot{-} \angle pq$, tada, po definiciji, postoji poligonska linija $A'X_1X_2 \dots X_nA$ koja spaja A' i A, pripada ravni π, i sa $\angle pq$ nema zajedničkih tačaka. Kako je $\mathcal{B}(A, O, A')$ i kako je A van p^*, a O na p^*, biće $A, A' \div p^*$. Tada, na osnovu teoreme 4.4, poligonska linija $A'X_1X_2 \dots X_nA$ seče p^*, a po pretpostavci ne seče p, pa seče p'. Iz konačnog niza duži $A'X_1, X_1X_2, \dots, X_{n-1}X_n, X_nA$ izdvojmo poslednju koja sa p' ima zajedničkih tačaka. Neka je to duž X_iX_{i+1}. Ako je presek te duži i p' jedna tačka, obeležimo je sa X, a ako ta duž pripada p', sa X obeležimo tačku X_{i+1}. Budući da su tačke X i P sa raznih strana tačke O, biće $X, P \div q^*$. Ako obeležimo sa l deo poligonske linije $A'X_1X_2 \dots X_nA$ koji povezuje tačke X i A, svaka tačka poligonske linije l sem X, će biti sa one strane p^* sa koje nije A'. Uz to su $A, Q \dot{-} p^*$ jer je $\mathcal{B}(P, A, Q)$, pa je svaka tačka otvorene poluprave q sa iste strane p^* sa koje je A, a svaka tačka poluprave q' je sa one strane p^* sa koje je A'. Stoga l ne seče q', a ne seče ni q jer poligonska linija $A'X_1X_2 \dots X_nA$, po pretpostavci, ne seče q. Dakle l i q^* nemaju zajedničkih tačaka, pa su, na osnovu teoreme 4.4, $A, X \dot{-} q^*$. No, $X, P \div q^*$, pa su $A, P \div q^*$ što protivreči pretpostavci da je $\mathcal{B}(P, A, Q)$. Dakle, $A, A' \div \angle pq$, pa je broj klasa ekvivalencije veći od jedan. Obeležimo sa α klasu ekvivalencije kojoj pripada tačka A, a sa α' klasu kojoj pripada A'.



Slika 5b

Ako bi broj klasa ekvivalencije bio veći i od dva, postojala bi tačka B takva da su $A, B \div \angle pq$ i $A', B \div \angle pq$. Iz $A, B \div \angle pq$ sledi da duž AB seče bar jednu od polupravih p i q ili sadrži tačku O. Ako sadrži O, duž $A'B$ neće imati zajedničkih tačaka ni sa p^* ni sa q^*, pa neće biti $A', B \div \angle pq$. Pretpostavimo da duž AB seče p. Tada su $A, B \div p^*$ i $A, A' \div p^*$, pa su $A', B \doteq p^*$. Međutim, i svaka tačka Y poluprave q' je sa iste strane p^* sa koje je i A', pa su, stoga, i $B, Y \doteq p^*$. Ako su tačke B i Y istovetne, duž $A'B$ nema zajedničkih tačaka ni sa p ni sa q, pa su $A', B \doteq \angle pq$. Ako se tačke B i Y razlikuju, poligonska linija m koja se sastoji iz duži $A'Y$ i YB, neće seći pravu p^*, a pravu q^* će seći u tački Y koja pripada polupravoj q'. Kako su tačke A' i B van q^*, ni jedna od duži $A'Y$ i YB neće imati zajedničkih tačaka sa q, pa su $A', B \doteq \angle pq$. Dakle, broj klasa ekvivalencije nije veći od dva, pa su α i α' jedine klase ekvivalencije. □

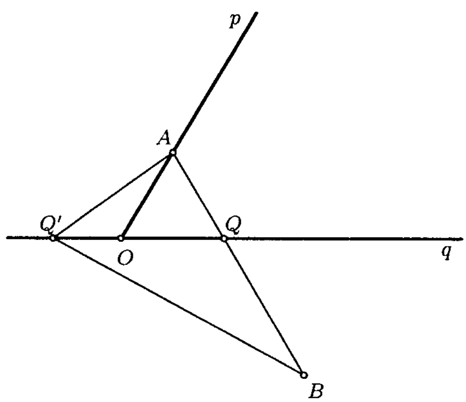
Svaku klasu ekvivalencije relacije sa iste strane ugaone linije pq nazivamo *otvorenim uglom* pq koji obeležavamo sa $\angle(pq)$. Uniju otvorenog ugla pq i ugaone linije pq nazivamo *zatvorenim uglom* i obeležavamo ga sa $\angle[pq]$. Ako to nije od značaja, u razmatranjima nećemo naglašavati da li je neki ugao otvoren ili zatvoren, a dopustićemo da se otvoreni ili zatvoreni ugao pq obeležavaju isto kao ugaona linija pq, dakle sa $\angle pq$, kad god to ne stvara nikakvu konfuziju. Krake i teme ugaone linije pq zvaćemo *kracima* i *temenom* ugla pq. Reći ćemo da kraci p i q *zahvataju* ili da *zaklapaju ugao* pq.

Iz teoreme 5.1 neposredno sledi da ugaona linija pq razlaže ravan π kojoj pripada na dva ugla α i α', koje nazivamo *komplementnim*. Ako poluprave p i q nisu komplementne, jedan od komplementnih uglova je presek poluravni (p^*Q) i (q^*P). Zaista, ako tačka B pripada preseku tih dveju poluravni, i duž AB pripada tom preseku jer je $\mathcal{B}(P, A, Q)$, pa je, stoga, $(p^*Q) \cap (q^*P)$ podskup skupa α. Obratno, ako B ne pripada nekoj od poluravni (p^*Q) i (q^*P), na primer poluravni (p^*Q), tada su $A, B \div p^*$, a kako su i $A, A' \div p^*$, biće $B, A' \doteq p^*$ pa, kao i u dokazu teoreme 5.1, postoji poligonska linija koja povezuje B i A' i nema zajedničkih tačaka sa $\angle pq$. Dakle, presek poluravni (p^*Q) i (q^*P) je istovetan otvorenom uglu α. Budući da su poluravni konveksni likovi, i ugao $(p^*Q) \cap (q^*P)$ je konveksan lik. Obeležavamo ga sa $\measuredangle(pq)$. Ako je konveksan ugao zatvoren, obeležavaćemo ga sa $\measuredangle[pq]$. Ako u nekom razmatranju nije od značaja da li je neki konveksni ugao otvoren ili zatvoren, obeležavaćemo ga sa $\measuredangle pq$, a dopustićemo da se otvoreni ili zatvoreni konveksan ugao pq obeležavaju isto kao ugaona linija pq, dakle sa $\angle pq$, kad god to ne stvara nikakvu konfuziju. Ako je P tačka kraka p, a Q tačka kraka q ugla $\measuredangle pq$ čije je teme O, ugao $\measuredangle pq$ obeležavaćemo sa $\measuredangle POQ$. Ako hoćemo da naglasimo da je on otvoren ili zatvoren, obeležavaćemo ga sa $\measuredangle(POQ)$ ili $\measuredangle[POQ]$. Dopustimo li da poluprave p i q budu istovetne, otvoreni ugao pq koji se tada sastoji iz svih tačaka ravni van p, zvaćemo *punim uglom*.

Ako su kraci ugla komplementne poluprave, taj ugao ćemo zvati *opruženim*. Uglove koji imaju jedan zajednički krak, nemaju zajedničkih tačaka osim tačaka toga kraka, i pripadaju jednoj ravni, zvaćemi *susednim*. Susedne uglove kojima su nezajednički kraci komplementne poluprave, zvaćemo *naporednim*. Konveksne uglove pq i $p'q'$ čiji su kraci p i p', tj. q i q', komplementne poluprave, zvaćemo *unakrsnim*. Za dve prave ćemo reći da *zahvataju* svaki od svojih unakrsnih uglova.

Teoremom 5.1 je dokazano da skup koji se sastoji iz tačaka dveju raznih polupravih sa zajedničkim temenom, razlaže ravan kojoj pripada, na dva ugla. Pre no što dokažemo da važi i opštije tvrđenje, formulišimo i dokažimo sledeće dve teoreme:

Teorema 5.2: *Ako je A proizvoljna tačka ugaone linije pq, i B bilo koja tačka ravni π u kojoj je $\angle pq$, takva da $B \notin \angle pq$, tada postoji poligonska linija koja povezuje A i B i čija svaka tačka sem A, pripada onom od komplementnih uglova α i α' na koje $\angle pq$ razlaže π, kojem pripada B.*



Slika 5c

Dokaz: Ako je tačka A istovetna sa temenom O ugaone linije pq, tada duž (AB) nema zajedničkih tačaka sa $\angle pq$ i svaka tačka duži (AB) pripada onom od uglova α ili α' kojem pripada B.

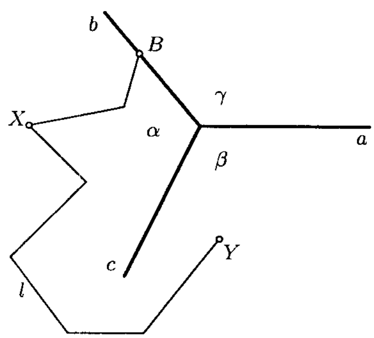
Ako A pripada nekom od krakova p i q, na primer kraku p, i ako duž (AB) nema zajedničkih tačaka sa $\angle pq$, teorema je dokazana. Ako (AB) seče q u tački

Q, tada postoji tačka Q' takva da je $\mathcal{B}(Q,O,Q')$. Duž (AQ') nema zajedničkih tačaka sa p jer je $A \in p$, a ne seče ni q jer su sve tačke te duži sa one strane prave $p^* \supset p$ sa koje nije ni jedna tačka otvorene poluprave q. Budući da su $A, B \div q^*$, duž $[Q'B]$ ne sadrži ni jednu tačku poluprave p, a sem Q' nema zajedničkih tačaka ni sa q^*. Dakle, poligonska linija $AQ'B$ povezuje A i B, a sa $\angle pq$, sem tačke A, nema zajedničkih tačaka. Štaviše, sve tačke te poligonske linije osim tačke A, su sa iste strane $\angle pq$ sa koje je i B.

Ako duž (AB) sadrži tačku O i ako je Q' tačka poluprave q' komplementne kraku q, poligonska linija $AQ'B$ povezuje A i B, a sa $\angle pq$, osim A, nema više zajedničkih tačaka. □

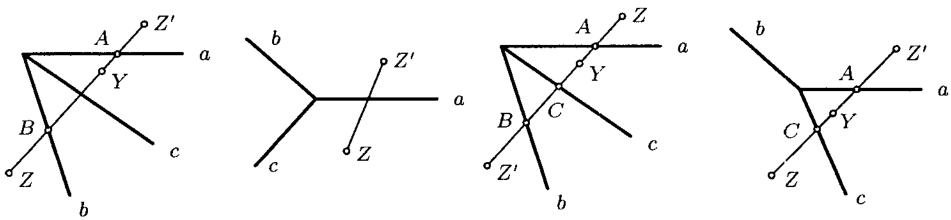
Teorema 5.3: *Poluprava c sa temenom O koja pripada uglu čije je teme takođe tačka O, razlaže taj ugao na dva ugla.*

Dokaz: Neka su a i b kraci ugla γ' kojem pripada poluprava c i neka je γ ugao komplementan uglu γ'. Obeležimo sa α onaj od uglova čiji su kraci b i c, kojem ne pripada poluprava a, a sa β onaj od uglova čiji su kraci c i a, kojem ne pripada poluprava b. Dokažimo, najpre, da su uglovi α, β, γ disjunktni. U tom cilju pretpostavimo da je X tačka jednog od njih, na primer ugla α, i dokažimo da ona ne pripada ni jednom od ostalih dvaju uglova β ili γ. Ako bi pripadala jednom od njih, na primer uglu β, tada bi za svaku tačku Y toga ugla postojala poligonska linija l koja povezuje X i Y i nema zajedničkih tačaka sa $\angle ac$. Kako, na osnovu prethodne teoreme, postoji poligonska linija l' koja povezuje X sa proizvoljnom tačkom B poluprave b, takva da sve tačke te poligonske linije, osim B, pripadaju α, poligonska linija $l \cup l'$ povezuje Y i B i ne seče $\angle ac$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da b ne pripada β.



Slika 5d

Dokažimo sada, da svaka tačka Z koja ne pripada ni α ni β pripada uglu γ. U tom cilju sa Z' obeležimo proizvoljnu tačku ugla γ i dokažimo da su $Z, Z' \doteq \angle ab$. Ako duž (ZZ') ne seče $\angle ab$, tačke Z i Z' su sa iste strane $\angle ab$. Stoga pretpostavimo da (ZZ') seče jednu od polupravih a i b, na primer polupravu a u tački A. Ako i polupravu b seče u nekoj tački B, tada postoji tačka Y takva da je $\mathcal{B}(A, Y, B)$. U tom slučaju su $Z', Y \div \angle ab$ i $Y, Z \div \angle ab$. Zaista, ako neka duž, na primer YZ, seče samo jedan krak ugaone linije ab, na primer krak b, tada su $Y, Z \div \angle ab$ jer bi, u suprotnom, postojala poligonska linija l koja spaja Y i Z, a sa $\angle ab$ nema zajedničkih tačaka, pa kako su Y, Z sa raznih strana prave b^* koja sadrži b, l bi sekla polupravu komplementnu polupravoj b. Tada bi, kao i u dokazu teoreme 5.1 postojala poligonska linija l' koja pripada l, čiji bi krajevi bili sa raznih strana prave koja sadrži a, a sve njene tačke sa one strane b^* sa koje je Z, pa bi l', dakle i l, sekla polupravu a. Dakle, iz $Z', Y \div \angle ab$ i $Y, Z \div \angle ab$ sledi da su $Z, Z' \doteq \angle ab$.



Slika 5e

Pretpostavimo da (ZZ') ne seče b već samo polupravu a. Ako ta duž ne bi sekla ni polupravu c, onda bi bile $Z, Z' \div \angle ca$, pa kako je Z' van β, tačka Z bi pripadala uglu β. Ako bi, pak, (ZZ') sekla polupravu c u tački C, postojala bi tačka Y takva da je $\mathcal{B}(Z', C, Y, A, Z)$ ili $\mathcal{B}(Z', A, Y, C, Z)$. U prvom slučaju bi duž ZZ' sekla b, što protivreči pretpostavci. U drugom slučaju bi Y bila tačka van ugla α, a duž YZ bi sekla c ali ne i b, pa bi bile $Y, Z \div \angle bc$, dakle Z bi pripadala uglu α. □

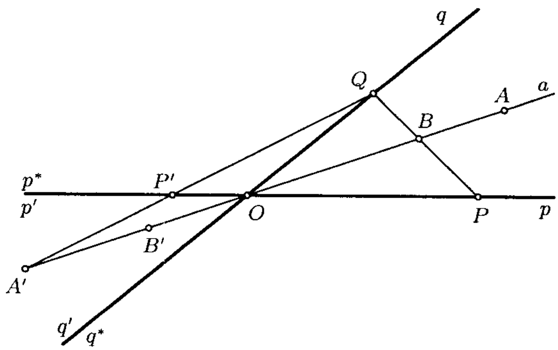
Sledeće tvrđenje se dokazuje indukcijom, primenom prethodne teoreme.

Teorema 5.4: *Skup koji se sastoji od n raznih polupravih neke ravni π, sa zajedničkim temenom O, razlaže π na n uglova.*

Dokaz: U teoremi 5.1 je dokazano da dve poluprave sa zajedničkim temenom razlažu π na dva ugla. Ako pretpostavimo da m polupravih sa zajedničkim temenom O razlažu π na m uglova i da je p poluprava sa temenom O različita od tih m polupravih, tada p pripada jednom od tih uglova i razlaže ga, na osnovu prethodne teoreme, na dva ugla. Dakle, $m+1$ raznih polupravih sa zajedničkim temenom razlaže π na $m+1$ uglova. □

Teorema 5.5: *Neka je O teme ugaone linije pq koja pripada ravni π, neka su zatim, P i Q tačke koje, redom, pripadaju kracima p i q, i neka je a proizvoljna prava ravni π koja sadrži O. Bilo koja tačka prave a, osim O, pripada ili $\measuredangle(pq)$ ili njemu unakrsnom uglu ako i samo ako a seče (PQ).*

Dokaz: Neka su p' i q' poluprave komplementne, redom, polupravama p i q, i neka su p^* i q^* prave koje, redom, sadrže p i q. Ako sve tačke prave a osim O, pripadaju unakrsnim uglovima $\measuredangle(pq)$ i $\measuredangle(p'q')$, i ako je A proizvoljna tačka prave a koja pripada $\measuredangle(pq)$, a A' tačka iste prave koja pripada $\measuredangle(p'q')$, tada je $\mathcal{B}(A,O,A')$. Kako su $A,Q \doteq p^*$ i $A,A' \div p^*$ biće $Q,A' \div p^*$, pa stoga, p^* seče (QA') u nekoj tački P'. Štaviše, svaka od tačaka duži (QA') pripada (q^*A'), a kako su $P,A' \div q^*$, tačka P' pripada polupravoj p'. Tada je $\mathcal{B}(P,O,P')$, pa su $P,P' \div a$. Kako je, uz to, i $\mathcal{B}(A',P',Q)$, biće i $P',Q \doteq a$, pa su $P,Q \div a$, te prava a seče duž (PQ) u nekoj tački B.



Slika 5f

Obratno, ako a seče (PQ) u nekoj tački B, onda je $\mathcal{B}(P,B,Q)$, pa B pripada poluravnima (p^*Q) i (q^*P), dakle i uglu $\measuredangle(pq)$. Odatle neposredno sledi da svaka tačka poluprave (OB) pripada $\measuredangle(pq)$, i da svaka tačka poluprave (OB'), gde je B' tačka takva da je $\mathcal{B}(B,O,B')$, pripada $\measuredangle(p'q')$. Dakle, svaka tačka prave a, osim O, pripada jednom od unakrsnih uglova $\measuredangle(pq)$ ili $\measuredangle(p'q')$. □

Sledeće tvrđenje je neposredna posledica prethodne teoreme.

Teorema 5.6: *Svaka tačka neke poluprave sa temenom O pripada uglu $\measuredangle(pq)$ čije je teme O, ako i samo ako ta poluprava seče (PQ), pri čemu $P \in p$ i $Q \in q$.* □

Teorema 5.7: *Ako su A,B,C,D četiri koplanarne tačke od kojih su svake tri nekolinearne, tada prave AD, BD, CD seku duži (BC), (CA), (AB) u jednoj ili trima tačkama.*

Dokaz: Prave BC, CA, AB, na osnovu teoreme 4.5, razlažu ravan π kojoj pripadaju na sedam oblasti tako da tačka D pripada ili svim trima uglovima ABC, BCA, CAB, ili pripada tačno jednom od njih, ili pripada tačno jednom od njima unakrsnih uglova. Zaista, prave AB i BC razlažu ravan π na dva para konveksnih unakrsnih uglova, a tačke A i C pravu CA razlažu na duž (CA) i dve otvorene poluprave. Stoga prava CA ima zajedničkih tačaka sa trima uglovima na koje AB i BC razlažu π. Jedan je $\measuredangle ABC$, a druga dva su njemu naporedni uglovi. Stoga prava CA razlaže svaki od tih uglova na po dve konveksne oblasti. Na isti način, prva AB razlaže $\measuredangle BCA$ i njemu naporedne uglove na po dve konveksne oblasti, a BC razlaže $\measuredangle CAB$ i njemu naporedne uglova, takođe, na po dve konveksne oblasti. Dakle, konveksne oblasti na koje prave AB, BC, CA razlažu π su:

1. $\measuredangle ABC \cap (CAB) = \measuredangle BCA \cap (ABC) = \measuredangle CAB \cap (BCA) =$ $\measuredangle ABC \cap \measuredangle BCA \cap \measuredangle CAB = (CAB) \cap (ABC) \cap (BCA)$,
2. $\measuredangle ABC \cap [\![CAB)^c = [\![CAB)^c \cap (ABC) \cap (BCA)$,
3. $\measuredangle BCA \cap [\![ABC)^c = (CAB) \cap [\![ABC)^c \cap (BCA)$,
4. $\measuredangle CAB \cap [\![BCA)^c = (CAB) \cap (ABC) \cap [\![BCA)^c$,
5. $[\![CAB)^c \cap [\![ABC)^c = [\![CAB)^c \cap [\![ABC)^c \cap (BCA)$,
6. $[\![ABC)^c \cap [\![BCA)^c = (CAB) \cap [\![ABC)^c \cap [\![BCA)^c$,
7. $[\![BCA)^c \cap [\![CAB)^c = [\![CAB)^c \cap (ABC) \cap [\![BCA)^c$.

Stoga tačka D pripada ili svim trima uglovima ABC, BCA, CAB, ili pripada tačno jednom od njih, ili pripada tačno jednom od njima unakrsnih uglova. U prvom od tih slučajeva prave AD, BD, CD, na osnovu teoreme 5.5, seku redom, duži (BC), (CA), (AB). U drugom i trećem, tačno jedna od pravih AD, BD, CD, na osnovu iste teoreme, seče neku od duži (BC), (CA), (AB). □

Iz dokaza prethodne teoreme možemo zaključiti da tačka D pripada ravni ABC ako i samo ako pripada nekom od zatvorenih konveksnih uglova $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$ ili $\measuredangle CAB$, ili nekom od zatvorenih, njima unakrsnih uglova. Dakle, na osnovu prethodne teoreme i teoreme 5.5, važiće tzv. *drugi Peanov stav* kojim se karakteriše skup tačaka ravni:

Teorema 5.8: *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, tada tačka D pripada ravni ABC ako i samo ako pripada skupu tačaka pravih koje sadrže: tačku A i neku tačku duži $[BC]$ ili tačku B i neku tačku duži $[CA]$ ili tačku C i neku tačku duži $[AB]$.* □

Diedarska površ i diedar. Skup koji se sastoji iz tačka dveju raznih zatvorenih poluravni α i β sa istom granicom s, nazivamo *diedarskom površi $\alpha\beta$*. Poluravni α i β nazivamo *pljosnima* ili *stranama* te površi, a pravu s njenom *ivicom*.

Neka su i A i B dve razne tačke koje ne pripadaju diedarskoj površi $\alpha\beta$. Ako postoji poligonska linija (ili duž) koja povezuje A i B, a sa diedarskom površi $\alpha\beta$ nema zajedničkih tačaka, tada kažemo da su A i B *sa iste strane diedarske površi $\alpha\beta$*. U suprotnom kažemo da su A i B *sa raznih strana diedarske površi $\alpha\beta$*.

Sledeću teoremu ćemo samo formulisati budući da se njen dokaz izvodi u potpunoj analogiji sa dokazom teoreme 5.1.

Teorema 5.9: *Relacija sa iste strane diedarske površi $\alpha\beta$ je relacija ekvivalencije koja skup svih tačaka prostora van te diedarske površi, razlaže na dve klase ekvivalencije.* □

Svaku klasu ekvivalencije relacije sa iste strane diedarske površi $\alpha\beta$ nazivamo *otvorenim diedrom* $\angle(\alpha\beta)$. Uniju otvorenog diedra $\alpha\beta$ i njegove diedarske površi nazivamo *zatvorenim diedrom* $\angle[\alpha\beta]$. Pljosni i ivicu diedarske površi $\alpha\beta$ zvaćemo *pljosnima* i *ivicom* diedra $\alpha\beta$. Pojmove *punog* i *opruženog diedra*, *komplementnih*, *susednih*, *naporednih* i *unakrsnih diedara* možemo da definišemo u analogiji sa odgovarajućim pojmovima koji se odnose na uglove. Za dve poluravni α i β sa zajedničkom ivicom reći ćemo da *zahvataju* diedar $\alpha\beta$, a za dve ravni ćemo reći da *zahvataju* svaki od svojih unakrsnih diedara. Napominjemo da za svaku od teorema 5.2-6 možemo da dokažemo analogno tvrđenje koje se odnosi na diedre. Na primer:

Teorema 5.10: *Skup koji se sastoji iz n raznih poluravni sa zajedničkom ivicom razlaže prostor na n diedara.* □

Teorema 5.11: *Svaka tačka neke poluravni sa granicom s pripada konveksnom diedru $\alpha\beta$ čija je granica prava s, ako i samo ako ta poluravan seče (PQ), pri čemu $P\in\alpha$ i $Q\in\beta$.* □

U dokazu teoreme 5.7 određene su konveksne oblasti na koje tri prave AB, BC, CA određene trima nekolinearnim tačkama A, B, C razlažu ravan kojoj pripadaju. Slično se može odrediti 15 konveksnih oblasti (od kojih je svaka presek poluravni) na koje četiri ravni ABC, ABD, ACD, BCD određene četirima nekoplanarnim tačkama A, B, C, D, razlažu prostor. To su:

1. $(BCDA)\cap(CDAB)\cap(DABC)\cap(ABCD)$
2. $[\![BCDA)^c\cap(CDAB)\cap(DABC)\cap(ABCD)$
3. $(BCDA)\cap[\![CDAB)^c\cap(DABC)\cap(ABCD)$
4. $(BCDA)\cap(CDAB)\cap[\![DABC)^c\cap(ABCD)$
5. $(BCDA)\cap(CDAB)\cap(DABC)\cap[\![ABCD)^c$
6. $[\![BCDA)^c\cap[\![CDAB)^c\cap(DABC)\cap(ABCD)$
7. $[\![BCDA)^c\cap(CDAB)\cap[\![DABC)^c\cap(ABCD)$
8. $[\![BCDA)^c\cap(CDAB)\cap(DABC)\cap[\![ABCD)^c$
9. $(BCDA)\cap[\![CDAB)^c\cap[\![DABC)^c\cap(ABCD)$
10. $(BCDA)\cap[\![CDAB)^c\cap(DABC)\cap[\![ABCD)^c$
11. $(BCDA)\cap(CDAB)\cap[\![DABC)^c\cap[\![ABCD)^c$
12. $[\![BCDA)^c\cap[\![CDAB)^c\cap[\![DABC)^c\cap(ABCD)$
13. $[\![BCDA)^c\cap[\![CDAB)^c\cap(DABC)\cap[\![ABCD)^c$
14. $[\![BCDA)^c\cap(CDAB)\cap[\![DABC)^c\cap[\![ABCD)^c$
15. $(BCDA)\cap[\![CDAB)^c\cap[\![DABC)^c\cap[\![ABCD)^c$

Odatle sledi stav analogan teoremi 5.8, tzv. *treći Peanov stav*, kojim se karakteriše skup tačaka prostora:

Teorema 5.12: *Ako su A, B, C, D četiri nekoplanarne tačke, tada je E tačka prostora S ako i samo ako pripada skupu tačaka ravni koje sadrže: pravu AD i neku tačku duži $[BC]$, ili pravu BD i neku tačku duži $[CA]$ ili pravu CD i neku tačku duži $[AB]$.* □

ZADACI:

1. Ako su a, b, c, d četiri razne poluprave sa zajedničkim temenom O, reći ćemo da poluprave a i b *razdvajaju* poluprave c i d (simbilično $a, b|c, d$) ako c i d pripadaju raznim uglovima koje određuje ugaona linija $\angle ab$. Dokazati da važi:

(i) ako $a, b|c, d$, onda $a, b|d, c$ i $c, d|a, b$,

(ii) ako $a, b|c, d$ onda nije $a, c|b, d$,

(iii) za svake tri poluprave a, b, c sa istim temenom O, uvek postoji poluprava d sa temenom O takva da važi $a, b|c, d$,

(iv) za četiri razne poluprave a, b, c, d sa istim temenom važi bar jedna od relacija $a, b|c, d, a, c|b, d, a, d|b, c$,

(v) ako su a, b, c, d, e razne poluprave sa zajedničkim temenom, i nije $a, b|c, d$ ni $a, b|c, e$, onda nije ni $a, b|d, e$.

2. Dokazati da, ako se među polupravama sa temenom O uvede relacija $x, y \doteq a, b$ (x i y su sa iste strane para polupravih a i b) ako nije $a, b|x, y$, za dve zadate poluprave a i b, ova relacija je relacija ekvivalencije sa tačno dvema klasama ekvivalencije (označimo ih sa α i α'). Štaviše, otvorene uglove koje određuje ugaona linija $\angle ab$ možemo označiti sa ω i ω', tako da za svaku tačku P koja ne pripada polupravama a i b važi: $P \in \omega$ ako i samo ako $(OP) \in \alpha$ i $P \in \omega'$ ako i samo ako $(OP) \in \alpha'$.

3. Ako je zadato n polupravih sa zajedničkim temenom O, dokazati da se one (na $2n$ načina) mogu označiti sa $a_1, \ldots, a_n$ tako da $a_i, a_k|a_j, a_l$ kad god je $1 \leq i < j < k < l \leq n$.

4. Služeći se prethodnim zadatkom, dokazati da n polupravih sa istim temenom razlaže ravan na n uglova, i to, ako se poluprave označe kao u prethodnom zadatku sa $a_1, \ldots, a_n$, upravo na uglove određene ugaonim linijama $\angle a_1a_2, \angle a_2a_3, \ldots, \angle a_na_1$. Štaviše, unija nekoliko uzastopnih uglova u ovom nizu je opet ugao sa kracima iz polaznog skupa.

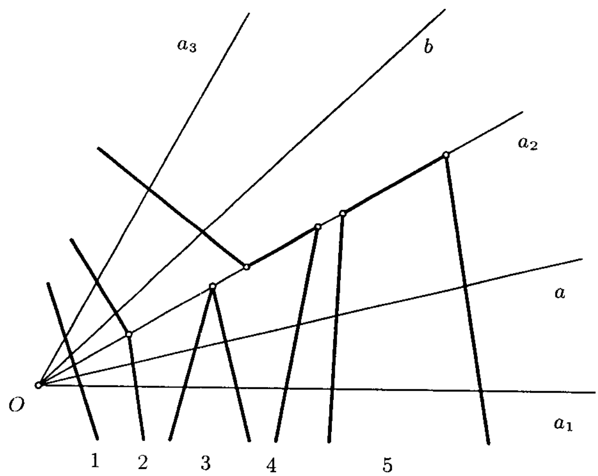
6. Poligonska površ

Unutrašnjost i spoljašnjost poligona. U trećem odeljku definisali smo pojam poligona. Uvođenju pojma poligonske površi prethodi nekoliko značajnih teorema.

Teorema 6.1: *Neka ravni π ma kakvog ravnog poligona p pripadaju i dve poluprave a i b sa istim temenom $O \notin p$, koje ne sadrže ni jedno teme tog poligona. Tada su brojevi $k(a)$ i $k(b)$, presečnih tačaka tih dveju polupravih sa ivicama poligona p, iste parnosti.*

Dokaz: Obeležimo sa $a_1, a_2, \ldots, a_n$ poluprave sa zajedničkim temenom O koje sadrže temena poligona p. One, na osnovu teoreme 5.4, razlažu π na m $(\leq n)$ uglova, pa poluprava a pripada tačno jednom od njih. Pretpostavimo da je to $\angle(a_1 a_2)$.

Ako i b pripada tom uglu, tada, na osnovu teoreme 5.6, ivica poligona p seče a ako i samo ako seče b jer unutar $\angle(a_1 a_2)$ nema temena poligona p. Dakle, tada je $k(a) = k(b)$.



Slika 6a

Ako je b u onom od uglova na koje poluprave $a_1, a_2, \ldots, a_n$ razlažu π, koji je susedan uglu $\angle(a_1 a_2)$, na primer u uglu $\angle(a_2 a_3)$, tada se ostvaruje jedna od sledećih mogućnosti:

1. Ivica poligona p nema temena na a_2, a ima zajedničkih tačaka i sa a_1 i sa a_3, pa seče i a i b.
2. Jedno teme poligona p je na a_2, a ivice kojima je to teme zajedničko su sa raznih strana prave $a_2^* \supset a_2$, pa stoga, svaka od tih ivica seče po jednu od polupravih a i b.
3. Jedno teme poligona p je na a_2, a ivice kojima je to teme zajedničko su sa iste strane prave a_2^*, pa te dve ivice seku samo jednu od polupravih a i b.
4. Jedna ivica poligona p je na a_2, a dve njoj susedne ivice su sa raznih strana a_2^*, pa stoga, svaka od tih dveju ivica seče po jednu od polupravih a i b.

5. Jedna ivica poligona p je na a_2, a dve njoj susedne ivice su sa iste strane a_2^*, pa stoga, te dve ivice seku samo jednu od polupravih a i b.

Dakle, ako su a i b u susednim uglovima na koje poluprave $a_1, a_2, \dots, a_n$ razlažu π, tada je razlika brojeva $k(a)$ i $k(b)$ paran broj, pa su, stoga, ti brojevi iste parnosti.

Ako a i b nisu u susednim uglovima, tada postoji konačan niz polupravih $b_1, b_2, \dots, b_l$ sa zajedničkim temenom O takvih da su svake dve uzastopne poluprave toga niza u susednim uglovima, a zatim i da su a i b_1, i b_l i b, takođe, u susednim uglovima. Tada će svaka od razlika

$$k(a) - k(b_1),\ k(b_1) - k(b_2), \dots, k(b_l) - k(b),$$

biti paran broj, pa će i njihov zbir $k(a) - k(b)$ biti paran broj. Dakle, brojevi $k(a)$ i $k(b)$ će biti iste parnosti. □

Sledeća teorema je neposredna posledica prethodne.

Teorema 6.2: *Broj $k(l)$ presečnih tačaka ivica nekog ravnog poligona p i proizvoljne prave l koja pripada ravni $\pi \supset p$, a ne sadrži ni jedno teme tog poligona, je paran.* □

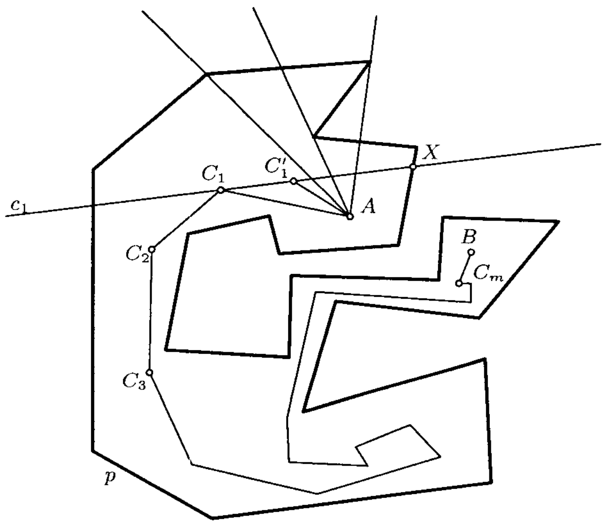
Napomenimo da se prethodne dve teoreme odnose na bilo kakve ravne poligone. Predmet razmatranja koja slede biće prosti, ravni poligoni. Neka je p prost, ravan poligon i neka je O tačka u ravni toga poligona koja mu ne pripada. Ako pri tome svaka poluprava sa temenom O, u ravni zadatog poligona koja ne sadrži ni jedno njegovo teme, sa njime ima neparan broj zajedničkih tačaka, onda kažemo da je tačka O *unutar* p. Ako, u protivnom, svaka takva poluprava ima sa poligonom paran broj zajedničkih tačaka, kažemo da je tačka O *izvan* poligona p. Skup svih tačaka unutar poligona p zvaćemo njegovom *unutrašnjošću*, a svih tačaka izvan p njegovom *spoljašnjošću*.

Teorema 6.3: *Unutrašnjost i spoljašnjost bilo kojeg prostog, ravnog poligona p su neprazni skupovi.*

Dokaz: Neka je X proizvoljna tačka poligona p različita od njegovih temena i neka je l bilo koja prava koja sadrži X, a ne sadrži ni jedno teme poligona p. Presečne tačke prave l i poligona p možemo, na osnovu teoreme 3.5, obeležiti sa $X_1, X_2, \dots, X_k$ tako da bude $\mathcal{B}(X_1, X_2, \dots, X_k)$. Ako je $X = X_i$, $i \neq 1, k$, tada postoje tačke P i Q takve da je $\mathcal{B}(X_{i-1}, P, X_i, Q, X_{i+1})$. Broj presečnih tačaka polupravih (PX_{i-1}) i (QX_{i-1}) sa poligonom p se razlikuje za jedan, pa je jedna od njih unutar, a druga izvan p. Ako je $X = X_1$, ili $X = X_k$, tada postoje tačke P i Q takve da je $\mathcal{B}(Q, X_1, P, X_2)$, ili $\mathcal{B}(X_{k-1}, P, X_k, Q)$. Budući da je k, na osnovu prethodne teoreme, paran broj, tačka P će biti unutar, a Q izvan poligona p □

Iz prethodnih teorema neposredno sledi da svaka tačka ravni π koja ne pripada nekom prostom, ravnom poligonu te ravni, pripada njegovoj unutrašnjosti ili njegovoj spoljašnjosti. Sledećim dvema teoremama odgovorićemo na pitanje jesu li unutrašnjost i spoljašnjost prostog, ravnog poligona oblasti ili nisu. Drugim rečima, odgovorićemo na pitanje da li prost ravan poligon razlaže ravan kojoj pripada na njegovu unutrašnjost i njegovu spoljašnjost.

Teorema 6.4: *Ako u ravni π postoji poligonska linija koja povezuje tačke A i B i nema zajedničkih tačaka sa prostim poligonom p koji takođe pripada ravni π, tada su A i B ili obe unutar ili obe izvan p.*



Slika 6b

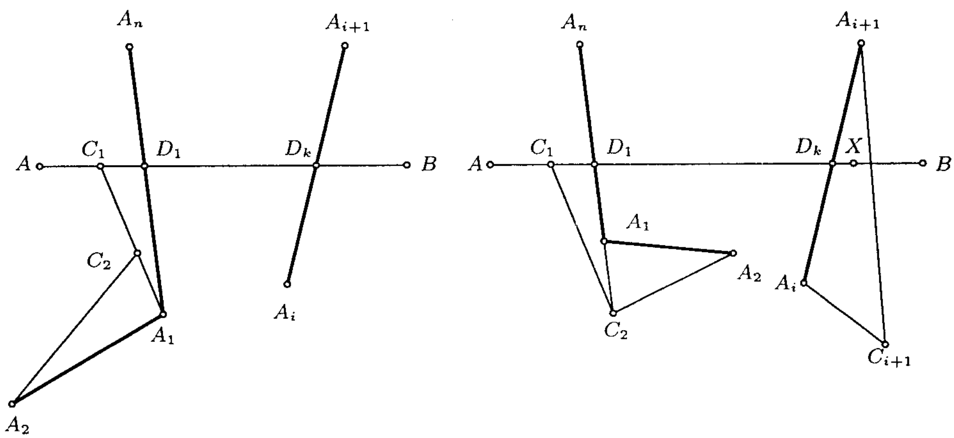
Dokaz: Neka je $AC_1C_2\ldots C_mB$ poligonska linija l koja pripada ravni π i koja sa poligonom p nema zajedničkih tačaka. Dovoljno je dokazati da su tačke A i C_1 obe unutar ili obe izvan poligona p budući da će iz istih razloga svaka dva susedna temena poligonske linije l biti oba unutar ili oba izvan poligona p, pa će i tačke A i B biti obe unutar ili obe izvan poligona p.

Ako poluprava (AC_1) ne sadrži ni jedno teme poligona p, onda ni poluprava sa temenom C_1 koja joj pripada, neće sadržati ni jedno od tih temena. Štaviše, te dve poluprave će seći p u istim tačkama jer duž (AC_1) ne seče p, pa su A i C_1 ili obe unutar ili obe izvan p.

Ako (AC_1) sadrži neka od temena poligona p, tada, budući da je broj temena poligona p konačan, postoji prava c_1 koja sadrži tačku C_1 i ne sadrži ni jedno teme tog poligona. Budući da se skup koji se sastoji iz tačke C_1 i presečnih tačaka poligona p sa pravom c_1, može linearno urediti, sa X možemo obeležiti tačku tog skupa takvu da između X i C_1 nema više tačaka toga skupa. Tada na duži (XC_1) postoji tačka C'_1 takva da (AC'_1) ne sadrži ni jedno teme poligona p, a duž (AC'_1)

sa p nema zajedničkih tačaka. Zaista, poluprave sa zajedničkim temenom A koje sadrže temena poligona p, seku (XC_1) u ukupno konačno mnogo tačaka. Neka je C_1' proizvoljna, od njih različita tačka duži (XC_1), takva da između nje i C_1 nema ni jedne od tih tačaka. Duž AC_1' ne seče ni jednu stranicu poligona p, pa su, stoga, tačke A i C_1' obe unutar ili obe izvan p. Ni duž $C_1'C_1$ nema zajedničkih tačaka sa poligonom p, pa su i tačke C_1' i C_1 obe unutar ili obe izvan p. Dakle tačke A i C_1 su obe unutar ili obe izvan p. □

Teorema 6.5: *I unutrašnjost i spoljašnjost prostog ravnog poligona p su povezani geometrijski likovi.*



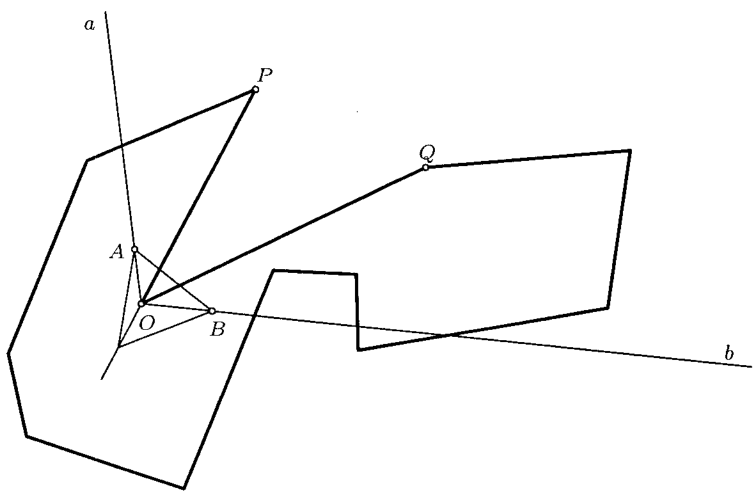
Slika 6c

Dokaz: Pretpostavimo da su A i B tačke u ravni π poligona $p = A_1A_2\dots A_n$ koje obe pripadaju ili njegovoj unutrašnjosti ili njegovoj spoljašnjosti i konstruišimo poligonsku liniju l koja ih povezuje, a nema zajedničkih tačaka sa p. Ako duž (AB) nema zajedničkih tačaka sa p, ona će biti tražena poligonska linija l. Stoga pretpostavimo da (AB) seče p u tačkama $D_1, D_2, \dots, D_k$ takvima da je $\mathcal{B}(A, D_1, D_2, \dots, D_k, B)$, pri čemu, bez smanjivanja opštosti rasuđivanja, možemo pretpostaviti da tačke D_1 i D_k pripadaju, redom, ivicama $[A_nA_1)$ i $[A_iA_{i+1})$. Dogodi li se da neka ivica poligona p pripada duži AB njena temena ćemo obeležiti sa D_j i D_{j+1}.

Na duži AD_1 postoji tačka C_1 takva da duž $[C_1A_1)$ sa poligonom p nema zajedničkih tačaka. Zaista, poluprave sa zajedničkim temenom A_1 koje sadrže temena poligona p seku duž AD_1 u ukupno konačno mnogo tačaka. Sa C_1 ćemo obeležiti proizvoljnu, od njih različitu tačku duži (AD_1) takvu da između nje i D_1 nije ni jedna od tih tačaka. Ako su $A, A_2 \doteq A_nA_1$, obeležimo sa C_2 tačku između C_1 i A_1 takvu da duž $[C_2A_2)$ nema sa p zajedničkih tačaka. Ako su $A, A_2 \div A_nA_1$, sa C_2, obeležimo tačku takvu da je $\mathcal{B}(A_n, A_1, C_2)$, pri čemu duži $[C_1C_2]$ i $[C_2A_2)$ sa p nemaju zajedničkih tačaka. Tada poligonska linija AC_1C_2 nema zajedničkih tačaka sa poligonom p, pa su sva njena temena ili unutar ili izvan p. Kada ivica A_nA_1 pripada duži AB, poligonska linija AC_1C_2 se konstruiše na sličan način.

Ponavljajući prethodni postupak konačno mnogo puta konstruisaćemo poligonsku liniju $AC_1C_2\dots C_{i+1}$ koja sa p nema zajedničkih tačaka i čija su temena ili sva unutar ili sva izvan p. Štaviše, duži $(C_{i+1}A_i)$ i $(C_{i+1}A_{i+1})$ sa poligonom p neće imati zajedničkih tačaka, pa u unutrašnjosti trougla $A_iA_{i+1}C_{i+1}$ neće biti tačaka tog poligona. Budući da prava AB seče (A_iA_{i+1}) u tački D_k, postojaće tačka $X \in AB$ takva da je X unutar trougla $A_iA_{i+1}C_{i+1}$, a B nije između D_k i X. Kako duž $C_{i+1}X$ nema zajedničkih tačaka sa p tačke X i A su ili obe unutar ili obe izvan p. Ako bi duž XB sekla (A_iA_{i+1}), tačke X i B, pa stoga, i tačke A i B, ne bi bile obe unutar ili obe izvan p. Zaključujemo da je $AC_1C_2\dots C_{i+1}XB$ tražena poligonska linija l. □

Dakle, prost ravan poligon p razlaže ravan kojoj pripada na dve oblasti: njegovu unutrašnjost i njegovu spoljašnjost. Unutrašnjost poligona p zvaćemo i *otvorenom poligonskom površi* i obeležavaćemo je sa (p), a poligon p zvaćemo *rubom* te površi. Uniju otvorene poligonske površi i njenog ruba p zvaćemo *zatvorenom poligonskom površi* i obeležavaćemo je sa $[p]$. Kada nije od značaja da li je neka poligonska površ otvorena ili zatvorena zvaćemo je, samo, *poligonskom površi*. Ako je rub poligonske površi n-tougao, tu površ ćemo zvati *n-tougaonom*. *Temenima, ivicama* i *dijagonalama poligonske površi* čija je granica p zvaćemo temena, ivice i dijagonale poligona p.



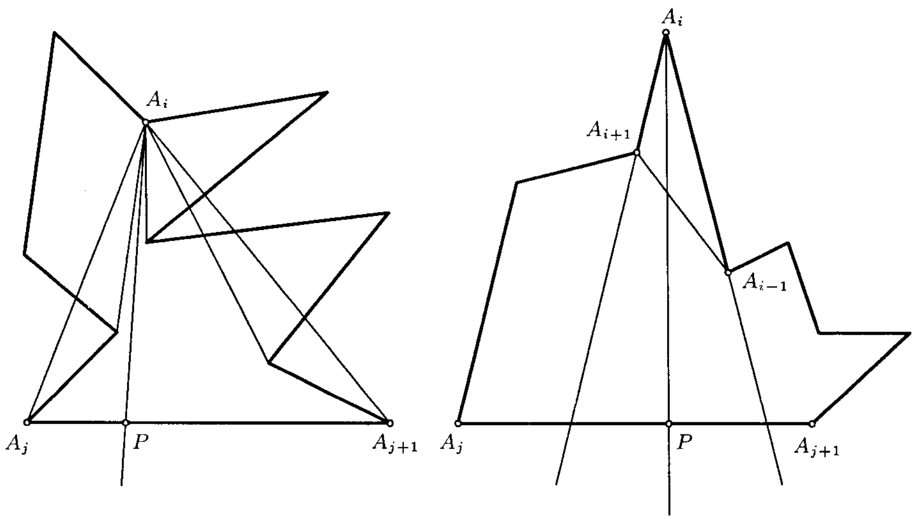
Slika 6d

Neka su P, O, Q tri uzastopna temena ruba neke poligonske površi ω. Ugaona linija $\angle POQ$ razlaže ravan π kojoj ta poligonska površ pripada, na dva ugla α i α'. Ako neka otvorena poluprava a sa temenom O koja pripada uglu α, a ne sadrži ni jedno teme ruba površi ω, sa rubom ima neparno mnogo zajedničkih tačaka, tada bilo koja druga otvorena poluprava b sa temenom O koja pripada uglu α, sa istim rubom ima neparno mnogo zajedničkih tačaka. Zaista, budući da rub površi ω ima konačno mnogo ivica, na polupravama a i b postoje tačke A i B takve da ni jedna tačka toga ruba ne pripada dužima (OA) i (OB) pri čemu duž (AB) može imati zajedničkih tačaka samo sa ivicama OP i OQ. Kao i u dokazu teoreme 6.5 može se konstruisati poligonska linija koja povezuje tačke A i B, a nema zajedničkih tačaka sa rubom površi ω. Kako tačka A pripada ω, i B će pripadati ω. Tada ugao α zovemo *unutrašnjim uglom poligonske površi* ω ili, jednostavno, *uglom* te površi, a ako postoji njemu naporedan ugao α', njega ćemo zvati *spoljašnjim uglom* te površi.

Za unutrašnje uglove poligonske površi (p) reći ćemo da su to i (*unutrašnji*) *uglovi poligona* p, a za spoljašnje uglove te površi, da su to *spoljašnji uglovi poligona* p. Ako je AB ivica poligona p, uglove tog poligona čiji kraci sadrže duž AB zvaćemo *naleglim uglovima ivice* AB i obeležavaćemo ih isto kao i temena, sa A i B. Ako su AB i BC susedne ivice poligona p, ugao tog poligona kod temena B zvaćemo *uglom zahvaćenim ivicama* AB i BC. Ako je ABC trougao, uglove A, B, C tog trougla i, redom, ivice BC, CA, AB zvaćemo *naspramnim*.

Među svim dijagonalama poligonske površi (p) izdvajamo one čije su sve tačke unutar p. Njih nazivamo *unutrašnjim dijagonalama površi* p.

Teorema 6.6: *Svaka poliginska površ sa više od tri temena ima bar jednu unutrašnju dijagonalu.*



Slika 6e

Dokaz: Neka je A_i proizvoljno teme poligonske površi (p). Presek proizvoljne poluprave sa temenom A_i koja pripada unutrašnjem uglu sa temenom A_i te površi, i ruba površi (p), je konačan skup tačaka. Sa P obeležimo onu od tih tačaka koja ima osobinu da između nje i A_i nema više tačaka tog skupa. Ako je P teme poligonske površi (p), (A_iP) je tražena dijagonala.

Stoga pretpostavimo da je P tačka ivice (A_jA_{j+1}) koja pripada rubu površi (p). Duži (A_iA_j) i (A_iA_{j+1}) ne mogu obe da budu ivice toga ruba jer bi on tada bio trougao. Pretpostavimo da (A_iA_j) nije ivica koja pripada rubu. Ako sva temena ruba površi (p), sem A_i i A_j, pripadaju spoljašnjosti trougla A_iPA_j, (A_iA_j) je unutrašnja dijagonala površi (p). Ako neka od temena ruba površi (p) pripadaju duži (A_iA_j), a ni jedno ne pripada unutrašnjosti trougla A_iPA_j, onda se skup S tih temena može linearno urediti, pa prva dva uzastopna temena iz skupa $S \cup \{A_i\} \cup \{A_j\}$ koja nisu temena jedne ivice biće temena unutrašnje dijagonale poligonske površi (p).

Ako neka temena poligona p pripadaju unutrašnjosti trougla A_iPA_j, tada poluprave sa temenom A_i koje sadrže ta temena, razlažu ugao PA_iA_j kojem pripadaju, na konačan niz uglova. Ako je prvi u tom nizu ugao sa kracima (A_iP) i b tada, budući da se temena poligona p koja pripadaju b mogu linearno urediti, prva dva uzastopna takva temena koja nisu temena jedne ivice, jesu temena unutrašnje dijagonale poligonske površi (p). Ako b sadrži ivicu A_iA_{i-1}, prethodni postupak možemo ponoviti za trougaonu površ A_iPA_{j+1} pa, ako i ivica A_iA_{i+1} pripada odgovarajućoj polupravoj sa temenom A_i, tada u unutrašnjosti trougla $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ nema tačaka ruba površi (p), pa je $A_{i-1}A_{i+1}$ tražena dijagonala. □

Razlaganje nekog lika na trougaone površi zvaćemo *triangulacijom* toga lika. Sledeće tvrđenje se dokazuje neposrednom primenom prethodne teoreme konačno mnogo puta.

Teorema 6.7: *Postoji triangulacija svake poligonske površi njenim dijagonalama.* □

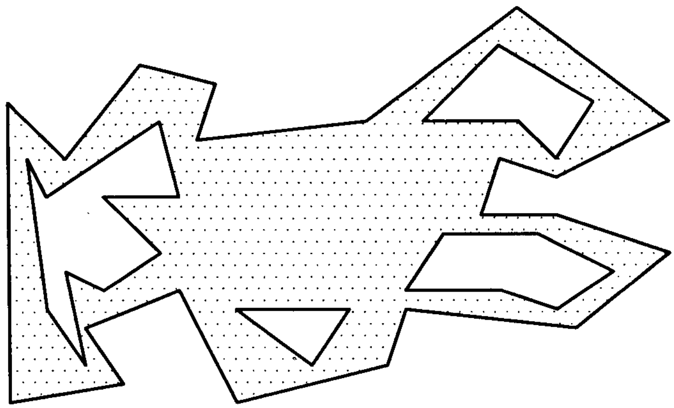
Među poligonskim površima od posebnog značaja su konveksne poligonske površi. Nije teško primetiti da su sve tačke konveksne poligonske površi sa iste strane prave koja sadrži proizvoljnu ivicu te poligonske površi. Stoga je svaka konveksna poligonska površ presek konačno mnogo poluravni. Indukcijom se jednostavno dokazuje da za svaki prirodan broj n postoji konveksna n-tougaona površ.

n-povezana poligonska površ. Neka su $[p_1], [p_2], \ldots, [p_{n-1}]$ disjunktne poligonske površi koje pripadaju poligonskoj površi (p). Geometrijski lik koji se sastoji iz tačaka površi (p) koje pripadaju spoljašnjostima poligona $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ nazivamo *otvorenom, višestruko povezanom poligonskom površi* i obeležavamo je sa

$$(p; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}),$$

a skup koji se sastoji iz tačaka poligona $p, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, *rubom* te površi. Uniju površi $(p; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$ i njenog ruba nazivamo *zatvorenom višestruko povezanom poligonskom površi* i obeležavamo je sa

$$[p; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}].$$



Slika 6f

Višestruko povezanu poligonsku površ čiji se rub sastoji iz n disjunktnih poligona zvaćemo i *n-povezanom poligonskom površi*. Jasno, poligonska površ je 1-povezana.

Temena i ivice poligona iz kojih se sastoji rub površi $(p; p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$ zvaćemo *temenima* i *ivicama* te *n-povezane poligonske površi*. Duži koje spajaju temena površi $(p; p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$, a nisu njene ivice, zvaćemo *dijagonalama* te površi.

Sledeće tvrđenje neposredno sledi iz teoreme 6.1.

Teorema 6.8: *Svaka poluprava a ravni π čije teme pripada otvorenoj n-povezanoj poligonskoj površi te ravni, seče rub te površi u neparnom broju tačaka ako a ne sadrži ni jedno teme ruba.* □

Iz definicije n-povezane poligonske površi neposredno sledi da zadata n-povezana poligonska površ $[p; p_1, p_2, \dots, p_{n-1}]$ razlaže ravan kojoj pripada na poligonske površi $(p_1), (p_2), \dots, (p_n)$ i spoljašnjost poligonske površi $[p]$. Štaviše, na isti način kao i teoreme 6.4 i 6.5 mogu se dokazati sledeće dva tvrđenja:

Teorema 6.9: *Ako u ravni n-povezane poligonske površi $(p; p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$ postoji poligonska linija koja povezuje tačke A i B koje ne pripadaju njenom rubu i koja sa rubom nema zajedničkih tačaka, tada A i B, ako nisu tačke spoljašnjosti poligonske površi $[p]$, pripadaju tačno jednom od likova*

$$(p, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}),\ (p_1),\ (p_2), \dots, (p_{n-1}). \qquad \square$$

Teorema 6.10: *Svaka n-povezana poligonska površ je povezan geometrijski lik.* □

Slično teoremama 6.6 i 6.7 mogu se dokazati sledeća dva tvrđenja:

Teorema 6.11: *Svaka n-povezana poliginska površ sa više od tri temena ima bar jednu unutrašnju dijagonalu.* □

Teorema 6.12: *Postoji triangulacija svake n-povezane poligonske površi njenim dijagonalama.* □

ZADACI:

1. Dokazati da je svaka konveksna poligonska površ presek poluravni koje sadrže njene ivice.

2. Dokazati da je četvorougaona površ konveksna ako i samo ako joj se dijagonale seku.

3. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, dokazati da je onda trougaona površ ABC istovetna sa presekom poluravni (ABC), (BCA), (CAB), i konveksna je.

4. Ako je tačka X unutar trougla ABC, dokazati da poluprave (AX), (BX), (CX) seku naspramne ivice tog trougla.

5. Ako temena neke poligonske površi pripadaju konveksnom liku ω, dokazati da onda sve tačke te poligonske površi pripadaju liku ω.

6. Neka su zadate dve zatvorene poligonske linije p i q (koje ne moraju biti proste) takve da ni jedno teme neke od njih ne pripada drugoj. Dokazati da je broj tačaka preseka ovih linija paran.

7. Neka su u ravni zadate dve trojke kolinearnih tačaka: K_1, K_2, K_3 i B_1, B_2, B_3. Dokazati da poligonskim linijama te ravni nije moguće spojiti svaku tačku jedne trojke sa svakom tačkom druge trojke, a da se te poligonske linije ne seku.

7. Rogalj

Rogljasta površ. Neka je u prostoru zadat konačan niz polupavih $a_1, a_2, \ldots$, a_n sa zajedničkim temenom O. Lik koji se sastoji iz uglova $\angle[a_1a_2], \angle[a_2a_3], \ldots$, $\angle[a_{n-1}a_n], \angle[a_na_1]$, pri čemu svaka dva uzastopna ugla u ovom cikličnom nizu ne pripadaju jednoj ravni, nazivamo *rogljastom površi* i obeležavamo je sa

$$Oa_1a_2 \ldots a_n.$$

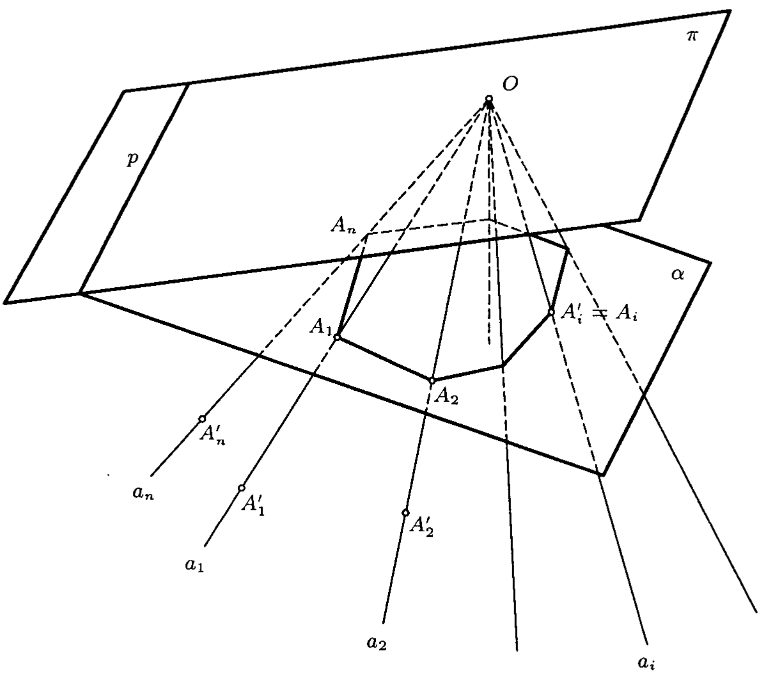
Poluprave $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazivamo *ivicama*, tačku O *temenom*, a uglove $\angle[a_1a_2]$, $\angle[a_2a_3], \ldots, \angle[a_{n-1}a_n], \angle[a_na_1]$ *pljosnima*, *ivičnim uglovima* ili *stranama rogljaste površi* $Oa_1a_2 \ldots a_n$. Dve uzastopne ivice rogljaste površi nazivamo *susednim ivicama*, a dve pljosni sa zajedničkom ivicom *susednim pljosnima*. Rogljastu površ koja ima n pljosni nazivamo *n-tostranom*, a 3-stranu rogljastu površ nazivamo *triedarskom površi*.

Ako ne postoje dve pljosni rogljaste površi $Oa_1a_2 \ldots a_n$ koje imaju zajedničkih tačaka, osim što svake dve susedne imaju zajedničku ivicu i što sve pljosni sadrže teme te rogljaste površi, onda $Oa_1a_2\dots a_n$ nazivamo *prostom rogljastom površi*. U suprotnom tu površ nazivamo *složenom*.

Neka je $Oa_1a_2\dots a_n$ prosta rogljasta površ i neka su A i B dve tačke koje joj ne pripadaju. Ako postoji poligonska linija koja povezuje A i B, a sa $Oa_1a_2\dots a_n$ nema zajedničkih tačaka, kažemo da su A i B *sa iste strane te rogljaste površi* i pišemo $A, B \doteq Oa_1a_2\dots a_n$, a ako takva poligonska linija ne postoji kažemo da su A i B *sa raznih strana* $Oa_1a_2\dots a_n$ i pišemo $A, B \div Oa_1a_2\dots a_n$.

Jednostrano raširena rogljasta površ. Ako su sve tačke neke rogljaste površi $Oa_1a_2\dots a_n$, izuzev temena O, sa iste strane izvesne ravni π koja sadrži tačku O, onda tu rogljastu površ nazivamo *jednostrano raširenom*. Budući da sve tačke jednostrano raširene rogljaste površi pripadaju poluprostoru sa granicom π, svaka od njenih pljosni pripada nekoj poluravni, pa su, dakle, njene pljosni konveksni uglovi.

Teorema 7.1: *Postoji ravan koja seče sve ivice i sve pljosni jednostrano raširene rogljaste površi $Oa_1a_2\dots a_n$. Taj presek je ravan n-tougao. On je prost ako i samo ako je površ $Oa_1a_2\dots a_n$ prosta.*



Slika 7a

Dokaz: Neka je π ravan koja, osim tačke O, sa $Oa_1a_2\dots a_n$ nema više zajedničkih tačaka, neka je p proizvoljna prava te ravni koja ne sadrži O, a $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ proizvoljne tačke, redom, polupravih $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Poluravni $(pO), (pA'_1), (pA'_2), \ldots,$ (pA'_n) razlažu prostor na najviše $n+1$ diedara. Budući da su sve poluravni $(pA'_1), (pA'_2), \ldots, (pA'_n)$ sa iste strane ravni π, a njihova zajednička ivica je prava koja pripada π, samo jedan od tih diedara je nekonveksan. Osim jedne pljosni nekonveksnog diedra sve ostale poluravni tog skupa pripadaju komplementu tog diedra pa, budući da ih ima konačno mnogo, jedna od njih, pretpostavimo da je to (pA'_i), pripada svakom od konveksnih diedara sa zajedničkom pljosni (pO), kojima su druge pljosni preostale poluravni $(pA'_1), \ldots, (pA'_{i-1}), (pA'_{i+1}), \ldots, (pA'_n)$. Tada (pA'_i), u skladu sa teoremom 5.11, seče svaku od duži $OA'_1, OA'_2, \ldots, OA'_n$, redom, u tačkama $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Kako su pljosni površi $Oa_1a_2\ldots a_n$ konveksni uglovi, duži $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ će pripadati pljosnima $\measuredangle[a_1a_2], \measuredangle[a_2a_3], \ldots, \measuredangle[a_na_1]$, pa je presek ravni α koja sadrži (pA'_i), i rogljaste površi $Oa_1a_2\ldots a_n$, poligon $A_1A_2\ldots A_n$.

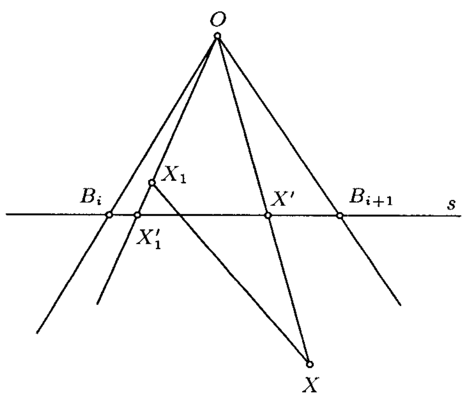
Ako je rogljasta površ $Oa_1a_2\ldots a_n$ prosta, ivice poligona $A_1A_2\ldots A_n$, budući da pripadaju pljosnima te površi, neće van skupa njegovih temena imati zajedničkih tačaka. Dakle, poligon će biti prost. Obratno, ako je površ složena, ivice poligona će se seći, pa će i on biti složen. □

Poligon $A_1A_2\ldots A_n$ razlaže ravan α kojoj pripada na dve oblasti, unutrašnjost i spoljašnjost. Ako je X proizvoljna tačka prostora koja ne pripada rogljastoj površi $Oa_1a_2\ldots a_n$, tada poluprava (OX) prodire unutrašnjost poligona $A_1A_2\ldots A_n$, ili sa njome nema zajedničkih tačaka. U prvom slučaju reći ćemo da je X *unutar* $Oa_1a_2\ldots a_n$, a u drugom da je *izvan* te površi. Skup svih tačaka prostora unutar neke proste, jednostrano raširene rogljaste površi zvaćemo njenom *unutrašnjošću*, a tačaka izvan te površi, njenom *spoljašnjošću*. Budući da su unutrašnjost i spoljašnjost poligona neprazni skupovi, unutrašnjost i spoljašnjost proste, jednostrano raširene rogljaste površi će takođe da budu neprazni. Stoga svaka tačka prostora koja ne pripada nekoj prostoj, jednostrano raširenoj rogljastoj površi, pripada njenoj unutrašnjosti ili njenoj spoljašnjosti.

Primetimo da su pojmovi unutrašnjosti i spoljašnjosti jednostrano raširene rogljaste površi vezani za pravu p i ravni π i α. Sledećim dvema teoremama dokazaćemo najpre da definicija tih pojmova ne zavisi od π, p i α, a potom da su unutrašnjost i spoljašnjost proste, jednostrano raširene rogljaste površi oblasti, drugim rečima dokazaćemo da prosta, jednostrano raširena rogljasta površ razlaže prostor na dva skupa tačaka, njenu unutrašnjost i njenu spoljašnjost.

Teorema 7.2: *Ako u prostoru postoji poligonska linija koja povezuje tačke X i Y i nema zajedničkih tačaka sa prostom, jednostrano raširenom rogljastom površi $Oa_1a_2\ldots a_n$, tada su X i Y ili obe unutar ili obe izvan te površi.*

Dokaz: Pretpostavimo da poligonska linija $XX_1X_2\ldots X_nY$ koja povezuje X i Y nema zajedničkih tačaka sa rogljastom površi $Oa_1a_2\ldots a_n$. Ako je X unutar površi, tada poluprava (OX) prodire unutrašnjost prostog, ravnog poligona $A_1A_2\ldots A_n$ kome su temena, redom, na polupravama $a_1, a_2, \ldots, a_n$, u nekoj tački X'. Ako X_1 pripada (OX), neposredno se dokazuje da ta tačka pripada unutrašnjosti rogljaste površi $Oa_1a_2\dots a_n$. Ako je X_1 van (OX), tada postoji jedinstvena ravan koja sadrži tačke O, X, X_1 i seče ravan kojoj pripada poligon $A_1A_2\dots A_n$, duž prave s. Budući da s sadrži tačku X' koja je unutar poligona $A_1A_2\dots A_n$, presek prave s i poligona $A_1A_2\dots A_n$ će biti neprazan skup tačaka. Postoje tačke B_i i B_{i+1} toga skupa takve da je $\mathcal{B}(B_i, X', B_{i+1})$, a između B_i i B_{i+1} nema više tačaka poligona $A_1A_2\dots A_n$. Tačke X i X_1 pripadaju konveksnom uglu B_iOB_{i+1} jer duž XX_1 nema zajedničkih tačaka sa rogljastom površi pa, na osnovu teoreme 5.6, poluprava (OX_1) seče duž B_iB_{i+1} u tački X_1' koja pripada unutrašnjosti poligona $A_1A_2\dots A_n$. Stoga je X_1 unutar rogljaste površi $Oa_1a_2\dots a_n$.

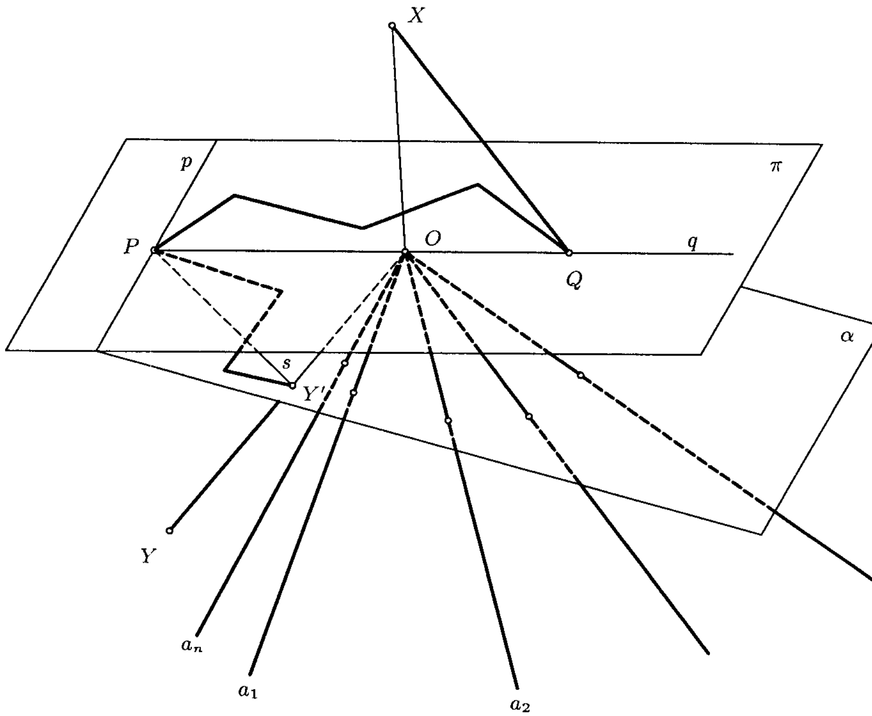


Slika 7b

Ponovivši prethodni postupak konačno mnogo puta dokazuje se da je svako teme poligonske linije $XX_1X_2\dots X_nY$ unutar te površi. Dakle, ako je jedna od tačaka X i Y unutar proste, jednostrano raširene rogljaste površi, njenoj unutrašnjosti pripada i druga. Ako je jedna od tih tačaka izvan površi, druga ne može, na osnovu prethodnog, da bude unutar te površi, pa su tada i X i Y obe izvan $Oa_1a_2\dots a_n$. □

Teorema 7.3: *I unutrašnjost i spoljašnjost proste, jednostrano raširene rogljaste površi $Oa_1a_2\dots a_n$ su povezani geometrijski likovi.*

Dokaz: Ako su X i Y tačke u unutrašnjosti površi $Oa_1a_2\dots a_n$, tada poluprave (OX) i (OY) prodiru unutrašnjost ravnog poligona $A_1A_2\dots A_n$ kome su temena, redom, na polupravama $a_1, a_2, \dots, a_n$, u tačkama X' i Y'. Budući da je unutrašnjost prostog, ravnog poligona povezan geometrijski lik, postoji poligonska linija $X'X_1X_2\dots X_nY'$ koja povezuje X' i Y', a nema zajedničkih tačaka sa tim poligonom. Dakle, $XX'X_1X_2\dots X_nY'Y$ je poligonska linija koja povezuje X i Y, a nema zajedničkih tačaka sa rogljaston površi $Oa_1a_2\dots a_n$, pa je, stoga, unutrašnjost te površi povezan geometrijski lik.



Slika 7c

Ako tačke X i Y pripadaju spoljašnjosti rogljaste površi $Oa_1a_2\ldots a_n$, a poluprave (OX) i (OY) prodiru spoljašnjost poligona $A_1A_2\ldots A_n$, tada, u analogiji sa prethodnim, postoji poligonska linija koja povezuje X i Y, a sa rogljastom površi $Oa_1a_2\ldots a_n$ nema zajedničkih tačaka. Pretpostavimo da poluprava (OX) ne seče ravan α kojoj pripada $A_1A_2\ldots A_n$. Ako je, kao u dokazu teoreme 7.1, π ravan koja osim tačke O sa $Oa_1a_2\ldots a_n$ nema više zajedničkih tačaka, i ako ravan OXY seče α duž prave s (ako je ne seče, duž XY nema zajedničkih tačaka sa rogljastom površi), a π duž prave q, tada se prave q i s seku u tački P na pravoj $p=\pi\cap\alpha$ (iz dokaza teoreme 7.1). Ako tačka Q pripada q i ako je $\mathcal{B}(P,O,Q)$, tada duž XQ nema zajedničkih tačaka sa rogljastom površi $Oa_1a_2\ldots a_n$ jer poluprave (OX) i (OQ) ne seku s, pa je, na osnovu teoreme 5.6, ne seče ni jedna poluprava sa temenom O koja sadrži tačku između X i Q. Ako ni (OY) ne seče α, onda je XQY poligonska linija koja povezuje X i Y, a sa $Oa_1a_2\ldots a_n$ nema zajedničkih tačaka. Ako (OY) seče α u tački Y', tada, budući da Y' i P pripadaju spoljašnjosti poligona $A_1A_2\ldots A_n$, postoji poligonska linija u ravni α, koja povezuje Y' i P, a sa $Oa_1a_2\ldots a_n$ nema zajedničkih tačaka. Postoji i poligonska linija u ravni π koja povezuje P i Q, a ne sadrži O, pa je unija tih dveju poligonskih linija i dveju duži YY' i QX, poligonska linija koja povezuje X i Y, a sa $Oa_1a_2\ldots a_n$ nema zajednički tačaka. □

Dakle, prosta, jednostrano raširena rogljasta površ razlaže prostor na dve oblasti: njenu unutrašnjost i njenu spoljašnjost. Drugim rečima, relacija sa iste strane proste, jednostrano raširene rogljaste površi je relacija ekvivalencije koja skup svih tačaka prostora van te površi, razlaže na dve klase ekvivalencije, unutrašnjost i spoljašnjost te površi.

Slično prethodnoj dokazuju se sledeće dve teoreme.

Teorema 7.4: *Ako je X proizvoljna tačka proste, jednostrano raširene rogljaste površi $Oa_1a_2\dots a_n$ i Y proizvoljna tačka koja joj ne pripada, tada postoji poligonska linija koja povezuje X i Y, čija svaka tačka sem X pripada onoj od oblasti na koje $Oa_1a_2\dots a_n$ razlaže prostor, kojoj pripada Y.* □

Teorema 7.5: *Ako je $Oa_1a_2\dots a_n$ prosta, jednostrano raširena rogljasta površ čija je svaka tačka, osim tačaka pljosni Oa_ia_{i+1}, sa iste strane ravni σ kojoj ta pljosan pripada, i ako tačka X pripada spoljašnjosti površi $Oa_1a_2\dots a_n$, a Y je u ravni σ i ne pripada pljosni Oa_ia_{i+1}, tada postoji poligonska linija koja povezuje X i Y, sa površi $Oa_1a_2\dots a_n$ nema zajedničkih tačaka, a svaka njena tačka osim Y je sa one strane σ sa koje je i X.* □

Presek rogljaste površi i ravni koja sadrži njeno teme. U potpunoj analogiji sa teoremom 6.1 dokazuje se da su brojevi $k(\alpha)$ i $k(\beta)$ presečnih tačaka dveju poluravni α i β sa zajedničkom granicom s, koje ne sadrže ni jedno teme nekog (ravnog ili prostornog) poligona p takvog da je $p\cap s=\emptyset$, sa ivicama poligona p, iste parnosti. Odatle neposredno sledi da je broj $k(\pi)$ presečnih tačaka ivica poligona p i proizvoljne ravni π koja ne sadrži ni jedno teme tog poligona, paran broj. Posledica ove osobine je sledeći stav.

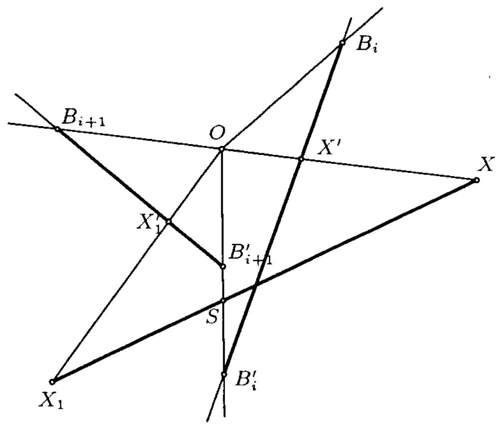
Teorema 7.6: *Broj $k(\pi)$ presečnih polupravih ravni π koja sadrži teme neke rogljaste površi, a ne sadrži ni jednu njenu ivicu, sa pljosnima te površi, je paran.* □

Razdvajanje proste rogljaste površi na jednostrano raširene rogljaste površi. Neka dve rogljaste površi $Oa_1a_2\dots a_n$ i $Oa'_1a'_2\dots a'_m$ sa zajedničkim temenom O imaju zajedničku pljosan $Oa_ia_{i+1}=Oa'_ja'_{j+1}$ i neka su tačke tih dveju površi, koje ne pripadaju zajedničkoj pljosni, sa raznih strana ravni σ koja tu pljosan sadrži. Takve dve rogljaste površi zvaćemo *nadovezanim*. Neposredno se proverava da će skup svih pljosni dveju nadovezanih, rogljastih površi $Oa_1a_2\dots a_n$ i $Oa'_1a'_2\dots a'_m$, sa izuzetkom zajedničke pljosni, da bude skup pljosni nove rogljaste površi za koju ćemo da kažemo da je dobijena *nadovezivanjem* površi $Oa_1a_2\dots a_n$ i $Oa'_1a'_2\dots a'_m$. Za ravan σ ćemo reći da tako dobijenu rogljastu površ, svojim uglom $Oa_ia_{i+1}=Oa'_ja'_{j+1}$, *razdvaja* na rogljaste površi $Oa_1a_2\dots a_n$ i $Oa'_1a'_2\dots a'_m$.

Sledeći stav je posledica teorema 7.2, 7.3, 7.4 i 7.5.

Teorema 7.7: *Ako su $Oa_1a_2\dots a_n$ i $Oa'_1a'_2\dots a'_m$ dve nadovezane, jednostrano raširene rogljaste površi, rogljasta površ Φ dobijena njihovim nadovezivanjem razlaže prostor na dve oblasti.*

Dokaz: Ako pretpostavimo da tačke X i Y pripadaju unutrašnjostima površi $Oa_1a_2\dots a_n$ i $Oa'_1a'_2\dots a'_m$ ili njihovoj zajedničkoj pljosni $Oa_ia_{i+1}=Oa'_ja'_{j+1}$, tada iz teorema 7.3 i 7.4 sledi da postoji poligonska linija koja povezuje X i Y, i sa Φ nema zajedničkih tačaka. Ako tačke X i Y ne pripadaju površima $Oa_1a_2\dots a_n$ i $Oa'_1a'_2\dots a'_m$ ni njihovim unutrašnjostima i ako je Z tačka koja ne pripada pljosni $Oa_ia_{i+1}=Oa'_ja'_{j+1}$ ali pripada ravni σ u kojoj je ta pljosan, tada, na osnovu teoreme 7.5, postoje poligonske linije m i n koje, redom, povezuju X i Z odnosno Y i Z, koje sa površima $Oa_1a_2\dots a_n$ i $Oa'_1a'_2\dots a'_m$ nemaju zajedničkih tačaka. Unija tih dveju poligonskih linija povezuje X i Y, a sa Φ nema zajedničkih tačaka.



Slika 7d

Ako postoji poligonska linija $XX_1X_2\dots X_nY$ koja povezuje tačke X i Y i nema zajedničkih tačaka sa površi Φ, kao i u dokazu teoreme 7.2 dovoljno je dokazati da tačke X i X_1 obe pripadaju unutrašnjostima površi $Oa_1a_2\dots a_n$ i $Oa'_1a'_2\dots a'_m$ ili njihovoj zajedničkoj pljosni $Oa_ia_{i+1}=Oa'_ja'_{j+1}$, ili pripadaju spoljašnjostima tih dveju površi. Ako su tačke X i X_1 sa iste strane ravni σ koja sadrži pljosan $Oa_ia_{i+1}=Oa'_ja'_{j+1}$, tada su, na osnovu teoreme 7.2, te dve tačke obe unutar ili obe izvan jedne od površi $Oa_1a_2\dots a_n$ i $Oa'_1a'_2\dots a'_m$. Ako su te dve tačke sa raznih strana ravni σ, tada duž XX_1 prodire pljosan $Oa_ia_{i+1}=Oa'_ja'_{j+1}$ u nekoj tački S. Pretpostavimo da je tačka X unutar površi $Oa_1a_2\dots a_n$. Poluprava (OX) u nekoj tački X' prodire unutrašnjost poligona p koji se dobija kao presek površi $Oa_1a_2\dots a_n$ i ravni α koja seče sve pljosni površi $Oa_1a_2\dots a_n$. Budući da je X' unutar poligona p, presek ravni OXX_1 i poligona p će biti neprazan skup $\mathcal{P}$. Ako je poligon q presek površi $Oa'_1a'_2\dots a'_m$ i ravni β koja seče sve pljosni površi $Oa'_1a'_2\dots a'_m$, presek tog poligona i ravni OXX_1 će biti neprazan skup $\mathcal{P}'$ budući da OXX_1 seče pljosan $Oa_ia_{i+1}=Oa'_ja'_{j+1}$. Postoje tačke B_i i B_{i+1} skupa $\mathcal{P}\cup\mathcal{P}'$ takve da tačke X i X_1 pripadaju uglu B_iOB_{i+1} u kojem nema više tačaka toga skupa jer duž XX_1 nema zajedničkih tačaka sa rogljastom površi Φ. Ako su B'_i i B'_{i+1} tačke u kojima presečne prave ravni OXX_1 i α, tj. OXX_1 i β prodiru pljosan $Oa_ia_{i+1}=Oa'_ja'_{j+1}$, poligonska linija $B_iB'_iB'_{i+1}B_{i+1}$ pripada uglu

B_iOB_{i+1}, pa poluprava OX_1 seče duž $B'_{i+1}B_{i+1}$ u nekoj tački X'_1 koja pripada unutrašnjosti poligona q. Stoga je X_1 unutar rogljaste površi $Oa'_1a'_2\ldots a'_m$. Ako je X izvan površi $Oa_1a_2\ldots a_n$, tačka X_1 ne može, na osnovu prethodnog, da bude unutar površi $Oa'_1a'_2\ldots a'_m$. □

Ponavljajući postupak iz prethodne teoreme može se dokazati da se nadovezivanjem nove jednostrano raširene rogljaste površi na rogljastu površ Φ dobija rogljasta površ koja takođe razlaže prostor na dve oblasti. Metodom potpune indukcije može se dokazati i sledeće tvrđenje.

Teorema 7.8: *Ako je*
$$Oa_1a_2\ldots a_{n_0}, Oa_1^1a_2^1\ldots a_{n_1}^1, \ldots, Oa_1^m a_2^m\ldots a_{n_m}^m$$
konačan niz jednostrano raširenih, disjunktnih rogljastih površi od kojih su svake dve susedne površi, međusobno nadovezane, tada rogljasta površ Φ dobijena njihovim nadovezivanjem, razlaže prostor na dve oblasti. □

Ako je $Oa_1a_2\ldots a_n$ prosta rogljasta površ, onda postoji ravan π koja sadrži njeno teme, a ne sadrži ni jednu njenu ivicu. Na osnovu teoreme 7.6, presek te ravni i rogljaste površi je skup koji se sastoji iz parno mnogo polupravih sa zajedničkim temenom O. Te poluprave, na osnovu teoreme 5.4, razlažu ravan π na parno mnogo uglova. Obeležimo ih, redom, sa $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ tako da je svaki ugao α_i susedan uglovima β_{i-1} i β_i, a β_i uglovima α_i i α_{i+1} $(1<i<n$, $n+1=1)$. Neposrednom proverom se može ustanoviti da ravan π svojim uglovima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (a isto i uglovima $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$) razdvaja prostu rogljastu površ $Oa_1a_2\ldots a_n$ na konačno mnogo prostih rogljastih površi. Neka je $Oa_1^1a_2^1\ldots a_{m_1}^1$ jedna od njih. Lako se proverava da će ova površ biti jednostrana ako uglovi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pripadaju jednoj poluravni. Ako nije tako, ravan σ koja sadrži O, ne sadrži ni jednu ivicu površi $Oa_1^1a_2^1\ldots a_{m_1}^1$, a seče π duž prave p, razdvaja tu površ na konačno mnogo rogljastih površi. Neka je $Oa_1^2a_2^2\ldots a_{l_2}^2$ jedna od njih. Lako se proverava da će ova površ biti jednostrana ako nema dve komplementne ivice koje obe pripadaju pravoj p. Ako nije tako, ravan koja sadrži O, ne sadrži ni jednu ivicu površi $Oa_1^2a_2^2\ldots a_{l_2}^2$, a seče pravu p, razdvaja $Oa_1^2a_2^2\ldots a_{l_2}^2$ na proste, jednostrano raširene površi. Dakle, svaka prosta rogljasta površ se sa konačno mnogo ravni može razdvojiti na konačno mnogo prostih, jednostrano raširenih, međusobno nadovezanih rogljastih površi. Stoga ona, na osnovu teoreme 7.8, razlaže prostor na dve oblasti. Time je dokazan sledeći stav:

Teorema 7.9: *Relacija sa iste strane proste rogljaste površi je relacija ekvivalencije koja skup svih tačaka prostora van te površi, razlaže na dve klase ekvivalencije.* □

Svaku od klasa ekvivalencije relacije sa iste strane proste rogljaste površi $Oa_1a_2\ldots a_n$ nazivamo (n*-tostranim*) *rogljem*, a površ $Oa_1a_2\ldots a_n$ njegovom *granicom*. Teme, ivice i pljosni površi $Oa_1a_2\ldots a_n$ zvaćemo *temenom*, *ivicama* i *pljosnima* svakog od rogljeva kojima je ta površ granica. 3-strani rogalj zvaćemo *triedrom*.

Iz teoreme 7.9 i razmatranja koja joj neposredno prethode, sledi:

Teorema 7.10: *Ako zatvorena duž PQ nema zajedničkih tačaka sa ivicama neke proste rogljaste površi i ne sadrži njeno teme, tada su tačke P i Q sa iste strane zadate površi ako i samo ako je broj zajedničkih tačaka te površi i duži PQ, paran.* □

Ivica a_i neke proste rogljaste površi $Oa_1a_2\dots a_n$ pripada dvema pljosnima, $Oa_{i-1}a_i$ i Oa_ia_{i+1}, te površi. Neka je a prava koja sadrži ivicu a_i, i neka je α' diedarska površ sa ivicom a, čije pljosni sadrže pljosni $Oa_{i-1}a_i$ i Oa_ia_{i+1}, ili su u njima sadržane. Ta diedarska površ, na osnovu teoreme 5.9, razlaže prostor na dva diedra, α i β. Presek proizvoljne ravni koja sadrži a, a ne sadrži ni jednu ivicu rogljaste površi $Oa_1a_2\dots a_n$, sa tom rogljastom površi, je konačan skup polupravih koje tu ravan, na osnovu teoreme 5.4, razlažu na konačno mnogo uglova. Dva od tih uglova, γ i δ, će imati zajedničku ivicu a_i, jedan će pripadati diedru α a drugi diedru β. Budući da $Oa_1a_2\dots a_n$ razlaže prostor na dva roglja Φ i Ψ, jedan od uglova γ i δ će pripadati Φ, a drugi Ψ. Onaj od diedara α i β koji sadrži ugao (γ ili δ) koji pripada roglju Φ (ili Ψ) zvaćemo *unutrašnjim diedrom*, ili samo *diedrom*, roglja Φ (ili Ψ). Njemu naporedni diedar, ako postoji, zvaćemo *spoljašnjim diedrom* toga roglja. Ako je Oa_ia_{i+1} pljosan roglja Φ, diedre tog roglja kod ivica a_i i a_{i+1} zvaćemo *naleglim diedrima pljosni* Oa_ia_{i+1}. Ako su $Oa_{i-1}a_i$ i Oa_ia_{i+1} susedne pljosni roglja Φ, diedar toga roglja kod ivice a_i zvaćemo *zahvaćenim diedrom pljosni* $Oa_{i-1}a_i$ i Oa_ia_{i+1}. Ako je $Oabc$ triedar, diedre kod ivica a, b, c tog triedra i, redom, pljosni Obc, Oca, Oab zvaćemo *naspramnim*.

ZADACI:

1. Dokazati da definicija unutrašnjosti i spoljašnjosti jednostrano raširene rogljaste površi ne zavisi od ravni sa čije je jedne strane ta površ niti od ravni kojom sečemo rogljastu površ (α).

2. Zašto u dokazu teoreme 7.1 postoji odgovarajuća poluravan (pA'_i) koja je sadržana u svim konveksnim diedrima sa stranama (pO) i (pA'_j) (koja je „najbliža" (pO))?

3. Da li se svaki rogalj može razložiti na triedre?

8. Poliedar

Poliedarska površ. Dve poligonske površi zvaćemo *susednim* ako imaju jednu zajedničku ivicu i sem tačaka te ivice nemaju više zajedničkih tačaka. Konačan niz poligonskih površi zvaćemo *lancem poligonskih površi* ako su svake dve uzastopne površi toga niza susedne. Prvi član — p — toga niza zvaćemo *početkom*, a poslednji — p' — *krajem lanca* za koji kažemo da *povezuje* poligonske površi p i p'. Skup poligonskih površi zvaćemo *povezanim* ako se bilo koje dve površi iz tog skupa mogu povezati lancem sastavljenim od poligonskih površi toga skupa. Te poligonske površi zvaćemo i *pljosnima* povezanog skupa poligonskih površi. Skup svih tačaka ivica pljosni povezanog skupa poligonskih površi koje pripadaju samo po jednoj pljosni zvaćemo *rubom* tog povezanog skupa površi.

Konačan, povezani skup zatvorenih poligonskih površi nazivamo *poliedarskom površi* ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) ako površi zadatog skupa imaju jedno zajedničko teme, tada unutrašnji uglovi tih površi koji imaju zajedničko teme pripadaju pljosnima jedne rogljaste površi koja sem pljosni koje sadrže pomenute uglove nema više pljosni,

(ii) svaka duž koja pripada ivici neke od poligonskih površi zadatog skupa, pripada najviše još jednoj od ivica neke druge površi tog skupa.

Budući da susedne pljosni rogljaste površi nikada ne pripadaju jednoj ravni, ni susedne pljosni poliedarske površi neće pripadati jednoj ravni.

Poligonske površi koje sačinjavaju poliedarsku površ nazivamo *pljosnima* ili *stranama* te površi. *Temenima* i *ivicama* (ili *stranicama*) *poliedarske površi* nazivamo temena i ivice njenih pljosni. Duži koje povezuju temena poliedarske površi koja pripadaju raznim pljosnima te površi nazivamo njenim *dijagonalama*.

Poliedarsku površ nazivamo *prostom* ako ne postoje dve pljosni te površi koje imaju zajedničkih tačaka, osim što susedne pljosni imaju zajedničku ivicu i što pljosni koje pripadaju stranama jedne rogljaste površi, imaju zajedničko teme. Ako, u protivnom, takve dve pljosni postoje, tu površ nazivamo *složenom*.

Neka je ω prosta poliedarska površ i neka su A i B dve tačke koje joj ne pripadaju. Ako postoji poligonska linija koja povezuje A i B i koja sa ω nema zajedničkih tačaka, kažemo da su A i B *sa iste strane te poliedarske površi*, i pišemo $A, B \doteq \omega$, a ako takva linija ne postoji, kažemo da su A i B *sa raznih strana* ω, i pišemo $A, B \div \omega$.

Teorema 8.1: *Presek neke poliedarske površi ω i proizvoljne ravni π koja ne sadrži ni jedno njeno teme je ili prazan skup ili se sastoji iz konačno mnogo ravnih poligona.*

Dokaz: Ako je presek $\omega \cap \pi$ neprazan, tada, budući da π ne sadrži temena poliedarske površi ω, presek ravni π i svake pljosni površi ω sa kojom ta ravan ima zajedničkih tačaka je unija disjunktnih duži. Kako svaka ivica površi ω pripada tačno dvema pljosnima, svaka od dobijenih duži ima dve susedne, pa je $\omega \cap \pi$ unija poligonskih linija $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Međutim, ukupan broj pljosni površi ω je konačan pa, budući da svako teme bilo koje od poligonskih linija $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pripada tačno dvema njenim ivicama, svaka od poligonskih linija $p_1, p_2, \ldots, p_n$ je zatvorena. □

Teorema 8.2: *Neka je ω poliedarska površ, a a i b dve poluprave sa zajedničkim temenom $O \notin \omega$, koje ne sadrže ni jedno teme i ne seku ni jednu ivicu te površi.*

Brojevi $k(a)$ i $k(b)$, presečnih tačaka tih dveju polupravih sa poliedarskom površi ω, su iste parnosti.

Dokaz: Pretpostavimo da ravan π kojoj pripadaju poluprave a i b, ne sadrži ni jedno teme površi ω i da se njen presek sa površi ω sastoji iz poligona $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Kako O ne pripada površi ω, i kako π ne sadrži njena temena, a poluprave a i b ne seku njene ivice, tačka O neće pripadati ni jednom od poligona $p_1, p_2, \ldots, p_n$, a poluprave a i b neće sadržati ni jedno od njihovih temena. Stoga će, na osnovu teoreme 6.1, brojevi presečnih tačaka polupravih a i b sa poligonima $p_1, p_2, \ldots, p_n$ biti iste parnosti, pa će zato i brojevi $k(a)$ i $k(b)$ biti iste parnosti.

Ako π sadrži neka od temena površi ω, budući da je broj temena te površi konačan, postojaće poluprava c koja ne sadrži ni jedno teme površi ω i ne seče ni jednu njenu ivicu, a dve ravni koje sadrže c i, redom, a i b, ne sadrže ni jedno teme površi ω. Tada su, na osnovu već dokazanog, brojevi $k(a)$ i $k(c)$, isto kao i brojevi $k(b)$ i $k(c)$, iste parnosti, pa su, stoga, i brojevi $k(a)$ i $k(b)$ iste parnosti. □

Neka je ω prosta poliedarska površ i O tačka koja joj ne pripada. Ako pri tome svaka poluprava sa temenom O koja ne sadrži ni jedno teme površi ω i ne seče ni jednu njenu ivicu, sa njome ima neparan broj zajedničkih tačaka, tada kažemo da je O *unutar* ω. Ako, u suprotnom, postoji poluprava sa temenom O koja ne sadrži ni jedno teme, ne seče ni jednu ivicu površi ω i sa njome ima paran broj zajedničkih tačaka, tada kažemo da je O *izvan* ω. Skup svih tačaka unutar proste poliedarske površi ω nazivamo njenom *unutrašnjošću*, a skup svih tačaka izvan ω, njenom *spoljašnjošću*.

Na isti način kao i teorema 6.3 dokazuje se da su unutrašnjost i spoljašnjost neke proste poliedarske površi ω, neprazni skupovi pa, zbog toga, tačka koja ne pripada površi ω pripada njenoj unutrašnjosti ili njenoj spoljašnjosti. I sledeća teorema se dokazuje u analogiji sa jednom od teorema koja se odnosi na poligonske površi — sa teoremom 6.4.

Teorema 8.3: *Ako postoji poligonska linija koja povezuje tačke A i B i sa prostom poliedarskom površi ω nema zajedničkih tačaka, onda su A i B ili obe unutar ili obe izvan ω.* □

Teorema 8.4: *Unutrašnjost i spoljašnjost proste poliedarske površi su povezani geometrijski likovi.*

Dokaz: Pretpostavimo da su A i B tačke koje pripadaju ili unutrašnjosti ili spoljašnjosti proste poliedarske površi ω, i konstruišimo poligonsku liniju l koja ih povezuje, a sa ω nema zajedničkih tačaka.

Za svaku tačku A koja ne pripada površi ω postoji teme P te površi i poligonska linija koja povezuje A i P i koja sem tačke P nema više zajedničkih tačaka sa ω. Zaista, ako je a poluprava sa temenom A koja ne sadrži ni jedno teme i ne seče ni jednu ivicu poliedarske površi ω, a sa njome ima zajedničkih tačaka, tada, budući da je broj pljosni površi ω konačan, postoji tačka R poluprave a koja pripada ω, takva da između A i R nema više tačaka površi ω. Neka je P teme one pljosni površi ω koju u tački R prodire poluprava a i neka je $\mathcal{A}$ skup tačaka koje pripadaju duži AR koji se sastoji iz

(i) tačaka ravni koje sadrže tačku P i ivice površi ω, a ne sadrže duž AR,

(ii) tačaka polupravih sa temenom P koje sadrže temena poliedarske površi ω (u slučaju da neke od pomenutih ravni sadrže AR).

Ako je X tačka duži AR takva da između nje i tačke R nema tačaka skupa $\mathcal{A}$ (ona postoji jer je $\mathcal{A}$ konačan skup tačaka duži AR), poligonska linija AXP povezuje A i P, a sem tačke P nema više zajedničkih tačaka sa ω.

Neka su P i Q temena površi ω takva da poligonske linije AXP i BYQ, sem tačaka P i Q nemaju više zajedničkih tačaka sa ω, neka je $PQ_1Q_2\ldots Q_mQ$ poligonska linija čije ivice su i ivice poliedarske površi ω, i neka su $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ rogljaste površi kojima su $P, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, Q$ temena, a njihove pljosni sadrže pljosni površi ω, sa istim temenom. Tada postoji niz tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ takvih da otvorene trougaone površi $PA_1Q_1, Q_1A_2Q_2, \ldots, Q_{m-1}A_mQ_m, Q_mA_{m+1}Q$ nemaju zajedničkih tačaka sa ω, pri čemu su tačke X i A_1 sa iste strane α, A_1 i A_2 sa iste strane $\alpha_1, \ldots, A_m$ i A_{m+1} sa iste strane α_m. Zaista, roglju sa rubom α kojem pripada tačka X, pripada i neka tačka A_1' koja je u diedru toga roglja čija ivica sadrži duž PQ_1. Budući da ω ima konačno mnogo pljosni, na duži $A_1'P$ postoji tačka A_1 takva da otvorene duži A_1P i A_1Q_1 nemaju zajedničkih tačaka sa površi ω.

Budući da su X i A_1 sa iste strane površi α, a duž AX nema zajedničkih tačaka sa površi ω pa, dakle, ni sa α, postoji poligonska linija $AXB_1B_2\ldots B_kA_1$ koja povezuje A i A_1, a sa α nema zajedničkih tačaka. Ako poligonska linija $AXB_1B_2\ldots B_kA_1$ ima zajedničkih tačaka sa ω, tada postoji poligonska linija $AXX'B_1'B_2'\ldots B_k'A_1'A_1$ koja povezuje A i A_1, a sa ω nema zajedničkih tačaka. Zaista, kako ω ima konačno mnogo pljosni, na polupravama $(PX), (PB_1), (PB_2), \ldots, (PB_k), (PA_1)$ postoje tačke $X', B_1', B_2', \ldots, B_k', A_1'$ takve da ivice poligonske linije $XX'B_1'B_2'\ldots B_k'A_1'A_1$ nemaju zajedničkih tačaka sa ω.

Ponovivši prethodni postupak konačno mnogo puta konstruisaćemo poligonsku liniju koja povezuje A i A_{m+1}, a sa ω nema zajedničkih tačaka. Zato su tačke A i A_{m+1}, na osnovu prethodne teoreme, obe unutar ili obe izvan ω. Kako su A i B obe unutar ili obe izvan ω, tačke A_{m+1} i B će obe pripadati unutrašnjosti ili će obe pripadati spoljašnjosti površi ω. Imajući u vidu da je broj pljosni površi ω konačan, na polupravama QA_{m+1} i QY će postojati tačke A_{m+1}' i Y' takve da duž $A_{m+1}'Y'$ seče samo one pljosni površi ω koje imaju zajedničko teme Q, dakle, pljosni rogljaste površi β. Kako su i tačke A_{m+1}' i Y' obe unutar ili obe izvan ω, broj zajedničkih tačaka duži $A_{m+1}'Y'$ sa površi ω, pa, dakle, i sa površi β, će da bude paran. Zato, na osnovu teorema 7.9 i 7.10, postoji poligonska linija koja povezuje A_{m+1}' i Y', a sa β nema zajedničkih tačaka, pa postoji i poligonska linija koja povezuje te dve tačke, a sa površi ω nema zajedničkih tačaka. Budući da duži $Y'Y$ i YB nemaju zajedničkih tačaka sa ω, postoji poligonska linija koja povezuje A i B, a sa poliedarskom površi ω nema zajedničkih tačaka. Stoga su i unutrašnjost i spoljašnjost poliedarske površi povezani geometrijski likovi. □

Dakle, prosta poliedarska površ ω razlaže prostor na dve oblasti: njenu unutrašnjost i njenu spoljašnjost. Time je dokazano da je relacija — sa iste strane proste poliedarske površi — relacija ekvivalencije koja skup svih tačaka prostora van te površi, razlaže na dve klase ekvivalencije: unutrašnjost i spoljašnjost poliedarske površi. Unutrašnjost ćemo zvati *otvorenim poliedrom*, a površ ω njegovim *rubom*. Unutrašnjost otvorenog poliedra i njegovog ruba zvaćemo *zatvorenim poliedrom*. *Temenima*, *ivicama* (ili *stranicama*), *dijagonalama* i *pljosnima* (ili *stranama*) *poliedra* zvaćemo temena, ivice, dijagonale i pljosni njegovog ruba. Dva temena poliedra zvaćemo *susednim* ako ih povezuje ivica tog poliedra.

Neka je ω rogljasta površ sa temenom O kojoj pripadaju sve pljosni poliedra Ω kojima je O jedno od temena. Ta rogljasta površ razlaže prostor na dva roglja α i α'. Ako neka otvorena poluprava a sa temenom O koja pripada roglju α, a ne sadrži ni jedno teme i ne seče ni jednu ivicu poliedra Ω, seče površ tog poliedra u tačkama kojih ima neparno mnogo, tada bilo koja takva poluprava b seče istu površ u tačkama kojih ima neparno mnogo. Tada rogalj α zovemo *rogljem poliedra* Ω.

Rod poliedarske površi. Za neki poliedar ćemo reći da su mu *incidentni*:

(i) teme i ivica ako je teme, kraj ivice,

(ii) teme i pljosan ako je teme, teme te pljosni,

(iii) ivica i pljosan ako je ivica, stranica te pljosni.

Dva poliedra Ω i Ω' nazivamo *izomorfnim* ako postoji bijekcija kojom se incidentna temena, ivice i pljosni poliedra Ω preslikavaju, redom, na incidetna temena, ivice i pljosni poliedra Ω'. Takvu bijekciju nazivamo *izomorfizmom poliedara*. Iz definicije neposredno sledi da je izomorfizam poliedara relacija ekvivalencije. Ako su poliedri Ω i Ω' izomorfni, za njihove rubove ω i ω' ćemo reći da su *izomorfne poliedarske površi*.

Dva poliedra Ω i Ω' nazivamo *dualnim* ako postoji bijekcija kojom se incidentna temena, ivice i pljosni poliedra Ω preslikavaju, redom, na incidentne pljosni, ivice i temena poliedra Ω'. Ako su poliedri Ω i Ω' dualni, za njihove rubove ω i ω' reći ćemo da su *dualne poliedarske površi*.

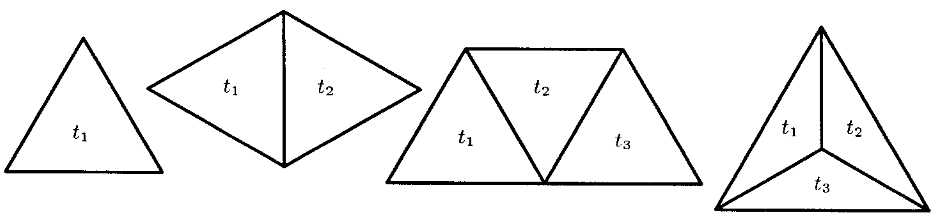
Prost poligon, ravan ili prostoran, kome su stranice, ivice neke poliedarske površi, nazivamo *povratnim poligonom* te površi. Reći ćemo da povratni poligon p *razlaže* poliedarsku površ ω ako postoje dve pljosni te površi takve da svaki lanac koji ih spaja, a sastoji se iz pljosni površi ω, sadrži najmanje jedan par susednih pljosni kojima je zajednička ivica, stranica poligona p. Najveći mogući broj povratnih poligona poliedarske površi ω, koji nemaju zajedničkih tačaka i ne razlažu tu površ, nazivamo *rodom poliedarske površi* ω. Neposredno se dokazuje da izomorfne poliedarske površi imaju isti rod.

Teorema 8.5: *Ako sa T obeležimo broj temena, sa I broj ivica, a sa P broj pljosni poliedarske površi ω nultog roda, tada je*

$$T - I + P = 2.$$

Dokaz: Razložimo pljosni poliedarske površi ω njenim dijagonalama na trougaone površi. Takvo razlaganje postoji na osnovu teoreme 6.7. Svaka unutrašnja dijagonala d razlaže poligonsku površ na dve površi. Dakle, ako unutrašnjom dijagonalom razložimo pljosan poliedarske površi ω na dve poligonske površi, broj temena se nije promenio. Ako ivicama poliedarske površi ω dodamo i dijagonalu d, broj ivica se povećao za jedan, a budući da je tom dijagonalom jedna pljosan te površi razložena na dve, broj pljosni se povećao za jedan. Stoga se broj $\chi = T - I + P$ koji ćemo zvati *karakteristikom* te površi, nije promenio. Dakle, razlaganjem pljosni površi ω na trougaone površi, karakteristika χ te površi se ne menja. Lako se dokazuje da se ne menja ni rod.

Da bismo odredili karakteristiku poliedarske površi ω pretpostavićemo da se skup $\mathcal{M}$, trougaonih površi dobijenih razlaganjem pljosni te poliedarske površi njihovim dijagonalama, sastoji iz ukupno m površi.



Slika 8a

Neka je t_1 bilo koja trougaona površ skupa $\mathcal{M}$. Budući da je za tu površ $T=3$, $I=3$ i $P=1$, njena *karakteristika* $\chi_1 = T-I+P$ će biti 1. Neka je t_2 bilo koja trougana površ skupa $\mathcal{M}$, susedna površi t_1, i neka je τ_2 povezani skup površi koji se sastoji iz površi t_1 i t_2. Dodavanjem površi t_2 trougaonoj površi t_1, brojevi T i P će se povećati za 1, a broj I za 2, pa je tada karakteristika χ_2 povezanog skupa površi τ_2 ista kao i karakteristika χ_1, dakle $\chi_1 = \chi_2 = 1$. Neka je t_3 trougaona površ skupa $\mathcal{M}$, susedna jednoj od površi skupa τ_2, i neka je τ_3 povezani skup površi koji se sastoji iz površi t_1, t_2 i t_3. Trougaona površ t_3 će sa površima skupa τ_2 imati ili jednu ili dve zajedničke ivice. U prvom slučaju brojevi T i P će se povećati za 1, a broj I za 2, a u drugom slučaju brojevi I i P će se povećati za jedan, a broj T će ostati isti. U svakom od tih dvaju slučajeva karakteristika χ_3 povezanog skupa površi τ_3, jednaka je karakteristici χ_2, dakle, biće $\chi_2 = \chi_3 = 1$. Pretpostavimo da smo, nastavljajući započeti postupak, konstruisali povezani skup τ_n koji se sastoji iz n trougaonih površi $t_1, t_2, \ldots, t_n$ skupa $\mathcal{M}$. Neka je χ_n karakteristika skupa τ_n. Neka je, zatim, t_{n+1} trougaona površ skupa $\mathcal{M}$ susedna bar jednoj od površi skupa τ_n, neka je τ_{n+1} povezani skup trougaonih površi $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$, a χ_{n+1} karakteristika skupa τ_{n+1}. U tom slučaju se ostvaruje jedna od sledećih mogućnosti:

1. Trougaona površ t_{n+1} sa površima skupa τ_n ima jednu ivicu zajedničku i, sem tačaka te ivice, sa njome nema više zajedničkih tačaka. Dodavanjem površi

t_{n+1} skupu τ_n, brojevi T i P će se povećati za 1, a broj I za 2, pa je tada karakteristika χ_{n+1} ista kao i χ_n, dakle $\chi_{n+1} = \chi_n$.

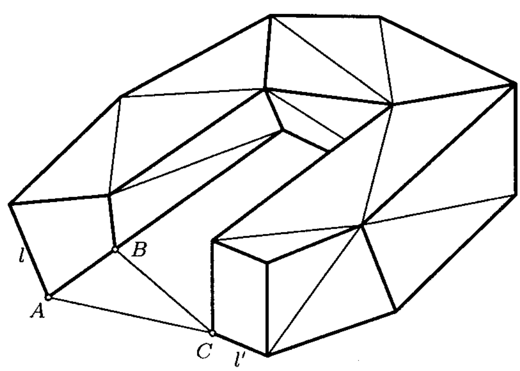
2. Trougaona površ t_{n+1} sa površima skupa τ_n ima jednu ivicu zajedničku, a teme te površi naspram pomenute ivice, istovetno je sa jednim temenom skupa τ_n. Tada će se, dodavanjem površi t_{n+1} skupu τ_n, broj P povećati za 1, broj I za 2, a broj T će ostati nepromenjen, pa je tada $\chi_{n+1} = \chi_n - 1$.

3. Trougaona površ t_{n+1} sa površima skupa τ_n ima dve ivice zajedničke i, sem tačaka tih ivica, sa njome nema više zajedničkih tačaka. Dodavanjem površi t_{n+1} skupu τ_n, brojevi I i P će se povećati za 1, a broj T će ostati isti, pa je tada karakteristika χ_{n+1} ista kao i χ_n, dakle $\chi_{n+1} = \chi_n$.

4. Trougaona površ t_{n+1} sa površima skupa τ_n ima sve tri ivice zajedničke. Dodavanjem površi t_{n+1} skupu τ_n, broj P će se povećati za 1, a brojevi T i I će ostati nepromenjeni, pa je tada $\chi_{n+1} = \chi_n + 1$.

Dakle, u slučajevima 1 i 3 kada je dodavanjem trougaone površi t_{n+1} ukupan broj poligona na rubu skupa τ_{n+1} ostao isti kao i na τ_n, karakteristika površi se nije promenila. U slučaju 4 dodavanjem trougaone površi t_{n+1} ukupan broj poligona koji sačinjavaju rub površi τ_{n+1} je manji za 1 u odnosu na ukupan broj poligona koji sačinjavaju rub površi τ_n, a karakteristika je povećana za 1. U slučaju 2 dodavanjem trougaone površi t_{n+1} ukupan broj poligona koji čine rub površi τ_{n+1} je veći za jedan u odnosu na ukupan broj poligona koji sačinjavaju rub površi τ_n, a karakteristika je smanjena za 1.

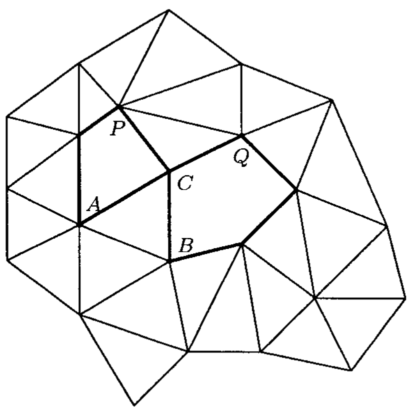
Skrenimo pažnju na dve mogućnosti koje se nikada ne ostvaruju budući da je ω poliedarska površ nultog roda:



Slika 8b

a. ako je skup τ_{n+1} dobijen ostvarivanjem mogućnosti 2, dakle ako je trougaona površ sa površima skupa τ_n ima ivicu AB zajedničku, a teme C te trougaone površi naspram pomenute ivice je istovetno sa jednim temenom skupa τ_n, tada teme C pripada rubu skupa τ_n kojem pripadaju temena A i B. Nikada se ne dešava da C ne pripada rubu skupa τ_n kojem pripadaju temena A i B. Zaista, ova mogućnost je neostvariva jer ako bi l bio rub skupa τ_n kojem pripadaju temena A i B, a l' rub toga skupa kojem pripada teme C, tada bi l (a i l') bio povratni poligon skupa $\mathcal{M}$ koji ga ne razlaže, pa ω ne bi bila poliedarska površ nultog roda.

b. ako je skup τ_{n+1} dobijen ostvarivanjem mogućnosti 3 na sledeći način: skup τ_n je dobijen ostvarivanjem mogućnosti 2, dakle trougaona površ t_n sa površima skupa τ_{n-1} ima ivicu AB zajedničku, a teme C te trougaone površi naspram pomenute ivice je istovetno sa jednim temenom skupa τ_{n-1}. Tada teme C, pored temena A i B, na rubu povezanog skupa τ_n ima još dva susedna temena, obeležimo ih sa P i Q. Dodavanjem jedne od trougaonih površi BCP ili BCQ broj poligona na rubu skupa τ_{n+1}, u prvom slučaju, ostao je isti kao i na τ_n, a u drugom se smanjio za 1, dok se, u svakom od tih dvaju slučajeva karakteristika nije promenila, dakle $\chi_{n+1} = \chi_n$. Nikada se ne može dogoditi da se dodavanjem jedne od trougaonih površi BCP ili BCQ broj poligona na rubu skupa τ_{n+1} smanji za jedan jer će tada postojati povratni poligon skupa $\mathcal{M}$ kome jedna ivica povezuje dve tačke toga ruba, a ona sama nije na tome rubu, takav da nema više zajedničkih tačaka sa tim rubom, koji ne razlaže skup $\mathcal{M}$, pa poliedarska površ ω tada nije nultog roda.



Slika 8c

Dakle, kad god se broj poligona koji sačinjavaju rub skupa τ_k uveća za jedan, karakteristika se smanji za jedan, a kad god se broj poligona na rubu skupa τ_k smanji za jedan, karakteristika se uveća za jedan. Ako je, dakle, p ukupan broj poligona koji sačinjavaju rub skupa τ_k, karakteristika χ_k toga skupa će biti $\chi_1 - p + 1 = 2 - p$. Kako se dodavanjem trougaonih površi skupa $\mathcal{M}$ broj p poligona na rubu smanji najpre na 1, a potom na 0, biće $\chi_m = 2$. Dakle, karakteristika poliedarske površi ω je 2. $\square$

Formulu

$$T - I + P = 2$$

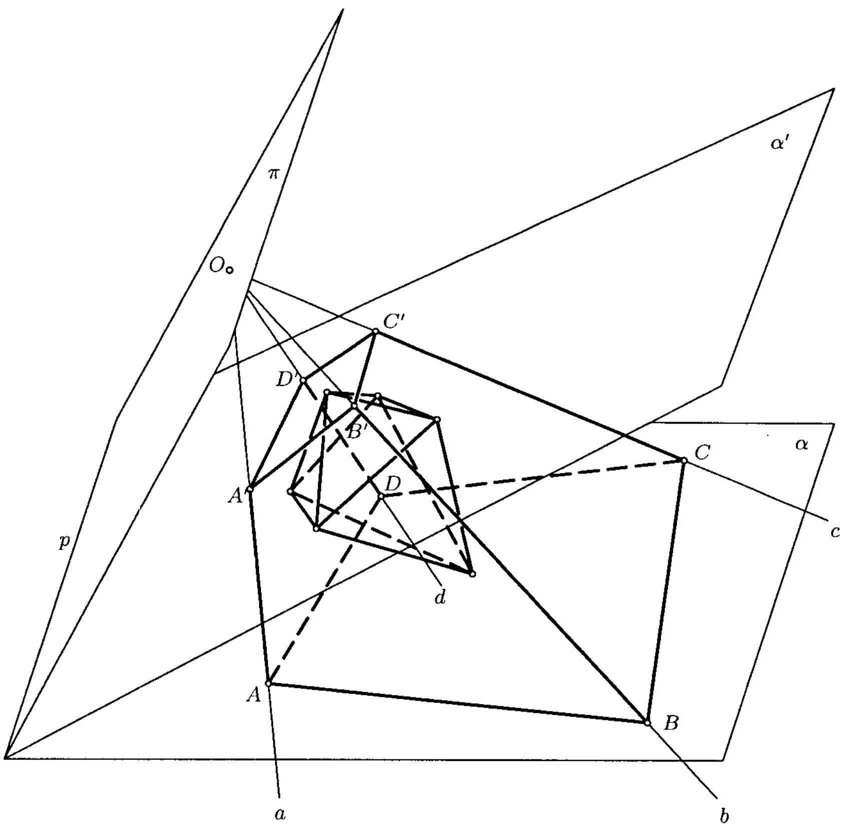
zvaćemo *Ojlerovom formulom za poliedarske površi nultog roda.*

Topološki pravilni poliedri. Poliedar ćemo zvati *topološki pravilnim* ako:
(i) svaka njegova pljosan ima isti broj ivica,
(ii) svaki njegov rogalj ima isti broj ivica.

Teorema 8.6: *Postoji tačno pet neizomorfnih, topološki pravilnih poliedara kojima je rub poliedarska površ nultog roda.*

Dokaz: Konstruišimo najpre pet topološki pravilnih poliedara, a potom dokažimo da su oni jedini međusobno neizomorfni topološki pravilni poliedri nultog roda.

1. Neka su A, B, C, D četiri nekoplanarne tačke. Poliedar čije su pljosni trougaone površi ABC, ABD, ACD, BCD ima sve pljosni i sve rogljeve trostrane, pa je, stoga, topološki pravilan. Takav poliedar nazivamo *tetraedrom*.



Slika 8d

2. Neka je O tačka neke ravni π i $Oabcd$ prosta rogljasta površ sa jedne strane te ravni. Tada, na osnovu teoreme 7.1, postoji ravan α koja sadrži neku pravu p

ravni π i seče poluprave a, b, c, d redom, u tačkama A, B, C, D takvim da je $ABCD$ prost četvorougao. Proizvoljna poluravan α' sa granicom p koja pripada konveksnom diedru $\alpha\pi$ seče, na osnovu teoreme 5.11, duži OA, OB, OC, OD redom, u tačkama A', B', C', D', pa kako je rogljasta površ $Oabcd$ prosta i četvorougao $A'B'C'D'$ će da bude prost. Poliedaru čije su pljosni četvorougaone površi

$$ABCD, \quad ABB'A', \quad BCC'B', \quad CDD'C', \quad DAA'D', \quad A'B'C'D',$$

svi rogljevi su trostrani, pa je on topološki pravilan. Takav poliedar nazivamo *heksaedrom.*

3. Poliedar čija temena pripadaju pljosnima nekog heksaedra, a pljosni su mu trougaone površi sa temenima u onim pljosnima heksaedra koje pripadaju pljosnima pojedinih rogljeva tog heksaedra, ima sve pljosni trougaone, a svi rogljevi su mu četvorostrani, pa je i on topološki pravilan. Takav poliedar je dualan heksaedru i nazivamo ga *oktaedrom.*

4. Neka je

$$A_1 A_2 \dots A_{10}$$

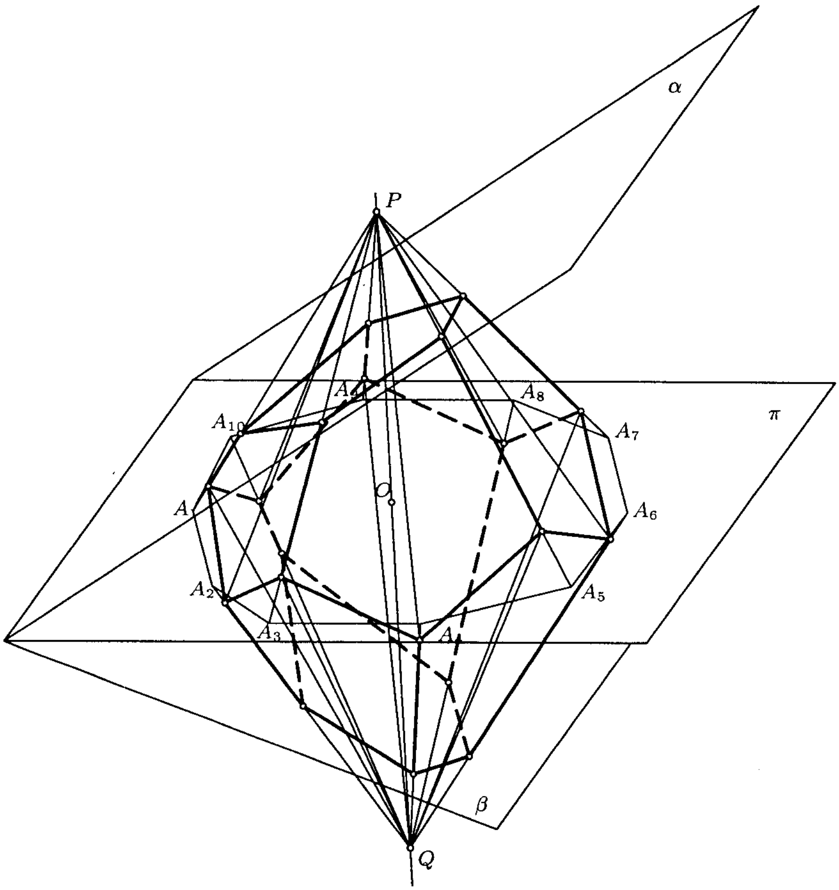
ravan, konveksan desetougao, neka je O proizvoljna tačka njegove unutrašnjosti koja pripada svakoj od poluravni sa ivicom $A_i A_{i+2}$, $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$, pri čemu je $A_{11} = A_1$, $A_{12} = A_2$, kojoj ne pripada tačka A_{i+1}, i neka su P i Q proizvoljne tačke na pravoj koja sadrži O, sa raznih strana ravni desetougla. Tada su $O, A_2 \div A_1 A_3$, pa su $Q, A_2 \div P A_1 A_3$. Stoga duž QA_2 seče ravan PA_1A_3 u nekoj tački A_2'. Na isti način se dokazuje da duži QA_4, QA_6, QA_8, QA_{10}, seku, redom, ravni PA_3A_5, PA_5A_7, PA_7A_9, PA_9A_1 u tačkama A_4', A_6', A_8', A_{10}', a da duži PA_1, PA_3, PA_5, PA_7, PA_9 seku redom, ravni $QA_{10}A_2$, QA_2A_4, QA_4A_6, QA_6A_8, QA_8A_{10} u tačkama A_1', A_3', A_5', A_7', A_9'. Tada postoje ravni α i β koje seku duži PA_1', PA_3', PA_5', PA_7', PA_9', odnosno QA_2', QA_4', QA_6', QA_8', QA_{10}' redom, u tačkama A_1'', A_3'', A_5'', A_7'', A_9'', odnosno A_2'', A_4'', A_6'', A_8'', A_{10}''. Poliedar čije su pljosni petougaone površi

$$A_1''A_3''A_5''A_7''A_9'', \; A_1''A_3''A_3'A_2'A_1', \; A_3''A_5''A_5'A_4'A_3', \; A_5''A_7''A_7'A_6'A_5', \; A_7''A_9''A_9'A_8'A_7',$$
$$A_9''A_1''A_1'A_{10}'A_9', \; A_2''A_4''A_6''A_8''A_{10}'', \; A_2''A_4''A_4'A_3'A_2', \; A_4''A_6''A_6'A_5'A_4', \; A_6''A_8''A_8'A_7'A_6',$$
$$A_8''A_{10}''A_{10}'A_9'A_8', \; A_{10}''A_2''A_2'A_1'A_{10}'$$

ima sve rogljeve trostrane, pa je topološki pravilan. Takav poliedar nazivamo *dodekaedrom.*

5. Poliedar čija temena pripadaju pljosnima nekog dodekaedra, a pljosni su mu trougaone površi sa temenima u onim pljosnima dodekaedra koje pripadaju pljosnima pojedinih rogljeva tog dodekaedra, ima sve pljosni trougaone, a svi rogljevi su mu petostrani, pa je i on topološki pravilan. Takav poliedar je dualan dodekaedru i nazivamo ga *ikosaedrom.*

Dokažimo sada da nema topološki pravilnog poliedra koji nije izomorfan jednom od pet konstruisanih poliedara. Stoga pretpostavimo da su sve pljosni topološki pravilnog poliedra Φ kojem je rub poliedarska površ nultog roda, p-uglovi, a



Slika 8e

da su mu svi rogljevi q-tostrani. Ako Φ ima T temena, I ivica i P pljosni, budući da je svaka ivica poliedra incidentna dvema pljosnima i dvama temenima, biće

$$pP = 2I = qT,$$

pa je, na osnovu Ojlerove formule za poliedarske površi nultog roda,

$$\frac{2I}{q} - I + \frac{2I}{p} = 2,$$

tj.

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2},$$

odakle sledi da je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}.$$

Dakle, budući da su brojevi p i q celi i veći od dva, jedina rešenja prethodne jednačine su uređeni parovi $(3,3)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(5,3)$ i $(3,5)$.

Dokažimo da svakom uređenim paru (p,q) odgovara (do na izomorfizam) jedinstven topološki pravilan poliedar. Zaista, ako su poznate vrednosti p i q, poznat je i broj ivica

$$I = \frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} = \frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)},$$

a kako je $pP = 2I = qT$, biće

$$T = \frac{4p}{4-(p-2)(q-2)} \quad \text{i} \quad P = \frac{4q}{4-(p-2)(q-2)},$$

pa su konstruisani poliedri: tetraedar, heksaedar, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar, jedini neizomorfni topološki pravilni poliedri kojima su rubovi poliedarske površi nultog roda. □

Ukupan broj temena, ivica i pljosni svakog od topološki pravilnih poliedara zadat je sledećom tabelom:

(p,q)	T	I	P	ime poliedra
$(3,3)$	4	6	4	tetraedar
$(3,4)$	6	12	8	oktaedar
$(4,3)$	8	12	6	heksaedar
$(3,5)$	12	30	20	ikosaedar
$(5,3)$	20	30	12	dodekaedar

ZADACI:

1. Dokazati da neka otvorena poluprava a sa temenom O koja pripada roglju α, a ne sadrži ni jedno teme i ne seče ni jednu ivicu poliedra Ω, seče površ tog poliedra u tačkama kojih ima neparno mnogo, ako i samo ako bilo koja druga poluprava b sa istim osobinama seče istu površ u tačkama kojih ima neparno mnogo.

2. Naći primer poliedra koji nije nultog roda. Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji poliedar u euklidskom prostoru čiji je rod n.

3. Kolika je karakteristika $T-I+P$ poliedra kojem je rub poliedarska površ koja nije nultog roda?

4. Dokazati da je svaki konveksan poliedar presek poluprostora koji sadrže njegove pljosni.

5. Ako je T broj temena, I broj ivica, a P broj pljosni poliedarske površi nultog roda, dokazati da je:

a. $6P - 12 \geq 2I \geq 3P \geq I + 6$,

b. $6T - 12 \geq 2I \geq 3T \geq I + 6$.

6. Dokazati da u poliedarske površi nultog roda bar jedna pljosan mora biti trostrana ili bar jedan rogalj mora biti triedar.

7. Dokazati da je u svake poliedarske površi paran broj pljosni sa neparnim brojem ivica.

9. Orijentacija

Orijentacija prave. Za duž A_0A_1 čija su temena uređeni par tačaka (A_0, A_1) reći ćemo da je *orijentisana*. Orijentisane duži A_0A_1 i B_0B_1 zvaćemo *nadovezanim* ako pripadaju jednoj pravoj i ako je $A_1 = B_0$. *Lancem orijentisanih duži* zvaćemo konačan niz orijentisanih duži u kome su svaka dva uzastopna člana nadovezane duži. *Početak lanca* je njegov prvi član, a *kraj* njegov poslednji član. Lanac ćemo zvati *zatvorenim* ako su istovetni njegov početak i kraj.

Pod lancem $A_0A_1 \dots A_m$, $m > 1$, podrazumevaćemo niz orijentisanih duži A_iA_{i+1}, $i = 0, 1, \dots, m-1$. Pod zatvorenim lancem $A_0A_1 \dots A_{m-1}$, $m > 1$, podrazumevaćemo niz orijentisanih duži A_iA_{i+1}, $i = 0, 1, \dots, m$, pri čemu usvajamo konvenciju da je $A_m = A_0$ i $A_{m+1} = A_1$.

Reći ćemo da lanac *povezuje* ili *spaja* duži d i d' ako je d njegov početak, a d' njegov kraj.

Teorema 9.1: *Za svake dve orijentisane duži neke prave l postoji lanac $\mathcal{L}$ koji ih povezuje.*

Dokaz: Neka je $d = A_0A_1$, a $d' = B_0B_1$, i neka je C tačka prave l različita od A_1 i B_0. Tada lanac $\mathcal{L} = A_0A_1CB_0B_1$ povezuje orijentisane duži d i d'. □

Preorijentacijom ćemo zvati par nadovezanih orijentisanih duži A_0A_1 i A_1A_2 takvih da tačka A_1 *nije* između A_0 i A_2. Parnost broja preorijentacija parova uzastopnih duži nekog lanca zvaćemo *parnošću* toga *lanca*.

Teorema 9.2: *Zatvoreni lanci su parni.*

Dokaz: Neka je $A_0A_1 \dots A_{m-1}$ zatvoreni lanac. Tačkama $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ možemo pridružiti cele brojeve $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ takve da je

$$(a_i - a_j)(a_j - a_k) > 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad \mathcal{B}(A_i, A_j, A_k).$$

Zaista, na osnovu teoreme 3.5, tačke $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ možemo da preoznačimo sa $B_0, B_1, \dots, B_{m-1}$ tako da je $\mathcal{B}(B_0, B_1, \dots, B_{m-1})$. Ako su neke od tačaka $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ istovetne, biće istovetne i neke od susednih tačaka iz skupa $\{B_0, B_1, \dots, B_{m-1}\}$, a biće $\mathcal{B}(B_i, B_{i+1}, B_{i+2})$ kad god su tačke B_i, B_{i+1}, B_{i+2} međusobno različite. Dodelimo tačkama $B_0, B_1, \dots, B_{m-1}$, redom, cele brojeve

$b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ takve da je $b_0 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_{m-1}$, pri čemu je $b_i = b_{i+1}$ ako i samo ako je $B_i = B_{i+1}$. Međutim, svakoj od tačaka A_k, $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, odgovara neka od tačaka $B_l, l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, a sa njome i neki broj b_l koji ćemo označiti sa a_k. Pri tome je $(a_i - a_j)(a_j - a_k) > 0$ ako i samo ako je $\mathcal{B}(A_i, A_j, A_k)$.

Par duži $A_i A_{i+1}$ i $A_{i+1} A_{i+2}$ će formirati preorijentaciju ako i samo ako je

$$(a_i - a_{i+1})(a_{i+1} - a_{i+2}) < 0.$$

Budući da iz definicije zatvorenog lanca sledi da je

$$\prod_{i=0}^{m-1} (a_i - a_{i+1})(a_{i+1} - a_{i+2}) = \prod_{i=0}^{m-1} (a_i - a_{i+1})^2 > 0,$$

među uzastopnim članovima datoga lanca biće paran broj preorijentacija. □

Teorema 9.3: *Lanci $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ koji imaju zajednički početak d i kraj d', iste su parnosti.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{L}''$ lanac čiji je početak orijentisana duž d', a kraj orijentisana duž d. Nadovezivanjem lanaca $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}''$ dobija se zatvoreni lanac koji je, prema prethodnoj teoremi, paran. Odatle sledi da su lanci $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}''$ iste parnosti. Na isti način se dokazuje da su $\mathcal{L}'$ i $\mathcal{L}''$ lanci iste parnosti, pa su $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$, takođe, iste parnosti. □

Orijentisane duži d i d' ćemo zvati *istosmernim* i pisaćemo $d \rightrightarrows d'$ ako je svaki lanac koji ih spaja paran. U protivnom ćemo ih zvati *suprotnosmernim* i pisaćemo $d \rightleftarrows d'$.

Teorema 9.4: *Relacija istosmernosti orijentisanih duži neke prave je relacija ekvivalencije koja familiju orijentisanih duži te prave razlaže na dve klase ekvivalencije.*

Dokaz: Kako je svaki zatvoreni lanac paran biće $d \rightrightarrows d$, pa je relacija istosmernosti refleksivna.

Neka je $d \rightrightarrows d'$, i neka su $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ lanci koji povezuju, redom, d sa d', i d' sa d. Lanac $\mathcal{L}$ je paran, a lanac koji nastaje nadovezivanjem lanca $\mathcal{L}'$ na lanac $\mathcal{L}$ je zatvoren, pa stoga, i paran. Dakle, i $\mathcal{L}'$ je paran, pa je zato $d' \rightrightarrows d$. Odatle sledi da je relacija istosmernosti i simetrična.

Neka je $d \rightrightarrows d'$ i $d' \rightrightarrows d''$, i neka lanac $\mathcal{L}$ povezuje d sa d', a lanac $\mathcal{L}'$, d' sa d''. Kako su $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$, po definiciji, parni lanci, i lanac $\mathcal{L}''$ koji se dobija njihovim nadovezivanjem je paran, i spaja d sa d''. Dakle, $d \rightrightarrows d''$, pa je relacija istosmernosti i tranzitivna.

Broj klasa ekvivalencije relacije istosmernosti je veći od jedan jer postoje suprotnosmerne duži. Dokažimo da taj broj nije veći od dva. U tom cilju pretpostavimo da je $d \rightleftarrows d'$ i da je $d' \rightleftarrows d''$, i sa $\mathcal{L}$ obeležimo lanac koji povezuje d sa d', a sa $\mathcal{L}'$ lanac koji povezuje d' sa d''. I $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ su neparni lanci pa je lanac $\mathcal{L}''$ koji se dobija nadovezivanjem lanca $\mathcal{L}'$ na lanac $\mathcal{L}$, paran i povezuje d i d''. Dakle, biće $d \rightrightarrows d''$, pa broj klasa ekvivalencije nije veći od dva. □

Klase ekvivalencije na koje relacija istosmernosti razlaže skup orijentisanih duži neke prave, nazivamo *smerovima* te *prave*.

Orijentacija ravni. Trougao $A_0A_1A_2$ čija su temena uređena trojka tačaka (A_0, A_1, A_2) zvaćemo *orijentisanim*. Orijentisane trouglove $A_0A_1A_2$ i $B_0B_1B_2$ zvaćemo *nadovezanim* ako pripadaju jednoj ravni i ako je $A_1 = B_0$ i $A_2 = B_1$. *Lancem orijentisanih trouglova* nazivamo konačan niz orijentisanih trouglova u kojem su svaka dva uzastopna člana nadovezana. *Početak lanca* je njegov prvi član, a *kraj*, njegov poslednji član. Lanac nazivamo *zatvorenim* ako su istovetni njegov početak i kraj.

Pod lancem $A_0A_1 \dots A_m$, $m > 2$, podrazumevaćemo niz orijentisanih trouglova $A_iA_{i+1}A_{i+2}$, $i = 0, 1, \dots, m-2$, a pod zatvorenim lancem $A_0A_1 \dots A_{m-1}$, $m > 2$, niz orijentisanih trouglova $A_iA_{i+1}A_{i+2}$, $i = 0, 1, \dots, m$, pri čemu usvajamo konvenciju da je $A_m = A_0$, $A_{m+1} = A_1$ i $A_{m+2} = A_2$.

Reći ćemo da lanac *povezuje* trouglove t i t' ako je t njegov početak, a t' njegov kraj.

Teorema 9.5: *Za svaka dva orijentisana trougla t i t' ravni π postoji lanac $\mathcal{L}$ koji ih povezuje.*

Dokaz: Neka je $t = A_0A_1A_2$ i $t' = B_0B_1B_2$. Dalje, neka je C_1 tačka ravni π različita od B_0 koja ne pripada pravoj A_1A_2, i C_2 tačka iste ravni koja ne pripada ni jednoj od pravih A_2C_1, C_1B_0 i B_0B_1. Lanac $\mathcal{L} = A_0A_1A_2C_1C_2B_0B_1B_2$ povezuje orijentisane trouglove t i t'. □

Par nadovezanih orijentisanih trouglova $A_0A_1A_2$ i $A_1A_2A_3$ ćemo zvati *preorijentacijom* ako su tačke A_0 i A_3 sa raznih strana prave A_1A_2. *Parnošću lanca* zvaćemo parnost broja preorijentacija među parovima uzastopnih trouglova u tome lancu.

Neka su A i B dve razne tačke ravni π, koje ne pripadaju nekoj pravoj p te ravni. Na skupu parova tačaka, i pravih ravni π definišemo funkciju a na sledeći način:

$$a(A, B; p) = \begin{cases} 1, & A, B \doteqdot p \\ -1, & A, B \div p. \end{cases}$$

Iz Pašove aksiome i teoreme 5.7 neposredno slede prve dve od sledećih triju osobina funkcije a:

1° Ako tačke A, B, C ne pripadaju pravoj p, onda je

$$a(A, B; p)\ a(B, C; p)\ a(C, A; p) = 1.$$

2° Ako su A, B, C, D četiri koplanarne tačke od kojih nikoje tri nisu kolinearne, onda je

$$a(A, B; CD)\ a(B, C; AD)\ a(C, A; BD) = -1.$$

3° Neka je $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ proizvoljan skup tačaka jedne ravni. Postoji skup $\{A'_0, A'_1, \ldots, A'_m\}$ tačaka iste ravni takav da su svake tri od njih nekolinearne i da je

$$a(A'_i, A'_j; A'_k A'_l) = a(A_i, A_j; A_k A_l), \quad i, j, k, l \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

ukoliko tačke A_i i A_j ne pripadaju pravoj $A_k A_l$.

Dokažimo treću od navedenih osobina. U tom cilju obeležimo sa p_0 proizvoljnu pravu koja sadrži A_0, a ne sadrži ni jednu od tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Neka je A'_0 tačka prave p_0 takva da duž $(A_0 A'_0]$ ne seče ni jednu od pravih $A_k A_l$, $k, l \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Dokažimo da skup $\{A'_0, A_1, \ldots, A_m\}$ zadovoljava navedenu jednakost. Ako je $i = 0$ (ili $j = 0$), jednakost je zadovoljena jer je, zbog osobine 1°,

$$a(A'_0, A_j; A_k A_l) = a(A_0, A_j; A_k A_l)\, a(A_0, A'_0; A_k A_l),$$

a

$$a(A'_0, A_0; A_k A_l) = 1,$$

jer su A_0 i A'_0 sa iste strane prave $A_k A_l$. Ako je $k = 0$ (ili $l = 0$), jednakost je zadovoljena jer je, zbog osobine 2°,

$$a(A_i, A_j; A'_0 A_l) = -a(A'_0, A_j; A_i A_l)\, a(A'_0, A_i; A_j A_l),$$

$$a(A_i, A_j; A_0 A_l) = -a(A_0, A_j; A_i A_l)\, a(A_0, A_i; A_j A_l),$$

a na osnovu prethodnog je

$$a(A'_0, A_j; A_i A_l) = a(A_0, A_j; A_i A_l),$$

$$a(A'_0, A_i; A_j A_l) = a(A_0, A_i; A_j A_l).$$

Ponavljanjem istog postupka za tačke $A_1, A_2, \ldots, A_m$ dobija se skup A'_0, $A'_1, \ldots, A'_m$ koji zadovoljava sve uslove formulisane u trećoj osobini funkcije a.

Teorema 9.6: *Zatvoreni lanci su parni.*

Dokaz: Iz definicije neposredno sledi da je lanac $A_0 A_1 \ldots A_{m-1}$ paran ako i samo ako je

$$\prod_{i=0}^{m-1} a(A_i, A_{i+3}; A_{i+1} A_{i+2}) = 1.$$

Za $m = 3$ ova jednakost je ispunjena jer su svi činioci u proizvodu sa leve strane jednakosti jednaki 1. Pretpostavimo da jednakost važi za prirodan broj $m > 3$ i dokažimo da važi i za $m + 1$.

Neka je lanac $A_0 A_1 \ldots A_m$ zatvoren. Zbog osobine 3° funkcije a dokaz neće izgubiti na opštosti ako pretpostavimo da su bilo koje tri tačke iz skupa $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ nekolinearne. Kako i niz tačaka $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ definiše zatvoreni lanac, količnik proizvoda sa levih strana jednakosti formiranih za lance $A_0 A_1 \ldots A_m$ i $A_0 A_1 \ldots A_{m-1}$ biće jednak količniku proizvoda

$$a(A_{m-3}, A_m; A_{m-2} A_{m-1})\, a(A_{m-2}, A_0; A_{m-1} A_m)$$
$$a(A_{m-1}, A_1; A_m A_0)\, a(A_m, A_2; A_0 A_1)$$

i

$$a(A_{m-3}, A_0; A_{m-2}A_{m-1})\ a(A_{m-2}, A_1; A_{m-1}A_0)\ a(A_{m-1}, A_2; A_0A_1).$$

Dovoljno je dokazati da su prethodna dva proizvoda jednaka.

Kako je, na osnovu osobine 2° funkcije a,

$$a(A_{m-2}, A_0; A_{m-1}A_m) = -a(A_m, A_0; A_{m-2}A_{m-1})\ a(A_{m-2}, A_m; A_{m-1}A_0),$$

$$a(A_{m-1}, A_1; A_mA_0) = -a(A_m, A_1; A_{m-1}A_0)\ a(A_{m-1}, A_m; A_0A_1),$$

a na osnovu osobine 1°,

$$a(A_{m-3}, A_m; A_{m-2}A_{m-1})\ a(A_m, A_0; A_{m-2}A_{m-1}) = a(A_{m-3}, A_0; A_{m-2}A_{m-1}),$$

$$a(A_{m-2}, A_m; A_{m-1}A_0)\ a(A_m, A_1; A_{m-1}A_0) = a(A_{m-2}, A_1; A_{m-1}A_0),$$

$$a(A_{m-1}, A_m; A_0A_1)\ a(A_m, A_2; A_0A_1) = a(A_{m-1}, A_2; A_0A_1),$$

pomenuti proizvodi biće jednaki. □

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza budući da je on u potpunoj analogiji sa dokazom teoreme 9.3.

Teorema 9.7: *Lanci koji imaju zajednički i početak i kraj, iste su parnosti.* □

Orijentisane trouglove t i t' ćemo zvati *istosmernim* i pisaćemo $t \rightrightarrows t'$ ako je svaki lanac koji ih povezuje, paran. U protivnom ćemo ih zvati *suprotnosmernim* i pisaćemo $t \rightleftarrows t'$. Dokaz sledeće teoreme identičan je dokazu teoreme 9.4.

Teorema 9.8: *Relacija istosmernosti orijentisanih trouglova je relacija ekvivalencije koja familiju orijentisanih trouglova neke ravni razlaže na dve klase ekvivalencije.* □

Klase ekvivalencije na koje relacija istosmernosti razlaže skup orijentisanih trouglova neke ravni, nazivamo *smerovima* te *ravni.*

Teorema 9.9: *Neka je p_0, p_1, p_2 permutacija brojeva 0,1,2. Orijentisani trouglovi*

$$A_{p_0}A_{p_1}A_{p_2} \quad i \quad A_0A_1A_2$$

su istosmerni ako je zadata permutacija parna, a suprotnosmerni ako je permutacija neparna.

Dokaz: Od sledećih triju činjenica:

(i) ako tvrđenje važi za dve permutacije, važi i za njihov proizvod,

(ii) grupa permutacija brojeva 0,1,2 generisana je transpozicijama (0,1), (1,2), (2,0),

(iii) tvrđenje važi za svaku transpoziciju,

na kojima počiva dokaz teoreme, dokažimo samo drugu.

Neka je tačka A između A_1 i A_2. Lanac $A_1A_0A_2AA_0A_1A_2$ povezuje trouglove $A_1A_0A_2$ i $A_0A_1A_2$. Neparan je jer među parovima njegovih uzastopnih članova postoji samo jedna preorijentacija. □

Ugao pq čiji su kraci uređeni par polupravih (p,q) zvaćemo *orijentisanim*. Ako su O i O' temena konveksnih uglova pq i $p'q'$, zatim P i Q, redom, tačke krakova p i q, a P' i Q', redom, tačke krakova p' i q', za uglove pq i $p'q'$ ćemo reći da su *istosmerni* ako su orijentisani trouglovi OPQ i $O'P'Q'$ istosmerni. U suprotnom, reći ćemo da su ti uglovi *suprotnosmerni*. Dodamo li ovome i da su komplementni orijentisani uglovi suprotnosmerni, proširili smo relaciju istosmernosti na skup svih orijentisanih uglova.

Orijentacija prostora. Tetraedar $A_0A_1A_2A_3$ čija su temena uređena četvorka tačaka (A_0,A_1,A_2,A_3) zvaćemo *orijentisanim*. Ako je $A_1=B_0$, $A_2=B_1$ i $A_3=B_2$, orijentisane tetraedre $A_0A_1A_2A_3$ i $B_0B_1B_2B_3$ ćemo zvati *nadovezanim*. *Lancem orijentisanih tetraedara* zvaćemo konačan niz orijentisanih tetraedara u kojem su svaka dva uzastopna člana nadovezana. *Početak lanca* je njegov prvi član, a *kraj*, njegov poslednji član. Lanac nazivamo *zatvorenim* ako su istovetni njegov početak i kraj.

Pod lancem $A_0A_1\dots A_m$, $m>3$, podrazumevaćemo niz orijentisanih tetraedara $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$, $i=0,1,\dots,m-3$, a pod zatvorenim lancem $A_0A_1\dots A_{m-1}$, $m>3$, niz orijentisanih tetraedara $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$, $i=0,1,\dots,m$, uz konvenciju da je $A_{m+j}=A_j$, $j=0,1,2,3$.

Reći ćemo da lanac *povezuje* tetraedre t i t' ako je t njegov početak, a t' njegov kraj. U analogiji sa teoremom 9.5 dokazuje se sledeće tvrđenje.

Teorema 9.10: *Za svaka dva orijentisana tetraedra t i t' postoji lanac $\mathcal{L}$ koji ih povezuje.* □

Par nadovezanih orijentisanih tetraedara $A_0A_1A_2A_3$ i $A_1A_2A_3A_4$ zvaćemo *preorijentacijom* ako su tačke A_0 i A_4 sa iste strane ravni $A_1A_2A_3$. *Parnošću lanca* zvaćemo parnost broja preorijentacija među parovima uzastopnih tetraedara u tome lancu.

Neka su A i B dve razne tačke van ravni α. Na skupu parova tačaka prostora, i ravni, definišemo funkciju b na sledeći način:

$$b(A,\alpha,B)=\begin{cases} 1, & A,B\div\alpha \\ -1, & A,B\doteqdot\alpha. \end{cases}$$

U potpunoj analogiji sa već iskazanim osobinama funkcije a dokazuju se sledeće osobine funkcije b:

1° Ako tačke A,B,C ne pripadaju ravni α, onda je

$$b(A,\alpha,B)\ b(B,\alpha,C)\ b(C,\alpha,A)=-1.$$

2° Ako su A, B, C tri tačke i p prava takva da su Ap, Bp i Cp tri razne ravni, onda je

$$b(A, Cp, B)\ b(B, Ap, C)\ b(C, Bp, A) = 1.$$

3° Neka je $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ proizvoljan skup tačaka prostora. Postoji skup $\{A'_0, A'_1, \ldots, A'_m\}$ tačaka takav da su svake četiri od njih nekoplanarne i da je

$$b(A'_i, A'_k A'_l A'_r, A'_j) = b(A_i, A_k A_l A_r, A_j)$$

ukoliko tačke A_k, A_l, A_r pripadaju jedinstvenoj ravni kojoj ne pripadaju A_i i A_j.

Teorema 9.11: *Zatvoreni lanci su parni.*

Dokaz: Iz definicije neposredno sledi da je lanac $A_0A_1 \ldots A_{m-1}$ paran ako i samo ako je

$$\prod_{i=1}^{m-1} b(A_i, A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}, A_{i+4}) = 1.$$

Za $m = 4$ ova jednakost je ispunjena jer su svi činioci u proizvodu sa leve strana jednakosti jednaki -1. Pretpostavimo da jednakost važi za prirodan broj $m > 4$ i dokažimo da važi i za $m + 1$.

Neka je lanac $A_0A_1 \ldots A_m$ zatvoren. Na osnovu osobine 3° funkcije b, dokaz neće izgubiti na opštosti ako pretpostavimo da su svake četiri od tačaka $A_0, A_1, \ldots, A_m$ nekoplanarne. Kako i niz tačaka $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ definiše zatvoreni lanac, količnik proizvoda sa levih strana jednakosti formiranih za lance $A_0A_1 \ldots A_m$ i $A_0A_1 \ldots A_{m-1}$ biće jednak 1, što se dokazuje u analogiji sa dokazom teoreme 9.6. Stoga su pomenuti proizvodi jednaki. □

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza budući da je on u potpunoj analogiji sa dokazima teorema 9.3 i 9.7.

Teorema 9.12: *Lanci koji imaju zajednički i početak i kraj, iste su parnosti.* □

Orijentisane tetraedre t i t' ćemo zvati *istosmernim* i pisaćemo $t \rightrightarrows t'$ ako je svaki lanac koji ih povezuje, paran. U protivnom ćemo ih zvati *suprotnosmernim* i pisaćemo $t \rightleftarrows t'$. Dokaz sledeće teoreme identičan je dokazima teorema 9.4 i 9.8.

Teorema 9.13: *Relacija istosmernosti orijentisanih tetraedara je relacija ekvivalencije koja familiju orijentisanih tetraedara razlaže na dve klase ekvivalencije.* □

Klase ekvivalencije na koje relacija istosmernosti razlaže skup orijentisanih tetraedara nazivamo *smerovima prostora.*

Dokaz sledeće teoreme se može izvesti u potpunoj analogiji sa dokazom teoreme 9.9, pa ga zato ne navodimo.

Teorema 9.14: *Neka je p_0, p_1, p_2, p_3 permutacija brojeva 0,1,2,3. Orijentisani tetraedri*

$$A_{p_0}A_{p_1}A_{p_2}A_{p_3} \quad i \quad A_0A_1A_2A_3$$

su istosmerni ako je zadata permutacija parna, a suprotnosmerni ako je permutacija neparna. □

ZADATAK:

1. Dokazati stav o postojanju dveju orijentacija prave po ugledu na stav o orijentaciji ravni. Za kolinearne tačke A, B, C definisati, najpre, funkciju $\sigma(A, B, C)$:

$$\sigma(A,B,C) = \begin{cases} 1, & A,B \doteqdot C \\ -1, & A,B \div C, \end{cases}$$

a potom dokazati tri svojstva relacije σ iz kojih sledi stav o parnosti lanaca itd.

PODUDARNOST

U sedmoj aksiomi svojih Elemenata Euklid je pretpostavio da su „oni (geometrijski objekti) koji se mogu poklopiti jedanaki međusobno", drugim rečima pretpostavio je da su geometrijski likovi koji se *kretanjem* mogu poklopiti, međusobno podudarni. Time je pojam kretanja dobio funkciju osnovnog pojma, a pojam podudarnosti je definisan. Već drugi stav njegove prve knjige utemeljuje pojam podudarnosti duži. U njemu Euklid dokazuje da se iz date tačke može „povući duž jednaka datoj duži", drugim rečima na datoj polupravoj sa temenom A konstruiše tačku D takvu da je duž AD podudarna datoj duži BC. Iza ove konstrukcije krije se definicija podudarnih duži, no, Euklid u svome delu to nigde ne ističe. U četvrtom stavu prve knjige Elemenata u cilju dokaza tzv. *prvog stava o podudarnosti trouglova* (teorema 11.15i) Euklid najpre jedan trougao „polaže" na drugi tako da jedno teme prvog „padne" u teme drugog, a jedna ivica prvog trougla „ide" po ivici drugog itd. Slične argumente u kojima se pretpostavlja kretanje kao poznat pojam, Euklid koristi kad god treba da dokaže podudarnost nekih geometrijskih likova.

U svojim **Načelima geometrije** iz 1889. godine Peano je, sledeći Euklida, prihvatio pojam kretanja kao jedan od osnovnih pojmova geometrije. Nasuprot njemu Paš u **Novijoj geometriji** iz 1882. godine, a Veroneze u **Elementima geometrije** iz 1891. godine i Hilbert u svojim **Osnovama geometrije** iz 1899. godine, pošli su od podudarnosti kao od jednog od nedefinisanih pojmova i utvrdili aksiome podudarnosti kojima se taj važan pojam uvodi u geometriju. Za razliku od Hilberta kod koga se aksiome odnose i na pojam podudarnosti duži i na pojam podudarnosti uglova, Paš i Veroneze kao osnovni pojam usvajaju samo podudarnost duži, a podudarnost uglova definišu. U izvesnom smislu i mi ćemo se držati te ideje. No, za nas će podudarnost biti još elementarnija. Osnovni pojam *podudarnosti* odnosiće se, ne na duži ili uglove, već na parove tačaka, u skladu sa načinom na koji je podudarnost uvedena u Osnovama geometrije Borsuka i Šmieleve.

10. Aksiome podudarnosti i njihove prve posledice

Aksiome treće grupe, koje se nazivaju i *aksiomama podudarnosti*, odnose se na jednu od dveju relacija koje nismo definisali, četvoročlanu relaciju $\mathcal{C}$, podudarnosti parova tačaka. Već smo napomenuli da ćemo formulu $\mathcal{C}(A,B,C,D)$ čitati: par tačaka (A,B) je podudaran paru tačaka (C,D). Naglasili smo i da ćemo umesto $\mathcal{C}(A,B,C,D)$ koristiti i oznaku $(A,B)\cong(C,D)$. Navedimo aksiome treće grupe:

Aksioma III1: *Ako su A,B,C,D tačke takve da je $(A,B)\cong(C,D)$ i $A=B$, tada je $C=D$.*

Aksioma III2: *Ako su A i B bilo koje dve tačke, tada je $(A,B)\cong(B,A)$.*

Aksioma III3: *Ako su A,B,C,D,E,F tačke takve da je $(A,B)\cong(C,D)$ i, uz to, $(A,B)\cong(E,F)$, tada je $(C,D)\cong(E,F)$.*

Aksioma III4: *Ako su C i C' tačke dveju otvorenih duži AB i $A'B'$, takve da je $(A,C)\cong(A',C')$ i $(B,C)\cong(B',C')$, tada je i $(A,B)\cong(A',B')$.*

Aksioma III5: *Ako su A i B dve razne tačke i C teme neke poluprave, tada na toj polupravoj postoji tačka D takva da je $(A,B)\cong(C,D)$.*

Aksioma III6: *Ako su A,B,C tri nekolinearne tačke i A',B' tačke ruba neke poluravni, takve da je $(A,B)\cong(A',B')$, tada u toj poluravni postoji jedinstvena tačka C' takva da je $(A,C)\cong(A',C')$ i $(B,C)\cong(B',C')$.*

Aksioma III7: *Ako su A,B,C i A',B',C' dve trojke nekolinearnih tačaka i D i D' tačke polupravih BC i $B'C'$, takve da je $(A,B)\cong(A',B')$, $(B,C)\cong(B',C')$, $(C,A)\cong(C',A')$ i $(B,D)\cong(B',D')$, tada je i $(A,D)\cong(A',D')$.*

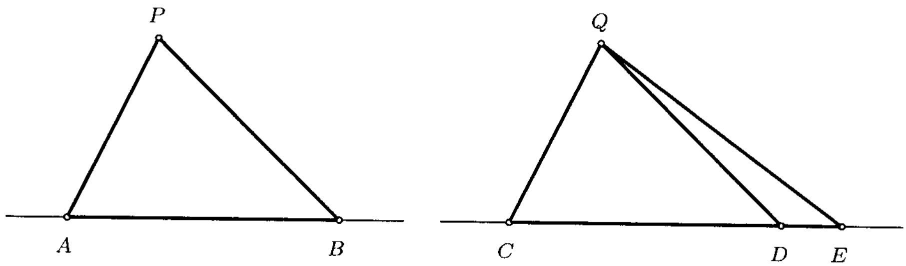
Teorema 10.1: *Relacija $\mathcal{C}$ podudarnosti parova tačaka je relacija ekvivalencije.*

Dokaz: Relacija $\mathcal{C}$ je refleksivna jer je, na osnovu aksiome III2, $(B,A)\cong(A,B)$ i $(B,A)\cong(A,B)$, pa je, prema aksiomi III3, $(A,B)\cong(A,B)$.

Ako je $(A,B)\cong(C,D)$, tada, budući da je $(A,B)\cong(A,B)$, iz aksiome III3 sledi da je $(C,D)\cong(A,B)$, pa je relacija $\mathcal{C}$ i simetrična.

Ta relacija je i tranzitivna jer iz $(A,B)\cong(C,D)$ i $(C,D)\cong(E,F)$ sledi da je $(C,D)\cong(A,B)$ i $(C,D)\cong(E,F)$, pa je, na osnovu aksiome III3, $(A,B)\cong(E,F)$.□

Teorema 10.2: *Ako su A i B dve razne tačke i C teme neke polupravе p, tada na toj polupravoj postoji jedinstvena tačka D takva da je $(A,B)\cong(C,D)$.*



Slika 10a

Dokaz: Budući da je postojanje tačke D pretpostavljeno aksiomom III5, dokažimo samo njenu jedinstvenost. U tom cilju pretpostavimo da na polupravoj p postoji i tačka E, različita od D, takva da je $(A,B)\cong(C,E)$. Obeležimo sa P proizvoljnu tačku koja ne pripada pravoj AB. Tada, prema aksiomi III6, u jednoj od poluravni sa rubom CD postoji jedinstvena tačka Q takva da je $(A,P)\cong(C,Q)$ i $(B,P)\cong(D,Q)$, pa je, na osnovu aksiome III7, $(B,P)\cong(E,Q)$. Stoga će A,B,P biti tri nekolinearne tačke, a C i Q tačke ruba poluravni (CQD), takve da je $(A,P)\cong(C,Q)$, a D i E tačke te poluravni, takve da je $(A,B)\cong(C,D)$, $(B,P)\cong(D,Q)$ i $(A,B)\cong(C,E)$, $(B,P)\cong(E,Q)$ što je, prema aksiomi III6, nemoguće. □

Teorema 10.3: *Ako su A,B,C tri razne tačke neke prave l i A',B' tačke prave l', takve da je $(A,B)\cong(A',B')$, tada postoji jedinstvena tačka C' takva da je $(A,C)\cong(A',C')$ i $(B,C)\cong(B',C')$. Štaviše, tačka C' pripada pravoj l' i poretku tačaka A,B,C na pravoj l odgovara poredak tačaka A',B',C' na pravoj l', drugim rečima,*

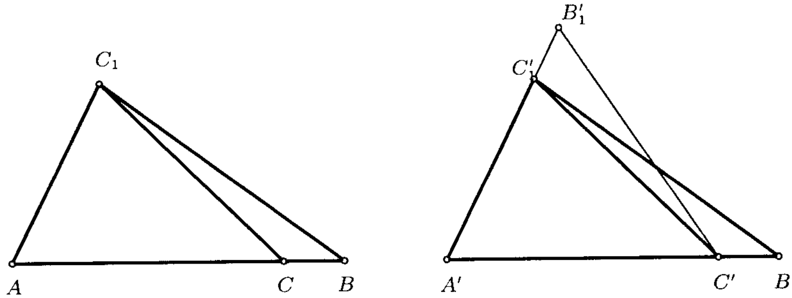
a. *ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$, tada je i $\mathcal{B}(A',B',C')$,*

b. *ako je $\mathcal{B}(B,C,A)$, tada je i $\mathcal{B}(B',C',A')$,*

c. *ako je $\mathcal{B}(C,A,B)$, tada je i $\mathcal{B}(C',A',B')$.*

Dokaz: Pretpostavimo, najpre, da je tačka C između tačaka A i B, dakle, da je $\mathcal{B}(B,C,A)$, tj. $\mathcal{B}(A,C,B)$. Ako su C' i B'' tačke polupravе $A'B'$, takve da je $\mathcal{B}(A',C',B'')$, $(A,C)\cong(A',C')$ i $(B,C)\cong(B'',C')$, tada iz aksiome III4 sledi da je $(A,B)\cong(A',B'')$, pa je, na osnovu prethodne teoreme, $B'=B''$. Time je dokazano postojanje tačke C' koja zadovoljava uslove teoreme. Dokažimo i njenu jedinstvenost.

Ako bi, osim tačke C', na pravoj l' postojala još neka tačka C'_1 koja zadovoljava uslove teoreme, tada bi, na osnovu teoreme 10.2, važila relacija $\mathcal{B}(C'_1,A',C')$, a kako je $\mathcal{B}(A',C',B')$, tačke C' i C_1' bi pripadale polupravoj $B'A'$ i važile bi i relacije $(B,C) \cong (B',C')$ i $(B,C) \cong (B',C_1')$ što je, opet na osnovu teoreme 10.2, nemoguće.



Slika 10b

Ako pretpostavimo da osim tačke C' prave l' van te prave postoji i tačka C_1' koja zadovoljava uslove teoreme, tada, na osnovu aksiome III6, u jednoj od poluravni sa ivicom l postoji jedinstvena tačka C_1 takva da je $(A,C_1) \cong (A',C_1')$ i $(B,C_1) \cong (B',C_1')$. Tada će, na osnovu aksiome III7, biti $(C_1,C) \cong (C_1',C')$. Ako je B_1' tačka prave $A'C_1'$, takva da je $\mathcal{B}(A',C_1',B_1')$ i $(C',B') \cong (C_1',B_1')$, tada je, opet na osnovu aksiome III7, $(C',B_1') \cong (C_1',B')$. Sada su C, C_1, B tri nekolinearne tačke, C' i C_1' tačke ruba poluravni $(C'C_1'B')$, takve da je $(C,C_1) \cong (C_1',C')$, a B' i B_1' tačke te poluravni takve da je $(C,B) \cong (C',B')$, $(C_1,B) \cong (C_1',B')$ i $(C,B) \cong (C',B_1')$, $(C_1,B) \cong (C_1',B_1')$ što je, prema aksiomi III6, nemoguće.

U slučajevima kada tačka C nije između A i B dokaz se izvodi u analogiji sa prethodnim. □

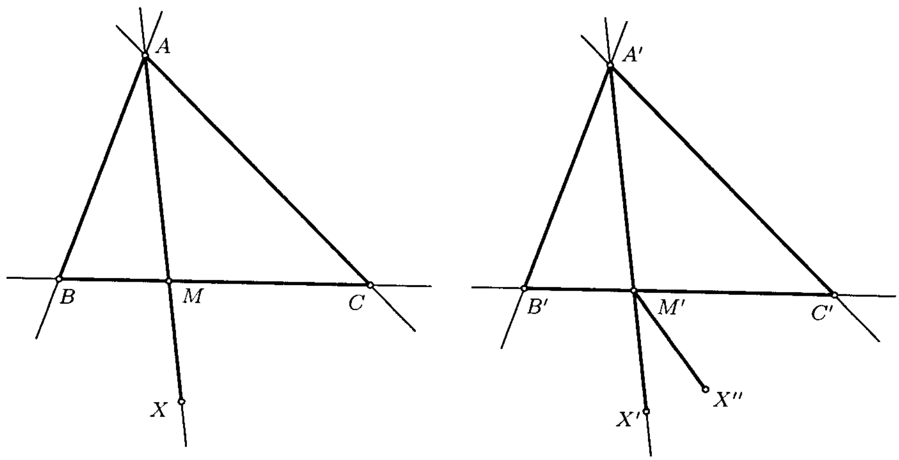
Ako su $(A_1,A_2,\ldots,A_k)$ i $(A_1',A_2',\ldots,A_k')$ dva konačna, uređena skupa tačaka prave, ravni ili prostora i ako je pri tome $(A_i,A_j) \cong (A_i',A_j')$, $i,j \in \{1,2,\ldots,k\}$, tada ćemo reći da je uređeni skup $(A_1,A_2,\ldots,A_k)$ *podudaran* uređenom skupu $(A_1',A_2',\ldots,A_k')$ i pisaćemo

$$(A_1,A_2,\ldots,A_k) \cong (A_1',A_2',\ldots,A_k').$$

Iz prethodne definicije i teoreme 10.1 neposredno sledi da je relacija podudarnosti konačnih skupova tačaka, relacija ekvivalencije. Stoga se može reći da su skupovi $(A_1,A_2,\ldots,A_k)$ i $(A_1',A_2',\ldots,A_k')$ međusobno podudarni.

Ako je $\mathcal{A}$ konačan skup kolinearnih tačaka i ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ međusobno podudarni skupovi tačaka, tada su, na osnovu teoreme 10.3, tačke skupa $\mathcal{A}'$ takođe kolinearne. Štaviše, budući da se tačke skupa $\mathcal{A}$ mogu označiti sa $A_1,A_2,\ldots,A_k$ tako da je $\mathcal{B}(A_1,A_2,\ldots,A_k)$, skup $\mathcal{A}'$ će se sastojati iz tačaka $A_1',A_2',\ldots,A_k'$ takvih da je $\mathcal{B}(A_1',A_2',\ldots,A_k')$.

Teorema 10.4: *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke neke ravni π i A', B', C' tačke ravni π' takve da je $(A, B, C) \cong (A', B', C')$, tada za svaku tačku X ravni π postoji jedinstvena tačka X' takva da je $(A, B, C, X) \cong (A', B', C', X')$. Štaviše, tačka X' pripada ravni π' i sa iste je strane svake od pravih $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ sa koje su, redom, tačke C', A', B' ako i samo ako je tačka X sa iste strane svake od pravih AB, BC, CA sa koje su, redom, tačke C, A, B.*



Slika 10c

Dokaz: Ako tačka X pripada nekoj od pravih AB, BC, CA, tvrđenje sledi iz teoreme 10.3 i aksiome III7. Stoga pretpostavimo da je X tačka ravni π koja ne pripada ni jednoj od tih triju pravih. Na osnovu drugog Peanovog stava (teorema 5.8) tačka X pripada ravni ABC ako i samo ako pripada skupu tačaka pravih koje sadrže: tačku A i neku tačku duži $[BC]$ ili tačku B i neku tačku duži $[CA]$ ili tačku C i neku tačku duži $[AB]$. Pretpostavimo da X pripada pravoj koja sadrži tačku A i tačku M duži $[BC]$. Kako X ne pripada ni jednoj od pravih AB, BC, CA tačka M će se razlikovati i od B i od C. Tada, na osnovu prethodne teoreme, postoji jedinstvena tačka M' takva da je $(B, C, M) \cong (B', C', M')$, i jedinstvena tačka X' takva da je $(A, M, X) \cong (A', M', X')$. Pri tome, na osnovu iste teoreme, M' pripada duž $B'C'$ i poretku tačaka A, M, X na pravoj AM odgovara poredak, redom, tačaka A', M', X' na pravoj $A'M'$. Iz te činjenice i iz aksiome III7 sledi da je $(B, X) \cong (B', X')$ i $(C, X) \cong (C', X')$, pa je, dakle, $(A, B, C, X) \cong (A', B', C', X')$. Štaviše, tačke A' i X' će biti sa iste strane prave $B'C'$ ako i samo ako su tačke A i X sa iste strane prave BC. Dokažimo da je tačka X' jedinstvena.

Ako je X'' tačka prostora $\boldsymbol{S}$ takva da je $(A, B, C, X) \cong (A', B', C', X'')$, tada su tačke X'', B', C' nekolinearne jer su X, B, C nekolinearne pa, na osnovu aksiome III7, nalazimo da je $(X, M) \cong (X'', M')$ i $(A, M, X) \cong (A', M', X'')$. Stoga su tačke A', M', X'' kolinearne i $X' = X''$.

Istovetno se rasuđuje ako X pripada pravoj koja sadrži tačku B i neku tačku duži $[CA]$, ili tačku C i neku tačku duži $[AB]$, pa je time teorema dokazana. $\square$

Slično prethodnoj teoremi, primenom trećeg Peanovog stava (teorema 5.12), dokazuje se i sledeće tvrđenje.

Teorema 10.5: *Ako su A, B, C, D četiri nekoplanarne tačke i A', B', C', D' tačke prostora $\boldsymbol{S}$ takve da je $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$, tada za svaku tačku X prostora $\boldsymbol{S}$ postoji jedinstvena tačka X' takva da je $(A, B, C, D, X) \cong (A', B', C', D', X')$. Štaviše, tačka X' je sa iste strane svake od ravni $A'B'C'$, $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$ sa koje su, redom, tačke D', A', B', C' ako i samo ako je tačka X sa iste strane svake od ravni ABC, BCD, CDA, DAB sa koje su, redom, tačke D, A, B, C.* □

Izometrije. Svaku bijekciju $\mathcal{I}$ prave, ravni ili prostora na sebe nazivamo *izometrijskom transformacijom* ili, kratko, *izometrijom* ako je slika svakog para (A, B) tačaka njemu podudaran par tačaka $(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B))$. Iz ove definicije neposredno sledi da je *identičnost* $\mathcal{I}$ koju zovemo i *koincidencijom* i kojom se svaka tačka prostora preslikava na sebe, izometrija. Izometriju koja nije identičnost zvaćemo *neidentičkom* ili *pravom izometrijom.* Za lik koji se nekom izometrijom preslikava na sebe reći ćemo da je *invarijantan* u toj izometriji.

Teorema 10.6: *Skup svih izometrija prave, ravni ili prostora je grupa u odnosu na proizvod transformacija.*

Dokaz: Neposredno se dokazuje da je proizvod dveju izometrija, takođe izometrija i da je transformacija inverzna izometriji, opet izometrija. Kako izometrije pripadaju grupi bijekcija prave, ravni ili prostora, na sebe, skup svih izometrija prave, ravni ili prostora je grupa u odnosu na proizvod transformacija. □

Teorema 10.7: *Izometrijom $\mathcal{I}$ prava se preslikava na pravu, poluprava sa temenom O se preslikava na polupravu sa temenom $\mathcal{I}(O)$, a duž AB se preslikava na duž $A'B'$ takvu da je $A' = \mathcal{I}(A)$ i $B' = \mathcal{I}(B)$.*

Dokaz: Iz teoreme 10.3 neposredno sledi da $\mathcal{I}(l)$ pripada nekoj pravoj l', da $\mathcal{I}(p)$ pripada nekoj polupravoj p' sa temenom $O' = \mathcal{I}(O)$ i da $\mathcal{I}(AB)$ pripada duži $A'B'$. Kako je i $\mathcal{I}^{-1}$ izometrija, iz teoreme 10.3 sledi da se izometrijom $\mathcal{I}$ prava l preslikava na pravu l', poluprava p na polupravu p', a duž AB na duž $A'B'$. □

Dokaz prethodne teoreme se temelji na teoremi 10.3. Sledeća teorema se dokazije u analogiji sa prethodnom, s tim što njen dokaz počiva na teoremi 10.4.

Teorema 10.8: *Izometrijom $\mathcal{I}$ ravan se preslikava na ravan, poluravan sa ivicom s se preslikava na poluravan sa ivicom $\mathcal{I}(s)$, a konveksan ugao pq se preslikava na konveksan ugao $p'q'$, gde je $p' = \mathcal{I}(p)$ i $q' = \mathcal{I}(q)$.* □

Dakle, može se zaključiti da su osnovni pojmovi geometrije invarijante grupe izometrija.

Pored pojmova duži, poluprave, poluravni i ugla, aksiome druge grupe su nam omogućile da definišemo još neke važne pojmove geometrije, pre svega: poligonsku liniju, poligon, oblast, konveksnost, poligonsku površ, rogljastu površ, rogalj, poliedarsku površ, poliedar i orijentaciju. Iz prethodnih dveju teorema neposredno sledi da se izometrijom poligonska linija preslikava na poligonsku liniju, oblast na oblast, konveksan lik na konveksan lik, poligon na poligon, poligonaska površ na poligonsku površ, rogljasta površ na rogljastu površ, rogalj na rogalj, poliedarska površ na poliedarsku površ i poliedar na poliedar. U posebnom slučaju ako je poligon trougao ABC, njegova slika u izometriji $\mathfrak{I}$ je takođe trougao $A'B'C'$, gde je $A'=\mathfrak{I}(A)$, $B'=\mathfrak{I}(B)$, $C'=\mathfrak{I}(C)$, ako je rogalj triedar $Oabc$, njegova slika u izometriji $\mathfrak{I}$ je takođe triedar $O'a'b'c'$ gde je $O'=\mathfrak{I}(O)$, $a'=\mathfrak{I}(a)$, $b'=\mathfrak{I}(b)$, $c'=\mathfrak{I}(c)$, a ako je poliedar tetraedar, njegova slika je takođe tetraedar.

Budući da su dokazi sledećih triju teorema slični, dokazaćemo samo jednu od njih, poslednju.

Teorema 10.9: *Izometrijom prave, istosmerne duži se preslikavaju na istosmerne duži, a suprotnosmerne duži na suprotnosmerne duži.* □

Teorema 10.10: *Izometrijom ravni, istosmerni trouglovi se preslikavaju na istosmerne trouglove, a suprotnosmerni trouglovi na suprotnosmerne trouglove.* □

Teorema 10.11: *Izometrijom prostora istosmerni tetraedri se preslikavaju na istosmerne tetraedre, a suprotnosmerni tetraedri na suprotnosmerne tetraedre.*

Dokaz: Pretpostavimo da se izometrijom $\mathfrak{I}$ tetraedar $ABCD$ preslikava na tetraedar $A'B'C'D'$. Ako je $PQRS$ proizvoljan tetraedar i $P'Q'R'S'$ njegova slika u izometriji $\mathfrak{I}$, a $\mathcal{L}$ lanac orijentisanih tetraedara koji povezuje tetraedre $ABCD$ i $PQRS$, tada je slika svakog od orijentisanih tetraedara toga lanca orijentisani tetraedar, pa je slika toga lanca neki lanac $\mathcal{L}'$. Budući da se, na osnovu teoreme 10.5, tačke sa iste strane neke ravni izometrijom preslikavaju u tačke sa iste strane slike te ravni, a tačke sa raznih strana ravni u tačke sa raznih strana slike te ravni, broj preorijentacija među parovima uzastopnih orijentisanih tetraedara lanaca $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ biće isti, pa će ti lanci biti iste parnosti. Odatle sledi da će tetraedri $ABCD$ i $PQRS$ biti istosmerni ako i samo ako su njihove slike $A'B'C'D'$ i $P'Q'R'S'$ u izometriji $\mathfrak{I}$, istosmerni orijentisani tetraedri. □

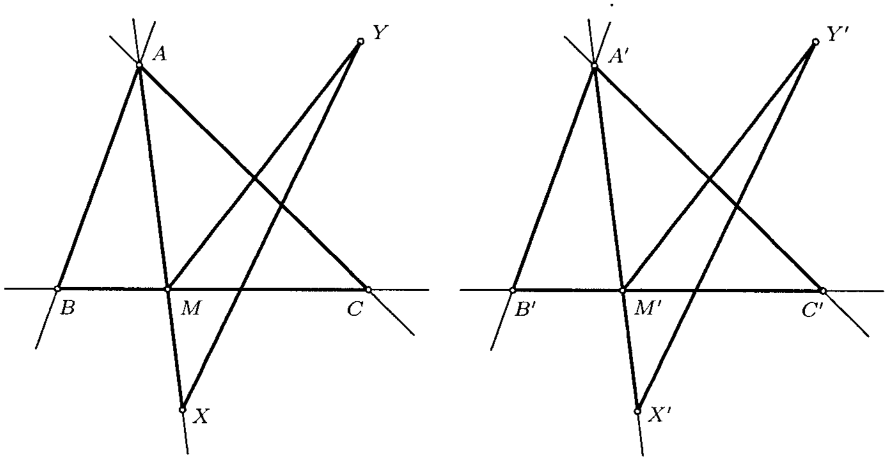
Dakle, postoje dve vrste izometrija prave, ravni ili prostora. To su *direktne izometrije* koje ne menjaju orijentaciju te prave, ravni ili prostora i *indirektne izometrije* koje je menjaju. Da bismo ustanovili da li je neka izometrija prave p, ravni π ili prostora $\boldsymbol{S}$, direktna ili indirektna dovoljno je ustanoviti da li su neka dva odgovarajuća uređena para tačaka prave p, ili dve odgovarajuće uređene trojke nekolinearnih tačaka ravni π ili dve odgovarajuće uređene četvorke nekoplanarnih tačaka prostora $\boldsymbol{S}$, u toj izometriji, istosmerne ili suprotnosmerne. Neposredno se dokazuje da je kompozicija dveju direktnih ili dveju indirektnih izometrija, direktna izometrija, a da je kompozicija jedne direktne i jedne indirektne izometrije, indirektna izometrija. Stoga je skup svih direktnih izometrija prave, ravni ili prostora podgrupa indeksa 2 grupe svih izometrija te prave, ravni ili prostora.

U narednim trima teoremama navedeni su uslovi pod kojima je izometrija prave, ravni ili prostora jednoznačno određena.

Teorema 10.12 : *Ako su A i B dve razne tačke neke prave p, a A' i B' tačke te prave takve da je $(A,B)\cong(A',B')$, tada postoji jedinstvena izometrija prave p, u kojoj se tačke A i B preslikavaju, redom, na tačke A' i B'.*

Dokaz: Kako je $A\neq B$ i $(A,B)\cong(A',B')$ biće i $A'\neq B'$ na osnovu aksiome III1 i teoreme 10.1. Neka je $\mathfrak{I}$ preslikavanje prave p na sebe koje svakoj tački X dodeljuje tačku X' takvu da je $(A,B,X)\cong(A',B',X')$. Ako je $\mathfrak{I}(Y)=Y'$, biće i $(A,B,Y)\cong(A',B',Y')$, pa je, na osnovu teoreme 10.3, $X=Y$ ako i samo ako je $X'=Y'$. Dakle, $\mathfrak{I}$ je bijekcija. Budući da je $\mathfrak{I}$ uređeno preslikavanje, poretku tačaka A,B,X,Y odgovara poredak tačaka A',B',X',Y', pa je, na osnovu aksiome III4 i teoreme 10.3, $\mathfrak{I}$ i izometrija. Iz teoreme 10.3 sledi da je izometrija $\mathfrak{I}$ jedinstvena.□

Teorema 10.13 : *Ako su A,B,C tri nekolinearne tačke neke ravni π, a A',B',C' tačke te ravni takve da je $(A,B,C)\cong(A',B',C')$, tada postoji jedinstvena izometrija ravni π u kojoj se tačke A,B,C preslikavaju, redom, na A',B',C'.*



Slika 10d

Dokaz: Kako su A,B,C nekolinearne tačke, i tačke A',B',C' će, na osnovu teoreme 10.3, biti nekolinearne. Neka je $\mathfrak{I}$ preslikavanje ravni π na sebe, koje svakoj tački X dodeljuje tačku X' takvu da je $(A,B,C,X)\cong(A',B',C',X')$. Egzistencija i jedinstvenost ovog preslikavanja sledi iz teoreme 10.4. Ako je $\mathfrak{I}(Y)=Y'$, biće i $(A,B,C,Y)\cong(A',B',C',Y')$, pa je, na osnovu teoreme 10.4, $X=Y$ ako i samo ako je $X'=Y'$. Dakle, $\mathfrak{I}$ je bijekcija. Ako je $X=Y$ ili ako neka od tačaka X i Y pripada nekoj od pravih BC, CA, AB, iz aksioma III1 i III7 sledi da je $(X,Y)\cong(X',Y')$. Stoga pretpostavimo da su X i Y dve razne tačke koje ne pripadaju ni jednoj od pravih BC, CA, AB. Tada, na osnovu drugog Peanovog stava, tačka X pripada ravni ABC ako i samo ako pripada skupu tačaka pravih koje sadrže: tačku A i neku tačku duži $[BC]$ ili tačku B i neku tačku duži $[CA]$ ili tačku C i neku tačku duži $[AB]$. Pretpostavimo da X pripada pravoj koja sadrži tačku A i tačku M duži $[BC]$. Tada, na osnovu teoreme 10.4, postoji jedinstvena tačka M' duži $[B'C']$ takva da je $(A,B,C,M,X)\cong(A',B',C',M',X')$. Budući da je $(Y,B,C)\cong(Y',B',C')$ i $(B,M,C)\cong(B',M',C')$, na osnovu aksiome III7 će biti $(Y,M)\cong(Y',M')$. Na osnovu iste aksiome se dokazuje da iz $(Y,A,M)\cong(Y',A',M')$ i $(A,M,X)\cong(A',M',X')$ sledi da je $(X,Y)\cong(X',Y')$. Dakle, $\mathcal{I}$ je izometrija. □

U analogiji sa prethodnom teoremom, primenom trećeg Peanovog stava i teoreme 10.5 dokazuje se sledeće tvrđenje.

Teorema 10.14 : *Ako su A,B,C,D četiri nekoplanarne tačke, a A',B',C',D' četiri tačke prostora takve da je $(A,B,C,D)\cong(A',B',C',D')$, tada postoji jedinstvena izometrija prostora u kojoj se tačke A,B,C,D preslikavaju, redom, na A',B',C',D'.* □

Iz prethodnih triju teorema sledi da je izometrija prave u kojoj su dve razne tačke te prave invarijantne, identičnost, da je izometrija ravni koja ima tri nekolinearne tačke invatijantne, takođe identičnost, isto kao i izometrija prostora koja ima četiri nekoplanarne, invarijantne tačke.

Podudarnost likova. Ako postoji izometrija kojom se neki geometrijski lik Φ preslikava na lik Φ', reći ćemo da je lik Φ *podudaran* liku Φ' i pisaćemo $\Phi\cong\Phi'$. Sledeći stav neposredno sledi iz tvrđenja da je skup svih izometrija prave, ravni ili prostora, grupa u odnosu na operaciju slaganja preslikavanja.

Teorema 10.15: *Relacija podudarnosti geometrijskih likova je relacija ekvivalencije.* □

Kako je relacija podudarnosti geometrijskih likova simetrična, za likove Φ i Φ' takve da je $\Phi\cong\Phi'$, reći ćemo da su *međusobno podudarni.* Budući da se izometrijom duž preslikava na duž, ugao na ugao, trougao na trougao, četvorougao na četvorougao, diedar na diedar, a triedar na triedar, lik podudaran duži biće duž, uglu ugao, trouglu trougao, četvorouglu četvorougao, diedru diedar, a triedru triedar.

Razloživa i dopunska jednakost likova. Neka su ω i ω' dva ravna ili prostorna lika i G proizvoljna podgrupa grupe svih izometrija ravni ili prostora kojem pripadaju ti likovi. Ako se likovi ω i ω' mogu razložiti na konačno mnogo likova $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n$ i $\omega_1',\omega_2',\dots,\omega_n'$ takvih da je $\mathcal{I}_i(\omega_i)=\omega_i'$ pri čemu je za svako $i\in\{1,2,\dots,n\}$, $\mathcal{I}_i$ izometrija iz grupe G, reći ćemo da su likovi ω i ω' *G-razloživo jednaki* i pisaćemo

$$\omega \overset{r_G}{\cong} \omega'.$$

Ako se pak, likovima ω i ω' mogu dodati G-razloživo jednaki likovi λ i λ' takvi da i likovi $\omega\cup\lambda$ i $\omega'\cup\lambda'$ budu G-razloživo jednaki, reći ćemo da su likovi ω i ω' *G-dopunski jednaki* i pisaćemo

$$\omega \overset{d_G}{\cong} \omega'.$$

Ako je G grupa svih izometrija ravni ili prostora, G-razloživu i G-dopunsku jednakost likova te ravni ili prostora zvaćemo jednostavno, *razloživom* i *dopunskom jednakošću likova*. Ako su likovi ω i ω' razloživo ili dopunski jednaki, pisaćemo, kratko, $\omega \stackrel{r}{=} \omega'$ ili $\omega \stackrel{d}{=} \omega'$.

Lako se dokazuje da su relacije G-razložive i G-dopunske jednakosti dve relacije ekvivalencije, i da su G-razloživo jednaki likovi i G-dopunski jednaki.

ZADATAK:

1. Neka se izometrijom $\mathcal{I}$ tetraedar $ABCD$ preslikava na tetraedar $A'B'C'D'$ pri čemu se prave AA', BB', CC', DD' koje sadrže odgovarajuće tačke tog preslikavanja seku u nekoj tački O. Da li je $\mathcal{I}$ direktna ili indirektna izometrija?

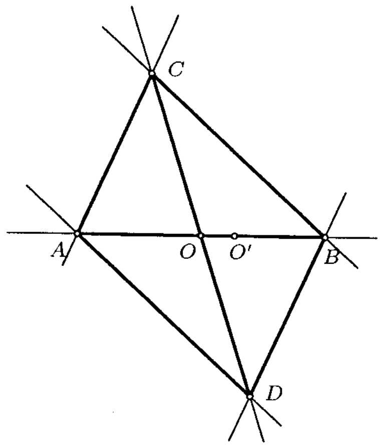
11. Podudarnost ravnih geometrijskih likova

Podudarnost duži. Već smo primetili da je duž AB podudarna duži CD ako i samo ako je par tačaka (A, B) podudaran paru tačaka (C, D). Naravno, otvorenoj duži je podudarna otvorena duž, a zatvorenoj duži zatvorena pa, kada je reč o podudarnosti, nikada nećemo naglašavati da li je neka duž otvorena ili zatvorena. Zato, ako su duži AB i CD međusobno podudarne, pisaćemo $AB \cong CD$. Prvi pojam koji ćemo uvesti, a odnosi se na podudarnost duži, biće pojam središta duži.

Središtem duži AB nazivamo tačku O te duži takvu da je $AO \cong BO$.

Teorema 11.1: *Svaka duž ima jedinstveno središte.*

Dokaz: Ako je AB proizvoljna duž, a C proizvoljna tačka van prave AB, u poluravni koja je komplementna (ABC), na osnovu aksiome III6, postoji jedinstvena tačka D takva da je $(A, C) \cong (B, D)$ i $(B, C) \cong (A, D)$, pa iz teoreme 10.13 sledi da postoji jedinstvena izometrija $\mathcal{I}$ ravni ABC, u kojoj se tačke A, B, C preslikavaju, redom, na B, A, D. U toj izometriji tačka D se preslikava u neku tačku poluravni (ABC) ili u neku tačku poluravni (BAD). Iz aksiome III6 sledi da se u prvom slučaju preslikava u tačku C, a u drugom na sebe. Ako bi se preslikavala na sebe, onda bi se, na osnovu teoreme 10.10, svaka tačka poluravni (BAD) preslikavala u tačku te poluravni, a svaka tačka poluravni (ABC) u tačku iste poluravni, što protivreči pretpostavci da su C i D sa raznih strana prave AB. Dakle izometrijom $\mathcal{I}$ se prave AB i CD preslikavaju, redom, na prave BA i DC pa, kako su tačke C i D sa raznih strana prave AB, duž CD seče pravu AB u nekoj tački O. Odatle



Slika 11a

sledi da je tačka O invarijantna u izometriji $\mathcal{I}$. Dakle, $AO \cong BO$ i $O \in AB$, pa je O središte duži AB.

Ako bi i neka tačka $O' \neq O$ bila središte duži AB, tada bi u izometriji $\mathcal{I}$ slika te tačke bila ista ta tačka jer $O' \in AB$ i $AO' \cong BO'$. Međutim, to nije moguće jer bi u toj izometriji dve razne tačke prave AB bile invatijantne, pa bi svaka tačka te prave bila invarijantna u izometriji $\mathcal{I}$, a pretpostavili smo da je $\mathcal{I}(A) = B \neq A$. $\square$

Zahvaljujući pojmu podudarnosti duži moguće je duži porediti, sabirati i oduzimati.

Ako su AB i CD dve duži i ako je E tačka duži CD različita od njenih temena takva da je $AB \cong CE$, reći ćemo da je duž AB *manja* od duži CD i pisaćemo $AB < CD$, ili da je duž CD *veća* od duži AB i pisaćemo $CD > AB$. Ako dopustimo da tačka E koja pripada duži CD bude istovetna sa nekim od temena C ili D, reći ćemo da je duž AB *manja ili jednaka* duži CD i pisaćemo $AB \leq CD$, ili da je duž CD *veća ili jednaka* duži AB i pisaćemo $CD \geq AB$. Sledeće tvrđenje sledi iz prethodne definicije i posledica aksioma poretka.

Teorema 11.2: *Relacija „manja ili jednaka" definisana na skupu duži, je relacija potpunog poretka, drugim rečima ona je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, a za proizvoljne duži AB i CD važi tačno jedana od relacija $AB \cong CD$, $AB < CD$, $AB > CD$.* $\square$

Duž AB zvaćemo *zbirom duži* $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ i pisaćemo

$$AB = A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_nB_n,$$

ako postoje tačke $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ koje pripadaju duži AB takve da je

$$\mathcal{B}(A, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, B)$$

i

$$AX_1 \cong A_1B_1,\ X_1X_2 \cong A_2B_2, \ldots, X_{n-1}B \cong A_nB_n.$$

U posebnom slučaju kada je $n=2$, reći ćemo da je duž AB jednaka zbiru dveju duži A_1B_1 i A_2B_2, a ako je duž AB veća od duži A_1B_1, da je A_2B_2 jednaka *razlici duži* AB i A_1B_1, i pisaćemo $A_2B_2 = AB - A_1B_1$. Ako dopustimo da su tačke A i B istovetne, duž AB možemo nazvati *nula duži*. Razlika dveju podudarnih duži je nula duž. Ako su duži AB i CD podudarne, pisaćemo i $AB - CD = 0$.

Zbir ivica nekog poligona zvaćemo njegovim *obimom*.

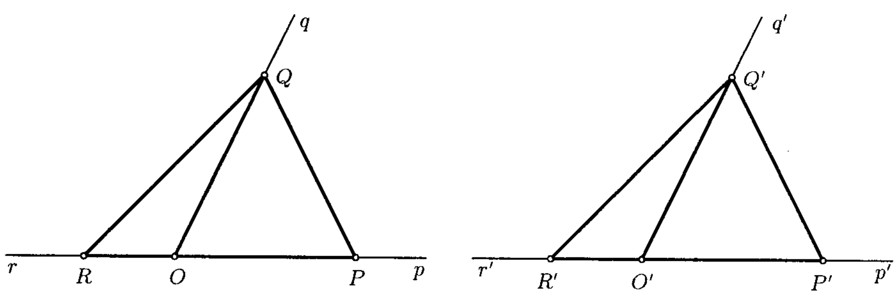
Podudarnost uglova. Ustanovili smo da se izometrijom ugaona linija preslikava na ugaonu liniju, a ugao na ugao. Štaviše, ako se ugaona linija pq preslikava na $p'q'$, konveksan ugao pq će se preslikati na konveksan ugao $p'q'$, a njemu komplementan ugao na ugao komplementan konveksnom uglu $p'q'$. Ako su konveksni uglovi pq i $p'q'$ međusobno podudarni, pisaćemo $\measuredangle pq \cong \measuredangle p'q'$.

Teorema 11.3: *Dva konveksna ili dva nekonveksna ugla pq i $p'q'$ sa temenima O i O' su podudarna ako i samo ako na njihovim kracima p, q, p' i q' postoje, redom, tačke P, Q, P' i Q' takve da je $OP \cong O'P'$, $OQ \cong O'Q'$ i $PQ \cong P'Q'$.*

Dokaz: Ako su uglovi pq i $p'q'$ opruženi, teorema se dokazuje neposredno. Stoga pretpostavimo da pq i $p'q'$ nisu opruženi uglovi. Ako postoji izometrija kojom se ugao pq preslikava na ugao $p'q'$, proizvoljne tačke $P \in p$ i $Q \in q$ se preslikavaju na tačke $P' \in p'$ i $Q' \in q'$ takve da su (O, P, Q) i (O', P', Q') dve podudarne trojke nekolinearnih tačaka. Odatle sledi da je $OP \cong O'P'$, $OQ \cong O'Q'$ i $PQ \cong P'Q'$.

Obratno, ako na kracima p, q, p' i q' postoje, redom, tačke P, Q, P' i Q' takve da je $OP \cong O'P'$, $OQ \cong O'Q'$ i $PQ \cong P'Q'$, tada su (O, P, Q) i (O', P', Q') dve podudarne trojke nekolinearnih tačaka pa, na osnovu teoreme 10.13, postoji jedinstvena izometrija ravni kojom se tačke O, P, Q preslikavaju, redom, na tačke O', P', Q'. Stoga su uglovi pq i $p'q'$ međusobno podudarni. □

Teorema 11.4: *Naporedni uglovi dvaju podudarnih, neopruženih, konveksnih uglova, takođe su međusobno podudarni.*



Slika 11b

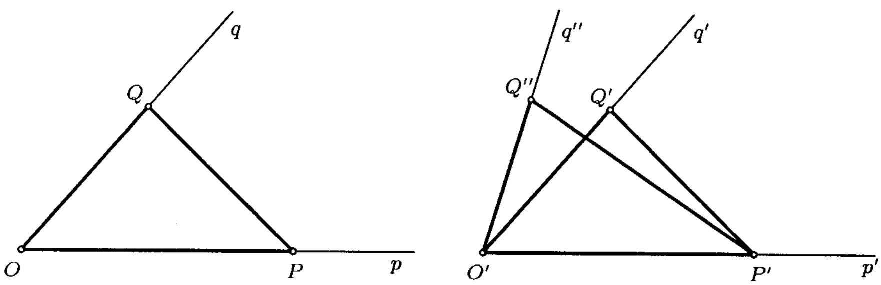
Dokaz: Neka su pq i $p'q'$ dva neopružena, konveksna, među sobom podudarna ugla, a qr i $q'r'$ njihovi naporedni uglovi. Ako su O i O' temena tih uglova, a

P, Q, P' i Q' tačke polupravih p, q, p' i q' takve da je $OP \cong O'P'$ i $OQ \cong O'Q'$, na osnovu prethodne teoreme biće $PQ \cong P'Q'$. Ako su R i R' tačke polupravih r i r' takve da je $OR \cong O'R'$, na osnovu aksiome III7 će biti $QR \cong Q'R'$, pa su i uglovi qr i $q'r'$ međusobno podudarni. □

Teorema 11.5: *Unakrsni uglovi su međusobno podudarni.*

Dokaz: Budući da unakrsni uglovi imaju iste naporedne uglove, iz prethodne teoreme sledi da su oni međusobno podudarni. □

Teorema 11.6: *Ako je pq zadati ugao i p' proizvoljna poluprava, tada u svakoj zatvorenoj poluravni čija je granica prava koja sadrži p' postoji jedinstvena poluprava q' takva da su uglovi pq i $p'q'$ međusobno podudarni.*



Slika 11c

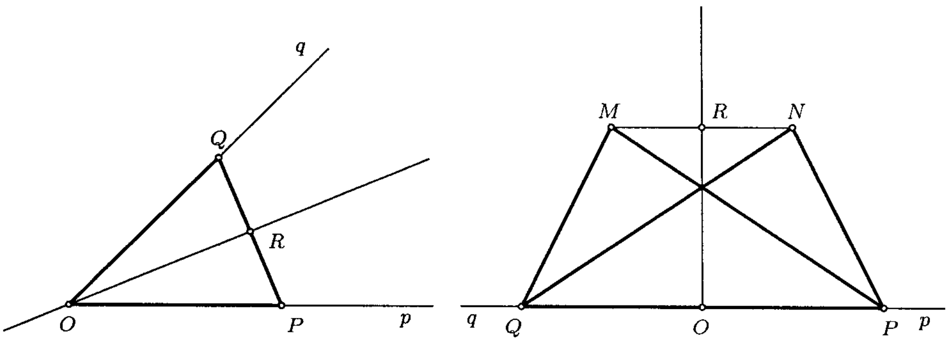
Dokaz: Ako je ugao pq opružen dokaz se izvodi neposredno. Ako nije, pretpostavimo da su P i Q tačke polupravih p i q, O teme ugla pq, O' teme poluprave p', a P' tačka poluprave p' takva da je $OP \cong O'P'$. Tada u zadatoj poluravni čija je granica prava koja sadrži p' postoji jedinstvena tačka Q' takva da je $(O, P, Q) \cong (O', P', Q')$. Ako sa q' označimo polupravu $O'Q'$, uglovi pq i $p'q'$ će biti podudarni na osnovu teoreme 11.3.

Ako bi osim q' u zadatoj poluravni postojala i poluprava q'' koja zadovoljava uslove teoreme, tada bi na toj polupravoj postojala jedinstvena tačka Q'' takva da je $OQ \cong O'Q''$, pa bi, na osnovu teoreme 11.3, trojke (O, P, Q) i (O', P', Q'') bile podudarne što je, prema aksiomi III6, nemoguće. □

Relacija podudarnosti uglova omogućava da se u geometriju uvede niz novih pojmova, najpre pojam bisektrise ugla. *Bisektrisom* ili *raspolovnicom ugla POQ* nazivamo polupravu OR koja razlaže taj ugao na dva međusobno podudarna ugla.

Teorema 11.7: *Svaki ugao ima jedinstvenu bisektrisu.*

Dokaz: Pretpostavimo da je O teme ugla pq i da su P i Q tačke polupravih p i q takve da je $OP \cong OQ$. Ako je ugao pq neopružen, (O, P, Q) i (O, Q, P) su dve podudarne trojke nekolinearnih tačaka, pa stoga, postoji jedinstvena izometrija koja preslikava tačke O, P, Q, redom, na tačke O, Q, P. Budući da se tačke P i Q u toj izometriji preslikavaju jedna na drugu, središte R duži PQ će biti invarijantna tačka u toj izometriji. Kako je i O invarijantna tačka te izometrije, svaka tačka prave OR će takođe biti invarijantna, pa svaka od dveju polupravih sa temenom O prave OR, razlaže jedan od uglova pq na dva podudarna ugla. Stoga zadati ugao ima jedinstvenu bisektrisu.



Slika 11d

Ako je ugao pq opružen, obeležimo sa M proizvoljnu tačku toga ugla van p i q, a sa N tačku toga ugla takvu da je $PM \cong QN$ i $QM \cong PN$. Tada su (P, Q, M) i (Q, P, N) dve podudarne trojke nekolinearnih tačaka, pa stoga, postoji jedinstvena izometrija koja preslikava tačke P, Q, M, redom, u tačke Q, P, N. Središta O i R duži PQ i MN su invarijantne tačke te izometrije, pa je svaka tačka te prave invarijantna. Stoga je poluprava OR jedinstvena bisektrisa zadatog ugla. □

Zahvaljujući pojmu podudarnosti uglova moguće je uglove porediti, sabirati i oduzimati na način koji je sličan poređenju sabiranju i oduzimanju duži.

Ako su ab i cd dva ugla i ako je e poluprava koja pripada uglu cd i ima isto teme kao taj ugao, takva da je $\angle ab \cong \angle ce$, reći ćemo da je ugao ab *manji* od ugla cd i pisaćemo $\angle ab < \angle cd$, ili da je ugao cd *veći* od ugla ab i pisaćemo $\angle cd > \angle ab$. Ako dopustimo da poluprava e koja pripada uglu cd bude istovetna sa nekom od polupravih c ili d, reći ćemo da je ugao ab *manji ili jednak* uglu cd i pisaćemo $\angle ab \leq \angle cd$, ili da je ugao cd *veći ili jednak* uglu ab i pisaćemo $\angle cd \geq \angle ab$. Sledeće tvrđenje sledi iz prethodne definicije i posledica aksioma poretka.

Teorema 11.8: *Relacija „manji ili jednak" definisana na skupu uglova, je relacija potpunog poretka, drugim rečima ona je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, a za proizvoljne uglove ab i cd važi tačno jedana od relacija $\angle ab \cong \angle cd$, $\angle ab < \angle cd$, $\angle ab > \angle cd$.* □

Ugao ab zvaćemo *zbirom uglova* $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ i pisaćemo

$$\angle ab = \angle a_1b_1 + \angle a_2b_2 + \cdots + \angle a_nb_n,$$

ako postoje poluprave $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ koje razlažu ugao ab na uglove $ax_1, x_1x_2, \ldots, x_{n-2}x_{n-1}, x_{n-1}b$, takve da je

$$ax_1 \cong a_1b_1,\ x_1x_2 \cong a_2b_2, \ldots, x_{n-2}x_{n-1} \cong a_{n-1}b_{n-1},\ x_{n-1}b \cong a_nb_n.$$

U posebnom slučaju kada je $n=2$ reći ćemo da je ugao ab jednak zbiru dvaju uglova a_1b_1 i a_2b_2, a ako je ugao ab veći od ugla a_1b_1, da je ugao a_2b_2 jednak *razlici uglova* ab i a_1b_1 i pisaćemo $a_2b_2 = ab - a_1b_1$. Ako dopustimo da su poluprave a i b istovetne, ugao ab koji je komplementan punom uglu ab možemo nazvati *nula uglom*. Razlika dvaju podudarnih uglova je nula ugao. Ako su uglovi ab i cd podudarni, pisaćemo i $\angle ab - \angle cd = 0$.

Prav ugao. Za neki ugao ćemo reći da je *prav*, *oštar* ili *tup* u zavisnosti od toga da li je jednak, manji ili veći od svog naporednog ugla. Iz definicije neposredno sledi da su pravi, oštri i tupi uglovi definisani na skupu konveksnih uglova. Egzistencija pravog ugla sledi iz teoreme 11.7.

Teorema 11.9: *Ugao podudaran pravom uglu je prav.*

Dokaz: Ako je $p'q'$ ugao podudaran pravom uglu pq, a $q'r'$ i qr uglovi koji su, redom, njima naporedni, biće $\angle p'q' \cong \angle pq$ po pretpostavci, $\angle pq \cong \angle qr$ jer je pq prav ugao, a $\angle qr \cong \angle q'r'$ jer su njima naporedni uglovi međusobno podudarni. Dakle, $\angle p'q' \cong \angle q'r'$, pa je i $p'q'$ prav ugao. □

Teorema 11.10: *Pravi uglovi su međusobno podudarni.*

Dokaz: Ako su pq i $p'q'$ pravi uglovi, a qr ugao naporedan uglu pq i ako je $pq > p'q'$, tada u uglu pq postoji poluprava s sa temenom koje je istovetno sa temenom ugla pq, takva da je $\angle ps \cong \angle p'q'$. Kako je ugao $p'q'$ prav, na osnovu prethodne teoreme biće prav i ugao ps, pa je $\angle ps \cong \angle sr$ odakle sledi da opruženi ugao pr ima dve bisektrise što je prema teoremi 11.7 nemoguće. □

Trougao kome je jedan ugao prav zvaćemo *pravouglim trouglom*. Ivicu naspram pravog ugla takvog trougla zvaćemo *hipotenuzom*, a ostale dve ivice *katetama* pravouglog trougla.

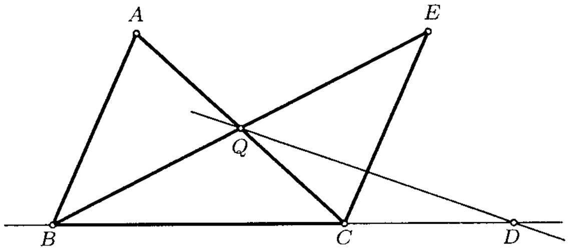
Podudarnost trouglova. Već smo ustanovili da je lik podudaran trouglu, trougao, a trougaonoj površi, trougaona površ. Štaviše, trougao ABC je podudaran trouglu $A'B'C'$ ako i samo ako su trojke (A, B, C) i (A', B', C') međusobno podudarne. Ako su trouglovi ABC i $A'B'C'$ međusobno podudarni, pisaćemo

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Zahvaljujući teoremama koje se odnose na podudarnost uglova moguće je dokazati nekoliko važnih stavova iz geometrije trouglova.

Teorema 11.11: *Spoljašnji ugao trougla je veći od bilo kojeg unutrašnjeg, nesusednog ugla.*

Dokaz: Ako je ABC zadati trougao i D tačka takva da je $\mathcal{B}(B, C, D)$, dokažimo da je $\measuredangle CAB < \measuredangle ACD$. U tom cilju pretpostavimo da je Q središte duži AC, a da je E tačka poluprave BQ takva da je $\mathcal{B}(B, Q, E)$ i $QB \cong QE$. Budući da su AQB i CQE unakrsni uglovi, oni će biti i podudarni, a kako je $QA \cong QC$ i $QB \cong QE$, na osnovu teoreme 11.3 trojke (A, Q, B) i (C, Q, E) će biti međusobno podudarne, pa će, na osnovu iste teoreme, i uglovi QAB i QCE biti međusobno podudarni. Prava QD seče ivicu BE trougla CBE, a ne seče ivicu BC jer je $\mathcal{B}(B, C, D)$ pa, na osnovu Pašove aksiome, seče duž CE. Štaviše, tačke D i Q su sa raznih strana prave CE jer su $B, D \div CE$ zbog $\mathcal{B}(B, C, D)$, a $B, Q \doteq CE$ zbog $\mathcal{B}(B, Q, E)$.



Slika 11e

Dakle, poluprava CE seče duž QD, a kako su Q i D na kracima spoljašnjeg ugla C trougla ABC, poluprava CE, na osnovu teoreme 5.6, pripada tome uglu. Stoga je $\measuredangle CAB \cong \measuredangle ACE < \measuredangle ACD$. □

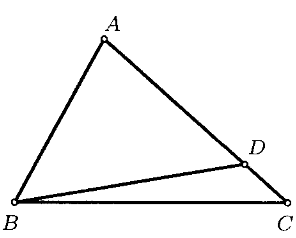
Iz prethodne teoreme neposredno sledi da najviše jedan ugao trougla može da bude prav ili tup.

Teorema 11.12: *Naspram jednakih ivica nekog trougla su jednaki uglovi i obratno, naspram jednakih uglova su jednake ivice.*

Dokaz: Ako je ABC proizvoljan trougao, trojke (A, B, C) i (A, C, B) će, na osnovu teoreme 11.3, biti međusobno podudarne ako i samo ako su uglovi ABC i ACB međusobno podudarni. □

Trougao kome su dve ivice podudarne zvaćemo *jednakokrakim.* Te dve ivice zvaćemo *kracima*, a treću *osnovicom* jednakokrakog trougla.

Teorema 11.13: *Jedna ivica trougla je veća od druge ako i samo ako je naspram nje veći ugao.*



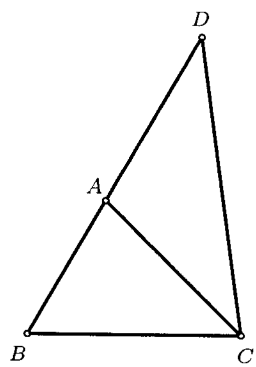
Slika 11f

Dokaz: Ako je ivica AC trougla ABC veća od ivice AB, tada na duži AC postoji tačka D takva da je $AD \cong AB$. Budući da je $\mathcal{B}(A,D,C)$, poluprava BD pripada uglu B trougla ABC pa je $\measuredangle ABC > \measuredangle ABD$, a kako je na osnovu prethodne teoreme $\measuredangle ABD \cong \measuredangle ADB$, i $\measuredangle ADB > \measuredangle ACB$, na osnovu teoreme 11.11, biće $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$.

Obratno, ako je $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$, ne može biti $AB \cong AC$ na osnovu prethodne teoreme, ni $AB > AC$ jer je tada, na osnovu dokazanog, $\measuredangle ABC < \measuredangle ACB$. □

Iz prethodne teoreme neposredno sledi da je hipotenuza pravouglog trougla veća od svake njegove katete. Prethodna teorema omogućava i da se dokaže sledeći stav koji se obično naziva *teoremom o nejednakosti trougla.*

Teorema 11.14: *Zbir dveju ivica trougla je veći od njegove treće ivice, a razlika dveju ivica trougla je manja od njegove treće ivice.*



Slika 11g

Dokaz: Neka je ABC proizvoljan trougao i D tačka poluprave BA takva da je $\mathcal{B}(B,A,D)$ i $AC \cong AD$. Tada je $\measuredangle BCD > \measuredangle BCA$ i $\measuredangle ACD \cong \measuredangle BDC$ odakle sledi da je $\measuredangle BCD > \measuredangle BDC$, pa je, na osnovu prethodne teoreme, $BD > BC$ i prema tome $AB + AC > BC$.

Da bismo dokazali drugi deo teoreme pretpostavimo da je $AC > AB$. Budući da je, na osnovu dokazanog dela teoreme, $AC < AB + BC$, biće $AC - AB < BC$. □

Dokažimo, sada, pet *stavova o podudarnosti trouglova:*

Teorema 11.15: *Dva trougla su podudarna ako i samo ako su:*

(i) dve ivice i njima zahvaćeni ugao jednog trougla podudarni odgovarajućim ivicama i uglu drugog trougla;

(ii) jedna ivica i na njoj nalegli uglovi jednog trougla podudarni odgovarajućoj ivici i uglovima drugog trougla;

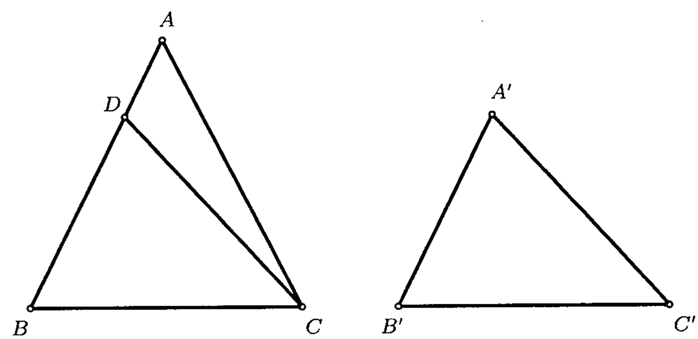
(iii) ivice jednog trougla podudarne odgovarajućim ivicama drugog trougla;

(iv) *dve ivice i ugao naspram jedne od njih jednog trougla podudarni odgovarajućim ivicama i uglu drugog trougla, dok su uglovi naspram drugih dveju međusobno podudarnih ivica oba oštra, oba prava ili oba tupa;*

(v) *jedna ivica, na njoj nalegli ugao i njoj naspramni ugao jednog trougla podudarni odgovarajućoj ivici i uglovima drugog trougla.*

Dokaz: Prvi stav o podudarnosti trouglova neposredno sledi iz teoreme 11.3.

Dokažimo drugi stav. U tom cilju pretpostavimo da su ABC i $A'B'C'$ dva trougla kojima je $BC \cong B'C'$, $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$ i $\measuredangle C \cong \measuredangle C'$. Ako pretpostavimo da ivice AB i $A'B'$ nisu podudarne već da je jedna od njih veća od druge, na primer $AB > A'B'$, tada na duži AB postoji tačka D takva da je $DB \cong A'B'$. Tada su, na osnovu prvog stava, trouglovi DBC i $A'B'C'$ međusobno podudarni, pa je $\measuredangle DCB \cong \measuredangle A'C'B'$, a kako je $\measuredangle A'C'B' \cong \measuredangle ACB$ bilo bi $\measuredangle DCB \cong \measuredangle ACB$ što je nemoguće na osnovu teoreme 11.6.



Slika 11h

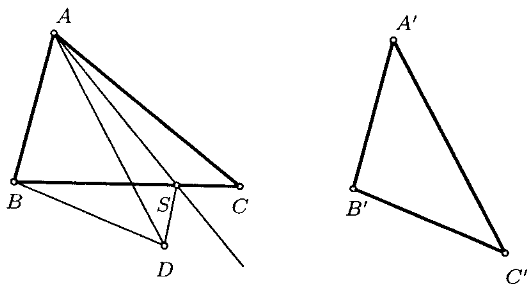
Treći stav o podudarnosti trouglova je neposredna posledica teoreme 10.13.

Da bismo dokazali četvrti stav o podudarnosti trouglova pretpostavimo da su ABC i $A'B'C'$ dva trougla kojima je $BC \cong B'C'$, $CA \cong C'A'$ i $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$, dok su uglovi kod temena A i A' oba oštra, oba prava ili oba tupa. Ako pretpostavimo da ivice AB i $A'B'$ nisu podudarne već da je jedna od njih veća od druge, na primer $AB > A'B'$, tada na duži AB postoji tačka D takva da je $DB \cong A'B'$. Tada je na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova $\triangle DBC \cong \triangle A'B'C'$, pa je $CD \cong C'A'$, a kako je $C'A' \cong CA$ biće $CD \cong CA$, a odavde, na osnovu teoreme 11.12, sledi da je $\measuredangle CAD \cong \measuredangle CDA$. Stoga su uglovi CDB i CDA oba oštra, oba prava ili oba tupa. Oni ne mogu biti ni oba oštra ni oba tupa jer su naporedni, a ne mogu biti ni oba prava jer bi tada u trouglu CDA dva unutrašnja ugla bila prava.

Da bismo dokazali peti stav o podudarnosti trougova pretpostavimo da su ABC i $A'B'C'$ dva trougla kojima je $BC \cong B'C'$, $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ i $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$. Ako pretpostavimo da ivice AB i $A'B'$ nisu podudarne već da je jedna od njih veća od druge, na primer $AB > A'B'$, onda na duži AB postoji tačka D takva da je $DB \cong A'B'$. Tada su, na osnovu prvog stava, trouglovi DBC i $A'B'C'$ međusobno podudarni, pa je $\measuredangle BDC \cong \measuredangle B'A'C'$, a kako je $\measuredangle B'A'C' \cong \measuredangle BAC$ bilo bi $\measuredangle BDC \cong \measuredangle BAC$, što je nemoguće na osnovu teoreme 11.11. □

Teorema 11.16: *Ako su ABC i $A'B'C'$ dva trougla kod kojih je $AB \cong A'B'$ i $AC \cong A'C'$, tada je $BC > B'C'$ ako i samo ako je $\measuredangle A > \measuredangle A'$.*

Dokaz: Ako je $\measuredangle A > \measuredangle A'$, u uglu A postoji poluprava d i na njoj tačka D takva da je $\measuredangle BAD \cong \measuredangle B'A'C'$ i $AD \cong A'C'$, pa je, na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$. Ako tačka D pripada ivici BC teorema se dokazuje neposredno. Ako je D van prave BC, bisektrisa ugla DAC seče duž BC u nekoj tački S. Tada je $\triangle ASC \cong \triangle ASD$, pa je $SC \cong SD$. Na osnovu stava 11.14 je $BS + SD > BD$, pa je $BS + SC > BD$ i, prema tome, $BC > BD \cong B'C'$.



Slika 11i

Obratno, ako je $BC > B'C'$, ne može biti $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ jer je tada, na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ i stoga, $BC \cong B'C'$. Ne može biti ni $\measuredangle A < \measuredangle A'$ jer je tada, na osnovu prethodnog, $BC < B'C'$. Dakle, $\measuredangle A > \measuredangle A'$. □

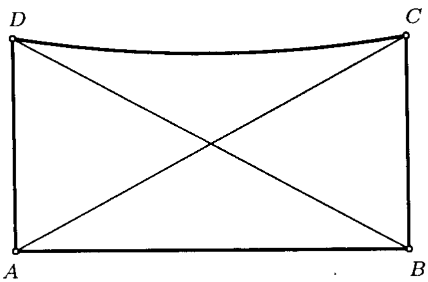
Podudarnost četvorouglova. Lik podudaran četvorouglu je, kako smo već ustanovili, četvorougao, a lik podudaran četvorougaonoj površi je četvorougaona površ. Među svim četvorouglovima izdvojićemo, najpre, tzv. Lambertove i Sakerijeve četvorouglove.

Četvorougao se naziva *Lambertovim* ako su mu tri ugla prava. Ivice AB i BC Lambertovog četvorougla $ABCD$ kome su uglovi A, B i C pravi, nazivaju se *osnovnim ivicama* tog četvorougla. Četvorougao $ABCD$ se naziva *Sakerijevim* ako su mu uglovi kod temena A i B pravi, a ivice BC i AD međusobno podudarne i sa iste strane prave AB. Ivica AB se naziva *osnovicom*, ivica CD *protivosnovicom*, a ivice BC i AD *bočnim ivicama* Sakerijevog četvorougla $ABCD$. Lako se dokazuje da je svaka četvorougaona površ čiji je rub Lambertov ili Sakerijev četvorougao, konveksan geometrijski lik.

Budući da se izometrijom prav ugao preslikava na prav ugao, Sakerijev četvorougao se preslikava na Sakerijev četvorougao, a Lambertov četvorougao na

Lambertov četvorougao. Iz istog razloga su Sakerijevi četvorouglovi kod kojih su osnovica i bočne ivice jednog od njih podudarne odgovarajućim ivicama drugog, međusobno podudarni likovi. I Lambertovi četvorouglovi kod kojih su osnovne ivice jednog od njih podudarne odgovarajućim ivicama drugog, su međusobno podudarni likovi.

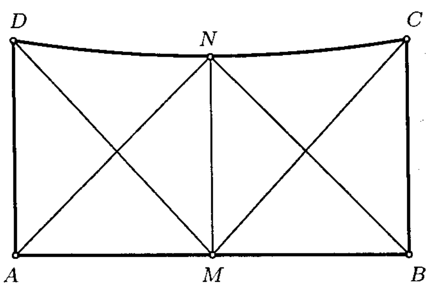
Teorema 11.17: *Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla međusobno su podudarni.*



Slika 11j

Dokaz: Neka je $ABCD$ Sakerijev četvorougao sa osnovicom AB. Tada su trouglovi DAB i CBA međusobno podudarni na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, pa je $DB \cong CA$. I trouglovi ACD i BDC će biti podudarni na osnovu trećeg stava, pa je $\measuredangle C \cong \measuredangle D$. □

Teorema 11.18: *Ako su M i N, redom, središte osnovice AB i središte protivosnovice CD Sakerijevog četvorougla $ABCD$, tada su $AMND$ i $BMNC$ Lambertovi četvorouglovi.*



Slika 11k

Dokaz: Budući da su trouglovi AND i BNC međusobno podudarni na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, biće $AN \cong BN$, pa su i trouglovi AMN i BMN podudarni na osnovu trećeg stava. Stoga su uglovi NMA i NMB podudarni i naporedni, pa su, stoga, i pravi. Na isti način, iz podudarnosti trouglova

DMA i CMB sledi da su i trouglovi DMN i CMN međusobno podudarni, pa su uglovi MND i MNC pravi. □

ZADACI:

1. Dokazati da je zbir ivica neke poligonske linije koja povezuje tačke A i B veći od duži AB.

2. Dokazati da je obim proizvoljnog prostog, ravnog poligona čijoj unutrašnjosti pripada neki konveksan poligon veći od obima tog konveksnog poligona.

3. Neka su B' i C' tačke u kojima bisektrise uglova B i C trougla ABC seku naspramne ivice. Dokazati da su duži AB i AC međusobno podudarne ako i samo ako su međusobno podudarne duži BB' i CC' (Štajner-Lemusova teorema).

12. Upravnost pravih i ravni

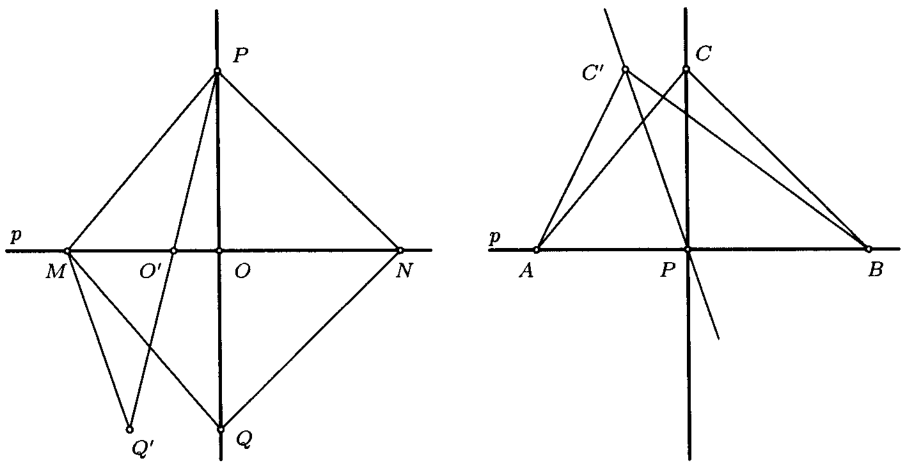
Upravnost pravih. Pojam pravog ugla omogućava da se u geometriju uvede jedna izuzetno značajna relacija definisana na skupu parova pravih — relacija upravnosti dveju pravih.

Ako dve prave p i q sadrže krake pravog ugla, reći ćemo da je prava p *upravna, normalna* ili *ortogonalna* na pravoj q i pisaćemo $p \perp q$. Iz definicije neposredno sledi da iz relacije $p \perp q$ sledi relacija $q \perp p$, pa se, stoga, može reći i da su prave p i q *upravne među sobom*. Ako se dve međusobno upravne prave p i q seku u tački O, reći ćemo da su te dve prave *upravne u tački* O ili da je *prava* p *upravna na pravoj* q *u tački* O. Ako je uz to, P proizvoljna tačka prave p, reći ćemo da je O *podnožje upravne* iz tačke P na pravoj q. Tačku O prave q zvaćemo i *podnožjem normale* p. Skup podnožja normala svih tačaka nekog lika Φ, na pravoj q, zvaćemo *upravnom* ili *normalnom projekcijom* lika Φ na pravoj q.

Ako je prava p upravna na pravoj q u tački O, tada ćemo za polupravu te prave, sa temenom O ili bilo koju duž te prave, sa temenom O reći da je *upravna* na pravoj q ili nekoj polupravoj ili duži te prave. Ako je E podnožje upravne iz temena A trougla ABC na pravoj BC, duž AE ćemo zvati *visinom* tog *trougla.*

Teorema 12.1: *Ako tačka P i prava p pripadaju ravni π, tada u ravni π postoji jedinstvena prava koja sadrži tačku P i upravna je na pravoj p.*

Dokaz: Ako tačka P ne pripada pravoj p, obeležimo sa M i N dve razne tačke prave p, a sa Q tačku koja pripada poluravni komplementnoj (pP), takvu da je $(M, P, N) \cong (M, Q, N)$. Kako su P i Q sa raznih strana p, prava PQ seče p u nekoj tački O, pa je $(O,P) \cong (O,Q)$ na osnovu aksiome III7. Budući da je bar jedna od tačaka M i N različita od O, možemo pretpostaviti da su M, O i P tri nekolinearne tačke. Tada su (M,O,P) i (M,O,Q) dve podudarne trojke tačaka, pa su naporedni uglovi MOP i MOQ podudarni, i stoga, pravi. Dakle, $PQ \perp p$.



Slika 12a

Da bismo dokazali da je PQ jedina prava koja zadovoljava navedene uslove pretpostavimo da osim nje postoji još neka prava koja sadrži P i upravna je na p. Ako je O' presek te prave i p, a Q' tačka te prave takva da je $\mathcal{B}(P,O',Q')$ i $PO' \cong Q'O'$, tada je, na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, $\triangle MO'P \cong \triangle MO'Q'$ i $\triangle NO'P \cong \triangle NO'Q'$, pa stoga, sa iste strane prave p postoje dve tačke Q i Q' takve da je $(M,P,N) \cong (M,Q,N)$ i $(M,P,N) \cong (M,Q',N)$ što protivreči aksiomi III6.

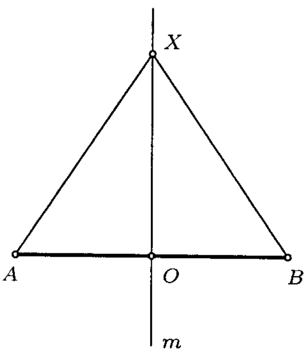
Ako tačka P pripada pravoj p, a A i B su tačke te prave sa raznih strana tačke P, tada postoji jedinstvena bisektrisa PC opruženog ugla APB koja taj ugao razlaže na dva podudarna, naporedna ugla. Stoga je prava PC upravna na p.

Ako bi pored prave PC postojala još jedna prava koja sadrži P i upravna je na p, tada bi na toj pravoj, sa one strane prave p sa koje je i tačka C postojala jedinstvena tačka C' takva da je $PC' \cong PC$. Tada bi trouglovi APC i BPC bili podudarni, redom, trouglovima APC' i BPC', pa bi i trojke (A,B,C) i (A,B,C') bile podudarne, što protivreči aksiomi III6. □

Pravu m koja sadrži središte duži AB i upravna je na pravoj AB nazivamo *medijatrisom* te duži. Budući da duž ima jedinstveno središte i da u zadatoj ravni postoji jedinstvena prava koja sadrži datu tačku i upravna je datoj pravoj, u toj ravni postoji jedinstvena medijatrisa zadate duži.

Teorema 12.2: *Neka je zadata ravan π i u njoj duž AB. Tačka $X \in \pi$ pripada medijatrisi duži AB ako i samo ako je $XA \cong XB$.*

Dokaz: Neka je O središte duži AB, a X proizvoljna tačka ravni π takva da je $XA \cong XB$. Tada je $(A,O,X) \cong (B,O,X)$, pa su naporedni uglovi AOX i BOX podudarni. Zato je $OX \perp AB$, pa tačka X pripada medijatrisi duži AB.

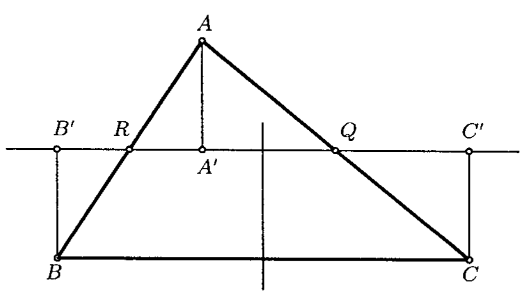


Slika 12b

Obratno, ako tačka X pripada medijatrisi m duži AB i ako je $X \neq O$, tada su uglovi AOX i BOX podudarni pa su, na osnovu prvog stava, podudarni i trouglovi AOX i BOX. Dakle, tada je $XA \cong XB$. □

Iz teoreme 11.18 neposredno sledi da je prava koja sadrži središta osnovice i protivosnovice Sakerijevog četvorougla, medijatrisa i osnovice i protivosnovice tog četvorougla.

Teorema 12.3: *Medijatrisa jedne ivice trougla upravna je na pravoj koja sadrži središta drugih dveju ivica tog trougla.*



Slika 12c

Dokaz: Ako su Q i R središta ivica CA i AB trougla ABC i ako su A', B' i C', redom, podnožja upravnih iz tačaka A, B i C na pravoj QR, tada je

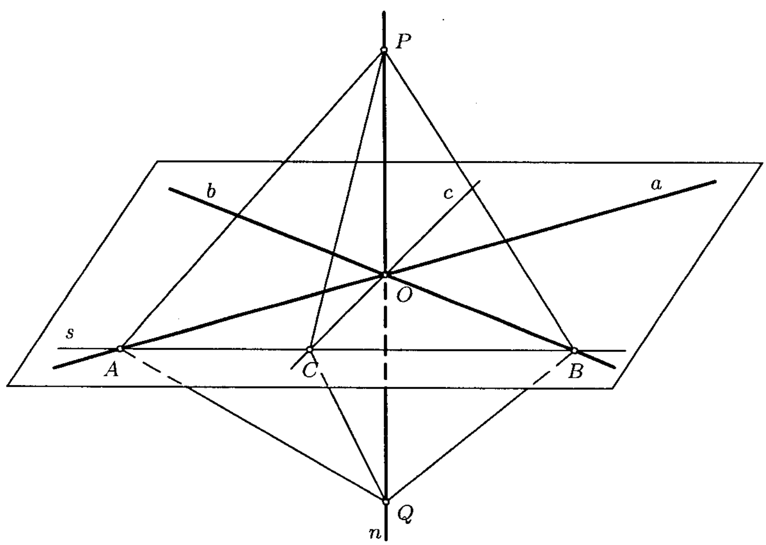
$\triangle AA'R \cong \triangle BB'R$ i $\triangle AA'Q \cong \triangle CC'Q$, pa je $BB' \cong AA' \cong CC'$. Dakle, četvorougao $BCC'B'$ je Sakerijev, pa je medijatrisa njegove osnovice $B'C'$ upravna na pravoj QR koja sadrži njegovu protivosnovicu (teorema 11.18). □

Upravnost pravih i ravni. Za pravu n ćemo reći da je *upravna*, *normalna* ili *ortogonalna na ravni* π i pisaćemo $n \perp \pi$, ako prava n prodire ravan π u nekoj tački O i upravna je na svakoj pravoj te ravni koja sadrži O. Obratno, za ravan π ćemo reći da je *upravna*, *normalna* ili *ortogonalna na pravoj* n i pisaćemo $\pi \perp n$, ako ravan π seče pravu n u tački O i ako je svaka prava ravni π, koja sadrži tačku O upravna na pravoj n. Tačku O ćemo zvati *podnožjem normale* n. Ako je N proizvoljna tačka te normale različita od O, tačku O ćemo zvati *podnožjem upravne iz tačke* N *na ravni* π. Skup podnožja normala svih tačka nekog lika Φ na ravni π, zvaćemo *upravnom* ili *normalnom projekcijom* lika Φ na ravni π.

Budući da je prava n upravna na ravni π ako i samo ako je ravan π upravna na pravoj n, reći ćemo i da su prava n i ravan π *upravne među sobom.*

Ako je prava n upravna na ravni π, tada ćemo reći da je prava n upravna i na svakoj pravoj ravni π. Time je dopušteno i da mimoilazne prave budu međusobno upravne.

Teorema 12.4: *Ako je prava n upravna na dvema pravama a i b ravni π, tada je $n \perp \pi$.*



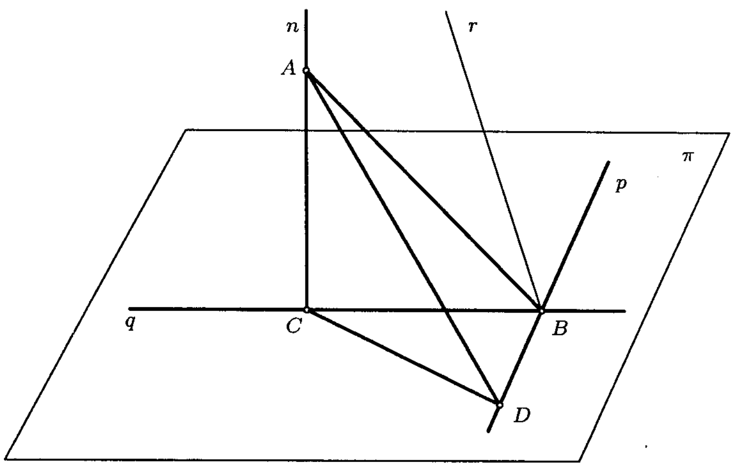
Slika 12d

Dokaz: Neka je c proizvoljna prava ravni π koja sadrži tačku O te ravni u kojoj se seku prave n, a i b, a neka je s proizvoljna prava koja seče prave a, b i c, redom, u tačkama A, B i C. Ako su P i Q tačke prave n sa raznih strana tačke O, takve da je $OP \cong OQ$, tada je $\triangle POA \cong \triangle QOA$ i $\triangle POB \cong \triangle QOB$, pa je $PA \cong QA$ i $PB \cong QB$. Stoga je $\triangle PAB \cong \triangle QAB$, pa je $\measuredangle PAB \cong \measuredangle QAB$. Dakle, biće i $\triangle PAC \cong \triangle QAC$, pa je i $PC \cong QC$. Najzad, $\triangle POC \cong \triangle QOC$, pa su uglovi POC i QOC naporedni i međusobno podudarni. Oni će, stoga, biti i pravi, pa je $n \perp c$, dakle i $n \perp \pi$. □

Teorema 12.5: *Sve prave koje sadrže neku tačku zadate prave i na toj pravoj su upravne, pripadaju jednoj ravni koja je takođe upravna na zadatoj pravoj.*

Dokaz: Neka su a, b i c tri prave koje su u tački O prave n upravne na toj pravoj i neka je π ravan koja sadrži prave a i b. Ako je γ ravan koja sadrži prave n i c i ako je presek te ravni i π neka prava c', i prava c' je, na osnovu prethodne teoreme, upravna na n. Tada bi u tački O postojale dve prave ravni γ koje su upravne na n što je prema teoremi 12.1, nemoguće. Dakle, prava c pripada π pa sve prave koje su u tački O upravne na n pripadaju jednoj ravni upravnoj na n. □

Teorema 12.6: *Postoji jedinstvena prava koja sadrži datu tačku i upravna je na zadatoj ravni.*



Slika 12e

Dokaz: Ako zadata tačka ne pripada zadatoj ravni π, obeležimo je sa A, sa p obeležimo proizvoljnu pravu ravni π, sa B podnožje upravne iz A na pravoj p, sa q pravu ravni π koja sadrži tačku B i upravna je na pravoj p, sa C podnožje upravne iz tačke A na pravoj q i sa n pravu AC.

Ako zadata tačka pripada zadatoj ravni π, obeležimo je sa C, sa p obeležimo proizvoljnu pravu ravni π koja ne sadrži C, sa B podnožje upravne iz C na pravoj p, sa α proizvoljnu ravan koja sadrži p i nije istovetna sa ravni π, sa r pravu ravni

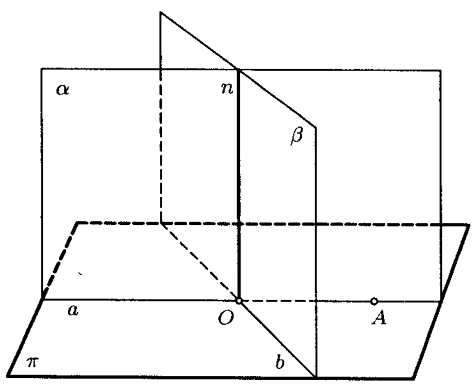
α koja je u tački B upravna na pravoj p, sa β ravan koja sadrži tačku C i pravu r, sa n pravu ravni β koja je u tački C upravna na pravoj CB i sa A proizvoljnu tačku prave n različitu od C. Tada, budući da je prava p upravna na pravama BC i r, ona će biti upravna na svakoj pravoj ravni ABC, dakle i na pravoj AB.

U svakom od prethodnih dvaju slučajeva je $n \perp \pi$. Zaista, ako je D tačka prave p takva da je $BD \cong AC$, biće $\triangle ACB \cong \triangle DBC$, pa je $AB \cong CD$. Tada je i $\triangle ABD \cong \triangle DCA$, pa je $\measuredangle ABD \cong \measuredangle DCA$. Kako je ugao ABD prav, i njemu podudaran ugao DCA biće prav, pa je $n \perp CD$, a kako je $n \perp CB$ biće $n \perp \pi$.

Ako i neka prava n' sadrži datu tačku i upravna je na ravni π, tada je presek ravni σ koja sadrži prave n i n' i ravni π neka prava s. Prave n i n' ne mogu biti dve razne prave jer ne postoje u ravni σ dve prave koje sadrže datu tačku i upravne su na pravoj s. □

Teorema 12.7: *Postoji jedinstvena ravan koja sadrži datu tačku i upravna je na zadatoj pravoj.*

Dokaz: Neka je α ravan koja sadrži datu tačku A i zadatu pravu n. Obeležimo sa a pravu ravni α koja sadrži A i upravna je na pravoj n, sa β bilo koju drugu ravan koja sadrži pravu n i sa b pravu koja pripada β, sadrži tačku $O = a \cap n$ i upravna je na pravoj n. Pri tome se prave a i b seku, pa postoji jedinstvena ravan π koja ih sadrži. Kako A pripada pravoj a pripadaće i ravni π pa, budući da prava n prodire ravan π u tački O i u toj tački je upravna na dvema pravama a i b te ravni, biće $n \perp \pi$, pa je i $\pi \perp n$.

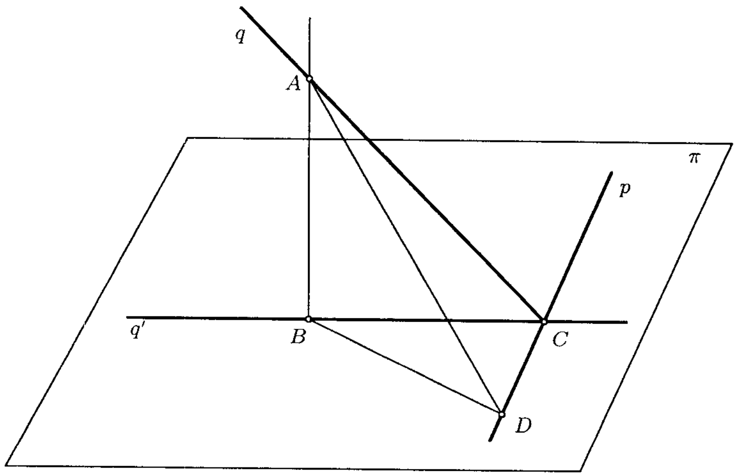


Slika 12f

Ako bi uz ravan π postojala još neka ravan π' koja sadrži A i upravna je na pravoj n, tada bi dve razne ravni π i π' imale zajedničku tačku A i svaka od njih bi sekla ravan α, prva duž prave a, a druga duž neke prave a'. Tada bi postojale dve prave, a i a', koje sadrže tačku A i upravne su na pravoj n, što protivreči teoremi 12.1. □

Naredni stav se naziva *teoremom o trima normalama*.

Teorema 12.8: *Prava q koja nije upravna na ravni π upravna je na pravoj p te ravni ako i samo ako je seče, a prava q' koja sadrži njenu upravnu projekciju na ravni π, upravna je na pravoj p.*

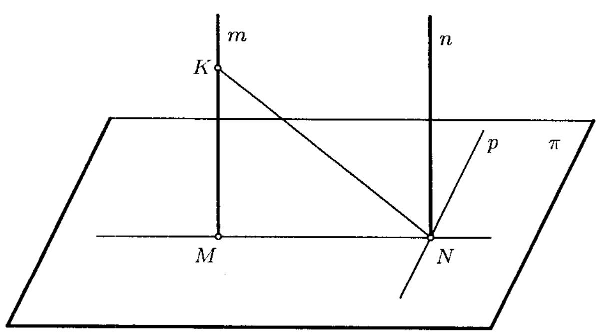


Slika 12g

Dokaz: Neka je B podnožje upravne iz proizvoljne tačke A prave q, na ravni π, neka je C presek pravih q i q', a D tačka prave p takva da je $AB \cong CD$. Ako je $q' \perp p$, trouglovi ABC i DCB su podudarni, pa je tada $AC \cong BD$. Tada je i $\triangle ABD \cong \triangle DCA$, pa je $\measuredangle ABD \cong \measuredangle ACD$. No, ugao ABD je prav, pa je i njemu podudaran ugao ACD takođe prav. Stoga je $q \perp p$.

Obratno, ako je $q \perp p$, trouglovi ABD i DCA su podudarni, pa su i duži AC i BD podudarne. Tada je i $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, pa je $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DCB$. No, ugao ABC je prav, pa je i njemu podudaran ugao BCD takođe prav. Stoga je $q' \perp p$. □

Teorema 12.9: *Dve prave upravne na istoj ravni su koplanarne.*



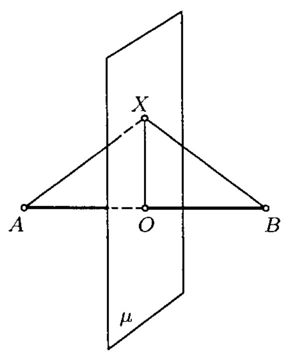
Slika 12h

Dokaz: Neka su m i n dve razne prave upravne na ravni π u tačkama M i N. Obeležimo sa K proizvoljnu tačku prave m različitu od M i sa p pravu koja pripada ravni π, a upravna je na pravoj MN u tački N. Prema teoremi o trima normalama biće $KN \perp p$, pa su n, KN i MN tri prave koje su u tački N upravne na pravoj p. One će, na osnovu teoreme 12.5, pripadati jednoj ravni. Prava m sa tom ravni ima dve tačke zajedničke, K i M, pa stoga, prave m i n pripadaju jednoj ravni. □

Ravan μ koja sadrži središte duži AB i upravna je na pravoj AB nazivamo *medijalnom ravni* te duži. Budući da duž ima jedinstveno središte i da postoji jedinstvena ravan koja sadrži datu tačku i upravna je datoj pravoj, postoji jedinstvena medijalna ravan zadate duži.

Teorema 12.10: *Tačka X pripada medijalnoj ravni μ duži AB ako i samo ako je $XA \cong XB$.*

Dokaz: Neka je O središte duži AB i neka je X proizvoljna tačka koja zadovoljava uslov $XA \cong XB$. Tada je $(A, O, X) \cong (B, O, X)$, pa su naporedni uglovi AOX i BOX međusobno podudarni. Zato je $OX \perp AB$, pa tačka X, na osnovu teoreme 12.5, pripada medijalnoj ravni μ duži AB.

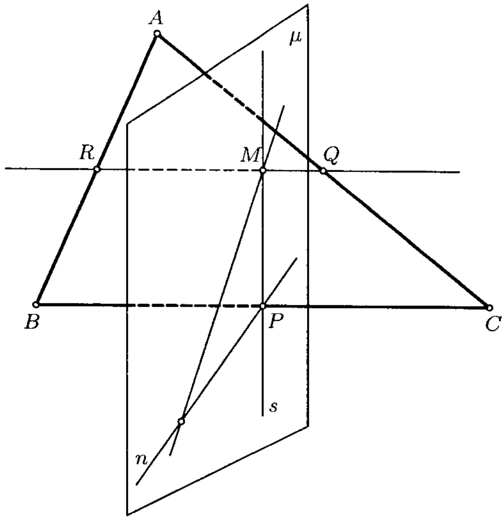


Slika 12i

Obratno, ako tačka X pripada medijalnoj ravni μ duži AB i $X \neq O$, tada su uglovi AOX i BOX podudarni, pa su, na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, podudarni i trouglovi AOX i BOX. Dakle, tada je $XA \cong XB$. □

Teorema 12.11: *Medijalna ravan jedne ivice trougla upravna je na pravoj koja sadrži središta drugih dveju ivica tog trougla.*

Dokaz: Na osnovu teoreme 12.3 medijatrisa s ivice BC trougla ABC je upravna u nekoj tački M na pravoj koja sadrži središta Q i R ivica CA i AB. Ako je n upravna na ravni ABC u središtu P duži BC, tada je, na osnovu teoreme o trima normalama, prava koja sadrži proizvoljnu tačku prave n i tačku M, upravna na pravoj QR.



Slika 12j

Dakle, prava QR je upravna na dvema pravama medijalne ravni μ duži BC, pa je, na osnovu teoreme 12.4, $\mu \perp QR$. □

ZADACI:

1. Dokazati da se duži koje spajaju središta naspramnih ivica nekog tetraedra, seku u jednoj tački.

2. Dokazati da bisektrise dvaju ivičnih uglova i ugla naporednog trećem ivičnom uglu nekog triedra, pripadaju jednoj ravni.

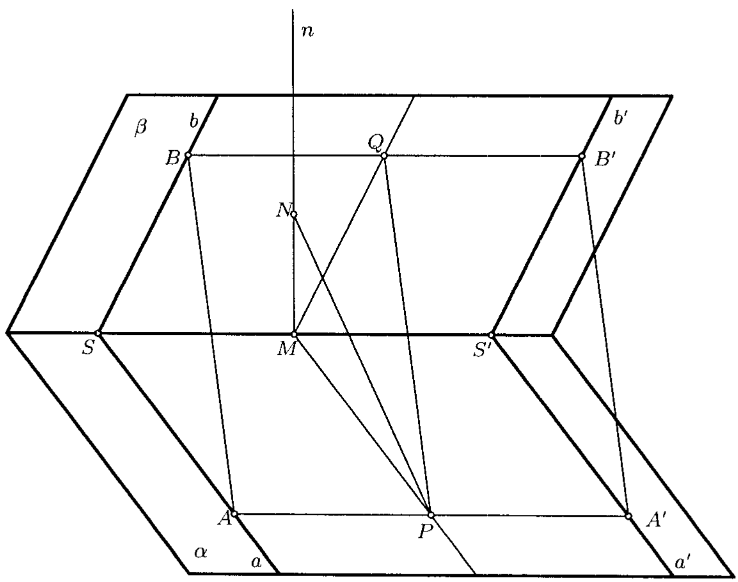
13. Podudarnost prostornih geometrijskih likova

Podudarnost diedara. Izometrijom se diedarska površ, kako smo već ustanovili, preslikava na diedarsku površ, a diedar na diedar. Štaviše, ako se diedarska površ $\alpha\beta$ preslikava na $\alpha'\beta'$, konveksan diedar $\alpha\beta$ će se preslikati na konveksan diedar $\alpha'\beta'$, a njemu komplementan diedar na diedar komplementan konveksnom diedru $\alpha'\beta'$.

Ako je neka ravan upravna na ivici zadatog diedra, onda je njen presek sa tim diedrom ugao koji se naziva *nagibnim uglom* ili *uglom diedra.* Dokažimo da ugao diedra „ne zavisi" od izbora ravni koja je upravna na ivici toga diedra.

Teorema 13.1: *Ako su dve ravni upravne na ivici zadatog diedra, onda su njihovi preseci sa tim diedrom međusobno podudarni uglovi.*

Dokaz: Neka su π i π' ravni koje su u tačkama S i S' upravne na ivici s diedra $\alpha\beta$ i neka su preseci tih dveju ravni sa poluravni α, redom, poluprave a i a', a sa poluravni β poluprave b i b'. Dokažimo da su nagibni uglovi ab i $a'b'$ međusobno podudarni.



Slika 13a

U tom cilju sa A, B, A', B' obeležimo tačke polupravih a, b, a', b' takve da je $SA \cong SB \cong S'A' \cong S'B'$, sa M središte duži SS', a sa P i Q središta duži AA' i BB'. Četvorouglovi $SS'A'A$ i $SS'B'B$ su međusobno podudarni Sakerijevi četvorouglovi, a $SMPA$, $S'MPA'$, $SMQB$ i $S'MQB'$ su, na osnovu teoreme 11.18, Lambertovi četvorouglovi. Kako su uglovi SMP i SMQ pravi, prava s je upravna i na pravoj MP i na pravoj MQ, pa je upravna i na ravni PMQ.

Ako je n prava te ravni upravna na MP, ona će, na osnovu teoreme 12.5, biti upravna i na pravoj s, pa je, na osnovu teoreme o trima normalama, prava koja sadrži neku tačku N prave n i tačku P upravna na pravoj AA'. Dakle, dve prave ravni PMQ su upravne na pravoj AA', pa je $AA' \perp PMQ$. Na isti način je $BB' \perp PMQ$, pa prave AA' i BB', na osnovu teoreme 12.9, pripadaju jednoj ravni. Iz podudarnosti Lambertovih četvorouglova $SMPA$ i $SMQB$ sledi da su duži PA i QB međusobno podudarne, pa je $PQBA$ Sakerijev četvorougao.

Slično, i $PQB'A'$ je Sakerijev četvorougao. Štaviše, ta dva Sakerijeva četvorougla su međusobno podudarna, pa su i duži AB i $A'B'$ međusobno podudarne. Stoga su i trouglovi SAB i $S'A'B'$ međusobno podudarni, pa su i nagibni uglovi ASB i $A'S'B'$ međusobno podudarni. □

Teorema 13.2: *Dva diedra su podudarna ako i samo ako su njihovi nagibni uglovi međusobno podudarni.*

Dokaz: Ako su diedri $\alpha\beta$ i $\alpha'\beta'$ međusobno podudarni, tada postoji izometrija $\mathcal{I}$ koja prvi od tih dvaju diedara preslikava na drugi. Tom izometrijom se ravan π koja je upravna na ivici s diedra $\alpha\beta$ preslikava na ravan π' koja je upravna na ivici s' diedra $\alpha'\beta'$. Zbog toga se i nagibni ugao ab diedra $\alpha\beta$ koji pripada ravni π preslikava na nagibni ugao $a'b'$ diedra $\alpha'\beta'$ koji pripada ravni π', pa su ti uglovi međusobno podudarni.

Obratno, ako se izometrijom $\mathcal{I}$ ugao ab preslikava na ugao $a'b'$, tada se i prava s koja je u temenu ugla ab upravna na ravni toga ugla tom izometrijom preslikava na pravu s' koja je u temenu ugla $a'b'$ upravna na ravni toga ugla. Tom izometrijom se i poluravni α i β sa istim rubom s koje, redom, sadrže poluprave a i b preslikavaju na poluravni α' i β', obe sa rubom s' koje, redom, sadrže poluprave a' i b'. Dakle izometrijom $\mathcal{I}$ diedar $\alpha\beta$ se preslikava na diedar $\alpha'\beta'$, pa su ti diedri međusobno podudarni. □

U potpunoj analogiji sa poređenjem, sabiranjem i oduzimanjem uglova mogu se uvesti pojmovi poređenja, sabiranja i oduzimanja diedara.

Ako su $\alpha\beta$ i $\gamma\delta$ dva diedra i ako je θ poluravan koja pripada diedru $\gamma\delta$, a njen rub je ivica tog diedra, takva da je diedar $\alpha\beta$ podudaran diedru $\gamma\theta$, reći ćemo da je diedar $\alpha\beta$ *manji* od diedra $\gamma\delta$ ili da je diedar $\gamma\delta$ *veći* od diedra $\alpha\beta$. Za neki diedar ćemo reći da je *prav*, *oštar* ili *tup* u zavisnosti od toga da li je jednak, manji ili veći od svog naporednog diedra. Iz prethodne definicije i teorema 5.11 i 13.2 neposredno sledi sledeće tvrđenje:

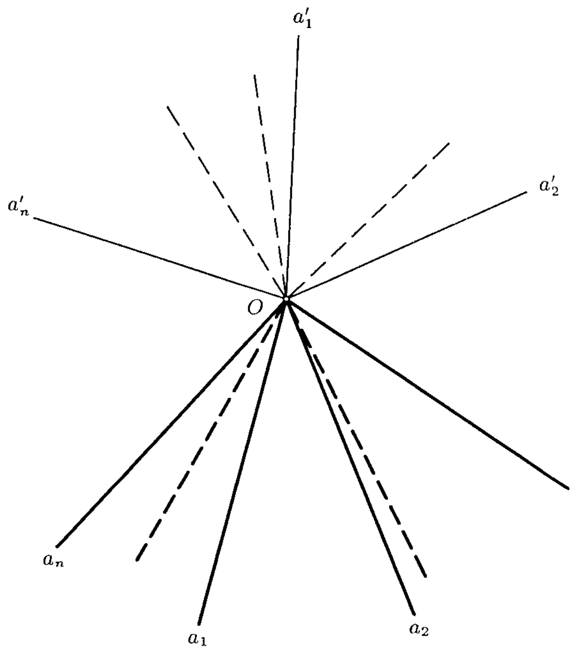
Teorema 13.3: *Diedar je prav, oštar ili tup u zavisnosti od toga da li je njegov nagibni ugao, redom, prav, oštar ili tup.* □

Diedar $\alpha\beta$ ćemo zvati *zbirom diedara* $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_n\beta_n$ ako postoje poluravni $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ koje razlažu diedar $\alpha\beta$ na diedre $\alpha\gamma_1, \gamma_1\gamma_2, \dots, \gamma_{n-2}\gamma_{n-1}$, $\gamma_{n-1}\beta$ takve da je

$$\alpha\gamma_1 \cong \alpha_1\beta_1,\ \gamma_1\gamma_2 \cong \alpha_2\beta_2, \dots, \gamma_{n-2}\gamma_{n-1} \cong \alpha_{n-1}\beta_{n-1},\ \gamma_{n-1}\beta \cong \alpha_n\beta_n.$$

U posebnom slučaju kada je $n=2$ reći ćemo da je diedar $\alpha\beta$ jednak zbiru dvaju diedara $\alpha_1\beta_1$ i $\alpha_2\beta_2$, a ako je diedar $\alpha\beta$ veći od diedra $\alpha_1\beta_1$, da je diedar $\alpha_2\beta_2$ jednak *razlici diedara* $\alpha\beta$ i $\alpha_1\beta_1$.

Podudarnost triedara. Već smo ustanovili da je lik podudaran rogljastoj površi, rogljasta površ, a roglju, rogalj. Posebno, triedarska površ je podudarna



Slika 13b

triedarskoj površi, a triedar, triedru. Ako su rogljevi $Oa_1a_2\ldots a_n$ i $Oa'_1a'_2\ldots a'_n$ međusobno podudarni, pisaćemo $Oa_1a_2\ldots a_n \cong Oa'_1a'_2\ldots a'_n$.

Polarnim rogljem zadatog konveksnog roglja $Oa_1a_2\ldots a_n$ nazivamo rogalj $Oa'_1a'_2\ldots a'_n$ koji sa rogljem $Oa_1a_2\ldots a_n$ ima jedinstvenu zajedničku tačku O, čije su ivice $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ upravne, redom, na pljosnima $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_na_1$ i pripadaju poluprostorima čiji su rubovi ravni $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_na_1$, kojima ne pripada rogalj $Oa_1a_2\ldots a_n$. Uglovi a'_1a_1 i a'_1a_2 su, dakle, pravi, a kako su poluprave a'_1 i a_i, $i \in \{3,4,5,\ldots,n\}$, sa raznih strana ravni a_1a_2 ugao a'_1a_i je tup. Na isti način, svaki od uglova a'_ja_i, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i \in \{1,2,\ldots,j-1,j+2,j+3\}$, je tup. Dakle, uglovi $a_1a'_n$ i $a_1a'_1$ su pravi, a svaki od uglova $a_1a'_i$, $i \in \{2,3,\ldots,n-1\}$ je tup, pa je poluprava a_1 sa one strane ravni $a'_na'_1$ sa koje nije rogalj $Oa'_1a'_2\ldots a'_n$. Na isti način, ivice $a_2, a_3, \ldots, a_n$ su upravne, redom, na pljosnima $a'_1a'_2, a'_2a'_3, \ldots, a'_{n-1}a'_n$ i pripadaju poluprostorima čiji su rubovi ravni $a'_1a'_2, a'_2a'_3, \ldots, a'_{n-1}a'_n$, kojima ne pripada rogalj $Oa'_1a'_2\ldots a'_n$. Time su dokazane sledeće tri teoreme:

Teorema 13.4: *Polarni rogalj datog konveksnog roglja je takođe konveksan.* □

Teorema 13.5: *Svaki konveksan rogalj je polaran rogalj svoga polarnog roglja.* □

Teorema 13.6: *Dva konveksna roglja su međusobno podudarna ako i samo ako su im polarni rogljevi međusobno podudarni.* □

Teorema 13.7: *Zbir ugla ma kojeg diedra konveksnog roglja $Oa_1a_2\ldots a_n$ i* *odgovarajućeg ivičnog ugla njemu polarnog roglja $Oa_1'a_2'\ldots a_n'$ je jednak zbiru dvaju pravih uglova.*

Dokaz: Kako je pun ugao jednak zbiru četiri prava ugla i kako su kraci ivičnog ugla α' roglja $Oa_1'a_2'\ldots a_n'$ upravni na pljosnima njemu odgovarajućeg diedra roglja $Oa_1a_2\ldots a_n$ pa, dakle, sa polupravama koje pripadaju poluravnima koje sadrže te dve pljosni zahvataju dva prava ugla, zbir ivičnog ugla α' i ugla α njemu odgovarajućeg diedra biće jednak zbiru dvaju pravih uglova. □

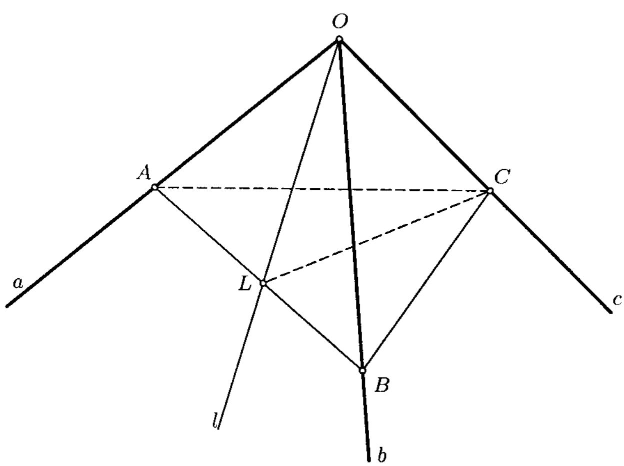
Dokažimo nekoliko važnijih stavova iz geometrije triedara.

Teorema 13.8: *Dva konveksna triedra $Oabc$ i $O'a'b'c'$ su podudarna ako i samo ako na njihovim ivicama a, b, c i a', b', c' postoje, redom, tačke A, B, C i A', B', C' takve da je $(O, A, B, C) \cong (O', A', B', C')$.*

Dokaz: Ako postoji izometrija kojom se triedar $Oabc$ preslikava na triedar $O'a'b'c'$, proizvoljne tačke $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$ se preslikavaju na tačke $A' \in a'$, $B' \in b'$ i $C' \in c'$, takve da su (O, A, B, C) i (O', A', B', C') dve podudarne četvorke nekoplanarnih tačaka.

Obratno, ako na ivicama a, b, c i a', b', c' postoje, redom, tačke A, B, C i A', B', C' takve da su (O, A, B, C) i (O', A', B', C') dve podudarne četvorke nekoplanarnih tačaka, tada, na osnovu teoreme 10.14, postoji jedinstvena izometrija prostora kojom se tačke O, A, B, C preslikavaju, redom, na tačke O', A', B', C'. Stoga su triedri $Oabc$ i $O'a'b'c'$ međusobno podudarni. □

Teorema 13.9: *Zbir dvaju ivičnih uglova konveksnog triedra je veći od trećeg ivičnog ugla tog triedra.*



Slika 13c

Dokaz: Da bismo dokazali da je zbir ivičnih uglova bc i ca konveksnog triedra $Oabc$ veći od ivičnog ugla ab, pretpostavimo da je ugao ab veći i od bc i od ca

jer, u suprotnom, dokaz sledi neposredno. Tada u uglu ab postoji poluprava l sa temenom O koja razlaže ugao ab na uglove la i lb, pri čemu je ugao la podudaran uglu ca.

Ako su A i B dve proizvoljne tačke polupravih a i b, poluprava l, na osnovu teoreme 5.6, seče duž AB u nekoj tački L. Ako je C tačka poluprave c takva da je $OC \cong OL$, biće $\triangle AOL \cong \triangle AOC$ na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, pa je $AL \cong AC$. Kako je $LB = AB - AL$ biće i $LB = AB - AC$, a kako je $AB - AC < BC$ biće i $LB < BC$. Odavde, na osnovu teoreme 11.16, sledi da je ugao lb manji od ugla bc, pa je ugao ab koji je jednak zbiru uglova la i lb, manji od zbira uglova bc i ca. □

Dokažimo šest stavova o podudarnosti triedara.

Teorema 13.10: *Dva triedra su međusobno podudarna ako i samo ako su:*

(i) dva ivična ugla i njima zahvaćeni diedar jednog triedra podudarni odgovarajućim uglovima i diedru drugog triedra,

(ii) jedan ivični ugao i na njemu nalegli diedri jednog triedra podudarni odgovarajućem uglu i diedrima drugog triedra,

(iii) odgovarajući ivični uglovi tih triedara međusobno podudarni,

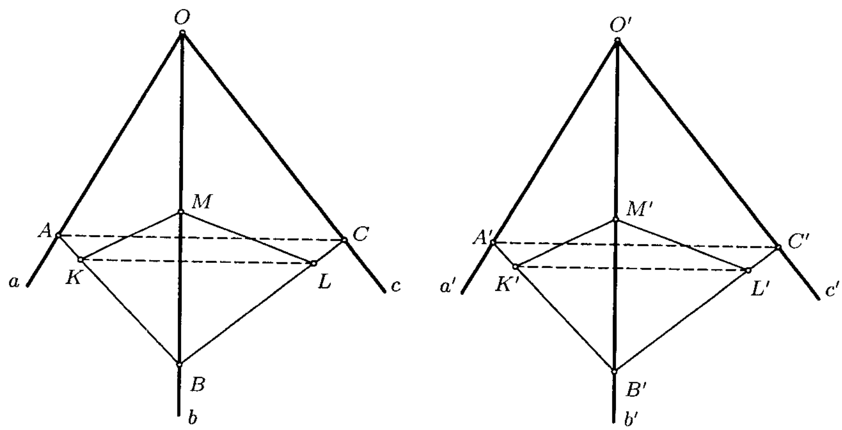
(iv) odgovarajući diedri tih triedara međusobno podudarni,

(v) dva ivična ugla (koja nisu oba prava) i diedar naspram jednog od njih jednog triedra podudarni odgovarajućim ivičnim uglovima i diedru drugog triedra, a diedri naspram drugog para odgovarajućih ivičnih uglova oba oštra, oba prava ili oba tupa,

(vi) dva diedra (koja nisu oba prava) i ivični ugao naspram jednog od njih jednog triedra podudarni odgovarajućim diedrima i ivičnom uglu drugog triedra, a ivični uglovi naspram drugog para odgovarajućih diedara oba oštra, oba prava ili oba tupa.

Dokaz: Treći stav je neposredna posledica teoreme 13.8, a četvrti stav o podudarnosti triedara sledi iz trećeg stava i teorema 13.6 i 13.7.

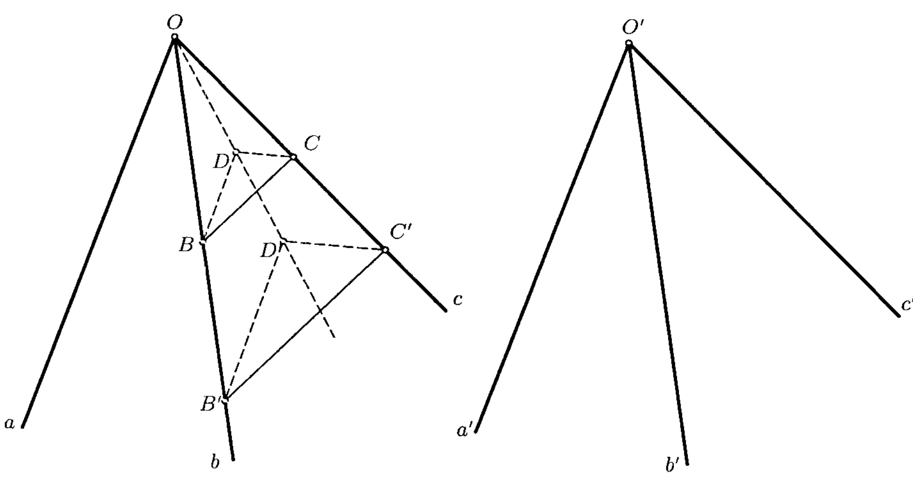
Da bismo dokazali prvi stav pretpostavimo da su ivični uglovi ab i bc i diedar b triedra $Oabc$ podudarni, redom, ivičnim uglovima $a'b'$ i $b'c'$ i diedru b' triedra $O'a'b'c'$. Ako su A, B, C tačke polupravih a, b, c, a A', B', C' tačke polupravih a', b', c' takve da je $OA \cong OB \cong OC \cong O'A' \cong O'B' \cong O'C'$, biće $\triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$ i $\triangle OBC \cong \triangle O'B'C'$. Jednostavno se dokazuje da tada postoje tačke K, L, M koje, redom, pripadaju dužima AB, BC, OB takve da je ravan KLM upravna na ivici b triedra $Oabc$. Ako sa K', L', M' označimo tačke polupravih $B'A'$, $B'C'$, $B'O'$ takve da je $BK \cong B'K'$, $BL \cong B'L'$ i $BM \cong B'M'$, biće $\triangle KBM \cong \triangle K'B'M'$ i $\triangle LBM \cong \triangle L'B'M'$, pa su, stoga, trouglovi $K'B'M'$ i $L'B'M'$ pravougli sa pravim uglovima kod temena M'. Stoga je ravan $K'L'M'$ upravna na ivici b'. Kako su, na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, trouglovi KML i $K'M'L'$ međusobno podudarni, biće $KL \cong K'L'$, pa su i trouglovi KBL i $K'B'L'$ međusobno podudarni. Odavde sledi da su uglovi kod temena B i B' trouglova



Slika 13d

ABC i $A'B'C'$ međusobno podudarni, pa su i ti trouglovi međusobno podudarni. Dakle, i duži CA i $C'A'$ su međusobno podudarne, pa su (O, A, B, C) i (O', A', B', C') dve podudarne četvorke tačaka. Stoga su, na osnovu teoreme 13.8, i triedri $Oabc$ i $O'a'b'c'$ međusobno podudarni.

Drugi stav o podudarnosti triedara sledi iz prvog stava i teorema 13.6 i 13.7.



Slika 13e

Da bismo dokazali peti stav o podudarnosti triedara pretpostavimo da su ivični uglovi ab i bc i diedar a triedra $Oabc$ podudarni odgovarajućim ivičnim uglovima i diedru triedra $O'a'b'c'$, dok su diedri kod ivica c i c' oba oštra, oba prava ili oba tupa. Pretpostavićemo da ivica b nije upravna na pljosni ac jer su tada ivični uglovi ab i bc pravi. Ako pretpostavimo da pljosni ac i $a'c'$ nisu podudarne već da je jedna od njih veća od druge, na primer $ac > a'c'$, tada postoji poluprava d pljosni ac takva da je $ad \cong a'c'$. Tada je, na osnovu prvog stava o podudarnosti triedara, $Oabd \cong Oa'b'c'$, pa je pljosan bd podudarna pljosni $b'c'$, a kako su pljosni $b'c'$ i bc međusobno podudarne biće podudarne i pljosni bd i bc. Ako su B'', C'', D'' tačke polupravih b, c, d takve da je $OB'' \cong OC'' \cong OD''$, četvorke (O, B'', C'', D'') i (O, B'', D'', C'') će biti međusobno podudarne, pa će diedri kod ivica c i d triedra $Obcd$ biti podudarni. Stoga su diedri kod ivice d triedara $Obad$ i $Obcd$ oba oštra, oba prava ili oba tupa. Oni ne mogu biti ni oba oštra ni oba tupa jer su naporedni, a ne mogu biti ni oba prava jer bi tada diedri kod ivica c i d triedra $Obcd$ bili pravi pa, ako su C i D podnožja upravnih iz proizvoljne tačke B poluprave b na pravama koje sadrže ivice c i d, prave BC i BD bi bile upravne na ravni ac. Zaista, kako je nagibni ugao pravog diedra prav, prave BC i BD bi bile upravne na pravama ravni ac koje su u tačkama C i D upravne na c i d, dakle bile bi upravne i na ravni ac jer je svaka od njih upravna na dvema pravama te ravni. Tada bi u trouglu BCD dva njegova ugla, BCD i BDC, bila prava što je nemoguće.

Šesti stav o podudarnosti triedara sledi iz petog stava i teorema 13.6 i 13.7.□

Primetimo da smo u dokazu petog stava o podudarnosti triedara dokazali da su naspram podudarnih ivičnih uglova konveksnog triedra, podudarni diedri. Dokažimo da pored navedenog tvrđenja važi i njegov obrat.

Teorema 13.11: *Dve pljosni konveksnog triedra su međusobno podudarne ako i samo ako su njima naspramni diedri međusobno podudarni.*

Dokaz: Ako je $Oabc$ proizvoljan triedar i A, B, C tačke njegovih ivica a, b, c takve da je $OA \cong OB \cong OC$, četvorke (O, A, B, C) i (O, A, C, B) će, na osnovu teoreme 13.4, biti međusobno podudarne ako i samo ako su triedri $Oabc$ i $Oacb$ međusobno podudarni.

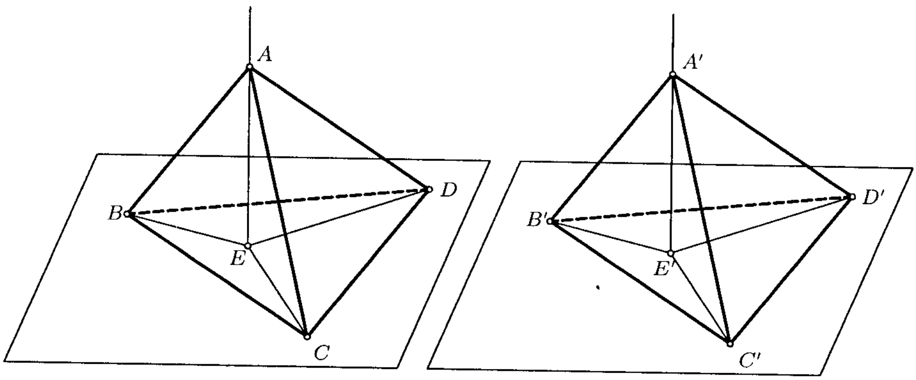
Ako su ivični uglovi ab i ac podudarni, i četvorke (O, A, B, C) i (O, A, C, B) će biti međusobno podudarne, pa će i triedri $Oabc$ i $Oacb$ biti međusobno podudarni. Dakle, i diedri kod ivica b i c triedra $Oabc$ će biti međusobno podudarni.

Obratno, ako su diedri kod ivica b i c triedra $Oabc$ međusobno podudarni, i triedri $Oabc$ i $Oacb$ će biti podudarni na osnovu drugog stava o podudarnosti triedara, pa će i ivični uglovi ab i ac biti međusobno podudarni. □

Podudarnost tetraedara. Lik podudaran poliedarskoj površi je, kako smo već ustanovili, poliedarska površ, a poliedru, poliedar. Posebno, tetraedarska površ je podudarna tetraedarskoj površi, a tetraedar, tetraedru. Štaviše, tetraedar $ABCD$ će biti podudaran tetraedru $A'B'C'D'$ ako i samo ako su četvorke (A, B, C, D) i (A', B', C', D') međusobno podudarne.

Teorema 13.12: *Ako su A, B, C, D četiri nekoplanarne tačke, a B', C', D' tri tačke takve da je $(B, C, D) \cong (B', C', D')$, tada u svakom poluprostoru sa rubom $B'C'D'$ postoji jedinstvena tačka A' takva da je $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$.*

Dokaz: Neka je E podnožje upravne iz tačke A na ravni BCD, a E' slika te tačke u izometriji $\mathcal{I}$ koja ravan BCD preslikava na ravan $B'C'D'$ tako da se tačke B, C, D preslikavaju, redom, na tačke B', C', D'. Ako je n' prava koja je u tački E' upravna na ravni $B'C'D'$, a A' tačka te prave takva da je $A'E' \cong AE$, tada će četvorke (A, B, C, D) i (A', B', C', D') biti međusobno podudarne zato što su, na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, trouglovi AEB, AEC, AED, redom, podudarni trouglovima $A'E'B'$, $A'E'C'$, $A'E'D'$, pa su i duži AB, AC, AD, redom, podudarne dužima $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$.



Slika 13f

Na osnovu teoreme 12.6 tačka E je jedinstvena, izometrija $\mathcal{I}$ je, na osnovu teoreme 10.13, takođe jedinstvena, jedinstvena je i prava n', a u svakom poluprostoru sa rubom $B'C'D'$ jedinstvena je i tačka A' prave n', pa je, stoga, i izometrija koja četvorku (A, B, C, D) preslikava na četvorku (A', B', C', D'), takođe jedinstvena.□

Ako je E podnožje upravne iz temena A tetraedra $ABCD$ na ravni BCD, duž AE ćemo zvati *visinom* tog *tetraedra.*

ZADACI:

1. Ako su α, β, γ diedri nekog konveksnog triedra, dokazati da je zbir diedara α i β manji od zbira diedra γ i opruženog diedra.

2. Dokazati da je jedan diedar triedra veći od drugog ako i samo ako je naspram njega veći ivični ugao.

3. Ako su dva ivična ugla jednog triedra podudarna odgovarajućim ivičnim uglovima drugog triedra, njima zahvaćeni diedar je veći od odgovarajućeg diedra drugog triedra ako i samo ako je treći ivični ugao prvog triedra veći od odgovarajućeg ivičnog ugla drugog teiedra. Dokazati.

4. Ako su dva diedra jednog triedra podudarna odgovarajućim diedrima drugog triedra, ivični ugao na koji naležu ta dva diedra je veći od odgovarajućeg ivičnog ugla

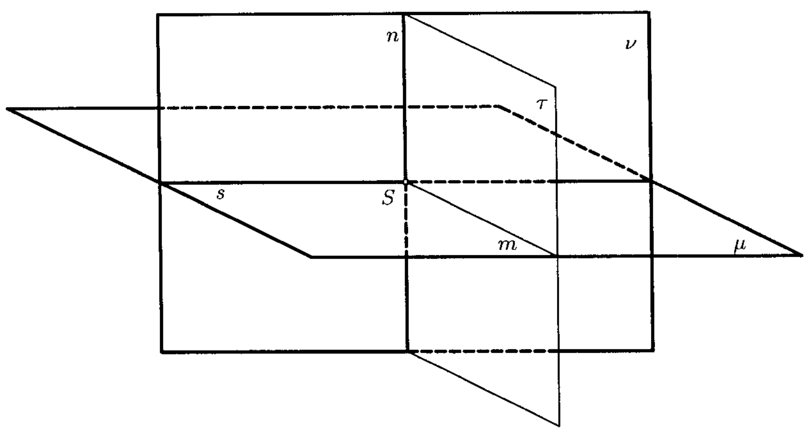
drugog triedra ako i samo ako je treći diedar prvog triedra veći od odgovarajućeg diedra drugog teiedra. Dokazati.

5. Ako u konveksnom triedru jedna ivica zahvata sa bisektrisom naspramnog ivičnog ugla oštar, prav ili tup ugao, dokazati da je zbir diedara koji odgovaraju ostalim dvema ivicama, redom, manji, jednak ili veći od opruženog diedra.

14. Upravnost ravni

Ako dve ravni μ i ν sadrže pljosni pravog diedra, reći ćemo da je ravan μ *upravna*, *normalna* ili *ortogonalna* na ravni ν i pisaćemo $\mu \perp \nu$. Iz definicije neposredno sledi da iz relacije $\mu \perp \nu$ sledi relacija $\nu \perp \mu$, pa se, stoga, može reći i da su ravni μ i ν *međusobno upravne.*

Teorema 14.1: *Prava n koja pripada ravni ν upravnoj na ravni μ i upravna je u tački S na preseku s tih dveju ravni, biće upravna i na ravni μ.*



Slika 14a

Dokaz: Neka je m prava ravni μ koja je u tački S upravna na pravoj s. Kako je nagibni ugao pravog diedra prav, prave m i n su međusobno upravne, pa je prava n upravna na dvema pravama, s i m, ravni μ. Stoga je prava n upravna i na ravni μ. □

Teorema 14.2: *Svaka ravan koja sadrži pravu upravnu na zadatoj ravni upravna je na toj ravni.*

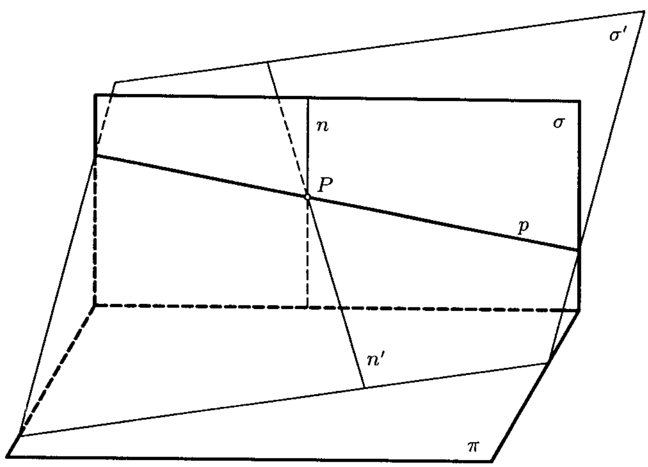
Dokaz: Ako je prava n upravna na ravni μ u nekoj tački S, tada ravan ν koja sadrži n, sadrži i tačku S pa je presek ravni μ i ν neka prava s. Neka je m prava ravni μ koja je u tački S upravna na pravoj s. Prava s je upravna na pravama n i m, pa je upravna i na ravni θ koja te dve prave sadrži.

Budući da je $n \perp \mu$, biće i $n \perp m$, pa je presek ravni θ sa ravnima ν i μ par međusobno upravnih pravih, n i m. Stoga su unakrsni diedri na koje ravni ν i μ razlažu prostor, pravi, pa su te dve ravni međusobno upravne. □

Teorema 14.3: *U svakoj tački prostora postoji ravan upravna na dvema raznim ravnima.*

Dokaz: Ako su dve prave m i n koje sadrže proizvoljnu tačku prostora upravne, redom, na zadatim ravnima α i β, tada je ravan π koja sadrži te dve prave, upravna na svakoj od ravni α i β. Ako su prave m i n istovetne, svaka ravan koja ih sadrži biće upravna i na ravni α i na ravni β. Ako nisu, ravan π će biti jedinstvena. □

Teorema 14.4: *Ako data prava nije upravna na datoj ravni, tada postoji jedinstvena ravan koja tu pravu sadrži, a upravna je na zadatoj ravni.*



Slika 14b

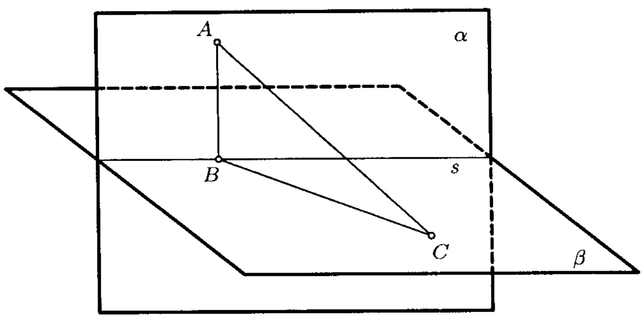
Dokaz: Neka je data prava p koja nije upravna na zadatoj ravni π i neka je P proizvoljna tačka te prave, a n prava koja sadrži tačku P i upravna je na ravni π. Ravan σ koja sadrži prave p i n upravna je na ravni π na osnovu teoreme 14.2.

Ako bi uz ravan σ postojala i neka ravan σ' koja sadrži pravu p i upravna je na π, tada bi prava n' koja sadrži tačku P i upravna je na preseku ravni σ' i π, bila upravna i na π, pa bi postojale dve prave koje sadrže P i upravne su na π. □

Teorema 14.5: *Ako je presek dveju raznih ravni upravnih na trećoj ravni, neprazan, taj presek je prava koja je takođe upravna na trećoj ravni.*

Dokaz: Ako bi presek ravni α i β koje su upravne na nekoj ravni π, bila prava s koja nije upravna na π, tada bi, na osnovu prethodne teoreme, postojala jedinstvena ravan koja sadrži s i upravna je na π što je nemoguće budući da ravni α i β nisu istovetne. □

Teorema 14.6: *Dve ravni su međusobno upravne ako i samo ako je normalna projekcija jedne na drugu njihova presečna prava.*



Slika 14c

Dokaz: Pretpostavimo da su ravni α i β međusobno upravne i obeležimo sa A proizvoljnu tačku ravni α, a sa B podnožje upravne iz te tačke na pravoj $s = \alpha \cap \beta$. Prava AB je, na osnovu teoreme 14.1, upravna i na ravni β. Ako bi upravna projekcija tačke A na ravni β bila neka tačka $C \neq B$, u trouglu ABC bi dva ugla bila prava. Dakle, upravna projekcija svake tačke ravni α na ravni β, pripada pravoj s.

Obratno, ako upravna projekcija B neke tačke A ravni α, na ravni β, pripada presečnoj pravoj s ravni α i β, ravan α je upravna na ravni β budući da sadrži pravu AB koja je upravna na β. □

ZADACI:

1. Ako je ivica AD tetraedra $ABCD$ upravna na njegovoj pljosni ABC i ako su pljosni DBC i DBA toga tetraedra međusobno upravne, dokazati da su sve njegove pljosni pravougli trouglovi.

2. Dokazati da su visine AA' i BB' tetraedra $ABCD$ koplanarne ako i samo ako su prave AB i CD međusobno upravne.

3. Ako su dve visine nekog tetraedra koplanarne, dokazati da su onda koplanarne i druge dve njegove visine.

4. Ako se tri visine nekog tetraedra seku u jednoj tački, dokazati da njegove naspramne ivice pripadaju upravnim pravama (tj. da je taj tetraedar *upravan*).

5. Dokazati da se sve četiri visine upravnog tetraedra seku u jednoj tački.

15. Refleksije

Centralna, osna i ravanska refleksija. Kako smo već utvrdili, iz teorema 10.12, 10.13 i 10.14 proističe da će izometrija prave koja ostavlja invarijantnim dve razne tačke biti identičnost, da će izometrija ravni koja ostavlja invarijantnim tri nekolinearne tačke biti takođe identičnost, isto kao i izometrija prostora koja ostavlja invarijantnim četiri nekoplanarne tačke. Razmotrimo sada izometrije prave, ravni i prostora sa manjim brojem invarijantnih tačaka.

Korišćenjem teorema 10.2 i 10.12 jednostavno se dokazuje da postoji jedinstvena neidentička izometrija prave koja ostavlja invarijantnom jednu njenu tačku. Lako se dokazuje, na osnovu aksiome III.6 i teoreme 10.13, da postoji i jedinstvena neidentička izometrija ravni koja ostavlja invarijantnim dve razne tačke te ravni, pa stoga i svaku tačku prave koja ih sadrži. Na isti način, iz teorema 13.12 i 10.14, sledi da postoji jedinstvena neidentička izometrija prostora koja ostavlja invarijantnim tri nekolinearne tačke, pa stoga i svaku tačku ravni koja ih sadrži. Svaku od tih triju izometrija zvaćemo *refleksijom.*

Prvu, koja ostavlja invarijantnom neku tačku P date prave, zvaćemo *centralnom refleksijom* te prave i obeležavaćemo je sa $\mathcal{S}_P$; drugu, koja ostavlja invarijantnom svaku tačku neke prave p zadate ravni zvaćemo *osnom refleksijom* te ravni i obeležavaćemo je sa $\mathcal{S}_p$; treću, koja ostavlja invarijantnom svaku tačku neke ravni π prostora zvaćemo *ravanskom refleksijom* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{S}_\pi$. Tačku P zvaćemo *centrom* ili *središtem refleksije*, pravu p *osom refleksije*, a ravan π *osnovom* ili *ravni refleksije.* Zajedničkim simbolom $\mathcal{S}_\Sigma$ (gde umesto Σ može da bude bilo koje veliko slovo grčkog alfabeta) obeležavaćemo i centralnu refleksiju prave i osnu refleksiju ravni i ravansku refleksiju prostora. Pri tome Σ označava i centar i osu i ravan refleksije. Njih ćemo jednim imenom zvati *osnovom refleksije* ili *ogledalom.* Refleksije ćemo obeležavati i samo sa $\mathcal{S}$ ili sa $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots$, ukoliko nam osnova refleksije nije od značaja.

Ako se refleksijom $\mathcal{S}_\Sigma$ tačka X preslikava u Y, iz definicije refleksije i teorema 12.2 i 12.10 sledi da je Σ:

(i) središte duži XY ako je $\mathcal{S}_\Sigma$ centralna refleksija prave, ili

(ii) medijatrisa duži XY ako je $\mathcal{S}_\Sigma$ osna refleksija ravni, ili

(iii) medijalna ravan duži XY ako je $\mathcal{S}_\Sigma$ ravanska refleksija.

Dokažimo nekoliko važnih osobina refleksija.

Teorema 15.1: *Svaka refleksija je indirektna izometrija.*

Dokaz: Ako se refleksijom $\mathcal{S}_\Sigma$ tačka $X \notin \Sigma$ preslikava u Y, tačke X i Y će, na osnovu aksiome III6 i teorema 10.2 i 13.12, biti sa raznih strana Σ. Stoga, ako je $\mathcal{S}_\Sigma$ centralna refleksija prave, usmerene duži ΣX i ΣY su suprotnosmerne. Ako je $\mathcal{S}_\Sigma$ osna refleksija pri čemu su A i B tačke koje pripadaju osi, orijentisani trouglovi XAB i YAB su suprotnosmerni. Ako je $\mathcal{S}_\Sigma$ ravanska refleksija pri čemu su A, B i C tačke koje pripadaju njenoj osnovi, orijentisani tetraedri $XABC$ i $YABC$ su suprotnosmerni. Dakle, refleksija $\mathcal{S}_\Sigma$ je, u svakom slučaju, indirektna. □

Teorema 15.2: *Svaka refleksija je involucija.*

Dokaz: Neka se refleksijom $\mathcal{S}_\Sigma$ tačka X preslikava u Y. Ako je i Σ tačka, onda je, na osnovu teorema 10.2 i 10.12, $\mathcal{S}_\Sigma(Y)=X$; ako je Σ prava, onda je, na osnovu aksiome III.6 i teoreme 10.13, $\mathcal{S}_\Sigma(Y)=X$; ako je Σ ravan onda je, na osnovu teorema 13.12 i 10.14, $\mathcal{S}_\Sigma(Y)=X$. Dakle, u svakom slučaju, refleksija $\mathcal{S}_\Sigma$ je involucija. □

Dokazi sledećih triju teorema su analogni, pa ćemo, stoga, prve dve od tih teorema samo formulisati.

Teorema 15.3: *Svaka indirektna izometrija prave je centralna refleksija.* □

Teorema 15.4: *Svaka indirektna izometrija ravni koja ima bar jednu invarijantnu tačku je osna refleksija.* □

Teorema 15.5: *Svaka indirektna izometrija prostora koja ima bar dve invarijantne tačke je ravanska refleksija.*

Dokaz: Kako indirektna izometrija $\mathcal{I}$ prostora nije identičnost, postoji tačka X tog prostora takva da je $\mathcal{I}(X)=Y$ i $X \neq Y$. Tada će, ako sa A i B obeležimo invarijantne tačke transformacije $\mathcal{I}$, biti $XA \cong YA$ i $XB \cong YB$, pa tačke A i B pripadaju medijalnoj ravni π duži XY. Budući da su $\mathcal{I}$ i $\mathcal{S}_\pi$ indirektne izometrije, njihov proizvod $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}$ će da bude direktna izometrija koja ostavlja invarijantnim tačke A, B i X. Stoga će, na osnovu teorema 13.12 i 10.14, ta kompozicija biti identičnost, pa je zato $\mathcal{I}=\mathcal{S}_\pi$. □

Teorema 15.6: *Neka su $\mathcal{S}_\Sigma$ i $\mathcal{S}_\Pi$ dve refleksije sa raznim osnovama. Tačka X je invarijantna u kompoziciji $\mathcal{S}_\Pi \mathcal{S}_\Sigma$ ako i samo ako pripada obema osnovama tih dveju refleksija.*

Dokaz: Ako X pripada osnovama Σ i Π dveju refleksija, ona će biti invarijantna u svakoj od tih refleksija pa, dakle, i u njihovoj kompoziciji.

Obratno, ako je $\mathcal{S}_\Pi \mathcal{S}_\Sigma(X)=X$ i ako pretpostavimo da je $\mathcal{S}_\Sigma(X)=Y$, pri čemu je $X \neq Y$, biće $\mathcal{S}_\Pi(Y)=X$. Tada će Σ i Π biti dva razna središta duži XY ili dve razne medijatrise te duži ili dve razne medijalne ravni te duži, što je nemoguće. Zato je $X=Y$. □

Teorema 15.7: *Ako je $\mathcal{S}_\Sigma$ refleksija, ako je $\mathcal{I}$ proizvoljna izometrija i ako je $\mathcal{I}(\Sigma)=\Pi$, onda je*

$$\mathcal{I}\,\mathcal{S}_\Sigma\,\mathcal{I}^{-1}=\mathcal{S}_\Pi.$$

Dokaz: Svaka tačka Y osnove Π odgovara u transformaciji $\mathcal{I}$ nekoj tački osnove Σ. Zato je $\mathcal{S}_\Sigma \mathcal{I}^{-1}(Y) = \mathcal{I}^{-1}(Y)$, pa odatle sledi da je

$$\mathcal{I}\,\mathcal{S}_\Sigma \mathcal{I}^{-1}(Y) = \mathcal{I}\,\mathcal{I}^{-1}(Y) = Y.$$

Dakle, u kompoziciji $\mathcal{I}\,\mathcal{S}_\Sigma \mathcal{I}^{-1}$ svaka tačka osnove Π je invarijantna pa, kako je ta kompozicija indirektna izometrija, ona će biti refleksija $\mathcal{S}_\Pi$. □

Teorema 15.8: *Dve refleksije komutiraju ako i samo ako su im osnove istovetne ili su međusobno upravne.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{S}_\Pi \mathcal{S}_\Sigma = \mathcal{S}_\Sigma \mathcal{S}_\Pi$, tj. $\mathcal{S}_\Pi \mathcal{S}_\Sigma \mathcal{S}_\Pi = \mathcal{S}_\Sigma$. Tada je, na osnovu prethodne teoreme, $\mathcal{S}_\Pi(\Sigma) = \Sigma$, pa su Σ i Π istovetne ili su međusobno upravne.

Obratno, ako su osnove Σ i Π istovetne ili su međusobno upravne, onda je $\mathcal{S}_\Pi(\Sigma) = \Sigma$, pa je $\mathcal{S}_\Pi \mathcal{S}_\Sigma \mathcal{S}_\Pi = \mathcal{S}_\Sigma$ na osnovu prethodne teoreme. Dakle, tada je $\mathcal{S}_\Pi \mathcal{S}_\Sigma = \mathcal{S}_\Sigma \mathcal{S}_\Pi$. □

Značaj refleksija se ogleda u tome što se svaka izometrija prave, ravni ili prostora može iskazati kao kompozicija konačnog broja refleksija. To ćemo ustanoviti sledećim trima teoremama. Kako u načinu njihovog dokazivanja nema nikakve suštinske razlike izvešćemo dokaz samo poslednje od njih.

Teorema 15.9: *Svaka izometrija prave može se predstaviti kao kompozicija najviše dveju centralnih refleksija.* □

Teorema 15.10: *Svaka izometrija ravni može se predstaviti kao kompozicija najviše triju osnih refleksija.* □

Teorema 15.11: *Svaka izometrija prostora može se predstaviti kao kompozicija najviše četiri ravanske refleksije.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{I}$ proizvoljna izometrija prostora i A,B,C,D četiri nekoplanarne tačke, a A^1,B^1,C^1,D^1, redom, slike tih tačaka u izometriji $\mathcal{I}$.

Ako je $A = A^1$, $B = B^1$, $C = C^1$, $D = D^1$, $\mathcal{I}$ je identičnost pa, ako je π proizvoljna ravan, biće $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\pi$. Stoga pretpostavimo da nisu sve tačke A,B,C,D invarijantne u izometriji $\mathcal{I}$ već da se bar jedna od njih, na primer A, tom izometrijom preslikava u tačku koja je od nje različita. Ako je $\mathcal{S}_1$ refleksija kojom se A i A^1 preslikavaju jedna na drugu, u kompoziciji $\mathcal{S}_1 \mathcal{I}$ će tačka A biti invarijantna. Ako su u toj kompoziciji i B,C,D invarijantne tačke, biće $\mathcal{I} = \mathcal{S}_1$.

Pretpostavimo da u izometriji $\mathcal{S}_1 \mathcal{I}$ bar jedna od tačaka B,C,D, na primer B, nije invarijantna već da se preslikava na B^2, a C i D, redom, na C^2 i D^2, i sa $\mathcal{S}_2$ obeležimo refleksiju kojom se B i B^2 preslikavaju jedna na drugu. Tada je

$$(A,B) \cong (A^1,B^1) \cong (A,B^2),$$

pa tačka A pripada osnovi π_2 refleksije $\mathcal{S}_2$. Stoga su u kompoziciji $\mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1 \mathcal{I}$ tačke A i B invarijantne. Ako su invarijantne i C i D, ta kompozicija je identičnost, pa je tada $\mathcal{I} = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2$.

Pretpostavimo da u izometriji $\mathcal{S}_2\,\mathcal{S}_1\,\mathcal{I}$ tačka C nije invarijantna već da se preslikava na C^3, a D na D^3, i sa $\mathcal{S}_3$ obeležimo refleksiju kojom se C i C^3 preslikavaju jedna na drugu. Tada je

$$(A,C)\cong(A^1,C^1)\cong(A,C^2)\cong(A,C^3)$$

i

$$(B,C)\cong(B^1,C^1)\cong(B^2,C^2)\cong(B,C^3),$$

pa tačke A i B pripadaju osnovi π_3 refleksije $\mathcal{S}_3$. Stoga su tačke A,B,C invarijantne u kompoziciji $\mathcal{S}_3\,\mathcal{S}_2\,\mathcal{S}_1\,\mathcal{I}$. Ako je invarijantna i tačka D, ta kompozicija je identičnost, pa je tada $\mathcal{I}=\mathcal{S}_1\,\mathcal{S}_2\,\mathcal{S}_3$.

Pretpostavimo da u izometriji $\mathcal{S}_3\,\mathcal{S}_2\,\mathcal{S}_1\,\mathcal{I}$ tačka D nije invarijantna već da se preslikava na D_4, i sa $\mathcal{S}_4$ obeležimo refleksiju kojom se D i D_4 preslikavaju jedna na drugu. Tada je

$$(A,D)\cong(A^1,D^1)\cong(A,D^2)\cong(A,D^3)\cong(A,D^4),$$

$$(B,D)\cong(B^1,D^1)\cong(B^2,D^2)\cong(B,D^3)\cong(B,D^4),$$

$$(C,D)\cong(C^1,D^1)\cong(C^2,D^2)\cong(C^3,D^3)\cong(C,D^4),$$

pa tačke A,B,C pripadaju osnovi π_4 refleksije $\mathcal{S}_4$. Stoga su tačke A,B,C,D invarijantne u kompoziciji $\mathcal{S}_4\,\mathcal{S}_3\,\mathcal{S}_2\,\mathcal{S}_1\,\mathcal{I}$. Dakle, ta kompozicija je identičnost, pa je tada $\mathcal{I}=\mathcal{S}_1\,\mathcal{S}_2\,\mathcal{S}_3\,\mathcal{S}_4$. □

Kompozicije refleksija. Prema teoremi 15.9 svaka izometrija $\mathcal{I}$ prave je ili centralna refleksija $\mathcal{S}_A$ ili kompozicija dveju centralnih refleksija $\mathcal{S}_A$ i $\mathcal{S}_B$ te prave. Ako je

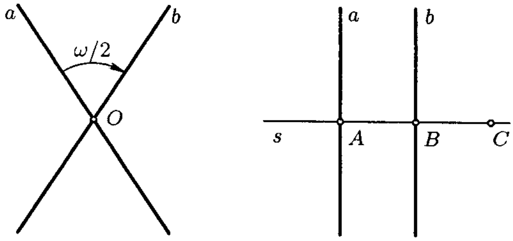
$$\mathcal{I}=\mathcal{S}_B\,\mathcal{S}_A,$$

pri čemu je $\mathcal{S}_B(A)=C$, transformaciju $\mathcal{I}$ nazivamo *translacijom* prave i obeležavamo je sa $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$. Dakle, svaka indirektna izometrija prave je centralna refleksija, a svaka direktna izometrija, translacija te prave.

Iz teoreme 15.10 sledi da je svaka direktna izometrija $\mathcal{I}$ ravni kompozicija dveju osnih refleksija. Ako se ose a i b tih dveju refleksija seku u nekoj tački O, kompoziciju

$$\mathcal{I}=\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$$

ćemo zvati *rotacijom ravni* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{R}_{O,\omega}$. U toj oznaci ω je dvostruki orijentisani ugao koji zahvataju prave a i b, u tom redosledu. Ugao ω zvaćemo *uglom*, a tačku O *središtem* ili *centrom rotacije* $\mathcal{R}_{O,\omega}$. Reći ćemo da je $\mathcal{R}_{O,\omega}$ rotacija *oko* tačke O za ugao ω. Ako su prave a i b međusobno upravne, rotaciju $\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ ćemo zvati *centralnom simetrijom ravni* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{S}_O$. Tačku O ćemo zvati *centrom simetrije* $\mathcal{S}_O$. Ako su ose a i b tih dveju refleksija, u tačkama A i B upravne na nekoj pravoj s i ako je $\mathcal{S}_b(A)=C$, kompoziciju $\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ ćemo zvati *translacijom ravni* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$. Pravu s ćemo zvati *osom*, a orijentisanu duž AC *vektorom transalacije* $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$. Reći ćemo da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$ translacija *duž*



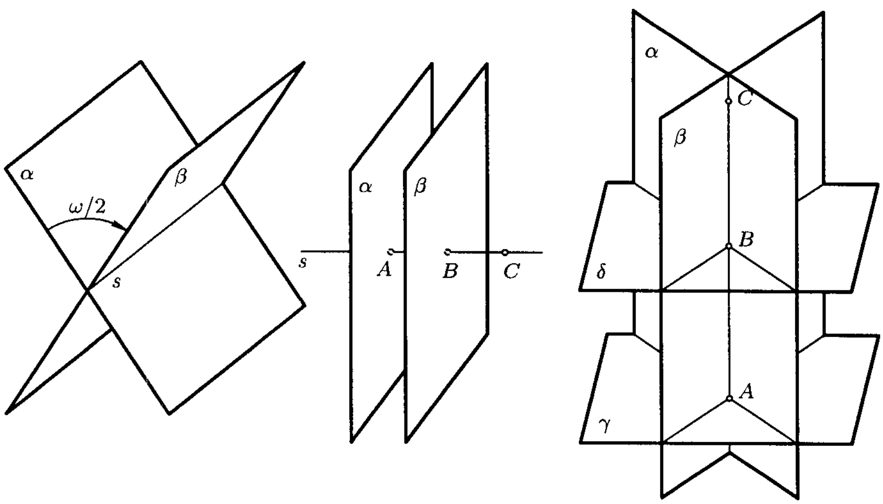
Slika 15a

prave AC za vektor $\overrightarrow{AC}$. Ponekad ćemo rotacije i translacije, radi jednostavnosti, obeležavati samo sa $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$.

Ako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrija ravni, ona će, na osnovu teoreme 15.10, biti ili osna refleksija ili kompozicija triju osnih refleksija. Ako je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_s\, \mathcal{S}_b\, \mathcal{S}_a,$$

pri čemu su ose a i b u tačkama A i B upravne na pravoj s i ako je $\mathcal{S}_b(A) = C$, tu transformaciju ćemo zvati *klizajućom refleksijom ravni* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}}$. Pravu s ćemo zvati *osom*, a orijentisanu duž AC *vektorom klizajuće refleksije* $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}}$. Reći ćemo da je $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}}$ klizajuća refleksija *duž* prave AC za vektor $\overrightarrow{AC}$.



Slika 15b

Iz teoreme 15.11 sledi da je svaka direktna izometrija $\mathcal{I}$ prostora ili kompozicija dveju ravanskih refleksija ili kompozicija četiri ravanske refleksije. Ako je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\beta\, \mathcal{S}_\alpha,$$

pri čemu se ravni α i β seku duž neke prave s, tu transformaciju ćemo zvati *osnom rotacijom prostora* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{R}_{s,\omega}$. U toj oznaci ω je ugao dvostrukog orijentisanog diedra koji, redom, obrazuju ravni α i β. Ugao ω ćemo zvati *uglom*, a pravu s *osom rotacije* $\mathcal{R}_{s,\omega}$. Reći ćemo da je $\mathcal{R}_{s,\omega}$ rotacija *oko* prave s za ugao ω. Ako su ravni α i β međusobno upravne, osnu rotaciju $\mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha$ zvaćemo *osnom simetrijom prostora* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{S}_s$. Pravu s ćemo zvati *osom simetrije* $\mathcal{S}_s$. Ako su α i β, redom, u tačkama A i B upravne na nekoj pravoj s i $\mathcal{S}_\beta(A) = C$, kompoziciju $\mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha$ ćemo zvati *translacijom prostora* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$. Pravu s ćemo zvati *osom translacije*, a orijentisanu duž AC *vektorom transalacije* $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$. Reći ćemo da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$ translacija prostora *duž* prave AC za vektor $\overrightarrow{AC}$. Ako je pak

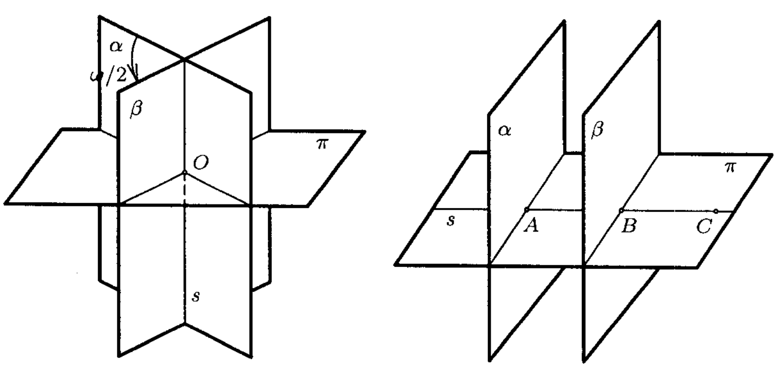
$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\delta \mathcal{S}_\gamma \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha,$$

pri čemu se ravni α i β seku duž neke prave s, a ravni γ i δ su u tačkama A i B upravne na s i $\mathcal{S}_\delta(A) = C$, transformaciju $\mathcal{I}$ ćemo zvati *zavojnim kretanjem* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{AC},\omega}$. U toj oznaci ω je ugao dvostrukog orijentisanog diedra koji, redom, obrazuju ravni α i β. Pravu s ćemo zvati *osom*, orijentisanu duž AC *vektorom*, a ugao ω *uglom zavojnog kretanja* $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{AC},\omega}$. Ako su ravni α i β međusobno upravne, zavojno kretanje ćemo zvati *zavojnim poluobrtanjem* i obeležavaćemo ga sa $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{AC}}$.

Ako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrija prostora, ona će, na osnovu teoreme 15.11, biti ili ravanska refleksija ili kompozicija triju ravanskih refleksija. Ako je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha,$$

pri čemu se ravni α i β seku duž neke prave s koja je upravna na ravni π, transformaciju $\mathcal{I}$ ćemo zvati *rotacionom refleksijom* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$. U toj oznaci ω je ugao dvostrukog orijentisanog diedra koji, redom, obrazuju ravni α i β. Ravan π zvaćemo *osnovom*, pravu s *osom*, a ugao ω *uglom rotacione refleksije* $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$. Ako su ravni α i β međusobno upravne, a O presek prave s i ravni π, rotacionu refleksiju $\mathcal{R}_{\pi;s,\omega}$ ćemo zvati *centralnom simetrijom prostora* i obeležavaćemo je sa $\mathcal{S}_O$. Tačku O ćemo zvati *centrom simetrije* $\mathcal{S}_O$.



Slika 15c

Ako je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha$, pri čemu su α i β dve ravni koje su, redom, u tačkama A i B upravne na nekoj pravoj s ravni π i ako je $\mathcal{S}_\beta(A) = C$, transformaciju $\mathcal{I}$ ćemo zvati *klizajućom refleksijom* prostora i obeležavaćemo je sa $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AC}}$. Ravan π ćemo zvati *osnovom*, pravu s *osom*, a orijentisanu duž AC *vektorom klizajuće refleksije* $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AC}}$.

Teorema 15.12: *Ako je $\mathcal{I}$ neidentička involucija prave, ravni ili prostora, tada je ona ili:*

(i) refleksija, ili

(ii) centralna simetrija ravni ili prostora, ili

(iii) osna simetrija prostora.

Dokaz: Neka se involucijom $\mathcal{I}$ tačka A preslikava u tačku B. Tada se orijentisana duž AB preslikava na BA, pa je središte P te duži invarijantna tačka transformacije $\mathcal{I}$.

Ako je tačka P jedina invarijantna tačka involucije $\mathcal{I}$, onda će ona biti središte svih duži određenih parovima odgovarajućih tačaka u toj involuciji, pa je $\mathcal{I}$ ili centralna refleksija prave ili centralna simetrija ravni ili prostora.

Ako je pored P i tačka Q invarijantna u involuciji $\mathcal{I}$, onda je svaka tačka prave PQ invarijantna u toj involuciji. Ako van prave PQ nema invarijantnih tačaka involucije $\mathcal{I}$, onda središta svih duži određenih parovima odgovarajućih tačaka u toj involuciji pripadaju pravoj PQ. Štaviše, PQ će biti medijatrisa svih tih duži, pa je, stoga, $\mathcal{I}$ ili osna refleksija ili osna simetrija.

Ako je i tačka R koja ne pripada pravoj PQ, invarijantna u involuciji $\mathcal{I}$, onda je svaka tačka ravni π određene tačkama P,Q,R invarijantna u toj involuciji. Tada središta svih duži određenih parovima odgovarajućih tačaka u transformaciji $\mathcal{I}$ pripadaju ravni π koja je, štaviše, medijalna ravan svih tih duži, pa je $\mathcal{I}$, stoga, ravanska refleksija. □

Unutrašnji automorfizmi. Ako je $\mathcal{S}_\Sigma$ refleksija i $\mathcal{I}$ bilo koja izometrija prave, ravni ili prostora, tada će, na osnovu teoreme 15.7, i $\mathcal{I}\,\mathcal{S}_\Sigma\,\mathcal{I}^{-1}$ biti refleksija $\mathcal{S}_{\Sigma'}$, pri čemu je $\Sigma' = \mathcal{I}(\Sigma)$. Razmotrimo sada opštiji slučaj kada u kompoziciji $\mathcal{I}\,\mathcal{S}_\Sigma\,\mathcal{I}^{-1}$ refleksiju $\mathcal{S}_\Sigma$ zamenimo bilo kojom izometrijiom $\mathcal{J}$.

Neka se izometrijom $\mathcal{J}$ proizvoljna tačka A prave, ravni ili prostora preslikava u B, tj. neka je $\mathcal{J}(A) = B$, a neka se A i B preslikavaju izometrijom $\mathcal{I}$ u tačke $\mathcal{I}(A)$ i $\mathcal{I}(B)$. Tada je $\mathcal{J}(A) = B$ ako i samo ako je $(\mathcal{I}\,\mathcal{J}\,\mathcal{I}^{-1})\,\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B)$. Na taj način, pomoću transformacije $\mathcal{I}$ svakoj transformaciji $\mathcal{J}$ dodeljujemo novu transformaciju $\mathcal{I}\,\mathcal{J}\,\mathcal{I}^{-1}$. Za tu novu transformaciju reći ćemo da je dobijena *unutrašnjim automorfizmom* ili *transmutacijom* transformacije $\mathcal{J}$ pomoću transformacije $\mathcal{I}$.

Ako se izometrija $\mathcal{J}$ može predstaviti kao kompozicija $\mathcal{S}_\Pi\,\mathcal{S}_\Sigma$, dveju refleksija, onda je

$$\mathcal{I}\,\mathcal{J}\,\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}\,\mathcal{S}_\Pi\,\mathcal{S}_\Sigma\,\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}\,\mathcal{S}_\Pi\,\mathcal{I}^{-1}\,\mathcal{I}\,\mathcal{S}_\Sigma\,\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\Pi'}\,\mathcal{S}_{\Sigma'},$$

gde je $\Sigma' = \mathcal{I}(\Sigma)$, a $\Pi' = \mathcal{I}(\Pi)$. Odavde neposredno sledi da se unutrašnjim automorfizmima translacije prave, ravni i prostora, i rotacije ravni i prostora preslikavaju u izometrije iste vrste. Drugim rečima, translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ se unutrašnjim automorfizmom pomoću transformacije $\mathcal{I}$ preslikava u translaciju $\mathcal{T}_{\mathcal{I}(\overrightarrow{AB})}$, a rotacija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ili $\mathcal{R}_{s,\omega}$ u rotaciju $\mathcal{R}_{\mathcal{I}(O),\mathcal{I}(\omega)}$ ili $\mathcal{R}_{\mathcal{I}(s),\mathcal{I}(\omega)}$. Dakle, unutrašnjim automorfizmom se i centralna simetrija ravni preslikava u centralnu simetriju ravni, a osna simetrija prostora u osnu simetriju prostora.

Ako je

$$\mathcal{J} = \mathcal{S}_\Theta \mathcal{S}_\Pi \mathcal{S}_\Sigma \quad \text{ili} \quad \mathcal{J} = \mathcal{S}_\Delta \mathcal{S}_\Theta \mathcal{S}_\Pi \mathcal{S}_\Sigma,$$

onda je

$$\mathcal{I}\mathcal{J}\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}\mathcal{S}_\Theta \mathcal{S}_\Pi \mathcal{S}_\Sigma \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}\mathcal{S}_\Theta \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}\mathcal{S}_\Pi \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}\mathcal{S}_\Sigma \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\Theta'} \mathcal{S}_{\Pi'} \mathcal{S}_{\Sigma'}$$

ili

$$\mathcal{I}\mathcal{J}\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}\mathcal{S}_\Delta \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}\mathcal{S}_\Theta \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}\mathcal{S}_\Pi \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}\mathcal{S}_\Sigma \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\Delta'} \mathcal{S}_{\Theta'} \mathcal{S}_{\Pi'} \mathcal{S}_{\Sigma'}$$

gde je $\Sigma' = \mathcal{I}(\Sigma)$, $\Pi' = \mathcal{I}(\Pi)$, $\Theta' = \mathcal{I}(\Theta)$, $\Delta' = \mathcal{I}(\Delta)$. Stoga se unutrašnjim automorfizmima klizajuće refleksije ravni i prostora, rotacione refleksije i zavojna kretanja prostora preslikavaju u transformacije iste vrste. Dakle, klizajuća refleksija $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}}$ ili $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AC}}$ se unutrašnjim automorfizmom pomoću transformacije $\mathcal{I}$ preslikava u klizajuću refleksiju $\mathcal{G}_{\mathcal{I}(\overrightarrow{AC})}$ ili $\mathcal{G}_{\mathcal{I}(\pi),\mathcal{I}(\overrightarrow{AC})}$, rotaciona refleksija $\mathcal{R}_{\pi,s,\omega}$ u rotacionu refleksiju $\mathcal{R}_{\mathcal{I}(\pi),\mathcal{I}(s),\mathcal{I}(\omega)}$, a zavojno kretanje $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{AC},\omega}$ u zavojno kretanje $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}(\overrightarrow{AC}),\mathcal{I}(\omega)}$. Stoga se unutrašnjim automorfizmima centralne simetrije i zavojna poluobrtanja prostora preslikavaju opet u centralne simetrije i zavojna poluobrtanja.

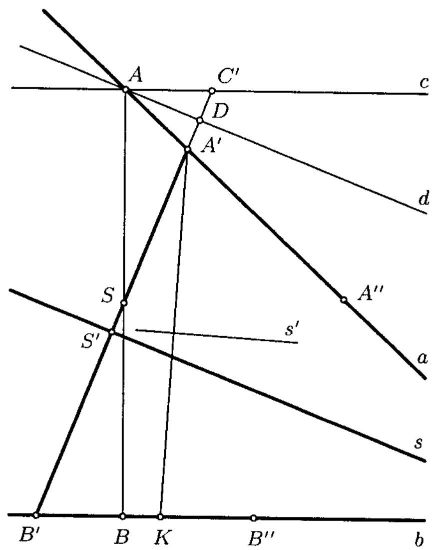
Neki skup transformacija ćemo zvati *invarijantnim kompleksom* grupe izometrija prave, ravni ili prostora ako se bilo kojim unutrašnjim automorfizmom transformacije iz tog skupa opet dobija transformacija iz tog skupa. Dakle, na osnovu prethodnog, skup svih rotacija prostora, kao i skup svih klizajućih refleksija prostora su primeri invarijantnih kompleksa. Ako je invarijantni kompleks uz to i podgrupa grupe svih izometrija prave, ravni ili prostora, zvaćemo ga *invarijantnom podgrupom.*

Teoreme Hjelmsleva. Završimo ovaj odeljak dvema važnim teoremama o broju refleksija kojima se parovi pravih ili ravni preslikavaju na sebe.

Teorema 15.13: *Ako su a i b dve konkurentne prave, tada postoje tačno dve osne refleksije sa međusobno upravnim osama, koje te dve prave preslikavaju jednu na drugu, a ako su a i b koplanarne, disjunktne prave tada postoji jedinstvena osna refleksija koja ih preslikava jednu na drugu.*

Dokaz: Konkurentne prave a i b razlažu ravan kojoj pripadaju na dva para unakrsnih uglova čije bisektrise pripadaju dvema pravama p i q za koje se neposredno dokazuje da su međusobno upravne. Osnim refleksijama $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ se prave a i b preslikavaju jedna na drugu. Budući da svaki ugao ima jedinstvenu bisektrisu, pored $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_q$ nema više osnih refleksija koje prave a i b preslikavaju jednu na drugu.

Ako su a i b dve disjunktne prave jedne ravni, sa A označimo proizvoljnu tačku prave a, a sa B podnožje upravne iz A na pravoj b, i pretpostavimo da prava AB nije upravna i na pravoj a. Tada postoji prava c različita od a, koja je u tački A upravna na AB. Neka je d osa refleksije pravih a i c koja pripada onom paru unakrsnih uglova na koje ravan razlažu te dve prave, kojem ne pripada i prava b. Neka je, zatim, S središte duži AB, a D podnožje upravne iz S na d. Tada su S i D sa raznih strana a, pa prava SD seče a u nekoj tački A'. Budući da se refleksijom $\mathcal{S}_d$ prave SD i a preslikavaju na SD i c, prave SD i c se seku u tački $C' = \mathcal{S}_d(A')$. Obeležimo sa B' tačku prave b koja je sa one strane prave AB sa koje nije C', takvu da je $BB' \cong AC'$. Tada su trouglovi SAC' i SBB' podudarni, pa su, stoga, i uglovi ASC' i BSB' međusobno podudarni. Odavde sledi da su tačke C', S i B' kolinearne.



Slika 15d

Ako je A'' proizvoljna tačka prave a takva da je $\mathcal{B}(A, A', A'')$, uglovi $SB'B$, $SC'A$, $C'A'A$, $SA'A''$ će biti međusobno podudarni, pa prava $A'B'$, sa iste svoje strane zahvata podudarne uglove sa pravama a i b. Ako je $AB \perp a$, prava AB zahvata podudarne uglove i sa a i sa b, pa tačke A i B možemo obeležiti sa A' i B'. Dokažimo da je medijatrisa s duži $A'B'$ osa refleksije kojom se prave a i b preslikavaju jedna na drugu.

Neka je $\mathcal{S}_s(A'') = B''$, i neka je S' središte duži $A'B'$. Tada su trouglovi $S'A'A''$ i $S'B'B''$ međusobno podudarni, pa su uglovi $S'B'B$ i $S'B'B''$ međusobno podudarni jer su oba podudarna uglu $S'A'A''$. Stoga su tačke B, B' i B'' kolinearne, tj. $B'' \in b$, pa je $\mathcal{S}_s(a) = b$.

Ako bi pored s, i s' bila osa refleksije kojom se prave a i b preslikavaju jedna na drugu, tada bi bilo $\mathcal{S}_{s'}(A') = K$, pri čemu je $K \neq B'$. Tada bi i prava $A'K$ zahvatala sa iste svoje strane podudarne uglove sa pravama a i b, pa bi u trouglu

$A'B'K$ spoljašnji ugao kod temena K bio manji od unutrašnjeg ugla kod temena B', što je nemoguće. □

Teorema 15.14: *Ako se ravni α i β seku, tada postoje tačno dve ravanske refleksije sa međusobno upravnim osnovama, koje preslikavaju ravni α i β jednu na drugu, a ako su α i β disjunktne, tada postoji jedinstvena ravanska refleksija koja ih preslikava jednu na drugu.*

Dokaz: Ako su dve prave koje sadrže proizvoljnu tačku prostora upravne na ravnima α i β, tada je ravan π koja sadrži te dve prave upravna na svakoj od ravni α i β. Neka su a i b presečne prave ravni π, redom, sa ravnima α i β, neka je s osa refleksije ravni π kojom se prave a i b preslikavaju jedna na drugu, a σ ravan koja sadrži s i upravna je na π. Neposredno se dokazuje da se tada refleksijom $\mathcal{S}_\sigma$ ravni α i β preslikavaju jedna na drugu.

Ako je $\mathcal{S}_\sigma$ ravanska refleksija kojom se ravni α i β preslikavaju jedna na drugu, a π proizvoljna ravan upravna na σ i α, onda se refleksijom $\mathcal{S}_\sigma$ ravni α i π preslikavaju, redom, na β i π, pa je $\pi \perp \beta$. Neposredno se dokazuje da je tada presečna prava ravni σ i π osa refleksije kojom se presečne prave, redom, ravni α i π, i β i π preslikavaju jedna na drugu.

Broj ravanskih refleksija kojima se α i β preslikavaju jedna na drugu možemo sada ustanoviti koristeći se prethodnom teoremom. □

ZADACI:

1. Ako su u jednoj ravni zadate prava s i dve tačke A i B, odrediti na toj pravoj tačku X takvu da je zbir duži AX i BX najmanji mogući.

2. Ako su u jednoj ravni zadate dve prave a i b i tačka S, odrediti na tim dvema pravama tačke A i B takve da je obim trougla SAB najmanji mogući.

3. Ako je ABC oštrougli trougao, odrediti na njegovim ivicama BC, CA, AB tri tačke P, Q, R takve da je zbir ivica trougla PQR najmanji mogući (Fagnanov problem).

4. Ako su A, B, C tri razne tačke neke prave l, a A', B', C' tačke neke prave l' takve da je $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ i $CA \cong C'A'$, dokazati da središta P, Q, R duži AA', BB', CC' pripadaju nekoj pravoj.

5. Odrediti potreban i dovoljan uslov da dva zavojna kretanja budu komutativne transformacije.

6. Da li je skup svih translacija prave invarijantna podgrupa grupe svih izometrija prave?

7. Šta je proizvod osne simetrije i zavojnog poluobrtanja ako su njihove ose međusobno upravne?

8. Šta je proizvod dveju osnih simetrija i zavojnog poluobrtanja ako su njihove ose tri međusobno upravne prave koje se seku u jednoj tački?

9. Ako neki ravan lik ima tačno dve ose refleksije, dokazati da je on centralnosimetričan.

10. Neka su zadate ravni α, ρ, σ i τ. Odrediti temena tetraedra $ABCD$ čija pljosan BCD pripada ravni α, a ρ, σ i τ su medijalne ravni ivica AB, AC i AD.

11. Dokazati da su naspramne ivice nekog tetraedra međusobno podudarne duži ako i samo ako su prave koje sadrže središta naspramnih ivica tog tetraedra njegove ose simetrije.

16. Pramenovi pravih

Podskup $\mathcal{X}$ skupa svih pravih neke ravni takvih da je za svake tri prave a, b, c iz tog podskupa kompozicija

$$\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$$

osnih refleksija, takođe osna refleksija, zvaćemo *pramenom pravih* ako van $\mathcal{X}$ ne postoji prava p takva da je za svake dve prave a i b iz $\mathcal{X}$, kompozicija

$$\mathcal{S}_p\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a,$$

opet osna refleksija.

Ako je $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, biće i $\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_c = \mathcal{S}_d$ i $\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_c = \mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_c = \mathcal{S}_{d'}$, $d' = \mathcal{S}_c(d)$, pa je kompozicija osnih refleksija u odnosu na prave a, b, c osna refleksija bez obzira na poredak refleksija u njihovoj kompoziciji.

Navedimo najpre dva primera pramenova pravih.

Primeri. 1. Skup svih pravih neke ravni koje sadrže neku tačku O te ravni, je pramen pravih.

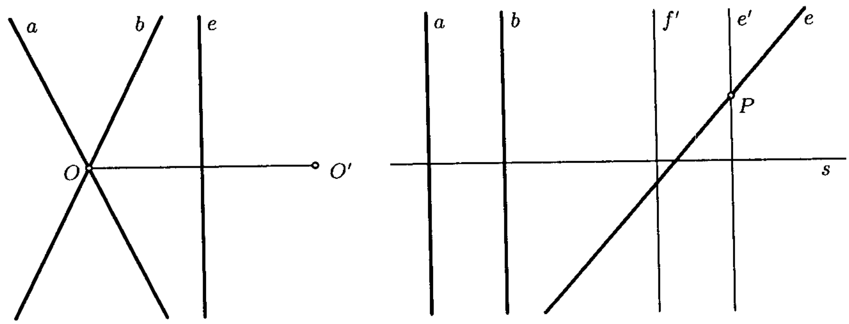
Zaista, ako su a, b, c tri razne prave jedne ravni koje sadrže O, tada je kompozicija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ indirektna izometrija koja ostavlja tačku O invarijantnom. Dakle, $\mathcal{I}$ je osna refleksija $\mathcal{S}_d$.

Obratno, ako je e proizvoljna prava koja ne sadrži O, tada kompozicija $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ nije osna refleksija. Ako bi, naprotiv, kompozicija $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ bila osna reflesija $\mathcal{S}_f$, tada bi se tačka O i refleksijom $\mathcal{S}_e$ i refleksijom $\mathcal{S}_f$ preslikavala u tačku $O' \neq O$ jer je $\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a(O) = O$ i $O \notin e$. Prave e i f bi tada bile medijatrise duži OO', dakle, bile bi istovetne, pa bi bile istovetne i prave a i b. □

Pramen pravih koje sadrže tačku O nazivamo *pramenom konkurentnih pravih*, ili *eliptičkim pramenom*, i obeležavamo ga sa $\mathcal{X}_O$. Tačku O nazivamo *središtem tog pramena.*

2. Skup svih pravih jedne ravni koje su upravne na nekoj pravoj s te ravni, je pramen pravih. Zaista, ako su a, b, c tri razne prave upravne na s, tada je kompozicija $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ indirektna izometrija koja pravu s ostavlja invarijantnom i

menja joj orijentaciju, pa stoga, na osnovu teoreme 15.3, na toj pravoj postoji invarijantna tačka u toj kompoziciji. Odatle sledi da je $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ osna refleksija $\mathcal{S}_d$ čija je osa upravna na s.



Slika 16a

Obratno, ako je e proizvoljna prava koja nije upravna na s, tada kompozicija $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ nije osna refleksija. Ako pretpostavimo suprotno, da je $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_f$, u proizvoljnoj tački P prave e postoji prava e' upravna na s, pa je $\mathcal{S}_{e'}\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{f'}$. Tada je $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_{e'}\,\mathcal{S}_{f'}$, tj. $\mathcal{S}_{e'}\,\mathcal{S}_e = \mathcal{S}_{f'}\,\mathcal{S}_f$. Kako e i e' sadrže P, i prava f' će, na osnovu teoreme 15.6, sadržati tu tačku, pa su e' i f' istovetne. Dakle, istovetne su i a i b, što protivreči pretpostavci. □

Pramen pravih koje su upravne na nekoj pravoj s nazivamo *ortogonalnim* ili *hiperboličkim pramenom* i obeležavamo ga sa $\mathcal{X}_s$. Pravu s nazivamo *osnovicom* tog pramena.

Simetrična raspoređenost. Ako su a i b prave nekog pramena konkurentnih pravih ili nekog ortogonalnog pramena, primetimo da tada, na osnovu teoreme 15.13, i osa refleksije koja te prave preslikava jednu na drugu, pripada tom pramenu. Osu refleksije kojom se prave a i b preslikavaju jedna na drugu zvaćemo i *osom refleksije* ili *osom simetrije para pravih* a, b.

Teorema 16.1: *Neka su a, b, c, d četiri prave nekog pramena konkurentnih pravih ili nekog ortogonalnog pramena. Tada je $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ ako i samo ako je osa refleksije pravih a i c istovetna sa osom refleksije pravih b i d.*

Dokaz: Ako je $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, a s osa refleksije pravih a i c i $d' = \mathcal{S}_s(b)$, biće

$$\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_{d'}\,\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b,$$

pa je

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a &= (\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_s)\,(\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_{d'}\,\mathcal{S}_s)\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a\,(\mathcal{S}_{d'}\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a)\\ &= \mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a\,(\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_{d'}) = \mathcal{S}_{d'}.\end{aligned}$$

Stoga su prave d i d' istovetne, pa je s osa refleksije para pravih b,d.

Obratno, ako je s osa refleksije i para a, c i para b, d, biće

$$\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b,$$

pa je

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a &= (\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_s)\,(\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_s)\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a\,(\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a)\\ &= \mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a\,(\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_d) = \mathcal{S}_d.\square\end{aligned}$$

Ako je osa refleksije para pravih a, c istovetna sa osom refleksije para pravih b, d, a prave a,b,c,d pripadaju jednom pramenu, reći ćemo da su ti parovi pravih *simetrično raspoređeni.* Ako je, pak, medijatrisa duži AB istovetna sa osom refleksije para pravih c, d od kojih je svaka upravna na pravoj AB, reći ćemo da su par tačaka A, B i par pravih c, d, *simetrično raspoređeni.*

Dakle, na osnovu prethodne teoreme, simetrična raspoređenost parova pravih a, c i b, d koje pripadaju nekom pramenu konkurentnih pravih ili nekom ortogonalnom pramenu pravih je potreban i dovoljan uslov da važi $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$.

Setimo se da je u oznaci $\mathcal{R}_{O,\omega}$ rotacije ravni istaknuto samo središte O te rotacije i orijentisani ugao ω. Kako je kompozicija $\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ dveju osnih refleksija kojima je definisana rotacija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ istovetna sa kompozicijom $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_d$ ako i samo ako su parovi pravih a, c i b, d simetrično raspoređeni, rotacija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ne zavisi od izbora tih dveju pravih već samo od orijentisanog ugla koji te dve prave zahvataju. Na isti način, translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$ ravni ne zavisi od izbora pravih a i b takvih da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ već samo od toga da li je orijentisana duž koja je određena tačkama u kojima su prave a i b, redom, upravne na pravoj AC, podudarna i istosmerna sa orijentisanom duži $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Istaknimo sledeće tri teoreme iz geometrije trouglova.

Teorema 16.2: *Medijatrise stranica trougla pripadaju jednom pramenu.*

Dokaz: Neka su p, q, r, redom, medijatrise stranica BC, CA, AB trougla ABC. Kako je $\mathcal{S}_r\,\mathcal{S}_q\,\mathcal{S}_p$ indirektna izometrija u kojoj je tačka B invarijantna, ona će biti osna refleksija $\mathcal{S}_s$. Stoga, po definiciji, prave p, q, r pripadaju jednom pramenu. $\square$

Pre no što formulišemo sledeću teoremu napomenimo da ćemo *simetralom ugla* zvati osu refleksije kojom se jedan krak ugla preslikava na drugi. Skrenimo pažnju na to da se bisektrisa i simetrala ugla razlikuju jer je bisektrisa poluprava, a simetrala prava.

Teorema 16.3: *Simetrale unutrašnjih uglova trougla pripadaju pramenu konkurentnih pravih.*

Dokaz: Neka su p, q, r simetrale unutrašnjih uglova, redom, kod temena A, B, C trougla ABC. Obeležimo sa a, b, c orijentisane prave BC,CA,AB i sa a', b', c' iste prave suprotne orijentacije. Tada se u kompoziciji

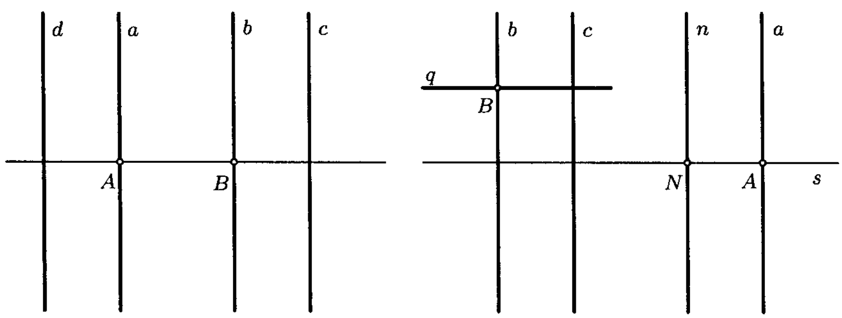
$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_r\,\mathcal{S}_q\,\mathcal{S}_p$$

prava b preslikava na b' pa, na osnovu teoreme 15.3, postoji na pravoj AC invarijantna tačka transformacije $\mathcal{I}$. Stoga je $\mathcal{I}$ osna refleksija $\mathcal{S}_s$ pa zato, po definiciji, prave p, q, r pripadaju nekom pramenu $\mathcal{X}$. Kako se bilo koje dve simetrale unutrašnjih uglova trougla seku, $\mathcal{X}$ će biti pramen konkurentnih pravih. □

Sledeća teorema se dokazuje analogno prethodnoj, pa je stoga navodimo bez dokaza.

Teorema 16.4: *Simetrale jednog unutrašnjeg i spoljašnjih uglova kod drugih dvaju temena nekog trougla pripadaju jednom pramenu.* □

Teorema 16.5: *Ako su $\mathcal{S}_A$ i $\mathcal{S}_B$ dve razne centralne simetrije, a $\mathcal{S}_c$ osna refleksija ravni, tada je kompozicija $\mathcal{S}_B\,\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_A$ osna refleksija ako i samo ako je $AB \perp c$.*



Slika 16b

Dokaz: Pretpostavimo da je $AB \perp c$ i da su a i b prave koje sadrže, redom, tačke A i B i upravne su na AB. Tada prave a, b, c pripadaju ortogonalnom pramenu pravih $\mathcal{X}_{AB}$, pa je, stoga,

$$\mathcal{S}_B\,\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{AB}\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB}\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_d.$$

Obratno, ako je $\mathcal{S}_B\,\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d$, s prava koja sadrži A i upravna je na c, a a i b prave koje sadrže, redom, A i B i upravne su na s, i q prava koja sadrži B i upravna je na b, tada je

$$\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_B\,\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_q\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_q\,\mathcal{S}_n\,\mathcal{S}_s,$$

jer prave a, b, c pripadaju pramenu pravih upravnih na s, pa je i prava n upravna na s u nekoj tački N. Stoga prave d, q, n, s pripadaju pramenu $\mathcal{X}_N$ pa, kako su q i s upravne na b, one su istovetne. Dakle, $AB \perp c$. □

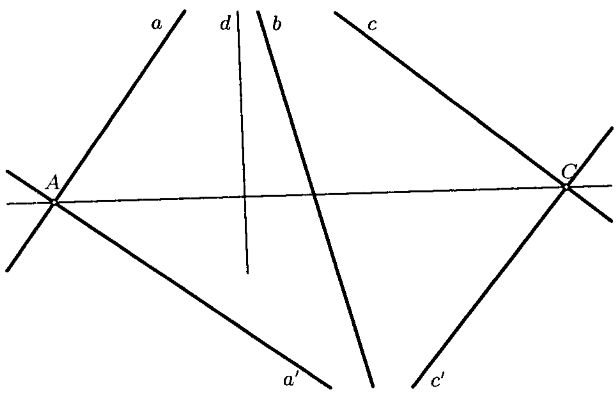
Dokaz teoreme koja sledi može se izvesti u potpunoj analogiji sa dokazom teoreme 16.1.

Teorema 16.6: *Par tačaka A, B i par pravih c, d su simetrično raspoređeni ako i samo ako je*

$$\mathcal{S}_B \, \mathcal{S}_c \, \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d. \qquad \square$$

Teorema o normalama i njene posledice. Narednom teoremom ustanovićemo u geometrijskoj teoriji pramenova značajno tvrđenje koje se naziva *teoremom o normalama.*

Teorema 16.7: *Neka su a, b, c tri prave jednog pramena, a a' i c' prave upravne na a i c, redom, u tačkama A i C. Prave a', b, c' pripadaju jednom pramenu ako i samo ako je $\mathcal{S}_c \, \mathcal{S}_b \, \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ i d prava upravna na AC.*



Slika 16c

Dokaz: Budući da prave a, b, c pripadaju jednom pramenu, kompozicija $\mathcal{S}_c \, \mathcal{S}_b \, \mathcal{S}_a$ će biti neka osna refleksija $\mathcal{S}_d$. Ako sa $\mathcal{I}$ označimo kompoziciju $\mathcal{S}_{c'} \, \mathcal{S}_b \, \mathcal{S}_{a'}$, onda je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{c'} \, \mathcal{S}_b \, \mathcal{S}_{a'} = \mathcal{S}_{c'} \, (\mathcal{S}_c \, \mathcal{S}_d \, \mathcal{S}_a) \, \mathcal{S}_{a'} = \mathcal{S}_C \, \mathcal{S}_d \, \mathcal{S}_A,$$

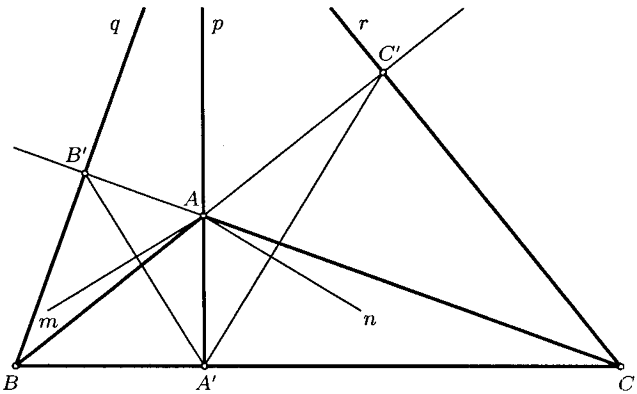
pa će, na osnovu teoreme 16.5, izometrija $\mathcal{I}$ biti osna refleksija ako i samo ako je prava d upravna na AC. $\square$

Teorema 16.8: *Prave koje sadrže temena trougla i upravne su na pravama koje sadrže njegove naspramne ivice, pripadaju jednom pramenu.*

Dokaz: Neka su p, q, r prave koje, redom, sadrže temena A, B, C nekog trougla i upravne su na pravama koje sadrže ivice BC, CA, AB, redom, u tačkama A', B', C'. Ako su svi uglovi trougla ABC oštri, tačke A', B', C' pripadaju ivicama tog trougla. Ako je jedan od uglova tog trougla tup, na primer ugao A, tada samo tačka A' pripada naspramnoj ivici tougla ABC.

Obeležimo sa m i n prave koje sadrže teme A, a upravne su, redom, na pravama $A'B'$ i $A'C'$. Kako su A i B središta dvaju pramenova konkurentnih pravih sa zajedničkom pravom AB, na osnovu teoreme o normalama biće

$$\mathcal{S}_{AB'} \, \mathcal{S}_{AB} \, \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_m \quad \text{pa je} \quad \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AC} \, \mathcal{S}_m \, \mathcal{S}_p.$$



Slika 16d

Međutim, i A i C su središta dvaju pramenova pa je, na isti način,

$$\mathcal{S}_{AC} = \mathcal{S}_{AB}\,\mathcal{S}_n\,\mathcal{S}_p.$$

Iz prethodnih dveju relacija sledi da je

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_p\,\mathcal{S}_m\,\mathcal{S}_p,$$

pa su prave m i n simetrične u odnosu na p. Stoga je prava p osa refleksije para pravih $A'B'$,$A'C'$. Na isti način, prave q i r su ose refleksija, redom, parova pravih $A'B'$,$B'C'$ i $A'C'$,$B'C'$. Ako su svi unutrašnji uglovi trougla ABC oštri, prave p, q, r su simetrale unutrašnjih uglova trougla $A'B'C'$, pa tada, na osnovu teoreme 16.3, pripadaju eliptičkom pramenu pravih. Ako je pak ugao A trougla ABC tup, p je simetrala unutrašnjeg, a q i r simetrale spoljašnjih uglova trougla $A'B'C'$, pa tada, na osnovu teoreme 16.4, p, q, r pripadaju jednom pramenu. □

Teorema 16.9: *Ako su a, d, c tri razne prave jednog pramena, tada postoji prava s koja seče prave a, d, c u trima raznim tačkama.*

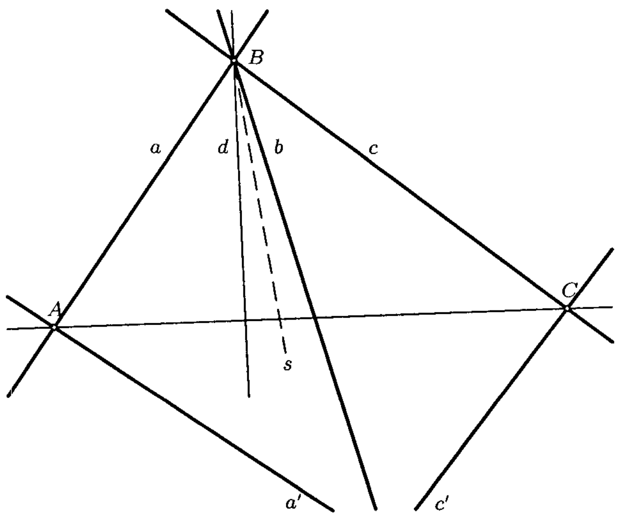
Dokaz: Ako je $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_d\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b$, ako je B proizvoljna tačka prave b i ako su A i C podnožja upravnih iz tačke B na pravama a i c, prava d će, na osnovu teoreme o normalama, biti upravna na AC, pa je AC tražena prava koja seče prave a, d, c. □

Teorema 16.10: *Ako su a, b, c tri disjunktne prave jednog pramena, tada su tačno dve od tih triju pravih sa raznih strana treće.*

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme postoji prava prava koja seče prave a, b, c u tačkama A, B, C pa, na osnovu teoreme 2.1, važi tačno jedna od triju relacija $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(B, C, A)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$. Dokaz neće izgubiti na opštosti ako pretpostavimo da je $\mathcal{B}(A, B, C)$. Kako su prave a, b, c disjunktne, sve tačke jedne od njih pripadaće nekoj poluravni čiji je rub neka od preostalih dveju pravih. Stoga su prave a i c sa raznih strana prave b, prave b i c su sa iste strane prave a, a prave a i b su sa iste strane prave c. □

Teorema 16.11: *Ako su a' i c' dve razne prave neke ravni i B tačka te ravni koja im ne pripada, tada postoji jedinstvena prava b koja sadrži B, takva da prave a',b i c' pripadaju jednom pramenu.*

Dokaz: Neka su a i c prave koje sadrže B i upravne su, redom, na a' i c' u tačkama A i C, i d prava koja sadrži B, a upravna je na pravoj AC. Kako prave a, d, c pripadaju jednom pramenu kompozicija $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_a$ će biti osna refleksija $\mathcal{S}_b$. Štaviše, ako je s osa simetrije pravih a i c, ona će, na osnovu teoreme 16.1, biti i osa simetrije pravih b i d. Dakle, $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ pa prave a',b, i c', na osnovu teoreme o normalama, pripadaju jednom pramenu.

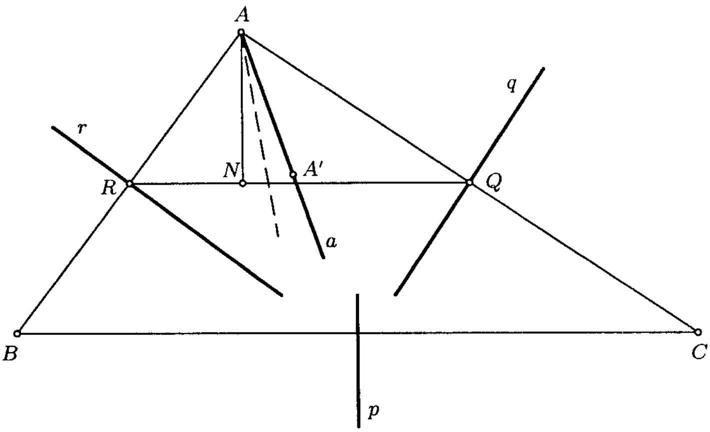


Slika 16e

Obratno, ako prava b sadrži tačku B i ako prave a', b, c' pripadaju jednom pramenu, onda je $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ i $d \perp AC$, pri čemu su a i c prave koje sadrže B i upravne su, redom, na pravama a' i c' u tačkama A i C. Dakle, osa simetrije pravih b i d je istovetna sa osom s simetrije pravih a i c. Kako je prava d jedinstvena upravna iz B na AC i njoj simetrična prava u odnosu na s, je jedinstvena. □

Dokaz prethodne teoreme nam omogućava da ustanovimo jednu važnu osobinu pramena pravih kojem pripadaju medijatrise stranica nekog trougla. Ako su, naime, p, q, r medijatrise stranica BC, CA, AB trougla ABC, Q i R središta duži CA i AB, a a prava koja sadrži A i pripada pramenu kojem pripadaju prave q i r, tada je prava a simetrična upravnoj iz A na QR u odnosu na simetralu unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC.

Štaviše, ako sa N obeležimo podnožje upravne iz A na pravoj QR, a sa A' njoj simetričnu tačku u odnosu na simetralu ugla QAR, biće uglovi QAA' i RAN podudarni pa, kako su RAN i QAN oštri uglovi, biće oštri i uglovi QAA' i RAA'.



Slika 16f

Teorema o tranzitivnosti i njene posledice. Dokažimo sada ključnu teoremu u teoriji pramenova pravih, tzv. *teoremu o tranzitivnosti.*

Teorema 16.12: *Ako su a i b dve razne prave i ako su kompozicije $\mathcal{S}_c\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_d\mathcal{S}_b\mathcal{S}_a$, osne refleksije, tada je i kompozicija $\mathcal{S}_d\mathcal{S}_c\mathcal{S}_a$, takođe, osna refleksija.*

Dokaz: Neka je A proizvoljna tačka prave a koja ne pripada ni jednoj od pravih b, c, d, neka su, b', c', d' upravne iz tačke A na pravama b, c, d, a B', C', D' podnožja tih upravnih i neka su, na posletku, b'', c'', d'' upravne iz tačke A, redom, na pravama $C'D'$,$B'D'$,$B'C'$, a B'', C'', D'' podnožja tih upravnih.

Tada je, na osnovu teoreme o normalama,

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathcal{S}_{b'}\mathcal{S}_a\mathcal{S}_{c'} &= \mathcal{S}_{d''}, \\ \mathcal{S}_{b'}\mathcal{S}_a\mathcal{S}_{d'} &= \mathcal{S}_{c''}. \end{aligned}$$

Na osnovu iste teoreme zaključujemo da su relacije

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathcal{S}_{d''}\mathcal{S}_{b'}\mathcal{S}_{c''} &= \mathcal{S}_p, \\ \mathcal{S}_{d''}\mathcal{S}_{c'}\mathcal{S}_{b''} &= \mathcal{S}_q \end{aligned}$$

zadovoljene ako i samo ako prave p i q sadrže tačku A i upravne su, redom, na pravama $C''D''$ i $B''D''$. Iz relacija (1) sledi da je

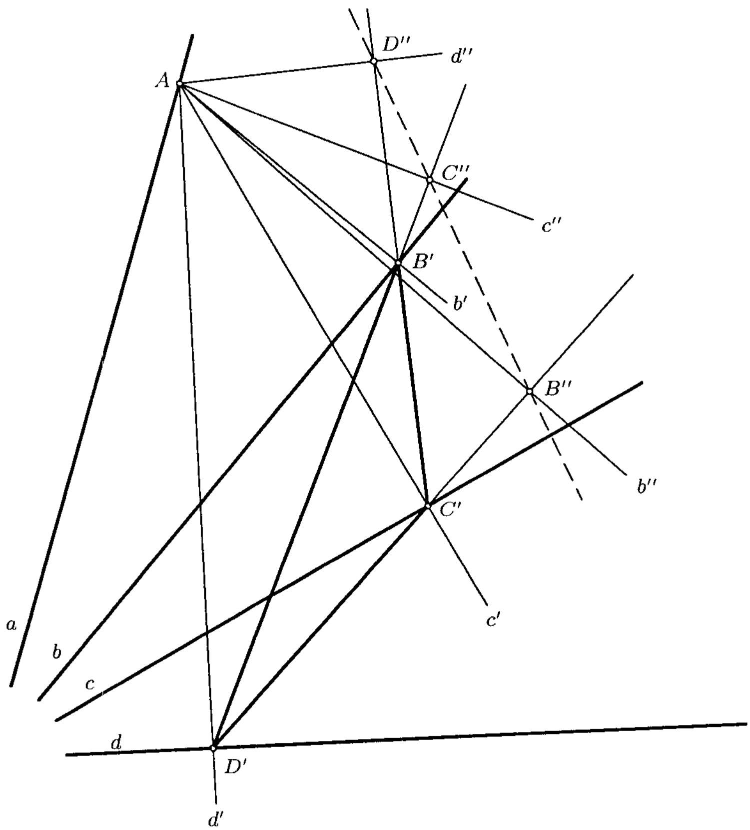
$$\mathcal{S}_{d''}\mathcal{S}_{c'} = \mathcal{S}_{c''}\mathcal{S}_{d'},$$

pa je, stoga, na osnovu druge od relacija (2),

$$\mathcal{S}_{c''}\mathcal{S}_{d'}\mathcal{S}_{b''} = \mathcal{S}_q.$$

Odavde, na osnovu teoreme o normalama, sledi da je prava q upravna na $C''B''$, a kako je q upravna i na $B''D''$ tačke B'', C'', D'' će biti kolinearne, pa će prave p i q biti istovetne. Stoga, iz relacija (2) sledi da je

$$\mathcal{S}_{b'}\mathcal{S}_{c''} = \mathcal{S}_{c'}\mathcal{S}_{b''}$$



Slika 16g

pa je

$$\mathcal{S}_{b'}\,\mathcal{S}_{c'}\,\mathcal{S}_{b''} = \mathcal{S}_{c''},$$

a kako je

$$\mathcal{S}_{b'}\,\mathcal{S}_{a}\,\mathcal{S}_{d'} = \mathcal{S}_{c''},$$

biće

$$\mathcal{S}_{c'}\,\mathcal{S}_{b''} = \mathcal{S}_{a}\,\mathcal{S}_{d'},$$

tj.

$$\mathcal{S}_{c'}\,\mathcal{S}_{a}\,\mathcal{S}_{d'} = \mathcal{S}_{b''}.$$

Dakle, na osnovu teoreme o normalama, kompozicija $\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_a$ je osna refleksija. □

Teorema 16.13: *Ako su a i b dve razne prave i ako je svaka od sledećih triju kompozicija*

$$\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a,\ \mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a,\ \mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a,$$

osna refleksija, tada je i kompozicija

$$\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_c,$$

takođe, osna refleksija.

Dokaz: Kako su $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ osne refleksije i $\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_a$ će biti osna refleksija na osnovu teoreme 16.12, pa će, stoga, i

$$\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_c$$

biti osna refleksija. Na isti način, budući da su $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ osne refleksije, i $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_a$ je osna refleksija, pa je zato i

$$\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_c$$

osna refleksija. Dakle, $\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_c$ i $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_c$ su osne refleksije, pa je na osnovu teoreme 16.12, i

$$\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_c$$

osna refleksija ako su a i c dve razne prave. Ako nisu, budući da su $\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ osne refleksije, i $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_a$ će biti osna refleksija, pa je, dakle, i $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_c$ osna refleksija. □

Teorema 16.14: *Ako su a i b dve razne prave ravni π, tada postoji jedinstven pramen pravih te ravni kojem pripadaju i a i b.*

Dokaz: Obeležimo sa $\mathcal{X}(a,b)$ skup svih pravih x ravni π takvih da je $\mathcal{S}_x\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ osna refleksija. Ako prave c, d, e pripadaju $\mathcal{X}(a,b)$, tada će, na osnovu prethodne teoreme, kompozicija $\mathcal{S}_e\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_c$ biti osna refleksija, a kako za bilo koju pravu y van $\mathcal{X}(a,b)$ kompozicija $\mathcal{S}_y\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ nije osna refleksija, skup $\mathcal{X}(a,b)$ je pramen pravih ravni π.

Dokažimo da je svaki pramen $\mathcal{X}$ koji sadrži prave a i b istovetan sa pramenom $\mathcal{X}(a,b)$. Zaista, ako neka prava x pripada pramenu $\mathcal{X}$, tada je $\mathcal{S}_x\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ osna refleksija, pa ta prava pripada i pramenu $\mathcal{X}(a,b)$. Ako neka prava y ne pripada pramenu $\mathcal{X}$, tada, po definiciji, postoje prave c i d toga pramena takve da kompozicija $\mathcal{S}_y\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_c$ nije osna refleksija. Tada, budući da su $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ i $\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ osne refleksije, kompozicija $\mathcal{S}_y\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ nije osna refleksija jer bi, u suprotnom, i $\mathcal{S}_y\,\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_c$ bila osna refleksija na osnovu teoreme 16.12. Dakle, prava y tada ne pripada pramenu $\mathcal{X}(a,b)$. □

Ako prave c i d pripadaju pramenu $\mathcal{X}(a,b)$, tada je, na osnovu prethodne teoreme, $\mathcal{X}(a,b)=\mathcal{X}(c,d)$, pa je, stoga, pramen jednoznačno određen bilo kojim dvema svojim pravama. Odatle sledi da dva razna pramena mogu imati najviše jednu zajedničku pravu.

Prethodno tvrđenje, prema kojem je pramen jednoznačno određen bilo kojim dvema svojim pravama, omogućava nam da dokažemo još nekoliko značajnih stavova iz teorije pramenova.

Teorema 16.15: *Ako je $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, onda i prava d pripada pramenu kojem pripadaju prave a, b i c.*

Dokaz: Kako je $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ biće $\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_c$. Dakle, i prava d pripada pramenu $\mathcal{X}(b,a) = \mathcal{X}(a,b)$. □

Teorema 16.16: *Ako su a, b, c tri prave nekog pramena $\mathcal{X}$ pravih i ako je s osa refleksije para pravih a, c, tada i prava $d = \mathcal{S}_s(b)$ pripada tom pramenu.*

Dokaz: Kako je $\mathcal{S}_s(a) = c$ biće $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_s$ pa, na osnovu teoreme 16.14, prava s pripada pramenu $\mathcal{X}(a,c) = \mathcal{X}$. Na isti način, $\mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_s$, pa prava d, opet na osnovu teoreme 16.14, pripada pramenu $\mathcal{X}(b,s) = \mathcal{X}$. □

Teorema 16.17: *Neka prave a, b, c pripadaju jednom pramenu pravih. Tada će kompozicija*

$$\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a,$$

biti osna refleksija $\mathcal{S}_d$ ako i samo ako je osa refleksije para pravih a i c istovetna sa osom refleksije para pravih b i d. □

Dokaz prethodne teoreme je identičan dokazu teoreme 16.1. Treba samo napomenuti da se u opravdanju jednakosti

$$\mathcal{S}_{d'}\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_{d'} \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_d\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_d$$

koristi teorema 16.16. Time je dokazano da je simetrična raspoređenost parova pravih a, c i b, d koje pripadaju proizvoljnom pramenu pravih, potreban i dovoljan uslov da važi $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$.

ZADACI:

1. Da li je relacija simetrične raspoređenosti parova pravih jednog pramena, tranzitivna?

2. Ako su a, b, c prave koje sadrže ivice nekog trougla, a p, p', q, q' i r, r' parovi pravih simetrično raspoređeni, redom, sa parovima b, c, c, a i a, b, dokazati da prave p, q, r pripadaju jednom pramenu ako i samo ako jednom pramenu pripadaju i prave p', q', r'.

3. Ako su A, B, C temena nekog trougla, a p, p', q, q' i r, r' parovi pravih simetrično raspoređeni, redom, sa parovima tačaka B, C, C, A i A, B, dokazati da prave p, q, r pripadaju jednom pramenu ako i samo ako jednom pramenu pripadaju i prave p', q', r'.

4. Ako su Q i R središta ivica CA i AB trougla ABC, ako je p medijatrisa ivice BC, a p' prava koja sadrži A i upravna je na QR, dokazati da su prave p i p' simetrično raspoređene sa tačkama Q i R.

5. Ako su a, b, c, d, e prave jedne ravni takve da prave c i d pripadaju pramenu $\mathcal{X}(a,b)$, a prava e pramenu $\mathcal{X}(c,d)$, dokazati da tada prava e pripada i pramenu $\mathcal{X}(a,b)$.

17. Epicikli

Neka je $\mathcal{X}$ pramen pravih i X proizvoljna tačka u ravni π tog pramena koja ne pripada svim pravama pramena $\mathcal{X}$. Skup svih tačaka ravni π, osnosimetričnih tački X u odnosu na prave pramena $\mathcal{X}$ zvaćemo *epiciklom* i obeležavaćemo ga sa

$$\mathcal{E}(\mathcal{X}, X).$$

Za pramen $\mathcal{X}$ i tačku X ćemo reći da definišu taj epicikl. Budući da se proizvoljnom izometrijom $\mathcal{I}$ pramen $\mathcal{X}$ preslikava na pramen $\mathcal{X}'$, njome će se epicikl $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ preslikati na epicikl $\mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$, gde je $X' = \mathcal{I}(X)$.

Ako je $\mathcal{X}_O$ pramen konkurentnih pravih, epicikl $\mathcal{E}(\mathcal{X}_O, X)$ ćemo zvati *krugom*. Tačku O ćemo zvati ***središtem*** ili ***centrom*** toga ***kruga***, a duž OX njegovim ***poluprečnikom*** ili ***radijusom***. Krug ćemo obeležavati i sa $k(O, r)$. U toj oznaci O je središte, a r poluprečnik kruga k. Neposredno se dokazuje da je krug $\mathcal{E}(\mathcal{X}_O, X)$ istovetan sa skupom svih tačaka Y ravni kojoj pripada, takvih da je $OX \cong OY$.

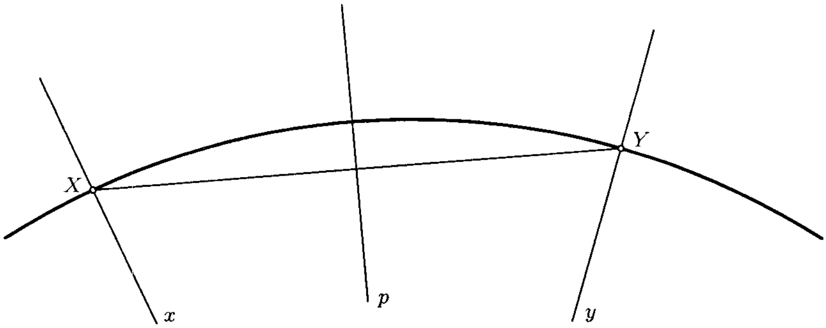
Ako je $\mathcal{X}_s$ ortogonalan pramen pravih, epicikl $\mathcal{E}(\mathcal{X}_s, X)$ ćemo zvati *ekvidistantom* ili *hiperciklom*. Ako je X' podnožje upravne iz tačke X na pravoj s, duž XX' ćemo zvati *visinom ekvidistante*. Pravu s ćemo zvati *osnovicom ekvidistante*. Neposredno se dokazuje da je ekvidistanta $\mathcal{E}(\mathcal{X}_s, X)$ istovetna sa skupom svih tačaka Y poluravni $[\![sX)$, takvih da je $XX' \cong YY'$, pri čemu je Y' podnožje upravne iz Y na s.

Pravu koja u tačkama A i B seče, redom, dve razne prave a i b zvaćemo *sečicom jednakih nagiba* pravih a i b ako su uglovi koje duž AB sa iste strane prave AB zahvata sa pravama a i b, međusobno podudarni. Ako su prave a i b istovetne, njihovom sečicom jednakih nagiba zvaćemo pravu koja je sa njima istovetna.

Teorema 17.1: *Tačka Y pripada epiciklu $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ ako i samo ako je prava XY sečica jednakih nagiba pravih x i y koje, redom, sadrže tačke X i Y, i pripadaju pramenu $\mathcal{X}$.*

Dokaz: Ako tačka Y pripada epiciklu $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, onda, po definiciji, postoji prava p pramena $\mathcal{X}$ takva da je $\mathcal{S}_p(X) = Y$. Štaviše, biće i $\mathcal{S}_p(x) = y$ jer je $\mathcal{S}_p(x)$ prava pramena $\mathcal{X}$ koja sadrži Y. Stoga se osnom refleksijom $\mathcal{S}_p$ prave x i XY preslikavaju, redom, na prave y i YX. Zato duž XY zahvata sa pravama x i y podudarne uglove, pa je, dakle, prava XY sečica jednakih nagiba tih dveju pravih.

Obratno, ako je XY sečica jednakih nagiba pravih x i y pramena $\mathcal{X}$, tada iz dokaza teoreme 15.13 sledi da je medijatrisa duži XY u isto vreme i osa refleksije para pravih x, y, pa stoga, p pripada pramenu $\mathcal{X}$. Dakle, tačka Y pripada epiciklu

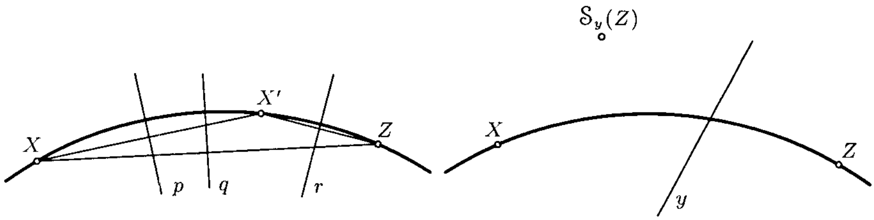


Slika 17a

$\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$. □

Teorema 17.2: *Epicikli* $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ *i* $\mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$ *su istovetni ako i samo ako je* $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ *i* $X' \in \mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$ i $X' \in \mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, i sa Z obeležimo proizvoljnu tačku epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$. Kako tačke X' i Z pripadaju epiciklu $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, medijatrise p i q duži XX' i XZ pripadaju pramenu $\mathcal{X}$ pa, na osnovu teoreme 16.2, i medijatrisa r duži $X'Z$ pripada tom pramenu. Odatle sledi da tačka Z pripada i epiciklu $\mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$. Na isti način se dokazuje da, ako Z pripada epiciklu $\mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$, onda ona pripada i $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, pa je, stoga, $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X) = \mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$.



Slika 17b

Obratno, ako $X' \notin \mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, tada je $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X) \neq \mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$, po definiciji. Ako je pak $\mathcal{X} \neq \mathcal{X}'$, tada, na osnovu teoreme 16.14, postoji najviše jedna prava koja pripada svakom od tih dvaju pramenova. Pretpostavimo da je Z proizvoljna tačka epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$. Ako $Z \notin \mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$, tada je i $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X) \neq \mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$. Ako Z pripada i $\mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$, onda postoji prava y pramena $\mathcal{X}'$ koja ne sadrži Z i ne pripada pramenu $\mathcal{X}$. Tada je $\mathcal{S}_y(Z) \neq Z$ i medijatrisa duži $Z\mathcal{S}_y(Z)$ pripada $\mathcal{X}'$, a ne pripada $\mathcal{X}$, pa $\mathcal{S}_y(Z)$ pripada $\mathcal{E}'(\mathcal{X}', Z) = \mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$, a ne pripada $\mathcal{E}(\mathcal{X}, Z) = \mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$. Stoga je $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X) \neq \mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$. □

Dakle, epicikl $\mathcal{E}$ je definisan pramenom $\mathcal{X}$ i bilo kojom tačkom X koja mu pripada. Stoga će dva epicikla definisana istim pramenom biti različiti ako i samo ako su disjunktni. Takve epicikle definisane istim pramenom zvaćemo *kopramenim*, a kopramene krugove, budući da oni imaju zajedničko središte, zvaćemo *koncentričnim*.

Teorema 17.3: *Ako epicikl $\mathcal{E}$ nije istovetan sa nekom pravom p, onda on sa njome ima najviše dve zajedničke tačke.*

Dokaz: Ako bi prava p sekla epicikl $\mathcal{E}$ u trima tačkama X, Y, Z, onda bi medijatrise duži XY i YZ pripadale pramenu koji definiše epicikl $\mathcal{E}$ i bile bi upravne na pravoj p , pa bi epicikl $\mathcal{E}$ bio osnovica ortogonalnog pramena pravih, dakle, bio bi prava. □

Ako je epicikl istovetan sa nekom pravom, zvaćemo ga *linearnim*. U suprotnom, zvaćemo ga *nelinearnim epiciklom.*

Teorema 17.4: *Dva razna epicikla se seku u najviše dvema tačkama.*

Dokaz: Pretpostavimo da su A, B, C tri razne presečne tačke dvaju epicikala. Tada medijatrise stranica trougla ABC pripadaju jednom pramenu koji definiše oba epicikla. Stoga, budući da su koprameni, ti epicikli će, na osnovu teoreme 17.2, biti istovetni. □

Dakle, postoji jedinstven epicikl koji sadrži tri razne tačke.

Teorema 17.5: *Svaka prava pramena $\mathcal{X}$ seče epicikl $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ u dvema tačkama ako je on krug, a u jednoj ako nije.*

Dokaz: Neka je y proizvoljna prava pramena $\mathcal{X}$, a x prava tog pramena koja sadrži tačku X. U zavisnosti od toga da li se prave x i y seku ili ne, broj osnih refleksija kojima se te dve prave preslikavaju jedna na drugu biće, na osnovu teoreme 15.13, dva ili jedan. Zato će i broj presečnih tačaka prave y i epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ biti dva ili jedan. □

Tačke u kojima neka prava pramena seče krug koji je tim pramenom definisan zvaćemo *dijametralno suprotnim*, a njima određenu duž *dijametrom* ili *prečnikom* toga *kruga.*

Tangenta epicikla. Ako je prava t u proizvoljnoj tački epicikla upravna na pravoj pramena kojim je taj epicikl definisan, zvaćemo je *tangentom* tog *epicikla.* Za poligon čije ivice pripadaju tangentama nekog epicikla reći ćemo da je *opisan oko* tog *epicikla.*

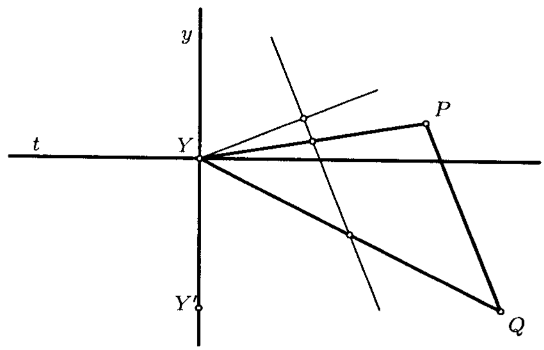
Teorema 17.6: *Ako epicikl nije linearan, onda njegova tangenta sa njime ima tačno jednu zajedničku tačku.*

Dokaz: Ako bi tangenta t u tački Y epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ imala sa tim epiciklom zajedničku i neku tačku Z različitu od Y, onda bi pored prave y koja je u Y upravna na t, i medijatrisa duži YZ pripadala pramenu $\mathcal{X}$, pa bi taj pramen bio ortogonalan, a epicikl $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ i osnovica tog pramena bi bili istovetni. □

Zajedničku tačku nelinearnog epicikla i njegove tangente nazivamo njihovom *dodirnom tačkom*, a za epicikl i njegovu tangentu reći ćemo i da se *dodiruju.*

Teorema 17.7: *Sve tačke nelinearnog epicikla su sa iste strane njegove proizvoljne tangente.*

Dokaz: Neka je prava t u nekoj tački Y epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ upravna na pravoj y pramena $\mathcal{X}$, a P i Q tačke epicikla $\mathcal{E}$ sa raznih strana tangente t. Tačke P, Q, Y su međusobno različite pa medijatrise duži određenih tim trima tačkama pripadaju pramenu $\mathcal{X}$. Obeležimo sa Y' proizvoljnu tačku prave y, različitu od Y. Tada će jedan od uglova $Y'YP$ i $Y'YQ$ biti tup, a drugi oštar.



Slika 17c

Kako i prava y pripada pramenu $\mathcal{X}$ ona je u odnosu na simetralu ugla PYQ simetrična sa upravnom iz tačke Y na pravoj koja spaja središta duži YP i YQ. No, na osnovu jedne od navedenih posledica teoreme 16.11, jedan od uglova $Y'YP$ i $Y'YQ$ tada ne bi mogao da bude tup, a drugi da bude oštar. □

Za dva epicikla reći ćemo da se *dodiruju* u tački T ako postoji zajednička tangenta tih dvaju epicikala u tački T.

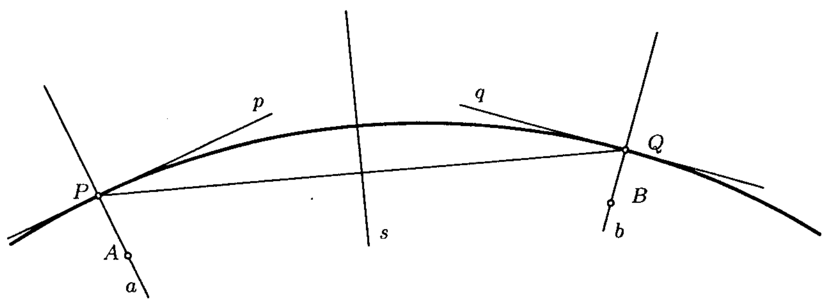
Unutrašnjost i spoljašnjost epicikla. Neka je $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ proizvoljan nelinearan epicikl koji pripada nekoj ravni π, neka je A proizvoljna tačka koja pripada ravni π, a ne pripada epiciklu $\mathcal{E}$, i neka je a prava pramena $\mathcal{X}$ koja sadrži A. Ako A pripada svakoj od poluravni koje sadrže $\mathcal{E}$, kojima su granice tangente tog epicikla u tačkama njegovog preseka sa pravom a, reći ćemo da je tačka A *unutar* $\mathcal{E}$. U suprotnom ćemo reći da je ona *izvan* tog epicikla. Skup svih tačaka unutar nekog epicikla zvaćemo njegovom *unutrašnjošću*, a svih tačaka izvan njega njegovom *spoljašnjošću*. Ako je jedna tačka unutar epicikla, a druga izvan, reći ćemo da su te dve tačke *sa raznih strana* tog *epicikla*. U protivnom ćemo reći da su one sa njegove *iste strane*. Neposredno se dokazuje da su unutrašnjost i spoljašnjost nekog epicikla neprazni, disjunktni skupovi.

Uniju kruga i njegove unutrašnjosti ćemo zvati i *kružnom površi*, a sam krug ćemo ponekad zvati i *rubom* te površi.

Teorema 17.8: *Unutrašnjost epicikla je konveksan skup.*

Dokaz: Neka je A tačka unutar epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, neka je a prava pramena $\mathcal{X}$ koja sadrži A, p tangenta epicikla u tački P njegovog preseka sa pravom a, a neka je q proizvoljna tangenta tog epicikla, različita od p. Dokažimo da je A sa one strane q sa koje je i P.

Ako prava a seče epicikl i u nekoj tački P', tada su, na osnovu teoreme 17.7, P i P' sa iste strane prave q, pa će i tačka A, budući da pripada otvorenoj duži PP', biti sa te strane prave q. Ako se presek prave a i epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ sastoji samo iz tačke P, prava a neće imati zajedničkih tačaka ni sa jednom pravom pramena $\mathcal{X}$, pa ni sa pravom b toga pramena koja sadrži dodirnu tačku Q tangete q sa tim epiciklom. Ako je B proizvoljna tačka prave b, koja pripada unutrašnjosti epicikla $\mathcal{E}$, tačke P i B biće sa iste strane prave q, pa će i svaka tačka otvorenih polupravih QP i QB biti sa te strane prave q. Dakle, svaka tačka otvorenog, konveksnog ugla PQB pripadaće nekoj otvorenoj poluravni β sa rubom q. Tačke A i B su sa iste strane prave PQ. Zaista, ako je s medijatrisa duži PQ refleksijom $\mathcal{S}_s$ se prave p i a preslikavaju, redom, na prave q i b, a poluravan α sa rubom p, koja sadrži epicikl $\mathcal{E}$ na poluravan β sa rubom q, koja sadrži isti epicikl. Tom refleksijom se, dakle, poluprava PA preslikava na polupravu QB, pa su tačke A i B sa iste strane prave PQ. Budući da su a i b disjunktne prave, otvorena poluprava PA će pripadati otvorenom, konveksnom uglu PQB. Zato će i tačka A pripadati tom uglu, pa stoga i poluravni β.

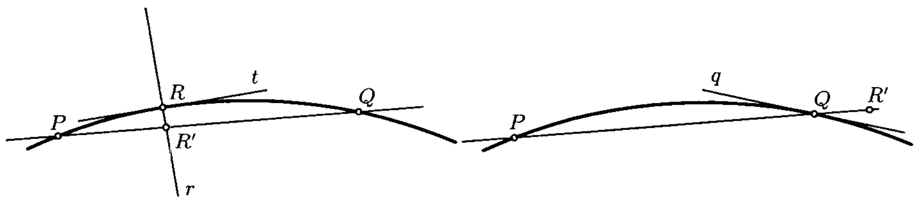


Slika 17d

Dakle, tačka A pripada svakoj poluravni koja sadrži $\mathcal{E}$ i kojoj je granica tangenta tog epicikla. Stoga svaka tačka unutar $\mathcal{E}$ pripada preseku na taj način određenih poluravni. Iz definicije tačaka unutar epicikla neposredno sledi da svaka tačka koja pripada preseku tih poluravni pripada i unutrašnjosti epicikla. Unutrašnjost epicikla će zato biti presek familije poluravni pa, kako su poluravni konveksni skupovi, i unutrašnjost epicikla je konveksan skup. □

Teorema 17.9: *Ako su P i Q tačke nelinearnog epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, svaka tačka duži (PQ) je unutar tog epicikla, a svaka tačka prave PQ van duži $[PQ]$ je izvan tog epicikla.*

Dokaz: Neka je R' proizvoljna tačka duži (PQ), r prava pramena $\mathcal{X}$ koja sadrži R', i R presek prave r i epicikla $\mathcal{E}$. Tačke P i Q pripadaju poluravni koja sadrži taj epicikl i kojoj je granica tangenta t epicikla u tački R. Otuda je i R' tačka te poluravni pa, po definiciji, R' pripada unutrašnjosti epicikla $\mathcal{E}$.



Slika 17e

Ako je R' tačka prave PQ koja ne pripada duži $[PQ]$, tada važi jedan od rasporeda:

$$\mathcal{B}(P,Q,R') \quad \text{ili} \quad \mathcal{B}(R',P,Q).$$

Neka je $\mathcal{B}(P,Q,R')$ i neka je q tangenta epicikla $\mathcal{E}$ u tački Q. Tada su tačke P i R' sa raznih strana q , pa kako je skup svih unutrašnjih tačaka epicikla sa one strane q sa koje je i P, biće tačka R' izvan tog epicikla. Slično se dokazuje kada je $\mathcal{B}(R',P,Q)$. □

Duž PQ čija temena pripadaju nekom nelinearnom epiciklu zvaćemo *tetivom* tog epicikla. Za poligon čije su ivice tetive nekog epicikla reći ćemo da je *upisan* u taj epicikl.

Teorema 17.10: *Ako neka izometrija ravni ostavlja invarijantnim epicikl $\mathcal{E}(\mathcal{X},X)$, onda ona ostavlja invarijantnim i pramen $\mathcal{X}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da se izometrijom $\mathcal{I}$ pramen $\mathcal{X}$ preslikava na neki drugi pramen $\mathcal{X}'$, a tačka X u neku tačku X'. Kako su epicikli $\mathcal{E}(\mathcal{X},X)$ i $\mathcal{E}'(\mathcal{X}',X')$ istovetni, i pramenovi $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ će, na osnovu teoreme 17.2, takođe biti istovetni. □

ZADACI:

1. Dokazati da postoji epicikl koji sadrži tri zadate tačke.

2. Dokazati da postoji krug koji dodiruje ivice trougla. Dokazati da pored tog kruga postoje još tri epicikla oko kojih je taj trougao opisan (spolja upisani epicikli tog trougla).

3. Ako su p i q tangente nekog epicikla u tačkama P i Q, dokazati da medijatrisa s duži PQ i prave p i q pripadaju jednom pramenu. Ako se prave p i q seku u tački R, dokazati da je $PR \cong QR$.

4. Ako je četvorougao opisan oko nekog epicikla, dokazati da je zbir dveju njegovih ivica jednak zbiru drugih dveju njegovih ivica.

5. Dokazati da je prost četvorougao upisan u epicikl ako i samo ako je zbir dvaju naspramnih uglova tog četvorougla jednak zbiru drugih dvaju njegovih uglova.

6. Ako je $\mathcal{I}$ izometrija ravni koja ostavlja invarijantnim nelinearni epicikl $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, dokazati da je ona ili refleksija u odnosu na neku pravu pramena $\mathcal{X}$ ili kompozicija dveju refleksija u odnosu na prave koje pripadaju tom pramenu.

18. Snopovi

Pramenovi ravni. Podskup $\mathcal{Y}$ skupa svih ravni prostora takvih da je za svake tri ravni α,β,γ iz tog skupa kompozicija

$$\mathcal{S}_\gamma \, \mathcal{S}_\beta \, \mathcal{S}_\alpha$$

takođe, ravanska refleksija, zvaćemo *pramenom ravni* ako van $\mathcal{Y}$ ne postoji ravan δ takva da je za svake dve ravni α i β iz $\mathcal{Y}$ kompozicija

$$\mathcal{S}_\delta \, \mathcal{S}_\beta \, \mathcal{S}_\alpha,$$

opet ravanska refleksija. Kao i u slučaju pramena pravih, neposredno se dokazuje da je kompozicija ravanskih refleksija u odnosu na ravni α,β,γ iz $\mathcal{Y}$, ravanska refleksija, bez obzira na poredak refleksija u njihovoj kompoziciji.

I prvi primeri pramenova ravni su u potpunoj analogiji sa primerima pramenova pravih iz odeljka 16. Navedimo ih:

1. Skup svih ravni koje sadrže neku pravu o je pramen ravni koji nazivamo *koaksijalnim* ili *eliptičkim pramenom ravni.* Taj pramen ćemo obeležavati sa $\mathcal{Y}_o$. Pravu o zvaćemo *osom* tog *pramena.*

2. Skup svih ravni upravnih na nekoj pravoj s je pramen ravni koji nazivamo *ortogonalnim* ili *hiperboličkim pramenom ravni.* Pravu s ćemo zvati *osnovicom* tog *pramena.*

Teorema 18.1: *Ako je neka ravan upravna na dvema ravnima nekog pramena ravni, ona je onda upravna na svakoj ravni toga pramena.*

Dokaz: Ako su ravni α i β pramena $\mathcal{Y}$ obe upravne na nekoj ravni π, i ako je γ proizvoljna ravan tog pramena, tada će, budući da je

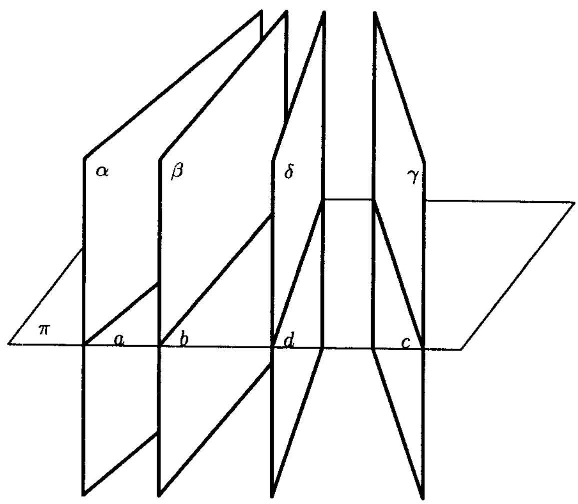
$$\mathcal{S}_\gamma \, \mathcal{S}_\beta \, \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\delta, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}_\beta \, \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\gamma \, \mathcal{S}_\delta,$$

ravan π biti invarijantna u kompoziciji $\mathcal{S}_\gamma \, \mathcal{S}_\delta$. Ako se ravni α i β seku, tada njihova presečna prava s, na osnovu teoreme 15.6, pripada ravnima γ i δ. Budući da su ravni α i β upravne na π, na njoj će biti upravna i prava s, pa stoga, i ravni γ i δ koje je sadrže.

Ako su ravni α i β disjunktne, iz teoreme 15.5 sledi da su disjunktne i ravni γ i δ, pa je, stoga, svaka od njih različita od ravni π. Ako ravni γ i δ ne bi bile upravne na π, obe bi bile simetralne ravni para disjunktnih ravni π i $\pi' = \mathcal{S}_\delta(\pi)$, što protivreči teoremi 15.14. □

Za ravan π koja je upravna na svim ravnima nekog pramena $\mathcal{Y}$ reći ćemo da je *upravna na pramenu ravni* i pisaćemo $\pi \perp \mathcal{Y}$.

Teorema 18.2: *Skup $\mathcal{X}$ pravih neke ravni π je pramen pravih ako i samo ako je skup $\mathcal{Y}$ ravni koje sadrže prave skupa $\mathcal{X}$ i upravne su na ravni π, pramen ravni.*



Slika 18a

Dokaz: Ako je $\mathcal{Y}$ pramen ravni, obeležimo sa a, b, c tri proizvoljne prave skupa $\mathcal{X}$, sa α, β, γ ravni pramena $\mathcal{Y}$ koje, redom, sadrže a, b, c, i sa δ ravan (koja je na osnovu dokaza prethodne teoreme upravna na π) takvu da je $\mathcal{S}_\gamma \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\delta$. Tada je

$$\mathcal{S}_c \mathcal{S}_b \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\gamma \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\gamma \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\delta = \mathcal{S}_d.$$

Budući da prave a, b, c, d pripadaju ravni π, osne simetrije $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c, \mathcal{S}_d$ prostora će ostavljati ravan π invarijantnom, štaviše, biće refleksije te ravni. Dakle, kompozicija osnih refleksija u odnosu na prave a, b, c je osna refleksija.

Ako je $\mathcal{X}$ pramen pravih, obeležimo sa α, β, γ tri proizvoljne ravni skupa $\mathcal{Y}$, sa a, b, c prave pramena $\mathcal{X}$ koje, redom, pripadaju tim trima ravnima i sa d pravu pramena $\mathcal{X}$ takvu da je osna refleksija $\mathcal{S}_d$ ravni π jednaka kompoziciji $\mathcal{S}_c \mathcal{S}_b \mathcal{S}_a$ triju osnih refleksija iste ravni. Tada je osna simetrija $\mathcal{S}_d$ prostora jednaka kompoziciji $\mathcal{S}_c \mathcal{S}_b \mathcal{S}_a$ osnih simetrija prostora jer je izometrija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_d \mathcal{S}_c \mathcal{S}_b \mathcal{S}_a$ identičnost budući da je $\mathcal{I}$ direktna izometrija prostora koja sve tačke ravni π ostavlja invarijantnim.

Budući da je $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_b \mathcal{S}_\pi$, $\mathcal{S}_\gamma = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_c$ i $\mathcal{S}_c \mathcal{S}_b \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, biće

$$\mathcal{S}_\gamma \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_c \mathcal{S}_b \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_\delta,$$

pri čemu je δ ravan koja sadrži d i upravna je na π.

Ako je $\mathcal{Y}$ pramen ravni, dokažimo da van $\mathcal{X}$ nema prave d takve da za bilo koje dve prave a i b iz $\mathcal{X}$, kompozicija $\mathcal{S}_d \mathcal{S}_b \mathcal{S}_a$ bude refleksija. Zaista, ako bi takva prava postojala i ako bi δ bila ravan koja sadrži d i upravna je na π onda bi, na osnovu prethodnog, ravni α, β, δ pripadale pramenu $\mathcal{Y}$. To, međutim, protivreči pretpostavci da $\delta \notin \mathcal{Y}$.

Ako je $\mathcal{X}$ pramen pravih, dokažimo da van $\mathcal{Y}$ nema ravni δ takve da za bilo koje dve ravni α i β iz $\mathcal{Y}$, kompozicija $\mathcal{S}_\delta \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha$ bude refleksija. Zaista, ako bi takva ravan postojala i ako bi d bila presečna prava ravni δ i π, onda bi na osnovu prethodnog, prave a, b, d pripadale pramenu $\mathcal{X}$ što protivreči pretpostavci da $d \notin \mathcal{X}$. □

Teoreme koje smo upravo dokazali omogućavaju nam da u analogiji sa odgovarajućim teoremama koje se odnose na pramenove pravih, ustanovimo osnovna svojstva pramenova ravni. Zaista, ako su α i β dve proizvoljne, međusobno različite ravni, ako je π ravan upravna na obema, i a i b, redom, presečne prave ravni α i β sa π, budući da postoji jedinstven pramen pravih kojem pripadaju a i b, postojaće jedinstven pramen ravni kojem pripadaju α i β. Taj pramen ćemo obeležavati sa $\mathcal{Y}(\alpha, \beta)$. Štaviše, ako $\gamma, \delta \in \mathcal{Y}(\alpha, \beta)$, i ako su c i d, redom, presečne prave ravni γ i δ sa ravni π, budući da iz $c, d \in \mathcal{X}(a, b)$ sledi da $a, b \in \mathcal{X}(c, d)$, biće i $\alpha, \beta \in \mathcal{Y}(\gamma, \delta)$. Time smo ustanovili da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 18.3: *Postoji jedinstven pramen ravni kojem pripadaju dve razne ravni. Taj pramen je jednoznačno određen bilo kojim dvema ravnima koje mu pripadaju.* □

Na isti način, teorema 16.11, zajedno sa prethodnim teoremama, omogućava nam da neposredno ustanovimo postojanje jedinstvene ravni γ koja pripada pramenu $\mathcal{Y}(\alpha, \beta)$ i sadrži neku tačku C prostora.

Teorema 18.4: *Postoji jedinstvena ravan koja sadrži proizvoljnu tačku A prostora i pripada zadatom pramenu ravni, osim ako je zadati pramen eliptički, a A tačka koja pripada njegovoj osi.* □

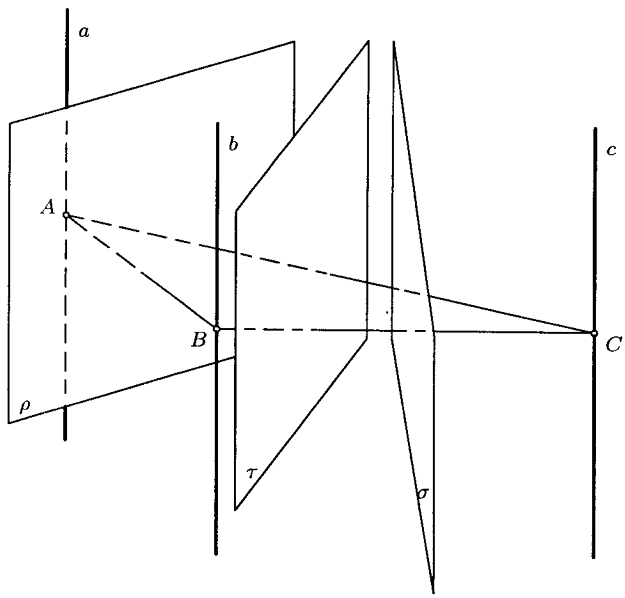
Slično prethodnom može se ustanoviti tvrđenje analogno teoremi 16.17: ako ravni α, β, γ pripadaju jednom pramenu, tada će kompozicija $\mathcal{S}_\gamma \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha$ biti ravanska refleksija $\mathcal{S}_\delta$ ako i samo ako je ravan refleksije para ravni α i γ istovetna sa ravni refleksije para ravni β i δ.

Ako je ravan refleksije para ravni α, γ istovetna sa ravni refleksije para ravni β, δ, a ravni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pripadaju jednom pramenu, reći ćemo da su ti parovi ravni *simetrično raspoređeni*. Dakle, simetrična raspoređenost parova ravni α, γ i β, δ koje pripadaju nekom pramenu ravni je potreban i dovoljan uslov da važi $\mathcal{S}_\gamma \mathcal{S}_\beta \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\delta$.

Setimo se da je u oznaci $\mathcal{R}_{s,\omega}$ rotacije prostora istaknuta samo osa s te rotacije i orijentisani ugao ω. Kako je kompozicija $\mathcal{S}_\beta\,\mathcal{S}_\alpha$ dveju ravanskih refleksija kojima je definisana rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$ istovetna sa kompozicijom $\mathcal{S}_\gamma\,\mathcal{S}_\delta$ ako i samo ako su parovi ravni α,γ i β,δ simetrično raspoređeni, rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$ ne zavisi od izbora tih dveju ravni već samo od orijentisanog ugla koji te dve ravni zahvataju. Na isti način, translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$ prostora ne zavisi od izbora ravni α i β takvih da je $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_\beta\,\mathcal{S}_\alpha$ već samo od toga da li je orijentisana duž određena tačkama u kojima su ravni α i β, redom, upravne na pravoj AC, podudarna i istosmerna sa orijentisanom duži $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Dokažimo još dve teoreme koje se odnose na pramenove ravni.

Teorema 18.5: *Ako su a, b, c tri prave od kojih su svake dve disjunktne i koplanarne, a sve tri ne pripadaju istoj ravni, onda medijalne ravni ρ, σ, τ, redom, parova pravih a, b, b, c, c, a pripadaju jednom pramenu.*



Slika 18b

Dokaz: U kompoziciji

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\tau\,\mathcal{S}_\sigma\,\mathcal{S}_\rho$$

prava a je invarijantna. Dokažimo da je u toj kompoziciji i svaka tačka A te prave invarijantna.

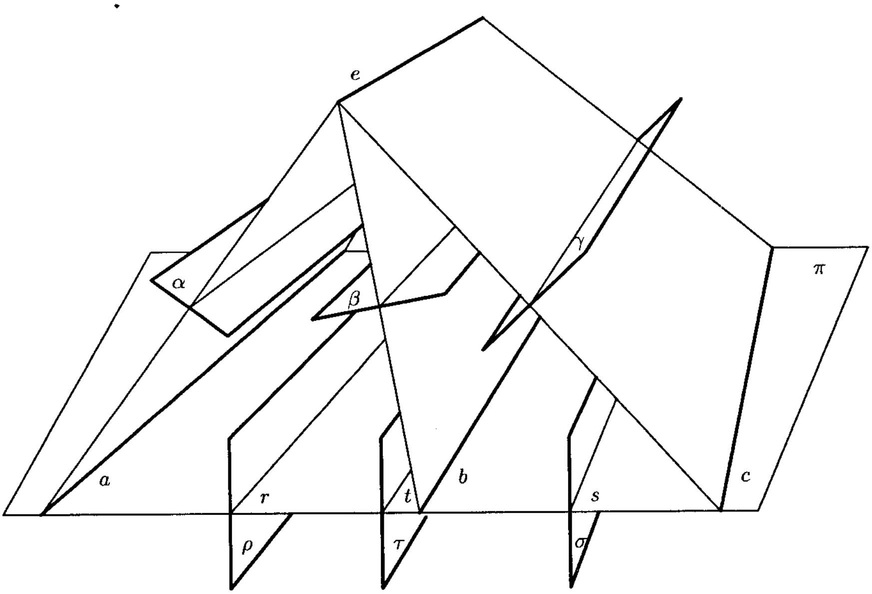
Ako je $\mathcal{S}_\rho(A) = B$ i $\mathcal{S}_\sigma(B) = C$, tačke A, B, C su nekolinearne jer bi, u suprotnom, prave a, b, c bile koplanarne. Kako medijatrise ivica trougla ABC pripadaju jednom pramenu, medijalne ravni ρ, σ, φ, redom, duži AB, BC, CA pripadaju jednom pramenu. Dakle,

$$\mathcal{S}_\varphi\,\mathcal{S}_\sigma\,\mathcal{S}_\rho = \mathcal{S}_\alpha.$$

Dokažimo da je $\mathcal{S}_\varphi(c)=a$, tj. da je $\varphi=\tau$. Ako bi bilo $\mathcal{S}_\varphi(c)=d$ i $d\neq a$, prave c i d bi pripadale istoj ravni upravnoj na φ. Budući da je $A\in d$, prava d bi tada pripadala ravni ac. Kako je $\mathcal{S}_\alpha(a)=d$ ravan α bi bila upravna i na ravni kojoj pripadaju prave a,c,d i na ravni ABC, dakle i na pravoj AC. Tada bi, budući da su α i φ upravne na AC, i ρ i σ bile upravne na istoj pravoj, što je nemoguće. Dakle, $a=d$, pa je $\varphi=\tau$. □

Teorema 18.6: *Presek koaksijalnog pramena $\mathcal{Y}$ ravni, i bilo koje ravni π van tog pramena je pramen pravih.*

Dokaz: Kako za svaku tačku ravni π postoji jedinstvena ravan koja je sadrži i pripada pramenu $\mathcal{Y}$, presek tog pramena i ravni π je neki skup $\mathcal{X}$ pravih ravni π. Ako osa e pramena $\mathcal{Y}$ prodire π u nekoj tački E, neposredno se dokazuje da je tada $\mathcal{X}$ eliptički pramen pravih sa središtem E.



Slika 18c

Pretpostavimo da e ne prodire π i sa a,b,c obeležimo tri prave skupa $\mathcal{X}$, sa α,β,γ obeležimo medijalne ravni, redom, parova disjunktnih pravih e,a, e,b, e,c, i sa ρ,σ,τ medijalne ravni, redom, parova disjunktnih koplanarnih pravih a,b, b,c, c,a. Tada je na osnovu prethodne teoreme,

$$\mathcal{S}_\beta\,\mathcal{S}_\rho\,\mathcal{S}_\alpha=\mathcal{S}_{\varepsilon_1},\quad \mathcal{S}_\gamma\,\mathcal{S}_\sigma\,\mathcal{S}_\beta=\mathcal{S}_{\varepsilon_2},\quad \mathcal{S}_\alpha\,\mathcal{S}_\tau\,\mathcal{S}_\gamma=\mathcal{S}_{\varepsilon_3},$$

pri čemu svaka od ravni $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ sadrži e. Stoga je

$$\mathcal{S}_\alpha\,\mathcal{S}_\tau\,\mathcal{S}_\sigma\,\mathcal{S}_\rho\,\mathcal{S}_\alpha=\mathcal{S}_{\varepsilon_3}\,\mathcal{S}_{\varepsilon_2}\,\mathcal{S}_{\varepsilon_1}=\mathcal{S}_\varepsilon,$$

tj.

$$\mathcal{S}_\tau \, \mathcal{S}_\sigma \, \mathcal{S}_\rho = \mathcal{S}_\alpha \, \mathcal{S}_\varepsilon \, \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_{\varepsilon'}.$$

Kako je $\varepsilon' = \mathcal{S}_\alpha(\varepsilon)$, ravan ε' sadrži pravu a i upravna je na π. Dakle, ako sa r, s, t obeležimo presečne prave, redom, ravni ρ, σ, τ sa ravni π, biće

$$\mathcal{S}_t \, \mathcal{S}_s \, \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_a,$$

pa prava a pripada pramenu kojem pripadaju r, s, t. Na isti način tom pramenu pripadaju i prave b i c. Dakle, prava c pripada pramenu $\mathcal{X}(a, b)$.

Dokažimo obratno, ako prava c pripada pramenu $\mathcal{X}(a, b)$, da su tada prave c i e koplanarne. U tom cilju obeležimo sa C proizvoljnu tačku prave c. Ako je prava c' presek ravni Ce i π, ona će, na osnovu prethodnog, pripadati pramenu $\mathcal{X}(a, b)$. Međutim, prave c i c' sadrže tačku C i pripadaju pramenu $\mathcal{X}(a, b)$ disjunktnih pravih, pa je $c = c'$. □

Snopovi pravih i ravni. Podskup $\mathcal{U}$ skupa svih pravih prostora takvih da su svake dve prave iz tog skupa koplanarne nazivamo *snopom pravih* ako van $\mathcal{U}$ ne postoji ni jedna prava koplanarna sa svakom pravom iz skupa $\mathcal{U}$ i ako sve prave skupa $\mathcal{U}$ ne pripadaju jednoj ravni.

Iz definicije snopa pravih i teoreme 18.6 neposredno sledi da je skup svih pravih nekog snopa koje pripadaju nekoj ravni u kojoj je proizvoljna prava tog snopa, podskup nekog pramena pravih.

Skup $\mathcal{V}$ svih ravni od kojih svaka sadrži bar jednu pravu nekog snopa $\mathcal{U}$ pravih, zvaćemo *snopom ravni.* Za snop $\mathcal{V}$ reći ćemo da je *generisan snopom* $\mathcal{U}$.

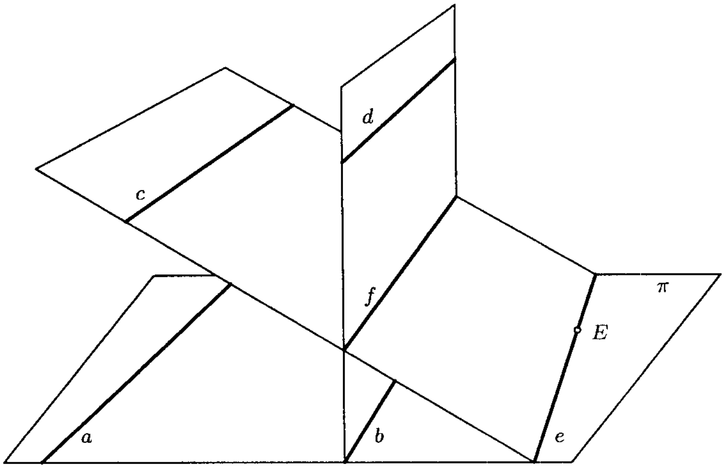
Neposredno se dokazuje da je skup svih pravih prostora koje sadrže neku tačku O, snop pravih. Njega zovemo *snopom konkurentnih pravih* ili *eliptičkim snopom pravih,* i obeležavamo ga sa $\mathcal{U}_O$. Na isti način, i skup svih pravih upravnih na nekoj ravni π je snop pravih. Njega nazivamo *ortogonalnim* ili *hiperboličkim snopom pravih,* i obeležavamo ga sa $\mathcal{U}_\pi$. Svaki od prethodnih dvaju snopova pravih određuje po jedan snop ravni. Njih, redom, nazivamo *snopom konkurentnih ravni* ili *eliptičkim snopom,* i *ortogonalnim* ili *hiperboličkim snopom ravni.* Obeležavamo ih, redom, sa $\mathcal{V}_O$ i $\mathcal{V}_\pi$.

Teorema 18.7: *Ako su a i b dve razne prave neke ravni π, a c i d prave van ravni π svaka koplanarna i sa a i sa b, onda su i prave c i d koplanarne.*

Dokaz: Ako prava c pripada ravni bd, dokaz je završen. Stoga pretpostavimo da c ne pripada ravni bd.

Budući da ravan bd razlaže prostor na dva poluprostora, a prava b ravan π na dve poluravni, za svaku tačku $C \in c$ van ravni bd, postojaće tačka $E \in \pi$ takva da su $C, E \div bd$. Tada ravan Ec seče ravni bd i π. Neka su f i e, redom, presečne prave ravni Ec sa ravnima bd i π.

Kako je presek pramena koaksijalnih ravni sa osom c, i ravni π, na osnovu teoreme 18.6, pramen pravih $\mathcal{X}(a, b)$, tom pramenu pripada i prava e. Pramen



Slika 18d

$\mathcal{X}(a, b)$ je presek pramena koaksijalnih ravni sa osom d, i ravni π. Stoga prave d i e pripadaju jednoj ravni. Kako prave b, f, d pripadaju trima ravnima koje sve sadrže e te prave, na osnovu teoreme 18.6, pripadaju jednom pramenu pravih, pramenu $\mathcal{X}(f, b)$. Taj pramen je presek pramena koaksijalnih ravni sa osom c, i ravni bd pa prave c i d pripadaju jednoj ravni. □

Teorema 18.8: *Postoji jedinstven snop pravih koji sadrži dve razne, koplanarne prave. Taj snop je jednoznačno određen bilo kojim svojim dvema pravama.*

Dokaz: Budući da u ravni koja sadrži dve razne prave a i b postoji jedinstven pramen $\mathcal{X}(a, b)$, iz teorema 18.6 i 18.7 neposredno sledi da skup $\mathcal{U}(a, b)$ svih pravih prostora koji se sastoji iz pravih pramena $\mathcal{X}(a, b)$ i svih pravih van ravni ab, koplanarnih i sa a i sa b, ima svojstvo da su mu svake dve prave koplanarne.

Ako je $\mathcal{U}$ snop koji sadrži prave a i b, dokažimo da je $\mathcal{U} = \mathcal{U}(a, b)$. Ako prava c pripada snopu $\mathcal{U}$, a ne pripada ravni ab, ona pripada skupu $\mathcal{U}(a, b)$, a svaka prava d snopa $\mathcal{U}$ koja pripada ravni ab, na osnovu teoreme 18.6, pripada pramenu $\mathcal{X}(a, b)$. Dakle, $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}(a, b)$. Kako su svake dve prave skupa $\mathcal{U}$ koplanarne biće $\mathcal{U} = \mathcal{U}(a, b)$.□

Iz dokaza prethodne teoreme neposredno sledi naredno tvrđenje.

Teorema 18.9: *Postoji jedinstvena prava zadatog snopa koja sadrži proizvoljnu tačku prostora.* □

Teorema 18.10: *Presek proizvoljnog pramena ravni i bilo koje ravni koja tom pramenu ne pripada je pramen pravih.*

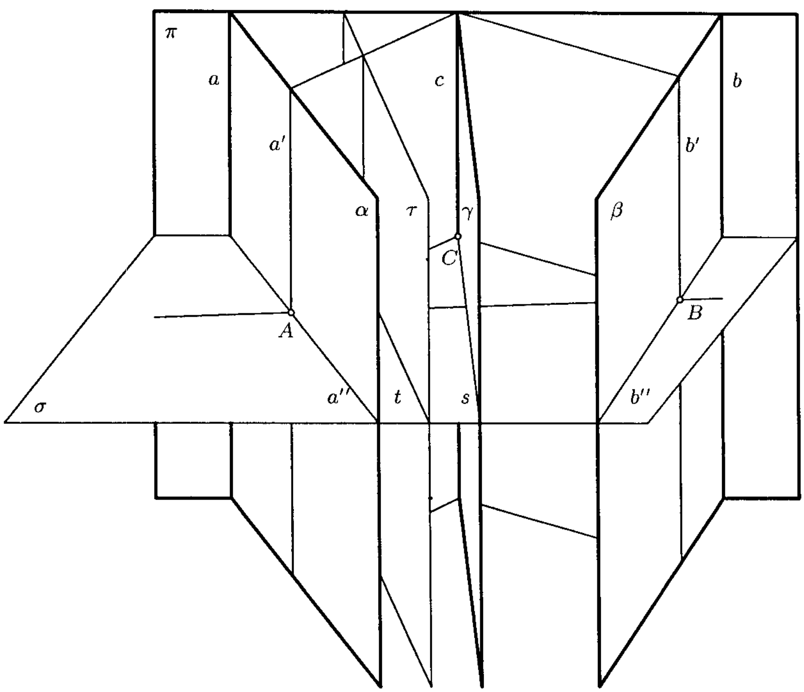
Dokaz: Neka su α, β, γ tri ravni nekog pramena $\mathcal{Y}$, neka je π proizvoljna ravan koja seče svaku od tih triju ravni, a ne pripada pramenu $\mathcal{Y}$, i neka su a, b, c presečne prave ravni π, redom, sa ravnima α, β, γ. Ako su a' i b' prave koje, redom, sadrže upravne projekcije prave c na ravnima α i β, dokažimo da će te dve prave biti koplanarne. U tom cilju pretpostavimo da je C proizvoljna tačka prave c, da su A i B podnožja upravnih iz C na ravnima α i β, a σ ravan koja sadrži C i upravna je na pramenu $\mathcal{Y}$. Presek ravni σ sa svakim od pramenova $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Y}_c$ je pramen pravih. Ako sa a'', b'', s obeležimo, redom, presečne prave ravni σ sa ravnima α, β, γ, biće

$$\mathcal{S}_{b''}\,\mathcal{S}_s\,\mathcal{S}_{a''} = \mathcal{S}_t.$$

Na osnovu teoreme 16.7, prava t će biti upravna na AB. Ako sa τ obeležimo ravan koja sadrži t i upravna je na σ, biće

$$\mathcal{S}_\beta\,\mathcal{S}_\gamma\,\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\tau.$$

Budući da je ravan τ jedinstvena bez obzira na izbor tačke C na pravoj c, prave a' i b' pripadaju jednoj ravni koja je kao i sve prave AB, upravna na τ. Stoga prave a', b', c pripadaju jednom snopu $\mathcal{U}$. Kako je prava a koplanarna i sa a' i sa c, a prava b i sa b' i sa c, prave a, b, c pripadaju snopu $\mathcal{U}$. Budući da te tri prave pripadaju jednoj ravni, pripadaće jednom pramenu pravih.



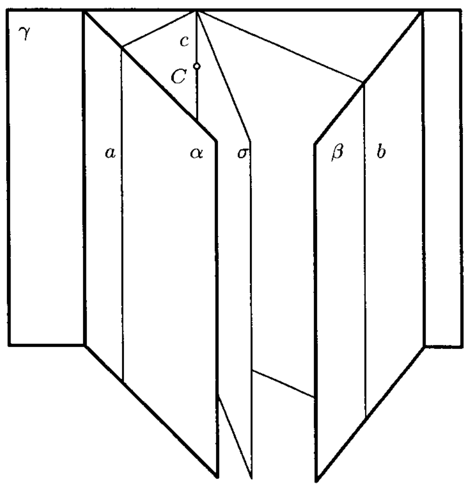
Slika 18e

Ako su a i b presečne prave ravni π sa dvema ravnima nekog pramena $\mathcal{Y}$, a prava c nije, tada prave a, b, c ne pripadaju jednom pramenu pravih. Zaista, ako je C proizvoljna tačka prave c, a c' presek ravni π i ravni pramena $\mathcal{Y}$ koja sadrži C, tada, na osnovu prethodnog, prave a, b, c' pripadaju jednom pramenu. Ako bi i a, b, c pripadale jednom pramenu pravih, tada bi postojale dve prave jednog pramena pravih koje sadrže tačku C. □

Teorema 18.11: *Ako ravni α i β pripadaju nekom snopu $\mathcal{V}$, tom snopu pripada svaka ravan pramena $\mathcal{Y}(\alpha, \beta)$.*

Dokaz: Ako je γ proizvoljna ravan pramena $\mathcal{Y}(\alpha, \beta)$, tada, na osnovu teorema 16.9 i 18.2, postoji ravan π snopa $\mathcal{V}$ koja seče svaku od ravni α, β, γ. Budući da je presek pramena $\mathcal{Y}(\alpha, \beta)$ i ravni π koja ne pripada pramenu $\mathcal{Y}(\alpha, \beta)$, pramen pravih, ravan γ pramena $\mathcal{Y}(\alpha, \beta)$ sadrži pravu snopa pravih koji definiše $\mathcal{V}$. Stoga i ravan γ pripada $\mathcal{V}$. □

Teorema 18.12: *Postoji jedinstven snop ravni kojem pripadaju tri razne ravni α, β, γ koje ne pripadaju jednom pramenu.*



Slika 18f

Dokaz: Neka je C proizvoljna tačka ravni γ i neka je σ ravan pramena $\mathcal{Y}(\alpha, \beta)$ koja sadrži C. Obeležimo sa c presečnu pravu ravni γ i σ, a sa a i b prave koje sadrže upravne projekcije prave c, redom, na ravnima α i β. Kao i u dokazu teoreme 18.10 dokazuje se da prave a i b pripadaju jednoj ravni. Stoga prave a, b, c pripadaju jednom snopu. Dakle, i ravni α, β, γ, po definiciji, pripadaju jednom snopu $\mathcal{V}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Ako je $\mathcal{V}$ snop koji sadrži ravni α, β, γ, dokažimo da je $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\alpha, \beta, \gamma)$. Kako ravan σ pripada pramenu $\mathcal{Y}(\alpha, \beta)$ ona će, na osnovu prethodne teoreme, pripadati i snopu $\mathcal{V}$. Stoga prava c pripada snopu $\mathcal{U}$ kojim je generisan snop $\mathcal{V}$. Budući da tada ravni koje sadrže c i upravne su, redom, na ravnima α i β, pripadaju snopu $\mathcal{V}$, presečne prave a i b tih dveju ravni sa α i β, pripadaju snopu $\mathcal{U}$. Kako je snop $\mathcal{U}(a, b)$ jednoznačno određen, biće $\mathcal{U} = \mathcal{U}(a, b)$. Stoga je i njime generisani snop $\mathcal{V}(\alpha, \beta, \gamma)$, jednoznačno određen. □

Teorema 18.13: *Presek dvaju raznih snopova ravni je pramen ravni.*

Dokaz: Neka su $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{V}_2$ dva razna snopa ravni. Budući da za svaku tačku prostora postoje dve prave koje je sadrže, takve da prva pripada snopu pravih koji definiše $\mathcal{V}_1$, a druga snopu pravih kojim je definisan snop $\mathcal{V}_2$, za svaku tačku prostora će postojati ravan koja je sadrži, a pripada i snopu $\mathcal{V}_1$ i snopu $\mathcal{V}_2$. Neka su α i β dve takve ravni. Svaka ravan pramena $\mathcal{Y}(\alpha,\beta)$, na osnovu teoreme 18.11, pripada i snopu $\mathcal{V}_1$ i snopu $\mathcal{V}_2$. Najzad, na osnovu teoreme 18.12, van tog pramena ravni ne postoji više ni jedna ravan koja pripada i snopu $\mathcal{V}_1$ i snopu $\mathcal{V}_2$. □

ZADACI:

1. Dokazati da simetrijske ravni diedara nekog triedra pripadaju koaksialnom pramenu ravni.
2. Dokazati da simetrijske ravni jednog unutrašnjeg i spoljašnjih diedara kod drugih dvaju ivica nekog triedra pripadaju koaksialnom pramenu ravni.
3. Dokazati da simetrijske ravni ivičnih uglova nekog triedra pripadaju koaksialnom pramenu ravni.
4. Dokazati da bisektrise uglova naporednih ivičnim uglovima nekog triedra pripadaju jednoj ravni.
5. Dokazati da šest simetrijskih ravni ivica nekog tetraedra pripada jednom snopu.
6. Dokazati da se šest simetrijskih ravni diedara nekog tetraedra seku u jednoj tački.

19. Episfere

Neka je $\mathcal{U}$ snop pravih i X proizvoljna tačka prostora. Skup

$$\mathcal{F}(\mathcal{U},X),$$

svih tačaka prostora osnosimetričnih tački X u odnosu na prave snopa $\mathcal{U}$ zvaćemo *episferom.* Ako je $\mathcal{V}$ snop ravni generisan snopom $\mathcal{U}$, neposredno se proverava da je episfera $\mathcal{F}(\mathcal{U},X)$ istovetna sa skupom $\mathcal{F}(\mathcal{V},X)$ svih slika tačke X u refleksijama u odnosu na ravni snopa $\mathcal{V}$. Za snop $\mathcal{U}$ (ili $\mathcal{V}$) i tačku X reći ćemo da *definišu* episferu $\mathcal{F}(\mathcal{U},X)$, tj. $\mathcal{F}(\mathcal{V},X)$. Budući da se proizvoljnom izometrijom $\mathcal{I}$ snop $\mathcal{U}$ preslikava na snop $\mathcal{U}'$, njome će se episfera $\mathcal{F}(\mathcal{U},X)$ preslikati na episferu $\mathcal{F}'(\mathcal{U}',X')$, gde je $X'=\mathcal{I}(X)$.

Episferu $\mathcal{F}(\mathcal{U}_O,X)$ ćemo zvati *sferom.* Tačku O ćemo zvati *središtem* ili *centrom sfere*, a duž OX, njenim *poluprečnikom.* Neposredno se dokazuje da je skup tačaka sfere istovetan sa skupom tačaka X' prostora takvih da je $OX \cong OX'$.

Episferu $\mathcal{F}(\mathcal{U}_\pi, X)$ ćemo zvati *ekvidistantnom površi* ili *hipersferom*, a ravan π njenom *osnovom*. Ako je X' podnožje upravne iz tačke X na ravni π, duž XX' ćemo zvati *visinom ekvidistantne površi*. Neposredno se dokazuje da je skup tačaka ekvidistantne površi istovetan sa skupom tačaka Y poluprostora $[\![\pi X)$ takvih da je $XX' \cong YY'$, gde je Y' podnožje upravne iz Y na π. Ako tačka X pripada ravni π, ekvidistantna površ $\mathcal{F}(\mathcal{U}_\pi, X)$ je istovetna sa ravni π.

Ako je episfera istovetna sa nekom ravni, zvaćemo je *ravnom*. U suprotnom, zvaćemo je *neravnom episferom*.

Teorema 19.1: *Presek episfere $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$ i ravni α koja sadrži proizvoljnu pravu snopa $\mathcal{U}$ je epicikl.*

Dokaz: Ako je $\mathcal{U}$ snop konkurentnih pravih, $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$ je sfera, pa se neposredno dokazuje da je njen presek sa ravni α koja sadrži središte te sfere, krug. Stoga pretpostavimo da $\mathcal{U}$ nije eliptički snop pravih.

Budući da je presek snopa $\mathcal{U}$ i ravni α pramen pravih, ako ravan α sadrži tačku X, neposredno se dokazuje da je tada presek episfere $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$ i te ravni, epicikl.

Pretpostavimo da X ne pripada α, sa $\mathcal{X}$ obeležimo pramen pravih ravni α koji pripada snopu $\mathcal{U}$, sa Y tačku proizvoljne prave tog pramena koja pripada episferi, i dokažimo da je presek ravni α i episfere $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$, epicikl $\mathcal{E}(\mathcal{X}, Y)$. U tom cilju sa Z obeležimo proizvoljnu tačku tog epicikla, sa x, y, z obeležimo prave snopa $\mathcal{U}$ koje, redom, sadrže tačke X, Y, Z i sa ρ, σ, τ medijalne ravni, redom, parova pravih x, y, y, z, z, x. Kako prave x, y, z ne pripadaju istoj ravni, a svake dve su disjunktne i koplanarne, ravni ρ, σ, τ, na osnovu teoreme 18.5, pripadaju jednom pramenu. Stoga je u kompoziciji $\mathcal{S}_\tau \mathcal{S}_\sigma \mathcal{S}_\rho$ svaka tačka prave x invarijantna, pa se refleksijom $\mathcal{S}_\tau$ tačka Z preslikava u X. Odatle sledi da tačka Z pripada episferi $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$. Ako pak sa Z obeležimo tačku te episfere koja pripada α, a različita je od Y, u kompoziciji $\mathcal{S}_\sigma \mathcal{S}_\rho \mathcal{S}_\tau$ je Z invarijantna tačka, pa stoga, Z pripada i epiciklu $\mathcal{E}(\mathcal{X}, Y)$ jer je $\mathcal{S}_\sigma(Y) = Z$. □

Iz prethodne teoreme i teoreme 17.5 neposredno sledi da svaka prava snopa $\mathcal{U}$ seče episferu $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$ u dvema tačkama ako je ona sfera, a u jednoj ako nije. Tačke u kojima neka prava snopa seče sferu koja je tim snopom definisana zvaćemo *dijametralno suprotnim*, a njima određenu duž *dijametrom* ili *prečnikom* te sfere.

Teorema 19.2: *Episfere $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$ i $\mathcal{F}'(\mathcal{U}', X')$ su istovetne ako i samo ako je $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ i $X' \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$.*

Dokaz: Ako je $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ i $X' \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$, tada, ako je Z proizvoljna tačka episfere $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$, onda iz dokaza prethodne teoreme sledi da Z pripada i $\mathcal{F}'$, i obratno, ako $Z \in \mathcal{F}'$, tada i $Z \in \mathcal{F}$.

Ako $X' \notin \mathcal{F}$, tada je $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$, po definiciji. Ako je pak $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$, budući da postoji ravan α koja sadrži po jednu pravu iz svakog od snopova $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$, presek te ravni sa $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ će, na osnovu teoreme 17.2, biti dva razna epicikla. Stoga je $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$. □

Dakle, episfera $\mathcal{F}$ je definisana snopom $\mathcal{U}$ i bilo kojom tačkom X koja joj pripada. Stoga će dve episfere definisane istim snopom biti različite ako i samo ako su disjunktne.

Teorema 19.3: *Svaka episfera istovetna je sa skupom svih slika nekog epicikla u rotacijama oko neke prave.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$ proizvoljna episfera. Ravanska refleksija u odnosu na bilo koju ravan α koja sadrži pravu x pramena $\mathcal{U}$, takvu da je $X \in x$, ostavlja i $\mathcal{U}$ i X invarijantnim pa, dakle, i episferu $\mathcal{F}$ ostavlja invarijantnom. Ako je pak α bilo koja ravan snopa ravni koji je određen snopom $\mathcal{U}$, takva da sadrži proizvoljnu tačku X' episfere $\mathcal{F}$, tada $\mathcal{S}_\alpha$ ostavlja invarijantnom episferu $\mathcal{F}'(\mathcal{U}, X')$ pa, budući da je na osnovu prethodne teoreme $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X) = \mathcal{F}'(\mathcal{U}, X')$, ostavlja invarijantnom i episferu $\mathcal{F}$.

Neka je epicikl $\mathcal{E}$ presek proizvoljne ravni α koja sadrži neku pravu y snopa $\mathcal{U}$ sa episferom $\mathcal{F}$. Dokažimo da je $\mathcal{F}$ istovetna sa skupom $\mathcal{G}$ svih slika epicikla $\mathcal{E}$ u rotacijama čija je osa prava y. Kako je svaka rotacija $\mathcal{R}$ čija je osa prava koja pripada $\mathcal{U}$, kompozicija refleksija u odnosu na dve ravni koje sadrže tu pravu, $\mathcal{R}$ ostavlja $\mathcal{F}$ invarijantnom, pa je $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Ako je Z proizvoljna tačka episfere $\mathcal{F}$, budući da postoji ravanska refleksija $\mathcal{S}_\beta$ koja preslikava ravni α i yZ jednu na drugu, a episferu $\mathcal{F}$ na sebe, postojaće tačka $Z' \in \mathcal{E}$ takva da je $\mathcal{S}_\alpha \mathcal{S}_\beta(Z') = Z$. Dakle, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. □

Ako je ravan τ u proizvoljnoj tački episfere upravna na pravoj snopa kojim je ta episfera definisana, zvaćemo je *tangentnom ravni* te episfere. Iz prethodne teoreme i teoreme 17.6 neposredno sledi da je presek neravne episfere i njene tangentne ravni, tačka. Budući da su, na osnovu teoreme 17.7, sve tačke nelinearnog epicikla sa iste strane njegove proizvoljne tangente, sve tačke neravne episfere će biti sa iste strane njene proizvoljne tangentne ravni. Zajedničku tačku neravne episfere i njene tangentne ravni nazivamo njihovom *dodirnom tačkom*, a za episferu i njenu tangentnu ravan reći ćemo i da se *dodiruju*.

Neka je A proizvoljna tačka i a prava koja sadrži A, snopa koji definiše episferu $\mathcal{F}$. Ako A pripada svakom od poluprostora koji sadrže $\mathcal{F}$, a kojima su granice tangentne ravni te episfere u tačkama njenog preseka sa pravom a, reći ćemo da je tačka A *unutar* $\mathcal{F}$. U suprotnom ćemo reći da je ona *izvan* te episfere. Skup svih tačaka unutar neke episfere zvaćemo njenom *unutrašnjošću*, a svih tačaka izvan nje, njenom *spoljašnjošću*. Ako je jedna tačka unutar episfere, a druga izvan, reći ćemo da su te dve tačke *sa raznih strana* te episfere, a u protivnom ćemo reći da su sa njene *iste strane*. Neposredno se dokazuje da su unutrašnjost i spoljašnjost neke episfere neprazni, disjunktni skupovi. Iz prethodne teoreme i teoreme 17.8 neposredno sledi da je unutrašnjost episfere konveksan skup.

Uniju sfere i njene unutrašnjosti zvaćemo i *loptom* ili *kuglom*, a sferu ćemo ponekad zvati i *rubom* lopte (ili kugle).

Teorema 19.4: *Ako dve razne episfere imaju zajedničkih tačaka, njihov presek je tačka ili epicikl.*

Dokaz: Pretpostavimo da su zadate episfere $\mathcal{F}(\mathcal{U},X)$ i $\mathcal{F}'(\mathcal{U}',X')$ koje imaju zajedničkih tačaka. Zbog teoreme 19.2 možemo pretpostaviti da je $X=X'$. Budući da su episfere $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ različite, biće $\mathcal{U}\neq\mathcal{U}'$, pa su i snopovi ravni $\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}'$ generisani snopovima $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$ međusobno različiti. Kako je, na osnovu teoreme 18.13, presek snopova $\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}'$ pramen ravni $\mathcal{Y}$, a skup svih slika tačke X u refleksijama u odnosu na ravni pramena $\mathcal{Y}$, epicikl $\mathcal{E}$ koji pripada ravni π upravnoj na pramenu $\mathcal{Y}$ u tački X, biće $\mathcal{F}(\mathcal{U},X)\cap\mathcal{F}'(\mathcal{U}',X)=\mathcal{F}(\mathcal{V},X)\cap\mathcal{F}'(\mathcal{V}',X)=\mathcal{E}$. □

Ako je jedna episfera ravna, njen presek sa nekom drugom episferom je, na osnovu prethodne teoreme, epicikl, pa je, dakle, presek ravni i episfere, epicikl.

ZADATAK:

1. Dokazati da postoji episfera koja sadrži sva temena nekog tetraedra (*opisana episfera* tog tetraedra) i da postoji sfera koja dodiruje sve njegove pljosni (*upisana sfera* tog tetraedra).

20. Ravanske i prostorne izometrije

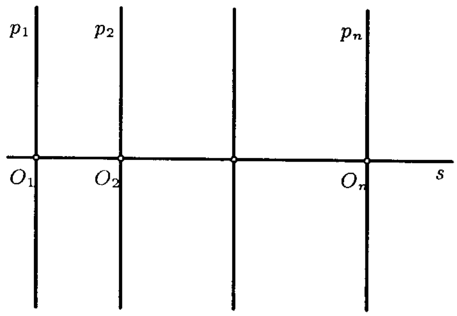
U petnaestom odeljku smo definisali neke od izometrija ravni i prostora, i ustanovili neka od njihovih osnovnih svojstava. Tada nije bilo moguće ozbiljnije razviti teoriju ravanskih i prostornih izometrija budući da su nam bili nepoznati elementi teorije pramenova pravih i ravni. U ovom odeljku, oslanjajući se na teoriju pramenova, dokazaćemo nekoliko važnih stavova o ravanskim izometrijama. Ustanovićemo zatim i neke od važnih osobina direktnih i indirektnih izometrija prostora.

Ravanske izometrije. Počećemo sa izometrijskim transformacijama ravni.

Teorema 20.1: *Kompozicija n centralnih simetrija ravni kojima središta pripadaju jednoj pravoj je centralna simetrija ako je n neparan broj, a translacija ili identičnost ako je n paran.*

Dokaz: Neka je s prava koja sadrži središta $O_1,O_2,\ldots,O_n$ centralnih simetrija, a $p_1,p_2,\ldots,p_n$ prave koje sadrže, redom, $O_1,O_2,\ldots,O_n$ i upravne su na s. Centralna simetrija u odnosu na bilo koje središte $O_1,O_2,\ldots,O_n$ može tada da se predstavi kao komutativna kompozicija osne refleksije $\mathcal{S}_s$ i osne refleksije u odnosu na odgovarajuću pravu upravnu na s.

Ako je n paran broj, kompozicija $\mathcal{I}$ centralnih simetrija u odnosu na središta $O_1, O_2, \ldots, O_n$ podudaraće se sa kompozicijom osnih refleksija u odnosu na prave $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Kako te prave pripadaju ortogonalnom pramenu biće $\mathcal{I} = \mathcal{S}_q \mathcal{S}_p$, gde su p i q prave koje takođe pripadaju tom pramenu. Ako su p i q različite, $\mathcal{I}$ će, po definiciji, biti translacija, a ako su istovetne, identičnost.

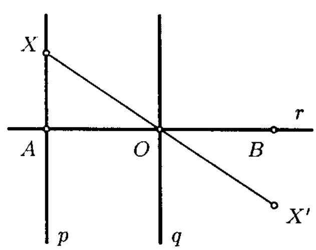


Slika 20a

Ako je n neparan broj, $\mathcal{I}$ će biti kompozicija $n+1$ osnih refleksija u odnosu na prave $p_1, p_2, \ldots, p_n, s$. Budući da prave $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pripadaju ortogonalnom pramenu, biće $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \mathcal{S}_s$, gde je p prava koja je u nekoj tački O upravna na s. Dakle, $\mathcal{I} = \mathcal{S}_O$. □

Teorema 20.2: *Ako prave a, b, c ne pripadaju jednom pramenu pravih, kompozicija $\mathcal{S}_c \mathcal{S}_b \mathcal{S}_a$ je klizajuća refleksija te ravni.*

Dokaz: Kompozicija $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c \mathcal{S}_b \mathcal{S}_a$ nije osna refleksija budući da prave a, b, c ne pripadaju jednom pramenu, pa stoga, ona nema invarijantnih tačaka. Neka je X' slika proizvoljne tačke X u transformaciji $\mathcal{I}$, a O središte duži XX'. Kompozicija $\mathcal{S}_O \mathcal{I}$ će, u tom slučaju, biti indirektna izometrija u kojoj je X invarijantna tačka, dakle, biće osna refleksija $\mathcal{S}_p$. Prava p će sadržati X ali ne i O jer bi, u tom slučaju O bila invarijantna tačka transformacije $\mathcal{I}$.



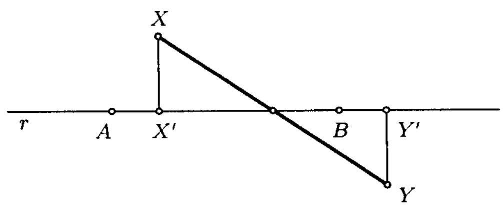
Slika 20b

Dakle, $\mathcal{S}_O \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$, pa je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_O \mathcal{S}_p$. Ako sa r obeležimo pravu koja sadrži O i upravna je na p, a sa q pravu koja u tački O upravna na r, biće $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \mathcal{S}_q \mathcal{S}_p$.

Zaključujemo da je $\mathcal{I}$, po definiciji, klizajuća refleksija. Ako sa A obeležimo presek pravih p i r, a sa B tačku simetričnu tački A u odnosu na q, biće $\mathcal{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$. □

Prethodna teorema omogućava nam da klasifikujemo indirektne izometrije ravni. Zaista, ako pretpostavimo da je $\mathcal{I}$ bilo koja indirektna izometrija ravni, ona je ili osna refleksija $\mathcal{S}_a$ ili kompozicija $\mathcal{S}_c\,\mathcal{S}_b\,\mathcal{S}_a$ triju osnih refleksija. Ako prave a, b, c pripadaju jednom pramenu, $\mathcal{I}$ je opet osna refleksija, a ako ne pripadaju, ona će, na osnovu prethodne teoreme, biti klizajuća refleksija.

Ako u klizajućoj refleksiji $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$ tački X odgovara tačka Y i ako su X' i Y' podnožja upravnih iz X i Y na osnovici r te klizajuće refleksije, duži XX' i YY' biće podudarne, pa će središte duži XY pripadati osnovici r. Budući da središte duži određene parom odgovarajućih tačaka u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_p$ pripada pravoj p, možemo zaključiti da važi i sledeći stav koji se naziva *teoremom Šal-Hjelmsleva*:



Slika 20c

Teorema 20.3: *Središta duži koje spajaju odgovarajuće tačke neke indirektne izometrije ravni pripadaju jednoj pravoj.* □

Izometrije prostora. Dokažimo sada nekoliko teorema u vezi sa izometrijskim transformacijama prostora. Najpre ćemo dokazati tzv. *Dalamberovu teoremu*:

Teorema 20.4: *Svaka direktna izometrija prostora koja ima najmanje jednu invarijantnu tačku je ili identičnost ili osna rotacija.*

Dokaz: Pretpostavimo da neidentička izometrija $\mathcal{I}$ prostora ostavlja invarijantnom neku tačku O. Tada postoji tačka P čija je slika $Q = \mathcal{I}(P)$ od nje različita. Ako je α medijalna ravan duži PQ, tačke O i P će biti invarijantne u kompoziciji $\mathcal{S}_\alpha\,\mathcal{I}$, pa je, na osnovu teoreme 15.5,

$$\mathcal{S}_\alpha\,\mathcal{I} = \mathcal{S}_\beta, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{I} = \mathcal{S}_\alpha\,\mathcal{S}_\beta,$$

pri čemu je β ravan koja sadrži tačke O i P. Budući da tačka P pripada ravni β ali ne i ravni α, te dve ravni su različite. One se seku jer obe sadrže tačku O, pa je $\mathcal{I}$ osna rotacija prostora. □

Iz prethodne teoreme neposredno sledi znamenita *Ojlerova teorema o proizvodu rotacija*, prema kojoj je kompozicija dveju osnih rotacija prostora čije se ose seku, opet osna rotacija.

Teorema 20.5: *Svaka indirektna izometrija prostora sa jedinstvenom invarijantnom tačkom je rotaciona refleksija.*

Dokaz: Neka je P tačka koja se indirektnom izometrijom $\mathcal{I}$ prostora preslikava u neku drugu tačku Q. Ako je O jedina invarijantna tačka transformacije $\mathcal{I}$, biće $(O,P)\cong(O,Q)$, pa tačka O pripada medijalnoj ravni α duži PQ. Kako je $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I}$ direktna izometrija u kojoj su O i P invarijantne tačke, ona će biti ili identičnost ili osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$ čija osa sadrži tačke O i P. Ako bi izometrija $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I}$ bila identičnost, $\mathcal{I}$ bi bila ravanska refleksija, pa bi u njoj pored O bilo još invarijantnih tačaka. Stoga je

$$\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I}=\mathcal{R}_{s,\omega}.$$

Kako tačka O pripada i pravoj s i ravni α, a tačka P samo pravoj s, prava s prodire α. Ako je, uz to, s upravna na α, $\mathcal{I}$ će, po definiciji, biti rotaciona refleksija. Ako s nije upravna na α, obeležimo sa β ravan koja sadrži s i upravna je na α, a sa γ ravan takvu da je $\mathcal{R}_{s,\omega}=\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma$. Ako je p presečna prava ravni α i β, biće

$$\mathcal{I}=\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma=\mathcal{S}_p\mathcal{S}_\gamma.$$

Neka je δ ravan koja sadrži p i upravna je na γ, a θ ravan koja sadrži p i upravna je na δ. Tada je $\mathcal{S}_p=\mathcal{S}_\delta\mathcal{S}_\theta$, pa kako su ravni γ i θ upravne na δ i sadrže tačku O, biće

$$\mathcal{I}=\mathcal{S}_\delta\mathcal{S}_\theta\mathcal{S}_\gamma=\mathcal{S}_\delta\mathcal{R}_{t,\varphi}=\mathcal{R}_{\delta;t,\varphi}.\qquad\square$$

Teorema 20.6: *Svaka direktna izometrija prostora se može izraziti kao kompozicija dveju osnih simetrija.*

Dokaz: Ako je direktna izometrija prostora identičnost, ona se može izraziti kao proizvod $\mathcal{S}_p\mathcal{S}_p$ gde je p bilo koja prava. Ako izometrija $\mathcal{I}$ nije identičnost, tada postoji tačka P takva da je slika Q te tačke u transformaciji $\mathcal{I}$, od nje različita. Neka je α medijalna ravan duži PQ. Indirektna izometrija $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I}$ ima invarijantnu tačku P, pa je ona, na osnovu teorema 15.5 i 20.5, ili ravanska refleksija ili rotaciona refleksija.

Ako je $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I}=\mathcal{S}_\beta$, ako je π ravan upravna i na α i na β, a p i q presečne prave ravni π sa ravnima α i β, tada je

$$\mathcal{I}=\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta=\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\pi\mathcal{S}_\beta=\mathcal{S}_p\mathcal{S}_q.$$

Ako je $\mathcal{S}_\alpha\mathcal{I}=\mathcal{R}_{\delta;s,\omega}$, ako je β ravan koja sadrži s i upravna je na α, γ ravan takva da je $\mathcal{R}_{s,\omega}=\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma$, a p i q presečne prave, redom, parova ravni α i β, γ i δ, tada je

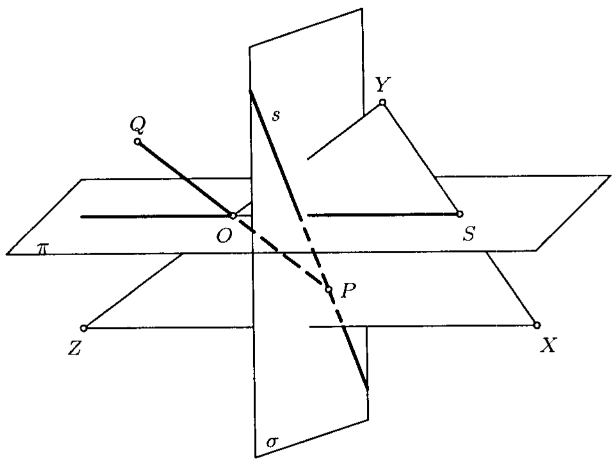
$$\mathcal{I}=\mathcal{S}_\alpha\mathcal{R}_{\delta;s,\omega}=\mathcal{S}_\alpha\mathcal{S}_\beta\mathcal{S}_\gamma\mathcal{S}_\delta=\mathcal{S}_p\mathcal{S}_q.\qquad\square$$

Dokažimo, na kraju ovog odeljka, *teoremu Šal-Hjelmsleva* za prostor.

Teorema 20.7: *Središta duži koje spajaju odgovarajuće tačke neke indirektne izometrije prostora, pripadaju jednoj ravni.*

Dokaz: Neka je P tačka prostora koja se indirektnom izometrijom $\mathcal{I}$ preslikava u neku drugu tačku Q, a O središte duži PQ. Kompozicija $\mathcal{S}_O\mathcal{I}$ je direktna izometrija u kojoj je tačka P invarijantna, pa je, na osnovu Dalamberove teoreme, ona ili identičnost ili osna rotacija $\mathcal{R}_{s,\omega}$, pri čemu P pripada pravoj s.

Ako je identičnost, biće $\mathcal{I} = \mathcal{S}_O$, pa dokaz sledi neposredno. Ako nije, obeležimo sa π ravan koja sadrži O i upravna je na s, sa X bilo koju tačku prostora različitu od P, a sa Y njenu sliku u transformaciji $\mathcal{I}$ i dokažimo da središte S duži XY pripada ravni π.



Slika 20d

Ako je $\mathcal{S}_O(Y) = Z$, biće $\mathcal{R}_{s,\omega}(X) = Z$. Zato medijalna ravan σ duži XZ sadrži pravu s. Prava OS je upravna na σ na osnovu teoreme 12.11, pa je, stoga, upravna i na pravoj s koja joj pripada. Odatle sledi da S pripada π. □

ZADACI:

1. Ako su $\mathcal{S}_A$ i $\mathcal{S}_B$ dve razne centralne simetrije prostora, a $\mathcal{S}_\gamma$ ravanska refleksija, dokazati da je kompozicija $\mathcal{S}_B\,\mathcal{S}_\gamma\,\mathcal{S}_A$ ravanska refleksija ako i samo ako je prava AB upravna na ravni γ.

2. Dokazati da je proizvod triju ravanskih refleksija, ravanska ili klizajuća refleksija ako i samo ako su osnove tih refleksija upravne na jednoj ravni.

3. Dokazati da je svaka izometrija proizvod dveju involucija.

4. Ako su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dva podudarna, suprotnosmerna tetraedra, dokazati da središta duži AA', BB', CC', DD' pripadaju jednoj ravni.

5. Dokazati da je kompozicija

$$\mathcal{T}_{2\overrightarrow{CA}}\,\mathcal{T}_{2\overrightarrow{BC}}\,\mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$$

triju translacija, identičnost (Donkinova teorema).

NEPREKIDNOST

Od samih početaka geometrije pa sve do kraja devetnaestog stoleća geometrijska neprekidnost se podrazumevala prećutno, kao nešto što je jasno po sebi. Tvrđenje prema kojem krug koji ima tačaka sa raznih strana neke prave, tu pravu i seče, nije dokazivano već se pretpostavljalo kao jasna geometrijska činjenica koja ne zahteva nikakvu potvrdu. Već u prvom stavu prve knjige svojih Elemenata Euklid, dokazujući da postoji pravilan trougao kome su zadata temena A i B, konstruiše krugove $k(A, AB)$ i $k(B, BA)$ i, bez dokaza, zaključuje da oni imaju zajedničkih tačaka. Slično, u dvanaestom stavu prve knjige, konstruišući upravnu iz zadate tačke A na datoj pravoj p, Euklid pretpostavlja da svaki krug sa središtem A, koji ima tačaka sa one strana prave p sa koje nije A, seče pravu p u dvema tačkama. Potreba da se ovakva tvrđenja dokažu nije iskazivana sve do druge polovine prošlog veka kada je Paš 1882. godine u svojoj Novijoj geometriji istakao neophodnost zasnivanja geometrijske neprekidnosti polazeći od zasebnih aksioma.

Kako smo već u uvodu napomenuli, već je Arhimed primetio neke nedostatke Euklidove aksiomatike. U cilju zasnivanja teorije merenja geometrijskih figura on je u svom delu O valjku i lopti, upotpunio Euklidove aksiome, između ostalog, i Eudoksovom (oko -408 do -355) aksiomom prestiživosti na kojoj počiva tzv. geometrijska neprekidnost „u velikom". Prema toj aksiomi konačnim brojem „prenošenja" zadate duži na zadatu pravu može se „stići i prestići" svaka tačka te prave. Neprekidnost „u malom" koja omogućava da se dokažu stavovi o preseku prave i kruga i o preseku dvaju krugova počiva na Kantorovoj aksiomi (G. Cantor 1845–1918) prema kojoj je, grubo rečeno, prava „gusto ispunjena" tačkama. Napomenimo da se i neprekidnost „u malom" i neprekidnost „u velikom" mogu iskazati samo jednom aksiomom, tzv. Dedekindovom aksiomom neprekidnosti (J.W.R. De-

dekind 1831–1916). U svojim Osnovama geometrije Hilbert je, uz Arhimedovu, pretpostavio i tzv. aksiomu potpunosti koja je ekvivalentna Kantorovoj aksiomi.

Istaknimo da je geometrijska neprekidnost pretpostavka teorije merenja ravnih i prostornih geometrijskih likova te da, zahvaljujući njoj, geometrija može da ispuni zahteve koje pred nju postavlja samo njeno ime u kojem se sugeriše da je geometrija „nauka o merenju“.

21. Aksiome neprekidnosti

Geometrijska teorija neprekidnosti se temelji na dvema aksiomama četvrte grupe od kojih se prva naziva *Arhimedovom* ili *Arhimed-Eudoksovom*, a druga *Kantorovom*. Navedimo najpre te dve aksiome.

Aksioma IV 1: *Ako su AB i CD dve proizvoljne duži, tada na polupravoj AB postoji konačan niz tačaka $A_1, A_2, \dots, A_n$ takvih da je $\mathcal{B}(A, A_1, A_2, \dots, A_n)$, pri čemu je svaka od duži $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ podudarna duži CD i $\mathcal{B}(A, B, A_n)$.*

Aksioma IV 2: *Ako je $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$ niz zatvorenih duži neke prave, takvih da svaka od tih duži sadrži sledeću, tada postoji tačka X koja pripada svakoj duži tog niza.*

Kako je već na samom početku napomenuto, geometriju zasnovanu na prve četiri grupe aksioma, dakle, na aksiomama pripadanja, rasporeda, podudarnosti i neprekidnosti, nazivamo ***apsolutnom geometrijom.*** Prostor koji zadovoljava te aksiome nazivamo ***apsolutnim prostorom***, a svaku njegovu ravan ***apsolutnom ravni.***

Posledice Arhimedove aksiome. Navedimo najpre dve posledice Arhimed-Eudoksove aksiome od kojih je prva toliko jednostavna da je nećemo dokazivati.

Teorema 21.1: *Ako je duž a manja od duži b, tada postoji prirodan broj n takav da je*

$$(n-1)a \leq b < na. \qquad \square$$

Teorema 21.2: *Ako je duž a manja od duži b, onda za svaku duž c postoje prirodni brojevi m i n takvi da je*

$$a < \frac{m}{2^n}c < b.$$

Dokaz: Kako je $a < b$, na osnovu Arhimedove aksiome postoji prirodan broj n takav da je

$$c < 2^n(b-a), \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{2^n}c < b-a.$$

Ako je $\frac{1}{2^n}c > a$, onda je

$$a < \frac{1}{2^n}c < b - a < b$$

pa je teorema dokazana ($m = 1$).

Ako je $\frac{1}{2^n}c < a$, onda, na osnovu prethodne teoreme, postoji broj m takav da je

$$(m-1)\frac{1}{2^n}c \leq a < m\frac{1}{2^n}c.$$

Tada je

$$a < \frac{m}{2^n}c = \frac{1}{2^n}c + \frac{m-1}{2^n}c < (b-a) + a = b. \qquad \square$$

Kantorov niz. Pre no što dokažemo još nekoliko važnih posledica aksioma neprekidnosti uvedimo pojam Kantorovog niza. Niz duži $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$ koji zadovoljava aksiomu IV2, takav da ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima toga niza zvaćemo *Kantorovim nizom.* Sledeću teoremu zvaćemo *Kantorovom teoremom.*

Teorema 21.3: *Postoji jedinstvena tačka koja pripada Kantorovom nizu.*

Dokaz: Ako bi pored tačke X čije postojanje je pretpostavljeno Kantorovom aksiomom, postojala i neka druga tačka Y koja pripada svakoj od duži zadatog niza, onda bi i svaka tačka Z duži XY takođe pripadala svakoj od duži tog niza. Tada bi duž XY pripadala svakoj duži Kantorovog niza što nije u skladu sa njegovom definicijom. Stoga je tačka X jedinstvena. $\square$

Teorema 21.4: *Ne postoji duž koja bi bila manja od svake duži Kantorovog niza.*

Dokaz: Neka je X jedina tačka sadržana u svim dužima nekog Kantorovog niza $[A_kB_k]_{k=1,2,\ldots}$ na pravoj p. Kako su za svako k, A_k i B_k sa raznih strana tačke X možemo pretpostaviti da su sve tačke A_k sa jedne, a sve tačke B_k sa druge strane tačke X. Budući da je duž A_kB_k unija duži A_kX i XB_k, a sadrži duž $A_{k+1}B_{k+1}$, tačka A_{k+1} pripada duži A_kX, a tačka B_{k+1} duži XB_k.

Ako je x proizvoljna duž, na pravoj p postoji tačka A sa one strane X sa koje su i sve tačke A_k, i tačka B sa one strane X sa koje su i sve tačke B_k takva da je X središte duži AB koja je podudarna datoj duži x. Kada na duži AX ne bi bilo ni jedne od tačaka A_k, bilo bi za svako k, $\mathcal{B}(A_k, A, X)$, pa bi duž AX pripadala svakoj od duži Kantorovog niza. Dakle, za dovoljno veliko n sve tačke A_k, $k > n$, su između A i X. Na isti način, za dovoljno veliko n sve tačke B_k, $k > n$, su između X i B pa, za dovoljno veliko n, duž AB sadrži svaku od duži A_nB_n. Stoga je $A_nB_n < AB = x$. $\square$

Dakle, za dovoljno veliko n, duži XA_n i XB_n su manje od bilo koje unapred zadate duži.

Dedekindova teorema. Sledeće tvrđenje koje se naziva *Dedekindovom teoremom*, značajna je posledica aksioma neprekidnosti:

Teorema 21.5: *Ako su sve tačke neke prave p podeljene u dva skupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, takva da:*

1° *svaka tačka prave p pripada samo jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$,*

2° *skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su neprazni,*

3° *između bilo kojih dveju tačaka jednog od tih skupova nema tačaka koje pripadaju drugom,*

tada postoji jedinstvena tačka X na pravoj p takva da su sve ostale tačke skupa $\mathcal{M}$ sa jedne strane te tačke, a sve ostale tačke skupa $\mathcal{N}$ sa druge.

Dokaz: Kako su skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ neprazni, postoje tačke M_1 i N_1 koje, redom, pripadaju tim dvama skupovima. Neka je S_1 središte duži M_1N_1. Tačka S_1 pripada pravoj p , pa stoga, na osnovu uslova 1°, pripada tačno jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Ako tačka S_1 pripada skupu $\mathcal{M}$, obeležićemo je sa M_2, a tačku N_1 sa N_2, a ako S_1 pripada skupu $\mathcal{N}$, obeležićemo je sa N_2, a M_1 sa M_2. Neka je S_2 središte duži M_2N_2. Ponavljajući započeti postupak odredićemo tačke M_3 i N_3, itd. Na taj način konstruisaćemo niz $[M_kN_k]_{k=1,2,\ldots}$ zatvorenih duži od kojih svaka duž sadrži sledeću u tom nizu. Takav niz zvaćemo *nizom polovina duži.*

Dokažimo da ne postoji duž koja je sadržana u svim dužima konstruisanog niza polovina. Ako bi, naprotiv, postojala takva duž x, onda bi za svako k bilo $x < M_kN_k$, a kako je, prema konstrukciji toga niza, $M_kN_k = (1/2^{k-1})M_1N_1$, bilo bi $x < (1/2^{k-1})M_1N_1$, tj. $2^{k-1}x < M_1N_1$, za svako k, što protivreči Arhimedovoj aksiomi. Dakle, niz $[M_kN_k]_{k=1,2,\ldots}$ je Kantorov, pa postoji jedinstvena tačka X koja pripada svakoj duži niza polovina duži.

Iz konstrukcije niza polovina duži sledi da su sve tačke niza $(M_k)_{k=1,2,\ldots}$ sa jedne strane tačke X, a sve tačke niza $(N_k)_{k=1,2,\ldots}$, sa druge. Dokažimo da su i sve ostale tačke skupa $\mathcal{M}$ sa jedne strane tačke X, a sve ostale tačke skupa $\mathcal{N}$, sa druge. Tačka X pripada samo jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, recimo skupu $\mathcal{N}$. Ako je N proizvoljna tačka skupa $\mathcal{N}$ različita od X, tada je ona sa one strane X sa koje su i tačke niza $(N_k)_{k=1,2,\ldots}$. Zaista, ako bi bilo $\mathcal{B}(N, X, N_k)$, tačka N bi bila sa one strane X sa koje su i tačke niza $(M_k)_{k=1,2,\ldots}$, pa bi, za dovoljno veliko k, tačka M_k bila između N i X. Dakle, postojala bi tačka skupa $\mathcal{M}$ između dveju tačaka skupa $\mathcal{N}$.

Ako je pak, M proizvoljna tačka skupa $\mathcal{M}$, tada ne može biti $\mathcal{B}(M_k, X, M)$ jer bi postojala tačka skupa $\mathcal{N}$ između dveju tačaka skupa $\mathcal{M}$. Dakle, postoji jedinstvena tačka X takva da su sve ostale tačke skupa $\mathcal{M}$ su sa jedne strane tačke X, a sve ostale tačke skupa $\mathcal{N}$, sa druge. □

Za tačku X ćemo reći da *razdvaja* skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

Prethodna teorema se naziva i *Dedekindovom teoremom za pravu.* Slično se dokazuje da važi i *Dedekindova teorema za polupravu*, i *Dedekindova teorema za duž.* Štaviše, ako se pretpostavi da uz aksiome prve tri grupe važi i Dedekindova teorema za duži, tada važe i Arhimedova i Kantorova aksioma.

Zaista, ako pretpostavimo da postoje duži AB i CD i niz tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ na polupravoj AB takvih da je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$, a sve duži AA_1,

$A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n, \ldots$ su podudarne duži CD i sadržane su u duži $[AB]$, tada skup tačaka duži $[AB]$ možemo podeliti u dva podskupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ takva da su u skupu $\mathcal{M}$ sve tačke koje pripadaju dužima $[AA_1), [A_1A_2), \ldots, [A_{n-1}A_n), \ldots$, a u skupu $\mathcal{N}$ sve ostale tačke duži $[AB]$. Kako skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zadovoljavaju uslove Dedekindove teoreme za duži, postojaće tačka X koja razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Ako je Y tačka prave AB sa one strane tačke X sa koje je A, takva da je $XY \cong CD$, tada je tačka Y u skupu $\mathcal{M}$, pa pripada nekoj duži $[AA_1), [A_1A_2), \ldots, [A_{n-1}A_n), \ldots$, na primer duži $[A_{i-1}A_i)$, što je nemoguće jer tada tačke A_i i A_{i+1} pripadaju otvorenoj duži XY, a $XY \cong CD \cong A_iA_{i+1}$. Time je dokazana Arhimedova aksioma. Dokažimo i Kantorovu.

U tom cilju pretpostavimo da je $[A_1B_1], [A_2B_2], \ldots, [A_nB_n], \ldots$ niz zatvorenih duži neke prave takvih da svaka od tih duži sadrži sledeću. Budući da možemo pretpostaviti da je $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, B_n, \ldots, B_2, B_1)$, skup tačaka duži $[A_1B_1]$ možemo podeliti u dva podskupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ takva da su u skupu $\mathcal{M}$ sve tačke koje pripadaju dužima $[A_1A_2), \ldots, [A_{n-1}A_n), \ldots$, a u skupu $\mathcal{N}$ sve ostale tačke duži $[A_1B_1]$. Kako skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zadovoljavaju uslove Dedekindove teoreme za duži, postojaće tačka X koja razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Kako je, za svako i, X između tačaka A_i i B_i, tačka X pripada svakoj duži niza $[A_1B_1], [A_2B_2], \ldots, [A_nB_n], \ldots$ Time je dokazano da su i Arhimedova i Kantorova aksioma posledice Dedekindove teoreme.

Preseci pravih i epicikala. Neka su A i B dve razne tačke nekog epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, a a i b prave pramena $\mathcal{X}$ koje, redom, sadrže te dve tačke. Skup svih tačaka koje pripadaju epiciklu $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ i poluravnima $[\![aB)$ i $[\![bA)$ zvaćemo *segmentom* tog epicikla. U posebnom slučaju kada su A i B dijametralno suprotne tačke nekog kruga, *segmentom* ćemo zvati presek svake zatvorene poluravni sa rubom AB i tog kruga. Svaki od tih segmenata kruga zvaćemo *polukrugom*.

U analogiji sa pojmom Kantorovog niza duži može se uvesti pojam Kantorovog niza segmenata epicikla, a može se dokazati i tzv. Kantorova teorema za epicikle. Niz segmenata nekog epicikla takvih da svaki od njih sadrži sledeći iz niza, a ne postoji segment sadržan u svima, zvaćemo *Kantorovim nizom segmenata*. Dokažimo *Kantorovu teoremu za epicikle:*

Teorema 21.6: *Ako je $(A_nB_n)_{n=1,2,\ldots}$ Kantorov niz segmenata epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, tada postoji jedinstvena tačka Y toga epicikla koja pripada svakom od segmenata zadatog niza.*

Dokaz: Obeležimo sa a_n i b_n, $n = 1, 2, \ldots$, prave pramena $\mathcal{X}$ koje sadrže, redom, temena A_n i B_n, $n = 1, 2, \ldots$, segmenata zadatog niza i dokažimo da duž $[A_1B_1]$ seče svaku od tih pravih.

Ako je $\mathcal{X}$ pramen konkurentnih pravih sa središtem O, onda su A_n i B_n tačke koje pripadaju uglu A_1OB_1, pa prave a_n i b_n, na osnovu teoreme 5.6, seku duž A_1B_1 u tačkama A_n' i B_n'. Ako su, pak, prave a_1 i b_1 disjunktne, tačke A_1 i B_1 su, na osnovu teoreme 16.10, sa raznih strana svake od pravih a_n i b_n, $n = 2, 3, \ldots$, pa stoga, svaka od tih pravih seče $[A_1B_1]$ u tačkama A_n' i B_n'. Štaviše, iz teoreme

16.10 sledi da *rasporedu tačaka epicikla* odgovara isti raspored tačaka prave A_1B_1, drugim rečima, ako su P, Q, R tačke epicikla $\mathcal{E}$, a P', Q', R' presečne tačke pravih pramena $\mathcal{X}$ koje, redom, sadrže te tačke, sa pravom A_1B_1, onda tačka Q pripada segmentu PR ako i samo ako je $\mathcal{B}(P', Q', R')$.

Niz duži $A_1B_1, A_2'B_2', A_3'B_3', \ldots$ je Kantorov niz budući da i segmenti A_1B_1, $A_2B_2, A_3B_3, \ldots$ sačinjavaju Kantorov niz. Stoga postoji jedinstvena tačka Y' koja pripada svakoj od tih duži. Budući da postoji jedinstvena prava y pramena $\mathcal{X}$ koja sadrži Y', i kako je $\mathcal{B}(A_1, Y', B_1)$, prava y će seći epicikl $\mathcal{E}$ u nekoj tački Y koja pripada segmentu A_1B_1. Ako ta tačka ne bi pripadala nekom od segmenata iz zadatog Kantorovog niza, recimo segmentu A_kB_k, tada bi prave y, a_k i b_k sekle duž A_1B_1 u tačkama Y', A_k' i B_k' takvim da Y' nije između A_k' i B_k', pa stoga, Y' ne bi pripadala svakoj od duži Kantorovog niza na pravoj A_1B_1. Dakle, tačka Y pripada svakom od segmenata zadatog Kantorovog niza. □

Kako je, na osnovu teoreme 21.4, za dovoljno veliko n, duž $A_n'B_n'$ manja od bilo koje unapred zadate duži, i duž A_nB_n će, za dovoljno veliko n, biti manja od bilo koje unapred zadate duži.

Budući da je niz polovina duži Kantorov niz, iz dokaza prethodne teoreme neposredno sledi da će i njemu odgovarajući *niz polovina segmenata* da bude Kantorov niz segmenata.

Kantorovu teoremu za epicikle izveli smo iz Kantorove teoreme za duži koristeći se činjenicom da rasporedu tačaka epicikla odgovara isti raspored tačaka prave A_1B_1. Na identičan način se iz Dedekindove teoreme za duži može dedukovati *Dedekindova teorema za segmente*:

Teorema 21.7: *Ako su sve tačke nekog segmenta AB epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ podeljene u dva skupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, takva da:*

1° *svaka tačka segmenta AB pripada samo jednom od skupova $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$,*

2° *skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su neprazni,*

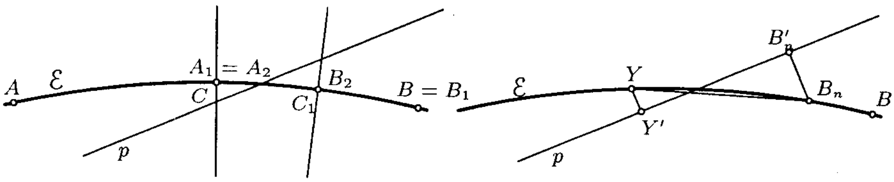
3° *ako su P i Q bilo koje dve tačke jednog skupa, segmentu PQ ne pripada ni jedna tačka drugog skupa,*

tada postoji jedinstvena tačka Z segmenta AB takva da su sve ostale tačke skupa $\mathcal{M}$ sa jedne strane prave pramena $\mathcal{X}$ koja sadrži tačku Z, a sve ostale tačke skupa $\mathcal{N}$ sa druge. □

Teorema 21.8: *Ako postoje tačke A i B koje pripadaju epiciklu $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ i nalaze se sa raznih strana neke prave p koja je u ravni pramena $\mathcal{X}$, tada prava p seče zadati epicikl.*

Dokaz: Medijatrisa duži AB pripada pramenu $\mathcal{X}$, pa seče segment AB epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ u nekoj tački C. Ako C pripada pravoj p, tvrđenje je dokazano. Stoga pretpostavimo da C nije na p. Ako su $C, B \div p$, obeležimo tačku C sa A_1, a B sa B_1, a ako su $A, C \div p$, obeležimo A sa A_1, a C sa B_1. Sada su tačke A_1 i B_1 na $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, sa raznih strana prave p. I medijatrisa duži A_1B_1 pripada pramenu $\mathcal{X}$, pa seče segment A_1B_1 epicikla $\mathcal{E}$ u nekoj tački C_1. Ako C_1 pripada i pravoj

p, tvrđenje je dokazano. U suprotnom ćemo tačke C_1 i B_1 obeležiti, redom, sa A_2 i B_2 ako su sa raznih strana prave p, a ako su A_1 i C_1 sa raznih strana p, njih ćemo obeležiti, redom, sa A_2 i B_2 itd. Nastavljanjem prethodnog postupka uz pretpostavku da ni jedna od tačaka C_n, $n=1,2,\dots$, ne pripada pravoj p, dobićemo na $\mathcal{E}$ Kantorov niz polovina segmenata, pa stoga, postoji jedinstvena tačka Y toga epicikla koja pripada svakom od segmenata iz tog niza.



Slika 21a

Dokažimo da tačka Y pripada i pravoj p. Ako joj ne bi pripadala, onda bi ili tačke A i Y bile sa raznih strana p ili bi B i Y bile sa raznih strana p. Ako pretpostavimo da su $B, Y \div p$, biće, za svako n, $B_n, Y \div p$. Obeležimo sa Y' i B'_n podnožja upravnih iz Y i B_n na pravoj p. Tada je

$$(YY') + (B_nB'_n) < (YB_n)$$

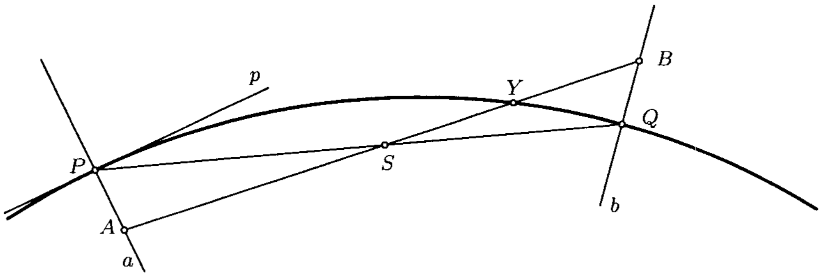
pa kako je duž YB_n, za dovoljno veliko n, manja od svake unapred zadate duži, ona je manja i od (YY'). Protivrečnost! Na isti način se dokazuje da nisu $A, Y \div p$, pa stoga, tačka Y pripada pravoj p. □

Iz prethodne teoreme neposredno sledi da prava p koja sadrži proizvoljnu tačku P unutar nekog kruga $k(O,r)$, sa tim krugom ima tačno dve zajedničke tačke. Zaista, prava OP seče krug k u dvema dijametralno suprotnim tačkama koje su sa raznih strana prave p, a taj krug razlažu na dva polukruga od kojih svaki sa pravom p ima jednu zajedničku tačku.

Teorema 21.9: *Ako je tačka A unutar, a tačka B izvan epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, duž AB sa tim epiciklom ima jedinstvenu zajedničku tačku.*

Dokaz: Neka su a i b prave pramena $\mathcal{X}$ koje, redom, sadrže tačke A i B. Pretpostavimo da su te dve prave međusobno različite jer se, u suprotnom, neposredno dokazuje da duž AB seče $\mathcal{E}$. Ako su prave a i b disjunktne, one, redom, seku epicikl $\mathcal{E}$ u jedinstvenim tačkama P i Q. Neposredno se dokazuje da tada P pripada poluravni $[\![bA)$, a Q poluravni $[\![aB)$. Ako se pak, prave a i b seku, onda sa P i Q obeležimo one presečne tačke tih dveju pravih sa epiciklom koje, redom, pripadaju poluravnima $[\![bA)$ i $[\![aB)$.

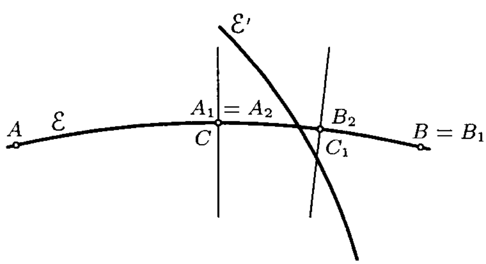
Kako je tačka A unutar epicikla $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$, taj epicikl je sa one strane svoje tangente p u tački P, sa koje je i tačka A, pa je ugao APQ, oštar. Slično se dokazuje da je ugao BQP, tup. Štaviše, kako je PQ sečica jednakih nagiba pravih a i b, uglovi koje duž PQ zahvata sa jedne svoje strane, sa pravama a i b su podudarni, pa su tačke A i B sa raznih strana prave PQ. Obeležimo sa S presek duži AB i prave PQ. Budući da duži AB i PQ pripadaju preseku poluravni $[\![aB)$ i $[\![bA)$, i tačka S pripada tom preseku, dakle, pripada i duži PQ. Stoga su tačke P i Q epicikla $\mathcal{E}$ sa raznih strana prave AB pa, na osnovu prethodne teoreme, prava AB seče $\mathcal{E}$.



Slika 21b

Ako je Y jedina presečna tačka prave AB i epicikla, onda ona pripada duži AB jer su sve unutrašnje tačke epicikla sa jedne strane njegove tangente u tački Y, a sve njegove spoljašnje tačke sa druge strane te tangente. Ako prava AB seče epicikl u dvema tačkama, Y i Z, onda su, na osnovu teoreme 17.9, sve tačke duži (YZ), unutar epicikla, a sve tačke prave YZ van duži $[YZ]$, izvan tog epicikla. Dakle, biće $\mathcal{B}(Y, A, Z)$ i, $\mathcal{B}(A, Z, B)$ ili $\mathcal{B}(A, Y, B)$, pa tačno jedna od tačaka Y i Z pripada duži AB. □

Teorema 21.10: *Ako su $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ i $\mathcal{E}'(\mathcal{X}', X')$ dva epicikla koja pripadaju jednoj ravni, a A i B tačke sa raznih strana epicikla $\mathcal{E}'$ koje pripadaju epiciklu $\mathcal{E}$, tada se ti epicikli seku.*



Slika 21c

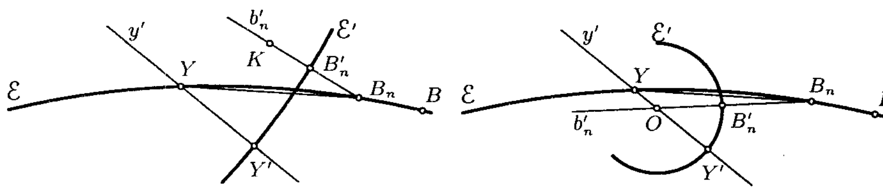
Dokaz: Pretpostavimo da je tačka A unutar, a B izvan epicikla $\mathcal{E}'$. Medijatrisa duži AB pripada pramenu $\mathcal{X}$ i seče segment AB epicikla $\mathcal{E}$ u nekoj tački C. Pretpostavimo da C ne pripada $\mathcal{E}'$ jer bi, u suprotnom, tvrđenje bilo dokazano. Ako je C unutar $\mathcal{E}'$, obeležimo je sa A_1, a tačku B sa B_1, a ako je C izvan $\mathcal{E}'$, obeležimo je sa B_1, a tačku A sa A_1. Sada su tačke A_1 i B_1 sa raznih strana $\mathcal{E}'$, a pripadaju epiciklu $\mathcal{E}$. Medijatrisa duži A_1B_1 pripada pramenu $\mathcal{X}$ i seče segment

A_1B_1 epicikla $\mathcal{E}$ u nekoj tački C_1. Ako C_1 pripada $\mathcal{E}'$, tvrđenje je dokazano. U suprotnom ćemo tačke C_1 i B_1 obeležiti, redom, sa A_2 i B_2 ako su sa raznih strana $\mathcal{E}'$, a ako su A_1 i C_1 sa raznih strana $\mathcal{E}'$, njih ćemo obeležiti, redom, sa A_2 i B_2, itd. Nastavljanjem prethodnog postupka uz pretpostavku da ni jedna od tačaka C_n, $n=1,2,\ldots$, ne pripada epiciklu $\mathcal{E}'$, dobićemo Kantorov niz polovina segmenata na $\mathcal{E}$ pa, na osnovu teoreme 21.6, postoji jedinstvena tačka Y epicikla $\mathcal{E}$ koja pripada svakom od segmenata dobijenog niza.

Dokažimo da tačka Y pripada i epiciklu $\mathcal{E}'$. Ako bi Y bila unutar $\mathcal{E}'$, bile bi tačke Y i B_n sa raznih strana tog epicikla. Sa Y' i B'_n obeležimo tačke u kojima prave y' i b'_n pramena $\mathcal{X}'$ koje sadrže tačke Y i B_n, seku $\mathcal{E}'$, a sa K tačku unutar $\mathcal{E}'$ takvu da je $\mathcal{B}(K, B'_n, B_n)$ pri čemu K pripada poluravni $[\![y'B'_n)$. Tada je $Y'B'_n$ sečica jednakih nagiba pravih y' i b'_n, pa su uglovi $YY'B'_n$ i KB'_nY' međusobno podudarni. Ako tačka Y pripada poluravni $[\![b'_nY')$, ugao $YY'B'_n$ je veći od ugla YB'_nY' ili njemu jednak, pa je $(YY') \leq (YB'_n)$. Tada je ugao YB'_nB_n tup jer je veći od tupog ugla $Y'B'_nB_n$, pa je i $(YB'_n) < (YB_n)$, odakle sledi da je $(YY') < (YB_n)$. Ako pak, Y ne pripada $[\![b'_nY')$, epicikl $\mathcal{E}'$ je krug sa središtem O, pa je

$$(OY') - (OY) = (OB'_n) - (OY) < (YB'_n) < (YB_n).$$

Kako je duž (YB_n), za dovoljno veliko n, manja od svake unapred zadate duži, ona je manja i od (YY'), i od $(OY') - (OY)$. Protivrečnost!



Slika 21d

Slično se dokazuje da Y nije ni izvan $\mathcal{E}'$, pa ona pripada tom epiciklu. □

Iz prethodne teoreme neposredno sledi da krug $k(O,r)$ koji sadrži proizvoljnu tačku P unutar nekog kruga $k'(O',r')$, i neku tačku Q izvan tog kruga, sa krugom k ima tačno dve zajedničke tačke. Zaista, segment PQ kruga k seče krug k' u nekoj tački A, a osnom refleksijom u odnosu na pravu OO' ta tačka se preslikava u neku tačku B koja takođe pripada krugovima k i k'.

Preseci ravni i episfera. U analogiji sa dokazanim teoremama koje se odnose na preseke pravih i epicikala može se dokazati nekoliko jednostavnih teorema o presecima ravni i episfera.

Teorema 21.11: *Ako postoje tačke A i B koje pripadaju episferi $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$ i nalaze se sa raznih strana neke ravni π, tada ravan π seče zadatu episferu. Štaviše, presek ravni π i episfere $\mathcal{F}$ je epicikl.*

Dokaz: Neka je σ ravan koja sadrži tačke A i B i pripada snopu $\mathcal{V}$ koji je generisan snopom $\mathfrak{U}$. Presek ravni σ i ravni π je prava p, a njen presek sa episferom $\mathcal{F}$ je epicikl $\mathcal{E}$ koji zadovoljava uslove teoreme 21.7, pa je presek ravni π i episfere $\mathcal{F}$ neprazan. Iz dokaza teoreme 19.4 sledi da je taj presek neki epicikl. □

Iz prethodne teoreme neposredno sledi da ravan π koja sadrži proizvoljnu tačku P unutar neke sfere $S(O,r)$, sa tom sferom ima neprazan presek. Štaviše, taj presek je krug.

Slično prethodnoj teoremi, lako se dokazuju i sledeća dva tvrđenja.

Teorema 21.12: *Ako je tačka A unutar, a tačka B izvan episfere $\mathcal{F}(\mathfrak{U},X)$, duž AB (kao i svaki segment AB proizvoljnog epicikla koji sadrži tačke A i B) sa tom episferom ima jedinstvenu zajedničku tačku.* □

Teorema 21.13: *Ako su $\mathcal{F}(\mathfrak{U},X)$ i $\mathcal{F}'(\mathfrak{U}',X')$ dve episfere, a A i B tačke episfere $\mathcal{F}$ koje su sa raznih strana episfere $\mathcal{F}'$, tada je presek tih dveju episfera neki epicikl.* □

Iz prethodne teoreme neposredno sledi da sfera $S(O,r)$ koja sadrži proizvoljnu tačku P unutar neke sfere $S'(O',r')$, i neku tačku Q izvan te sfere, sa sa sferom S ima neprazan presek. Štaviše, presek sfera S i S' je krug.

ZADACI:

1. Dokazati da je duž (YB_n) iz dokaza teoreme 21.10, za dovoljno veliko n, manja od svake unapred zadate duži.

2. Dokazati da postoje dve tangente kruga koje sadrže proizvoljnu tačku izvan tog kruga.

22. Merenje duži i uglova

Mera duži. *Merom* ili *dužinom duži* nazivamo funkciju L koja svakoj duži a dodeljuje pozitivan realan broj $L(a)$, a zadovoljava sledeće uslove:

1° postoji duž kojoj je mera 1,

2° mere podudarnih duži su međusobno jednake,

3° ako su a, b i c tri duži takve da je $a+b=c$, onda je

$$L(a)+L(b)=L(c).$$

Broj $L(a)$ nazivamo *merom duži* a, a duž čija je mera 1 nazivamo *jediničnom*. Za ostale duži reći ćemo da su u meri L *izmerene* jediničnom duži.

Dokaz sledeće teoreme nećemo izvesti budući da je veoma jednostavan.

Teorema 22.1: *Mera L duži ima sledeće osobine:*

a. *Duž a je manja od duži b ako i samo ako je $L(a) < L(b)$.*

b. *Duži su podudarne ako i samo ako su im mere međusobno jednake.*

c. *Ako su a, b i c tri duži takve da je $a - b = c$, onda je*

$$L(a) - L(b) = L(c).$$

d. *Ako je k prirodan broj, onda je*

$$L(ka) = kL(a) \quad i \quad L(\frac{1}{2^k}a) = \frac{1}{2^k}L(a). \qquad \square$$

Sledeće tri teoreme će nam omogućiti da u apsolutni prostor uvedemo metriku.

Teorema 22.2: *Neka je funkcija L mera duži. Funkcija L' je takođe mera duži ako i samo ako postoji pozitivan realan broj λ takav da je $L' = \lambda L$.*

Dokaz: Ako je $L' = \lambda L$, lako se dokazuje da je i L' mera duži. Dokažimo obratno.

Pretpostavimo zato da je L' mera duži, zatim da je a_0 jedinična duž mere L i $\lambda = L'(a_0)$, i dokažimo da je za svaku duž AB,

$$L'(AB) = \lambda L(AB).$$

Kako je za svaki prirodan broj k

$$AB < AB + \frac{1}{2^k}a_0,$$

na osnovu teoreme 21.2 će postojati prirodni brojevi m_k i 2^{n_k} koji zavise od broja k, takvi da je

$$AB < \frac{m_k}{2^{n_k}}a_0 < AB + \frac{1}{2^k}a_0.$$

Budući da su L i L' mere, biće

$$L(AB) < \frac{m_k}{2^{n_k}} < L(AB) + \frac{1}{2^k}$$

i

$$L'(AB) < \frac{m_k}{2^{n_k}}L'(a_0) < L'(AB) + \frac{1}{2^k}L'(a_0).$$

Dakle, biće

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{2^{n_k}} = L(AB),$$

pa je

$$L(AB)\ L'(a_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{2^{n_k}}L'(a_0) = L'(AB).$$

Stoga je za svaku duž AB,

$$L'(AB) = \lambda L(AB).$$

Dakle, $L' = \lambda L$. □

Teorema 22.3: *Ako je a_0 proizvoljna duž, onda postoji jedinstvena mera L takva da je $L(a_0) = 1$.*

Dokaz: Konstruišimo najpre funkciju L koja svakoj duži a dodeljuje jedinstven pozitivan realan broj, a potom dokažimo da je ta funkcija mera duži.

Razložimo duž a_0 na 2^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, međusobno podudarnih duži i svaku od dobijenih duži obeležimo sa a_0^k. Razložimo zatim, proizvoljnu pravu l, nizom tačaka $\ldots, A_{-1}^k, A_0^k, A_1^k, \ldots$ takvih da je duž čija su temena susedne tačke tog niza podudarna duži a_0^k, na beskonačno mnogo duži. Nazovimo to razlaganje prave l, *k-tom gradacijom* u odnosu na duž a_0 i obeležimo ga sa N_k, a temena duži te gradacije nazovimo *temenima gradacije* N_k. Neka je a proizvoljna duž i AB njoj podudarna duž koja pripada pravoj l. Obeležimo sa n_k ukupan broj duži gradacije N_k prave l, koje pripadaju duži AB, a sa n'_k ukupan broj duži te gradacije koje sa duži AB imaju zajedničkih tačaka. Iz Arhimedove aksiome neposredno sledi da je svaki od tih brojeva konačan. Na taj način dobijamo dva niza

$$\left(\frac{n_k}{2^k}\right)_{k=0,1,2,\ldots} \quad \text{i} \quad \left(\frac{n'_k}{2^k}\right)_{k=0,1,2,\ldots}$$

koji mogu biti konačni ili beskonačni u zavisnosti od toga da li su obe tačke A i B istovetne sa tačkama bilo koje od k-tih gradacija prave l, ili ne. Budući da je

$$n_0 \leq \frac{n_1}{2} \leq \ldots \leq \frac{n_k}{2^k} \leq \ldots \quad \text{i} \quad n'_0 \geq \frac{n'_1}{2} \geq \ldots \geq \frac{n'_k}{2^k} \geq \ldots,$$

prvi od tih nizova biće neopadajući, a drugi nerastući. Kako je uz to, $n_k \leq n'_k$, biće i

$$n_0 \leq \frac{n_k}{2^k} \leq \frac{n'_k}{2^k} \leq n'_0.$$

Zato je prvi niz ograničen sa gornje, a drugi sa donje strane, pa su, dakle, oba niza konvergentna. Štaviše, kako je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n'_k - n_k}{2^k} = 0, \quad \text{jer je} \quad \frac{n'_k - n_k}{2^k} \leq \frac{2}{2^k},$$

nizovi $(\frac{n_k}{2^k})_{k=0,1,2,\ldots}$ i $(\frac{n'_k}{2^k})_{k=0,1,2,\ldots}$ imaju istu graničnu vrednost.

Dokažimo da dobijena granična vrednost tih dvaju nizova ne zavisi od izbora tačaka A i B na pravoj l. Ako je $A'B'$ bilo koja duž te prave podudarna duži AB, ako je ν_k ukupan broj duži gradacije N_k prave l koje pripadaju duži $A'B'$, a ν'_k ukupan broj duži te gradacije koje sa duži $A'B'$ imaju zajedničkih tačaka i ako je $\mathfrak{I}$ izometrija prave l koja preslikava duž AB na duž $A'B'$, tada se izometrijom $\mathfrak{I}$ i gradacija N_k prave l preslikava na neku gradaciju M_k iste prave. Ako je m_k ukupan broj duži gradacije M_k prave l, koje pripadaju duži AB, a m'_k ukupan broj duži te gradacije koje sa duži AB imaju zajedničkih tačaka, onda je $m_k = \nu_k$ i $m'_k = \nu'_k$. Ako su gradacije M_k i N_k istovetne, tada je $m_k = n_k$ i $m'_k = n'_k$. Ako nisu, tada je $m_k \geq n_k - 1$ jer ima bar $n_k - 1$ temena gradacije M_k koja pripadaju uniji duži gradacije N_k sastavljenoj iz duži koje pripadaju AB. Na isti način, zamenom gradacija M_k i N_k u tom razmatranju, zaključujemo da je $n_k \geq m_k - 1$, pa je $|m_k - n_k| \leq 1$. Slično, $|m'_k - n'_k| \leq 1$ pa, kako je $m_k = \nu_k$ i $m'_k = \nu'_k$, nizovi

$$\left(\frac{n_k}{2^k}\right)_{k=0,1,2,\ldots} \quad \text{i} \quad \left(\frac{\nu_k}{2^k}\right)_{k=0,1,2,\ldots}$$

kao i nizovi

$$\left(\frac{n'_k}{2^k}\right)_{k=0,1,2,\ldots} \quad \text{i} \quad \left(\frac{\nu'_k}{2^k}\right)_{k=0,1,2,\ldots}$$

imaju istu graničnu vrednost.

Obeležimo sa $L(a)$ graničnu vrednost nizova $(\frac{n_k}{2^k})_{k=0,1,2,\ldots}$ i $(\frac{n'_k}{2^k})_{k=0,1,2,\ldots}$ i dokažimo da je funkcija L koja svakoj duži a dodeljuje, na prethodan način određen pozitivan realan broj $L(a)$, mera duži.

Prvi uslov iz definicije mere duži je zadovoljen jer postoji jedinična duž a_0.

Ako su a i b dve podudarne duži, onda na pravoj l postoji duž AB podudarna svakoj od tih duži. Stoga je $L(a) = L(b)$, pa je i drugi uslov iz definicije mere duži zadovoljen.

Ako su a i b bilo koje dve duži, onda na pravoj l postoje tačke A, B, C takve da je $AB \cong a$, $BC \cong b$ i $\mathcal{B}(A, B, C)$. Ako sa m_k obeležimo ukupan broj duži gradacije N_k koje pripadaju duži BC, a sa m'_k ukupan broj duži te gradacije koje sa duži BC imaju zajedničkih tačaka, onda su zadovoljene sledeće relacije

$$\frac{n_k}{2^k} \leq L(a) \leq \frac{n'_k}{2^k}, \quad \frac{m_k}{2^k} \leq L(b) \leq \frac{m'_k}{2^k}, \quad \frac{n_k + m_k}{2^k} \leq L(a+b) \leq \frac{n'_k + m'_k}{2^k}.$$

Stoga je, za svako k,

$$|L(a) + L(b) - L(a+b)| \leq \frac{n'_k + m'_k}{2^k} - \frac{n_k + m_k}{2^k} < \frac{2}{2^k} + \frac{2}{2^k} = \frac{4}{2^k},$$

pa zaključujemo da je $L(a) + L(b) = L(a+b)$, čime je dokazano da je zadovoljen i treći uslov iz definicije mere duži.

Dakle, funkcija L je zaista mera duži. Iz prethodne teoreme neposredno sledi da je ona jedinstvena. □

Primetimo da iz prethodnih dveju teorema sledi da za zadatu duž a i zadati pozitivan realan broj α postoji jedinstvena mera L takva da je $L(a) = \alpha$.

Prethodnom teoremom je utvrđeno da svakoj duži a možemo pridružiti pozitivan realan broj $L(a)$, njenu meru. Dokažimo i obratno.

Teorema 22.4: *Ako je L zadata mera, onda za svaki pozitivan realan broj α postoji duž a takva da je $L(a) = \alpha$.*

Dokaz: Poznato je da se svaki pozitivan realan broj α može predstaviti u obliku

$$\alpha = n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{2^k},$$

gde je n_0 prirodan broj ili nula, i $t_k \in \{0,1\}$.

Neka je A teme neke poluprave p i neka su $C_1, C_2, \ldots, C_k$ tačke te poluprave takve da je $\mathcal{B}(A, C_1, C_2, \ldots, C_k)$, $AC_1 = n_0 a_0$ i

$$AC_k = (n_0 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{t_n}{2^n})\, a_0,$$

gde je a_0 jedinična duž u meri L. Neka su zatim, $D_1, D_2, \ldots, D_k$ tačke te poluprave takve da je $\mathcal{B}(A, C_k, D_k)$ i

$$C_k D_k = \frac{1}{2^{k-1}}\, a_0.$$

Niz duži $C_k D_k$ je Kantorov niz pa, zato, postoji jedinstvena tačka B koja pripada svakoj od tih duži.

Primenom postupka iz prethodne teoreme jednostavno se dokazuje da je $L(AB) = \alpha$. □

Primetimo da nam prethodne teoreme omogućavaju da ustanovimo da je apsolutni prostor, metrički. Ako meru duži AB nazovemo *rastojanjem* između tačaka A i B i ako pretpostavimo da je mera nula duži, nula, onda je na taj način u apsolutni prostor uvedena metrika. Ako sa

$$\rho_L(A, B)$$

obeležimo uvedeno rastojanje između tačaka A i B, onda je

1° $\rho_L(A, B) = 0$ ako i samo ako su tačke A i B istovetne,

2° $\rho_L(A, B) = \rho_L(B, A)$,

3° $\rho_L(A, B) + \rho_L(B, C) \geq \rho_L(A, C)$.

Zaista, prve dve osobine se dokazuju neposredno, a treća sledi iz teorema 11.14 i 22.1.

Reći ćemo da je metrika ρ_L indukovana merom L. Kad god u nekom razmatranju pretpostavimo da koristimo uvek istu meru L u oznaci metrike izostavićemo simbol L i pisaćemo $\rho(A, B)$ umesto $\rho_L(A, B)$.

Sledeća dva tvrđenja se dokazuju neposredno, koristeći definiciju rastojanja. Prvo sledi iz definicije sabiranja duži i teoreme 22.1, a drugo iz aksiome III1 i tvrđenja da je relacija podudarnosti parova tačaka, relacija ekvivalencije (teorema 10.1).

Teorema 22.5: *Ako su zadate tačke A, B, C, tada je $\mathcal{B}(A, B, C)$ ako i samo ako su A, B, C tri razne tačke i $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$.* □

Teorema 22.6: *Ako su A, B, C, D četiri tačke, tada je $(A, B) \cong (C, D)$ ako i samo ako je $\rho(A, B) = \rho(C, D)$.* □

Ako *slobodnim dužima* nazovemo klase međusobno podudarnih duži, tada, budući da su dve duži podudarne ako i samo ako imaju istu meru, možemo uspostaviti bijekciju između skupa slobodnih duži i skupa realnih brojeva. Stoga ćemo, bez bojazni da je time moguće izazvati bilo kakvu zabunu, dopustiti da se i mera duži AB i rastojanje između tačaka A i B obeležava kao i duž AB, dakle sa AB. Tako ćemo sa $AB \cdot CD$, umesto sa $L(AB) \cdot L(CD)$ ili $\rho(A,B) \cdot \rho(C,D)$, označavati proizvod mera duži AB i CD. Istovremeno će nam $AB \cdot CD$ označavati i duž čija je mera $L(AB) \cdot L(CD)$. Slično, sa AB^2 ćemo označavati i $L^2(AB)$ i duž čije je mera $L^2(AB)$, a sa $AB : CD$ ili sa AB/CD ćemo označavati $L(AB)/L(CD)$ i duž čija je mera $L(AB)/L(CD)$. Ako je k proizvoljan realan broj, sa kAB ćemo označavati i $kL(AB)$ i duž čija je mera $kL(AB)$.

Mera ugla. U potpunoj analogiji sa pojmom mere duži uvodi se i pojam mere ugla. *Merom* ili *veličinom ugla* nazivamo funkciju L koja svakom uglu α dodeljuje pozitivan realan broj $L(\alpha)$ takav da su ispunjeni sledeći uslovi:

1° postoji ugao kojem je mera 1,

2° mere podudarnih uglova su međusobno jednake,

3° ako su α, β, γ uglovi takvi da je $\alpha + \beta = \gamma$, onda je

$$L(\alpha) + L(\beta) = L(\gamma).$$

Ugao kojem je mera 1, zvaćemo *jediničnim*, a za ostale uglove reći ćemo da su u meri L *izmereni* jediničnim uglom.

I teoreme koja slede su u analogiji sa teoremama vezanim za pojam mere duži tako da ćemo ih samo formulisati.

Teorema 22.7: *Mera L ugla ima sledeće osobine:*

a. *ugao α je manji od ugla β ako i samo ako je $L(\alpha) < L(\beta)$,*

b. *uglovi su podudarni ako i samo ako su im mere jednake,*

c. *ako su α, β, γ uglovi takvi da je $\alpha - \beta = \gamma$, onda je*

$$L(\alpha) - L(\beta) = L(\gamma),$$

d. *ako je α ugao i k prirodan broj takav da je i $k\alpha$ ugao, onda je*

$$L(k\alpha) = kL(\alpha) \quad i \quad L\left(\frac{1}{2^k}\alpha\right) = \frac{1}{2^k}L(\alpha). \qquad \square$$

Teorema 22.8: *Neka je funkcija L mera ugla. I funkcija L' je mera ugla ako i samo ako postoji pozitivan realan broj k, takav da je $L' = kL$.* $\square$

Teorema 22.9: *Ako je α_0 proizvoljan ugao, tada postoji jedinstvena mera L takva da je $L(\alpha_0) = 1$.* $\square$

Teorema 22.10: *Ako je L zadata mera i $a_{\max}$ mera punog ugla, tada za svaki pozitivan realan broj $0 \leq a \leq a_{\max}$ postoji ugao α takav da je $L(\alpha) = a$.* $\square$

Među svim merama definisanim na skupu uglova ističemo onu koja pravom uglu dodeljuje broj $\pi/2$. Tu meru zvaćemo *prirodnom merom ugla*. Iz teorema 22.8 i 22.9 neposredno sledi da takva mera postoji i da je jedinstvena. Neće doći do zabune ako kažemo za prav ugao da je to ugao $\pi/2$, umesto da je njegova veličina u posebno istaknutoj meri koja se naziva prirodnom, jednaka $\pi/2$. Na isti način za opružen ugao, tj. za zbir dvaju pravih uglova, možemo reći da je to ugao π, a za pun ugao da je to ugao 2π.

Sličnost. Preslikavanje $\mathcal{P}$ lika Φ na lik Φ' zvaćemo *sličnošću* ako postoji pozitivan realan broj k takav da je za bilo koje dve tačke X i Y lika Φ

$$\rho(\mathcal{P}(X),\mathcal{P}(Y)) = k\rho(X,Y).$$

Drugim rečima, tim preslikavanjem se svakim dveme tačkama X i Y lika Φ dodeljuju tačke X' i Y' lika Φ' takve da je $X'Y' = kXY$. Broj k se naziva *koeficijentom sličnosti* $\mathcal{P}$. Ako postoji sličnost kojom se neki lik Φ preslikava na neki lik Φ', za ta dva lika ćemo reći da su *slični* i pisaćemo

$$\Phi \sim \Phi'.$$

Neposredno se proverava da se sličnošću, dve razne tačke X i Y preslikavaju na dve takođe međusobno različite tačke X' i Y'. Zaista, ako je $X \neq Y$, tada je $\rho(X,Y) \neq 0$, pa je, na osnovu definicije sličnosti, $\rho(X',Y') \neq 0$, dakle i $X' \neq Y'$. Time je dokazano da je svaka sličnost, bijekcija, budući da iz $X' \neq Y'$, slično, sledi da je $X \neq Y$.

Ako je $\Phi = \Phi' = \boldsymbol{S}$, sličnost $\mathcal{P}$ ćemo zvati i *transformacijom sličnosti prostora* $\boldsymbol{S}$.

Ako je $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti prostora, sa koeficijentom k, neposredno se proverava da je tada i njoj inverzna transformacija $\mathcal{P}^{-1}$, transformacija sličnosti sa koeficijentom $1/k$, a ako su $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ transformacije sličnosti sa koeficijentima k_1 i k_2, da je njihov proizvod $\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1$ sličnost sa koeficijentom k_1k_2. Dakle, skup svih sličnosti prostora $\boldsymbol{S}$ je grupa u odnosu na proizvod. Tu grupu ćemo zvati *grupom sličnosti.*

Teorema 22.11: *Ako je $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti, tada važe sledeća tvrđenja:*

1° *ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$, tada je $\mathcal{B}(\mathcal{P}(A),\mathcal{P}(B),\mathcal{P}(C))$,*

2° *ako je $(A,B) \cong (C,D)$, tada je $(\mathcal{P}(A),\mathcal{P}(B)) \cong (\mathcal{P}(C),\mathcal{P}(D))$,*

3° *ako je a prava, i $\mathcal{P}(a)$ je prava,*

4° *ako je α ravan, i $\mathcal{P}(\alpha)$ je ravan.*

Dokaz: Budući da je sličnost bijekcija, iz teoreme 22.5 neposredno sledi prvo tvrđenje, a iz teoreme 22.6 drugo tvrđenje. Iz prvog i drugog Peanovog stava (teoreme 2.2 i 5.8) i tvrđenja 1° slede treće i četvrto tvrđenje. □

Ako je $\Phi = \Phi' = \alpha$, gde je α neka ravan, sličnost $\mathcal{P}$ ćemo zvati i *transformacijom sličnosti ravni* α. Neposredno se proverava da je skup svih sličnosti neke ravni α, grupa u odnosu na proizvod.

Prethodna teorema kojom je ustanovljeno da su osnovni pojmovi geometrije invarijante grupe sličnosti, za neposrednu posledicu ima sledeće tvrđenje:

Teorema 22.12: *Ako je $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti, tada važe sledeća tvrđenja:*

1° *ako je a poluprava sa temenom A, a a' poluprava komplementna polupravoj a, tada je $\mathcal{P}(a)$ poluprava sa temenom $\mathcal{P}(A)$, a $\mathcal{P}(a')$ je poluprava komplementna polupravoj $\mathcal{P}(a)$,*

2° *ako poluprava OC pripada uglu AOB, i njena slika $\mathcal{P}(O)\mathcal{P}(C)$ pripada uglu $\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(O)\mathcal{P}(B)$,*

3° *ako su dve duži međusobno podudarne, i njihove slike u transformaciji $\mathcal{P}$ su međusobno podudarne duži,*

4° *ako su dva ugla međusobno podudarna, i njihove slike u transformaciji $\mathcal{P}$ su međusobno podudarni uglovi,*

5° *slika pravog ugla u transformaciji $\mathcal{P}$ je prav ugao.* □

Štaviše, budući da je relacija $\mathcal{B}$ invarijanta grupe sličnosti, važiće sledeća dva tvrđenja analogna teoremama 10.10 i 10.11:

- transformacijom sličnosti istosmerni trouglovi neke ravni se preslikavaju na istosmerne trouglove iste ravni, a suprotnosmetni trouglovi na suprotnosmerne trouglove;
- transformacijom sličnosti prostora istosmerni tetraedri se preslikavaju na istosmerne tetraedre, a suprotnosmerni tetraedri na suprotnosmerne.

Dakle, postoje dve vrste transformacija sličnosti ravni ili prostora. To su *direktne transformacije sličnosti* koje ne menjaju orijentaciju te ravni ili prostora i *indirektne transformacije sličnosti* koje je menjaju. Da bismo ustanovili da li je neka sličnost ravni π ili prostora $\boldsymbol{S}$, direktna ili indirektna dovoljno je ustanoviti da li su neka dva odgovarajuća orijentisana trougla ravni π ili dva odgovarajuća orijentisana tetraedra prostora $\boldsymbol{S}$, u toj transformaciji, istosmerni ili suprotnosmerni. Neposredno se dokazuje da je kompozicija dveju direktnih ili dveju indirektnih transformacija sličnosti, direktna transformacija sličnosti, a da je kompozicija jedne direktne i jedne indirektne transformacije sličnosti, indirektna transformacija sličnosti. Stoga je skup svih direktnih sličnosti ravni ili prostora podgrupa indeksa 2 grupe svih sličnosti ravni ili prostora.

Teorema 22.13: *Ako je $\mathcal{P}$ sličnost, ako je L mera ugla i ako je za bilo koji ugao α*

$$L_{\mathcal{P}}(\alpha) = L(\mathcal{P}(\alpha)),$$

tada je:

1° *Funkcija $L_{\mathcal{P}}$ mera ugla.*

2° *Ako je L prirodna mera ugla, tada je i $L_{\mathcal{P}}$ prirodna mera ugla.*

Dokaz: Iz osobina 2° i 4° teoreme 22.12 sledi da je $L_{\mathcal{P}}$ mera. Ako je L prirodna mera, tada je $L(\alpha) = \pi/2$ za svaki prav ugao. Budući da je, na osnovu osobine 5° iste teoreme, i $\mathcal{P}(\alpha)$ prav ugao, biće $L_{\mathcal{P}}(\alpha) = \pi/2$. Dakle, $L_{\mathcal{P}}$ je prirodna mera. □

Teorema 22.14: *Ako je $\mathcal{P}$ proizvoljna sličnost, tada je za svaki ugao α, $\mathcal{P}(\alpha) \cong \alpha$.*

Dokaz: Ako je L prirodna mera ugla, a $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti, tada je $L = L_{\mathcal{P}}$. Ako je α proizvoljan ugao, biće $L(\mathcal{P}(\alpha)) = L(\alpha)$, pa je $\mathcal{P}(\alpha) \cong \alpha$. □

ZADACI:

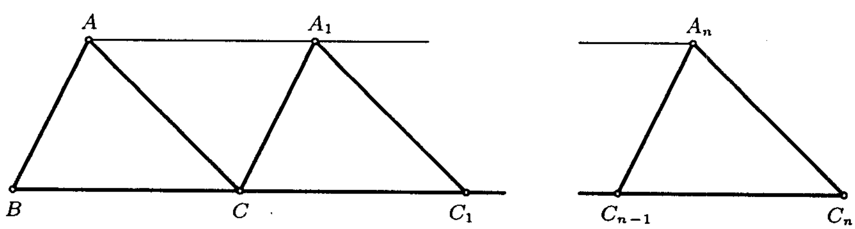
1. Dokazati da postoji n tačaka koje datu duž razlažu na $n+1$ podudarnih duži.

2. Dokazati da postoji n polupravih koje dati ugao razlažu na $n+1$ podudarnih uglova.

23. Ležandrove teoreme

U nameri da iz aksioma prve četiri grupe, koje se nazivaju i aksiomama apsolutne geometrije, izvede peti Euklidov postulat Ležandr je u svojim Elementima geometrije čije je prvo izdanje (od ukupno 12) štampano 1794. godine, dokazao nekoliko važnih stavova koji se odnose na zbir unutrašnjih uglova trougla. Iako je njegov pokušaj bio neuspešan zbog omaške vezane za treći od stavova koje dokazujemo u ovom odeljku, sledeće četiri teoreme ćemo zvati njegovim imenom.

Teorema 23.1: *Zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg trougla nije veći od π.*



Slika 23a

Dokaz: Pretpostavimo naprotiv, da postoji trougao ABC kome je zbir unutrašnjih uglova veći od π. Obeležimo sa $C_1, C_2, \dots, C_n$ tačke poluprave (BC), takve da je

$$\mathcal{B}(B, C, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad \text{i} \quad BC \cong CC_1 \cong C_1C_2 \cong \dots \cong C_{n-1}C_n,$$

a sa $A_1, A_2, \dots, A_n$ tačke sa one strane prave BC sa koje je tačka A, takve da je

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1CC_1 \cong \triangle A_2C_1C_2 \cong \dots \cong \triangle A_nC_{n-1}C_n.$$

Tada je, na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova,

$$\triangle ACA_1 \cong \triangle A_1C_1A_2 \cong \ldots \cong \triangle A_{n-1}C_{n-1}A_n,$$

pa je $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \ldots \cong A_{n-1}A_n$. Uz to je i $\measuredangle BAC > \measuredangle A_1CA$ jer je po pretpostavci, zbir uglova u trouglu ABC veći od π, pa je zato, na osnovu teoreme 11.16, $BC > AA_1$. Kako je

$$BA + nAA_1 + AC = BA + AA_1 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nC_n > BC_n = (n+1)BC,$$

za svaki prirodan broj n biće,

$$n(BC - AA_1) < BA + AC - BC,$$

što protivreči Arhimedovoj aksiomi budući da je $BC - AA_1 > 0$. Dakle, zbir unutrašnjih uglova trougla ABC ne može biti veći od π. □

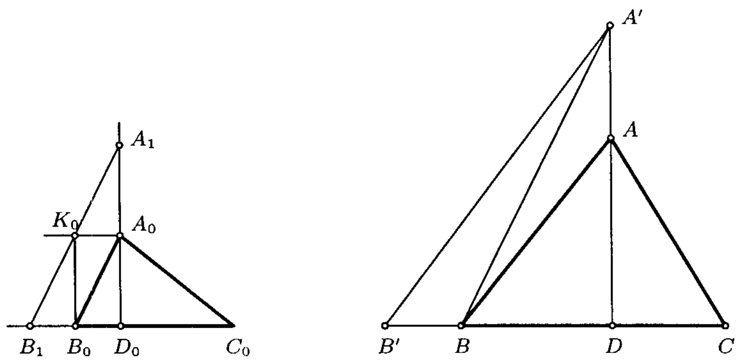
Zbir unutrašnjih uglova trougla ABC obeležavaćemo sa $\sigma(ABC)$. Kako je na osnovu prethodne teoreme, $\sigma(ABC) \leq \pi$ biće $\pi - \sigma(ABC) \geq 0$. Razliku

$$\pi - \sigma(ABC)$$

ćemo zvati *defektom* trougla ABC i obeležavaćemo je sa

$$\delta(ABC).$$

Teorema 23.2: *Ako postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π, onda je zbir unutrašnjih uglova svakog trougla takođe π.*



Slika 23b

Dokaz: Neka je $A_0B_0C_0$ trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π, a ABC bilo koji drugi trougao. Kako su unutrašnji uglovi kod bar dvaju temena nekog trougla oštri, podnožje upravne iz trećeg temena na pravoj koja sadrži naspramnu ivicu tog trougla, pripada toj ivici. Pretpostavimo da su uglovi kod temena B_0, C_0 i

B, C trouglova $A_0B_0C_0$ i ABC oštri, i da su D_0 i D podnožja upravnih iz A_0 i A na dužima B_0C_0 i BC.

Kako je

$$\sigma(A_0B_0D_0) + \sigma(A_0D_0C_0) = \sigma(A_0B_0C_0) + \pi = 2\pi,$$

biće

$$\sigma(A_0B_0D_0) = \pi.$$

Uz to je i

$$\sigma(ABD) + \sigma(ADC) = \sigma(ABC) + \pi,$$

pa, ako je $\sigma(ABD) = \sigma(ADC) = \pi$, biće i $\sigma(ABC) = \pi$.

Da bismo dokazali da je $\sigma(ABD) = \pi$ sa A_n i B_n, $n = 1, 2, \ldots$ obeležimo tačke polupravih (D_0A_0) i (D_0B_0) takve da je

$$A_nD_0 = 2^nA_0D_0 \quad \text{i} \quad B_nD_0 = 2^nB_0D_0.$$

Dokažimo da je

$$\sigma(A_nB_nD_0) = \sigma(A_0B_0D_0) = \pi.$$

U tom cilju sa K_0 obeležimo tačku prave n koja je u tački A_0 upravna na pravoj A_0D_0, sa one strane te prave sa koje je tačka B_0, takvu da je $A_0K_0 \cong D_0B_0$. Tada je

$$\triangle A_0B_0D_0 \cong \triangle B_0A_0K_0 \cong \triangle A_1K_0A_0 \cong \triangle K_0B_1B_0,$$

i $\mathcal{B}(A_1, K_0, B_1)$, pa je zato $\sigma(A_1B_1D_0) = \pi$. Ponavljanjem ovog postupka konačno mnogo puta dokazuje se da je $\sigma(A_nB_nD_0) = \pi$. Za dovoljno veliko n, na osnovu Arhimedove aksiome, biće $BD < B_nD_0$ i $AD \leq A_nD_0$. Zato na polupravama (DA) i (DB) postoje tačke A' i B' takve da je $\mathcal{B}(D, A, A')$, $\mathcal{B}(D, B, B')$, $B'D \cong B_nD_0$, $A'D \cong A_nD_0$, pri čemu je

$$\sigma(A'B'D) = \sigma(A_nB_nD_0) = \pi.$$

Budući da je

$$\sigma(A'B'B) + \sigma(A'BD) = \sigma(A'B'D) + \pi = 2\pi,$$

na osnovu teoreme 23.1 biće i $\sigma(A'BD) = \pi$. Slično,

$$\sigma(A'BA) + \sigma(ABD) = \sigma(A'BD) + \pi = 2\pi,$$

pa je i $\sigma(ABD) = \pi$.

Na isti način se dokazuje da je i $\sigma(ACD) = \pi$, pa je

$$\sigma(ABC) = \pi. \qquad \square$$

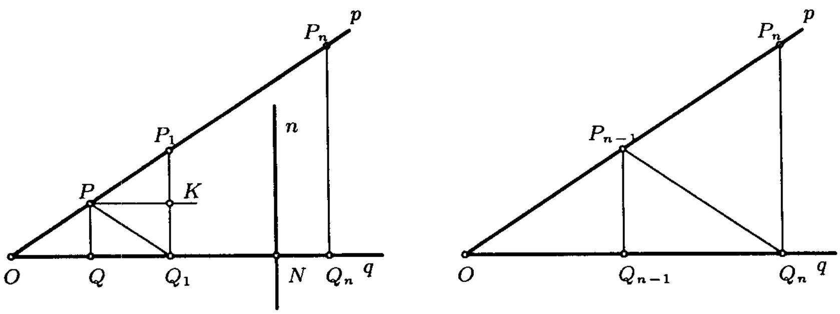
Teorema 23.3: *Postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π, ako i samo ako svaka prava upravna na jednom kraku bilo kojeg oštrog ugla seče drugi krak tog ugla.*

Dokaz: Neka je pq oštar ugao sa temenom O, neka je P proizvoljna tačka polupraave p, Q podnožje upravne iz P na polupravoj q, i N tačka u kojoj je neka prava n upravna na q. Ako je $\mathcal{B}(O,N,Q)$ jednostavno se, na osnovu Pašove aksiome, dokazuje da n seče p. Zato pretpostavimo da je $\mathcal{B}(O,Q,N)$, obeležimo sa P_n i Q_n, $n=1,2,\ldots$ tačke polupravih p i q takve da je $\mathcal{B}(O,P,P_1,\ldots,P_n)$ i $\mathcal{B}(O,Q,Q_1,\ldots,Q_n)$, i $OP_n=2^nOP$ i $OQ_n=2^nOQ$.

Ako postoji trougao kome je suma unutrašnjih uglova π, onda, rasuđujući kao i u dokazu prethodne teoreme možemo dokazati da je trougao OP_nQ_n pravougli, sa pravim uglom kod temena Q_n, i da mu je suma unutrašnjih uglova jednaka π. Zaista, ako sa K obeležimo tačku prave k koja je u tački P upravna na pravoj PQ, sa one strane te prave sa koje je tačka P_1, takvu da je $PK\cong OQ$, tada je

$$\triangle OPQ\cong\triangle PP_1K\cong\triangle Q_1PQ\cong\triangle PQ_1K,$$

i $\mathcal{B}(P_1,K,Q_1)$, pa je zato $\sigma(OP_1Q_1)=\pi$. Ponavljanjem ovog postupka konačno mnogo puta dokazuje se da je $\sigma(OP_nQ_n)=\pi$. Za dovoljno veliko n, na osnovu Arhimedove aksiome, biće $ON<OQ_n$ pa, kako prava n seče duž OQ_n, a ne seče P_nQ_n jer su prave n i P_nQ_n upravne na q, ona će, na osnovu Pašove aksiome, seći duž OP_n.



Slika 23c

Obratno, neka za svako n prava q_n koja je u tački Q_n upravna na kraku q, seče krak p ugla pq u tački P_n. Jednostavno se dokazuje da je tada

$$\begin{aligned}\delta(OP_nQ_n)&=\delta(OP_{n-1}Q_{n-1})+\delta(Q_nP_{n-1}Q_{n-1})+\delta(P_{n-1}Q_nP_n)\\&=2\delta(OP_{n-1}Q_{n-1})+\delta(P_{n-1}Q_nP_n).\end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da postoji trougao kome je defekt pozitivan, onda je, na osnovu prethodne teoreme, defekt svakog trougla pozitivan, pa je zato

$$\delta(OP_nQ_n)>2\delta(OP_{n-1}Q_{n-1})>\ldots>2^n\delta(OPQ).$$

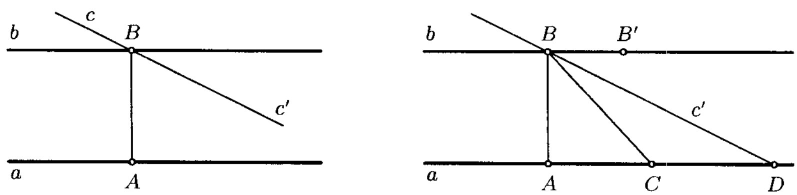
Broj n možemo izabrati dovoljno velikim da broj $2^n\delta(OPQ)$ bude veći od bilo kojeg unapred zadatog broja pa, dakle, i od π. Tada je

$$\delta(OP_nQ_n)>\pi,$$

što je nemoguće. Dakle, ne postoji trougao kome je defekt pozitivan, pa je zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg trougla jednak π. □

Teorema 23.4: *Postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π ako i samo ako za svaku tačku B i pravu a koja je ne sadrži, u njima određenoj ravni postoji jedinstvena prava b, koja sadrži B i sa a nema zajedničkih tačaka.*

Dokaz: Ako je A podnožje upravne iz B na a, prava b koja sadrži tačku B i upravna je na AB sa pravom a nema zajedničkih tačaka jer bi, u protivnom, iz njihove presečne tačke postojale dve upravne na pravoj AB. Pretpostavimo da postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π i dokažimo da je tada prava b jedinstvena. U tom cilju sa c označimo proizvoljnu pravu koja sadrži B i sa c' polupravu sa temenom B koja joj pripada, a sa polupravom (BA) zahvata oštar ugao. Prava a je upravna na (BA) pa, na osnovu prethodne teoreme, ona seče c', dakle i c.



Slika 23d

Obratno, ako sa C obeležimo proizvoljnu tačku prave a različitu od A i sa B' proizvoljnu tačku prave b sa one strane prave AB sa koje je C, biće $\sigma(ABC)=\pi$. Zaista, budući da je, na osnovu teoreme 23.1, $\sigma(ABC)\leq\pi$, biće $\measuredangle BCA\leq\measuredangle CBB'$. Da je $\measuredangle BCA<\measuredangle CBB'$ postojala bi u uglu CBB' poluprava c' koja sa (BC) zahvata ugao γ podudaran uglu BCA. Kako je ugao BCA oštar i γ bi bio oštar ugao, pa bi poluprava c' sekla pravu a u nekoj tački D. Tada bi u trouglu BCD spoljašnji ugao kod temena C bio jednak unutrašnjem uglu kod temena B, što je nemoguće. Dakle, $\measuredangle BCA\cong\measuredangle CBB'$, pa je $\sigma(ABC)=\pi$. □

ZADACI:

1. Dokazati da uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla ne mogu biti tupi.

2. Dokazati da protivosnovica Sakerijevog četvorougla ne može biti manja od njegove osnovice.

3. Ako su Q i R središta ivica AC i AB trougla ABC, dokazati da je

$$QR\leq\frac{1}{2}BC.$$

4. Ako su P i Q središta naspramnih ivica AD i BC tetraedra $ABCD$, dokazati da je

$$AB+CD\geq 2PQ.$$

5. Ako je S središte upisanog kruga trougla ABC, P tačka u kojoj upisani krug dodiruje ivicu BC, a M i N tačke u kojima upravna na SP seče ivice AB i AC, dokazati da je

$$BM + CN \geq MN.$$

6. Ako su M' i N' podnožja upravnih tačaka M i N jednog kraka oštrog ugla, na drugom kraku i ako je $\mathcal{B}(O, M, N)$, dokazati da je

a. $\measuredangle OMM' \geq \measuredangle ONN'$,

b. $MM' < NN'$.

7. Ako je C' podnožje visine iz temena C pravog ugla trougla ABC, dokazati da je $\measuredangle ACC' \geq \measuredangle ABC$.

24. Simetrije ravnih i prostornih likova

Konačne grupe izometrija. Neka je data neka podgrupa G grupe ravanskih ili prostornih izometrija. Skup svih slika neke tačke ravni ili prostora, u transformacijama iz te podgrupe, biće ravan ili prostoran lik Φ čija će grupa simetrija $G(\Phi)$ sadržati G kao podgrupu. Naravno, nije isključeno da grupe $G(\Phi)$ i G budu istovetne.

Među svim podgrupama grupe ravanskih ili prostornih izometrija od posebnog značaja su one čiji je red konačan. Stoga ističemo sledeće tvrđenje koje se obično naziva *Braveovom teoremom*:

Teorema 24.1: *Za svaku konačnu podgrupu G grupe svih ravanskih ili prostornih izometrija, postoji tačka koja je u svim transformacijama iz G invarijantna.*

Dokaz: Skup svih slika proizvoljne tačke X ravni ili prostora, u transformacijama iz G biće konačan lik Φ koji je invarijantan u svakoj od transformacija iz G. Ako je lik Φ tačka, teorema je dokazana. Stoga pretpostavimo da se lik Φ sastoji iz konačno mnogo međusobno različitih tačaka. U tom slučaju postojaće zatvorena kružna površ ako je Φ ravan lik, a kugla ako je Φ prostoran lik, takva da joj Φ pripada, pa će među njima postojati i kružna površ ili kugla, obeležimo ih obe sa $\lambda(O, r)$, najmanjeg dijametra. Štaviše, kružna površ ili kugla najmanjeg dijametra će biti jedinstvena.

Zaista, ako bi postojale dve takve kružne površi ili kugle, λ_1 i λ_2, istog najmanjeg dijametra, onda bi njihov presek koji je neprazan, pripadao nekoj kružnoj površi ili kugli manjeg dijametra, što protivreči pretpostavci.

Dakle, svaka transformacija iz G ostavlja λ invarijantnom, pa stoga, i njeno središte. Štaviše, sve tačke skupa Φ pripadaće rubu kružne površi tj. kugle λ budući da je $OX \cong OX'$ za svaku sliku X' tačke X u transformacijama iz G. $\square$

Posebnu pažnju posvetićemo grupama čiji su elementi samo rotacije i refleksije.

Pretpostavimo da se neka grupa G ravanskih ili prostornih simetrija sastoji samo iz rotacija sa istom osnovom. Ako postoji rotacija $\mathcal{R}$ u toj grupi takva da se svaki element grupe G može predstaviti u obliku

$$\mathcal{R}^n, \quad n=1,2,\ldots,p,$$

ta grupa je konačna ciklična grupa reda p, generisana rotacijom $\mathcal{R}$, koja ima prezentaciju

$$\mathcal{R}^p=1.$$

Obeležavaćemo je sa $\mathfrak{C}_p$. Ako je G slobodna grupa generisana jednom rotacijom, obeležavaćemo je sa $\mathfrak{C}_\infty$.

Svaka rotacija $\mathcal{R}$ se može predstaviti kao kompozicija $\mathcal{R}=\mathcal{S}_2\,\mathcal{S}_1$ dveju refleksija čije osnove zahvataju ugao jednak polovini ugla rotacije $\mathcal{R}$. Grupa generisana refleksijama $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ sadrži grupu generisanu rotacijom $\mathcal{R}$ kao podgrupu indeksa 2. Ako je ciklična grupa $\mathfrak{C}_p$ generisana rotacijom $\mathcal{R}$, grupa generisana refleksijama $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ biće diedarska grupa koju ćemo obeležavati sa $\mathfrak{D}_p$.

Kako postoji samo jedna apstraktna grupa reda 2 grupe $\mathfrak{C}_2$ i $\mathfrak{D}_1$ su algebarski izomorfne,

$$\mathfrak{C}_2 \cong \mathfrak{D}_1$$

iako se međusobno geometrijski razlikuju; prva je generisana centralnom ili osnom simetrijom, a druga refleksijom. Naprotiv, grupe $\mathfrak{C}_4$ i $\mathfrak{D}_2$, obe reda 4, ne razlikuju se samo geometrijski već i algebarski, budući da samo prva od njih ima element reda 4.

Kako se unutrašnjim automorfizmom pomoću refleksije $\mathcal{S}_1$ rotacija $\mathcal{R}$ preslikava u njoj inverznu rotaciju,

$$\mathcal{S}_1\,\mathcal{R}\,\mathcal{S}_1=\mathcal{R}^{-1},$$

iz prezentacije grupe $\mathfrak{C}_p$ može se izvesti prezentacija grupe $\mathfrak{D}_p$ dodavanjem elementa $\mathcal{S}_1$ takvog da je:

$$\mathcal{S}_1^2=1 \quad \text{i} \quad \mathcal{S}_1\,\mathcal{R}\,\mathcal{S}_1=\mathcal{R}^{-1}.$$

Stoga $\mathfrak{D}_p$ ima prezentaciju

$$\mathcal{S}_1^2=\mathcal{R}^p=(\mathcal{R}\,\mathcal{S}_1)^2=1$$

ili, ako je $\mathcal{S}_2=\mathcal{R}\,\mathcal{S}_1$,

$$\mathcal{S}_1^2=\mathcal{S}_2^2=(\mathcal{S}_2\,\mathcal{S}_1)^p=1.$$

Dakle, ciklična grupa $\mathfrak{C}_p$ i diedarska grupa $\mathfrak{D}_p$ su primeri konačnih grupa izometrija ravni i prostora. Tvrđenje da su ove grupe jedine konačne grupe izometrija ravni naziva se teoremom *Leonarda da Vinčija.*

Teorema 24.2: *Grupa G izometrija ravni je konačna ako i samo ako je G ciklična grupa $\mathfrak{C}_p$ ili diedarska grupa $\mathfrak{D}_p$.*

Dokaz: Ciklična grupa $\mathfrak{C}_p$ i diedarska grupa $\mathfrak{D}_p$, kako smo ih definisali, su konačne grupe izometrija ravni. Dokažimo obratno, da je proizvoljna konačna grupa G izometrija ravni, ciklična grupa $\mathfrak{C}_p$ ili diedarska grupa $\mathfrak{D}_p$. Budući da je G konačna grupa, na osnovu Braveove teoreme postojaće tačka O koja je invarijantna u svim izometrijama iz G. Jedine direktne izometrije ravni koje imaju invarijantnih tačaka su rotacije, a indirektne, refleksije. Budući da je rotacija proizvod dveju refleksija, grupa G se sastoji samo iz rotacija ili iz podjednako mnogo rotacija i refleksija jer je rezultat množenja svih rotacija i refleksija nekom refleksijom, redom, skup svih refleksija i rotacija. Budući da su $\mathfrak{C}_1$ i $\mathfrak{D}_1$ jedine grupe sa više invarijantnih tačaka, sve rotacije iz G imaju isto središte i njihovi uglovi su oblika $2k\pi/p$, gde je $2\pi/p$ najmanji ugao rotacije iz G. Dakle, jedine konačne grupe koje se sastoje samo iz rotacija su ciklične grupe $\mathfrak{C}_p$. Konačno, ako se G sastoji iz podjedako mnogo rotacija i refleksija, grupa koja se dobija dodavanjem refleksije grupi $\mathfrak{C}_p$ je diedarska grupa $\mathfrak{D}_p$. □

Simetrični likovi. Među postojećim vrstama ravanskih i prostornih izometrija od posebnog su interesa one od tih izometrija koje ostavljaju invarijantnim neki ravan ili prostoran lik Φ. Te izometrije zvaćemo *simetrijama* lika Φ. Ako su $\mathcal{I}_1$ i $\mathcal{I}_2$ simetrije lika Φ, neposredno se dokazuje da je i $\mathcal{I}_2^{-1}\mathcal{I}_1$ simetrija toga lika. Odatle sledi da je skup svih simetrije lika Φ podgrupa grupe svih ravanskih ili prostornih izometrija. Tu podgrupu nazivamo *grupom simetrija lika* Φ. Ako je red te podgrupe veći od jedan, za lik Φ ćemo reći da je *simetričan.* U protivnim ćemo za lik reći da je *asimetričan.*

Budući da razlikujemo direktne i indirektne izometrije, razlikovaćemo *direktne* i *indirektne simetrije* nekog lika; tj. simetrije koje ne menjaju i simetrije koje menjaju orijentaciju toga lika. Neposredno se dokazuje da direktne simetrije lika sačinjavaju podgrupu G^+ indeksa dva, grupe G simetrija toga lika.

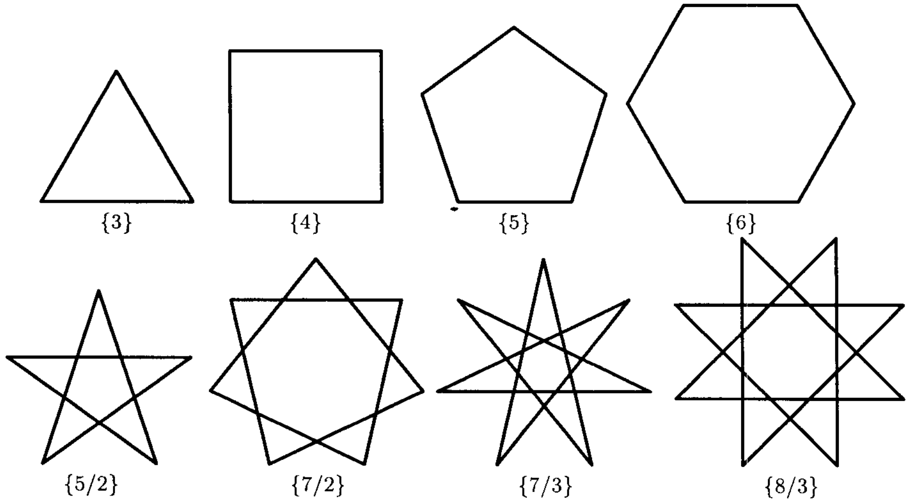
Pravilni poligoni. Neka je zadata ciklična grupa $\mathfrak{C}_p$ generisana rotacijom $\mathcal{R}$, i neka je A proizvoljna tačka koja nije invarijantna u toj rotaciji. Kako je $\mathfrak{C}_p$ konačna grupa, i skup slika tačke A u rotacijama iz te grupe biće konačan. Štaviše, ukupan broj slika tačke A biće jednak redu p grupe $\mathfrak{C}_p$. Neka je

$$A_i = \mathcal{R}^i(A).$$

Kako je skup tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_p = A$ konačan, njima će biti određen poligon $A_1A_2\ldots A_p$ čija temena pripadaju nekom krugu sa središtem O. Tačku O ćemo zvati *središtem* poligona $A_1A_2\ldots A_p$. Tada je

$$\mathcal{R}^i(A_1A_2\ldots A_p) = A_{i+1}A_{i+2}\ldots A_pA_1\ldots A_i.$$

Budući da su $A_1, A_2, \ldots, A_p$ razne tačke, poluprave $OA_1, OA_2, \ldots, OA_p$ razlažu ravan kojoj pripadaju na p međusobno podudarnih uglova $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. Obeležimo otvorene uglove $AOA_1, A_1OA_2, \ldots, A_{p-1}OA_p$, redom, sa $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$.



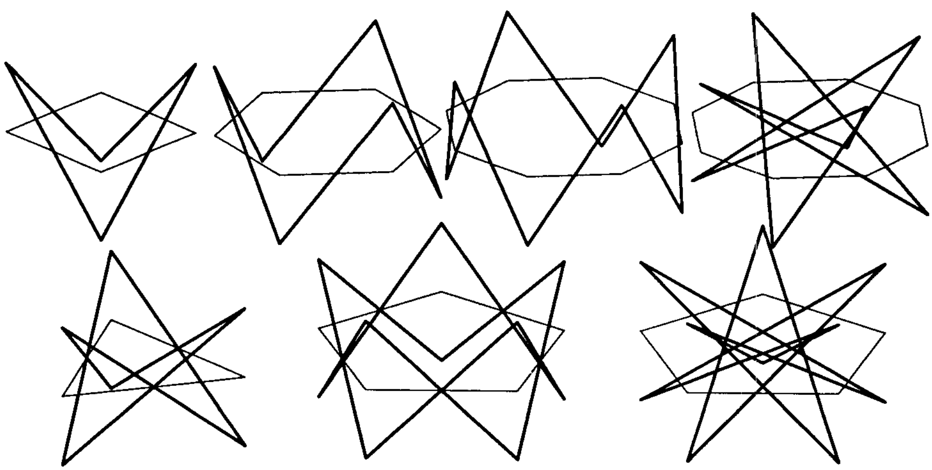
Slika 24a

Ako ugao ω_1 ima neprazan presek sa d uglova iz skupa $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p\}$, tada i svaki drugi ugao

$$\omega_i = \mathcal{R}^i(\omega_1),\ i \in \{1, 2, \ldots, p\}$$

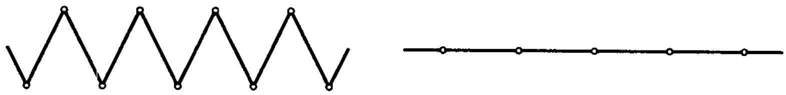
ima neprazan presek sa d uglova iz tog skupa, pa je ugao rotacije $\mathcal{R}$ tada $2d\pi/p$.

Ako je $d = 1$, uglovi iz skupa $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p\}$ su istovetni sa uglovima iz skupa $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p\}$. Tada je poligonska površ $A_1A_2 \ldots A_p$ konveksna, pa zato poligon $A_1A_2 \ldots A_p$ nazivamo *pravilnim konveksnim poligonom* i obeležavamo ga sa $\{p\}$.



Slika 24b

Ako je $d > 1$, poligon $A_1A_2 \ldots A_p$ nazivamo *pravilnim zvezdolikim poligonom* i



Slika 24c

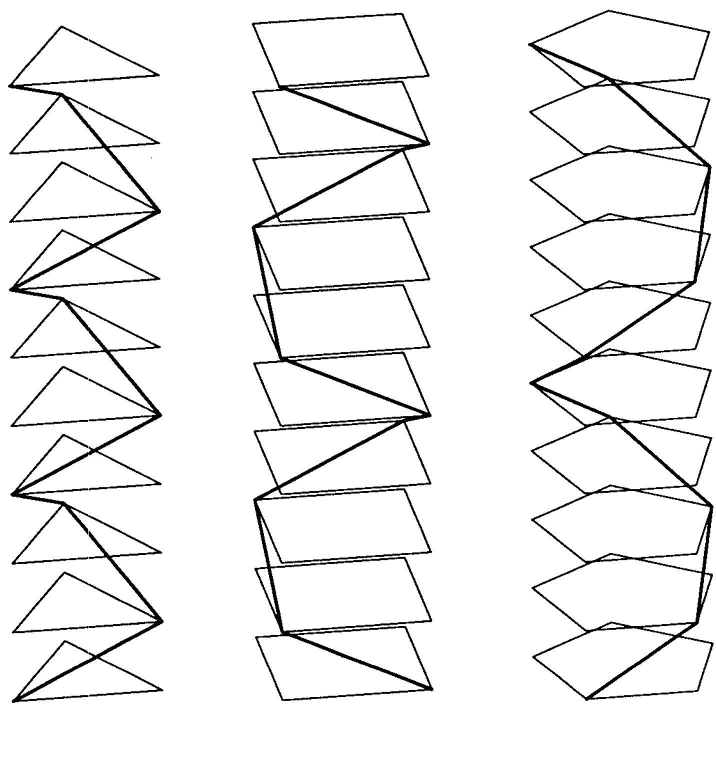
obeležavamo ga sa $\{p/d\}$.

Iako su pravilni konveksni poligoni i pravilni zvezdoliki poligoni definisani uz pomoć rotacija, primetimo da njihove grupe simetrija nisu ciklične, već grupe generisane refleksijama. Zaista, osnom refleksijom u odnosu na medijatrisu duži A_1A_2 takav poligon se preslikava na sebe, pa je njegova grupa simetrija diedarska.

U opštem slučaju, ako je $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ skup slika neke tačke $A(=A_p)$ u transformacijama iz ciklične grupe G generisane bilo kojom izometrijom $\mathcal{I}$ koja ne ostavlja invarijantnom tačku A, takvih da je

$$A_i = \mathcal{I}^i(A),$$

poligon $A_1A_2\ldots A_p$ nazivamo *pravilnim*. Ako je pravilan poligon rub neke poligonske površi, i tu poligonsku površ ćemo zvati *pravilnom*.



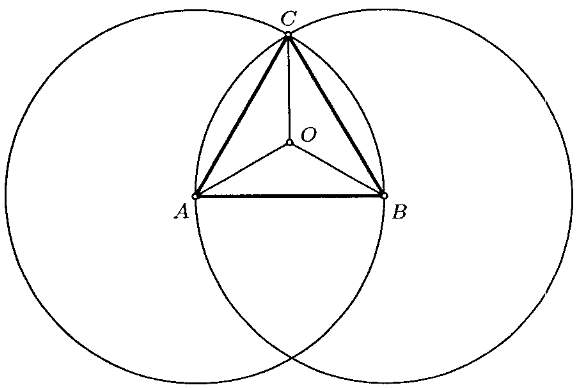
Slika 24d

U slučaju kada je G generisana rotacionom refleksijom $\mathcal{R}_{\alpha;s,2\pi/k}$ dobijeni pravilni poligon nazivamo *prizmatičnim* ili *antiprizmatičnim* u zavisnosti od toga da li je broj k neparan ili paran.

Ako dopustimo da G bude beskonačna ciklična grupa generisana nekom izometrijom, dobijeni lik zvaćemo *uopštenim pravilnim poligonom.* U posebnom slučaju kada je beskonačna ciklična grupa G generisana klizajućom refleksijom dobijeni uopšteni pravilni poligon zvaćemo *pravilnim cik-cak poligonom* ili *pravilnim testerolikim poligonom.* Ako je pak G generisana translacijom, zvaćemo ga *apeirogonom* i obeležavaćemo ga sa $\{\infty\}$. Ako je beskonačna ciklična grupa generisana zavojnim kretanjem, dobijeni uopšteni pravilni poligon zvaćemo *helikoidnim.*

Sledeću teoremuističemo jer je ona prvi stav Euklidovih Elemenata.

Teorema 24.3: *Postoji pravilan trougao kome su sve ivice podudarne datoj duži.*



Slika 24e

Dokaz: Neka je AB zadata duž. Krugovi $k(A, AB)$ i $k(B, BA)$ imaju tačno dve zajedničke tačke (posledica teoreme 21.10). Ako je C jedna od njih, trougao ABC je pravilan. Zaista, sve ivice trougla ABC su međusobno podudarne, pa su i svi uglovi tog trougla međusobno podudarni (teorema 11.12). Stoga se simetrale njegovih uglova seku u tački O takvoj da su trouglovi OAB, OBC i OCA međusobno podudarni. Dakle, rotacijom $\mathcal{R}_{O,2\pi/3}$ je generisana ciklična grupa, a slike tačke A u rotacijama iz te grupe su temena trougla ABC. □

Pravilni rogljevi. U analogiji sa pojmom pravilnog poligona može se uvesti i pojam pravilne rogljaste površi. Ako je $a_1, a_2, \ldots, a_q$ skup slika proizvoljne poluprave $a(=a_q)$ sa temenom O, u transformacijama iz ciklične grupe G reda q, generisane bilo kojom izometrijom $\mathcal{I}$ koja teme O ostavlja invarijantnim, a polupravu a ne ostavlja, takvih da je

$$a_i = \mathcal{I}^i(a),$$

rogljastu površ $Oa_1a_2 \ldots a_q$ nazivamo *pravilnom.* Ako je pravilna rogljasta površ $Oa_1a_2 \ldots a_q$ rub nekog roglja taj rogalj ćemo takođe zvati *pravilnim.*

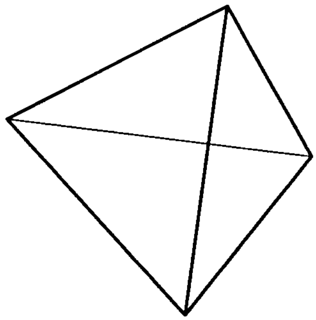
Jedine neidentičke direktne izometrije prostora koje imaju invarijantnih tačaka su rotacije (teorema 20.4), a jedine indirektne izometrije sa invarijantnim tačkama, refleksije (teorema 15.5) i rotacione refleksije (teorema 20.5). Stoga su jedine pravilne rogljaste površi analogoni pravilnih konveksnih poligona, pravilnih zvezdolikih poligona, pravilnih prizmatičnih i pravilnih antipriznatičnih poligona. Te rogljaste površi koje su, redom, generisane rotacijama za ugao $2\pi/q$ ili $2p\pi/q$, i rotacionim refleksijama za ugao $2\pi/k$, gde broj k može da bude neparan ili paran, zvaćemo *pravilnim konveksnim rogljastim površima, pravilnim zvezdolikim rogljastim površima, pravilnim prizmatičnim* i *pravilnim antiprizmatičnim rogljastim površima.*

Teorema 24.4: *Ako je ugao α manji od $2\pi/3$, tada postoji pravilna triedarska površ kojoj su sve pljosni podudarne uglu α.*

Dokaz: Ako je O teme ugla α, a P i Q tačke njegovih krakova, takve da je $OP \cong OQ$, tada postoji pravilan trougao ABC kome su sve ivice podudarne duži PQ. Sfere $S(A, OP)$, $S(B, OP)$ i $S(C, OP)$ imaju neprazan presek jer središte trougla ABC pripada unutrašnjosti svake od njih. Ako je T jedna od presečnih tačaka tih triju sfera i ako su a, b, c poluprave sa temenom T koje, redom, sadrže tačke A, B, C, triedar $Tabc$ je pravilan, a sve njegove pljosni su podudarne uglu α. Zaista, trouglovi TAB, TBC i TCA su međusobno podudarni jer su svi podudarni trouglu OPQ, pa je prava koja sadrži tačku T i središte T' pravilnog trougla ABC, osa s rotacije $\mathcal{R}_{s,2\pi/3}$ kojom se trouglovi TAB, TBC i TCA preslikavaju jedan na drugi. Stoga je tom rotacijom generisana ciklična grupa, a slike poluprave a u rotacijama iz te grupe su ivice triedra $Tabc$. $\square$

Pravilni poliedri. Među svim poliedarskim površima od posebnog značaja su *pravilne poliedarske površi* kojima su pljosni pravilne, međusobno podudarne poligonske površi, a njihove rogljaste površi, takođe pravilne i međusobno podudarne. Ako je pravilna poliedarska površ rub nekog poliedra, i taj poliedar ćemo zvati *pravilnim.*

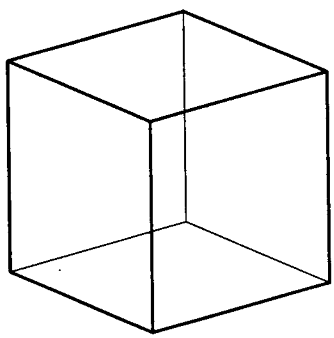
Budući da joj sve pljosni imaju isti broj ivica, a svi rogljevi isti broj pljosni, pravilna poliedarska površ nultog roda je topološki pravilna. Stoga pravilna poliedarska površ nultog roda može biti ili tetraedarska ili heksaedarska ili oktaedarska ili dodekaedarska ili ikosaedarska. Dokažimo da postoji svaka od navedenih pravilnih poliedarskih površi. U tom cilju primetimo, najpre, da iz teoreme 24.4 sledi da postoji pravilna triedarska površ $Oabc$ čije pljosni sadrže tri pravilne trougaone površi, ili tri pravilne četvorougaone površi, ili tri pravilne petougaone površi sa zajedničkim temenom i unutrašnjim uglovima čiji kraci su ivice triedarske površi $Oabc$. To je zato što, na osnovu prve Ležandrove teoreme, ugao pravilnog trougla ne može biti veći od $\pi/3$, pa stoga, ugao pravilnog konveksnog četvorougla ne može biti veći od $\pi/2$, a pravilnog konveksnog petougla od $3\pi/5$. Na taj način je dobijen



Slika 24f

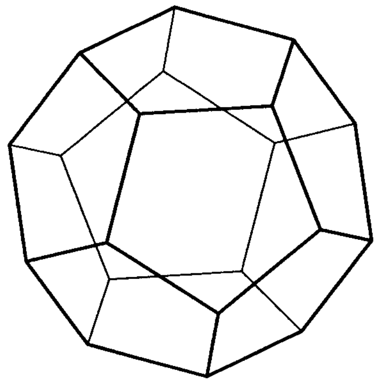
povezani skup λ pravilnih poligonskih površi koji se sastoji iz triju trouglova, triju četvorouglova ili triju petouglova.

U prvom slučaju kada se povezani skup λ sastoji iz triju pravilnih trougaonih površi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, njegov rub je pravilna trougaona površ λ_4 koja je podudarna površima $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ pa je $\lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3 \cup \lambda_4$ pravilna tetraedarska površ. Budući da su joj pljosni pravilne trougaone površi, a rogljevi pravilni triedri, pravilnu tetraedarsku površ ćemo obeležavati sa $\{3, 3\}$.



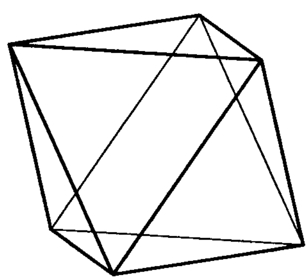
Slika 24g

U drugom slučaju kada se povezani skup λ sastoji iz triju pravilnih konveksnih četvorougaonih površi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, trima rotacijama za ugao $\pi/2$ čija je osa prava s koja sadrži središte površi λ_1 i upravna je na ravni koja tu površ sadrži, četvorougaona površ λ_2 se preslikava na četvorougaonu površ λ_3, a potom na četvorougaone površi λ_4 i λ_5. Tim rotacijama rogljasta površ $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ se preslikava na rogljaste površi $\lambda_1\lambda_3\lambda_4$, $\lambda_1\lambda_4\lambda_5$ i $\lambda_1\lambda_5\lambda_2$, pa je $\lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3 \cup \lambda_4 \cup \lambda_5$ povezani skup poligonskih površi čiji rub je pravilan četvorougao. Površ λ_6 tog četvorougla je podudarna površima $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$. Stoga je $\lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3 \cup \lambda_4 \cup \lambda_5 \cup \lambda_6$ pravilna heksaedarska površ. Budući da su joj pljosni pravilne četvorougaone površi, a rogljevi pravilni triedri, pravilnu heksaedarsku površ ćemo obeležavati sa $\{4, 3\}$. Zvaćemo je *površi kocke.*



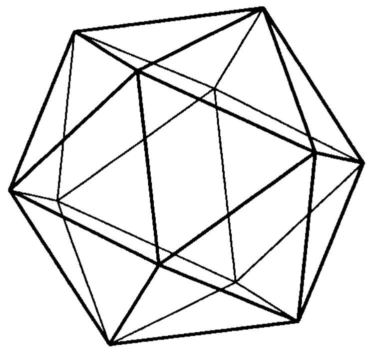
Slika 24h

U trećem slučaju kada se povezani skup λ sastoji iz triju pravilnih konveksnih petougaonih površi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, rotacijama za ugao $2\pi/5$ čija je osa prava s koja sadrži središte površi λ_1 i upravna je na ravni koja tu površ sadrži, petougaona površ λ_2 se preslikava na petougaonu površ λ_3, a potom na petougaone površi λ_4, λ_5 i λ_6. Tim rotacijama rogljasta površ $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ se preslikava na rogljaste površi $\lambda_1\lambda_3\lambda_4$, $\lambda_1\lambda_4\lambda_5$, $\lambda_1\lambda_5\lambda_6$ i $\lambda_1\lambda_6\lambda_2$, pa je $\lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3 \cup \lambda_4 \cup \lambda_5 \cup \lambda_6$ povezani skup poligonskih površi čiji rub je pravilan antiprizmatični desetougao. Rotacionom refleksijom $\mathcal{R}_{\sigma;s,2\pi/5}$, gde je σ ravan koja sadrži središta ivica antiprizmatičnog desetougla, povezni skup $\lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3 \cup \lambda_4 \cup \lambda_5 \cup \lambda_6$ se preslikava na $\lambda_1' \cup \lambda_2' \cup \lambda_3' \cup \lambda_4' \cup \lambda_5' \cup \lambda_6'$. Tada je $\lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3 \cup \lambda_4 \cup \lambda_5 \cup \lambda_6 \cup \lambda_1' \cup \lambda_2' \cup \lambda_3' \cup \lambda_4' \cup \lambda_5' \cup \lambda_6'$ pravilna dodekaedarska površ. Budući da su joj pljosni pravilne petougaone površi, a rogljevi pravilni triedri, pravilnu dodekaedarsku površ ćemo obeležavati sa $\{5,3\}$.



Slika 24i

Pravilne poliedarske površi $\{3,3\}$, $\{4,3\}$ i $\{5,3\}$ su rubovi triju pravilnih poliedara: pravilnog tetraedra, pravilnog heksaedra i pravilnog dodekaedra. Neposredno se dokazuje da je poliedar koji je dualan nekom od tih triju pravilnih poliedara i kome su temena, središta pljosni nekog od njih, takođe pravilan poliedar. Rub poliedra dualnog pravilnom tetraedru biće opet $\{3,3\}$, rub poliedra dualnog pravilnom heksaedru biće pravilna oktaedarska površ $\{3,4\}$, a rub poliedra dualnog pravilnom dodekaedru biće pravilna ikosaedarska površ $\{3,5\}$.



Slika 24j

Upravo konstruisane pravilne poliedre: pravilan tetraedar, pravilan heksaedar, pravilan oktaedar, pravilan dodekaedar i pravilan ikosaedar koji se obično nazivaju *Platonovim telima* označavaćemo istim simbolom kao i njihove površi, dakle sa $\{3,3\}$, $\{4,3\}$, $\{3,4\}$, $\{5,3\}$ i $\{3,5\}$.

Pogled u istoriju Platonovih tela. Budući da su tetraedar, heksaedar, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar geometrijski likovi koji se u pravilnom ili skoro pravilnom obliku javljaju u prirodi kao kristali nekih hemijskih jedinjenja, izvesno je da su ljudima bili poznati i u praistorijsko doba. Materijalni dokazi poznavanja nekih od ovih tela, pre svega tetraedra, kocke, oktaedra, a zatim i ikosaedra, dolaze iz drevnog Egipta. Poznato je da se za dodekaedar na Apeninskom poluostrvu znalo i u predpitagorejsko vreme, a pitagorejci su svakako znali za svako od pet pravilnih tela. Međutim, istorija pravilnih poliedara ne počinje otkrićem pojedinih pravilnih geometrijskih tela, već saznanjem da ta pojedinačna tela imaju neka zajednička svojstva koja ih karakterišu.

U geometrijskim istraživanjima nisu samo od značaja razmatranja svakog od pravilnih poliedara ponaosob već je, pre svega, značajno uvođenje pojma pravilnog poliedra, a potom razmatranje zajedničkih osobina svih takvih tela kojima su sve pljosni pravilni, međusobno podudarni poligoni. U tom smislu pojam pravilnog poliedra u predhelensko vreme nije postojao, kao što se može reći da u predhelensko vreme nije bilo ni geometrije iako je bilo nekih praktičnih geometrijskih znanja. Prvi pravi geometrijski pojmovi i prvi dokazi geometrijskih teorema su tekovine grčke civilizacije. I pravilan poliedar je jedan od geometrijskih pojmova ustanovljenih u klasičnoj Grčkoj. Njegovo uvođenje imalo je, pored Grcima veoma bliske kosmološke, i estetsku motivaciju. Od tog vremena pa do danas pravilni poliedri se proučavaju zajedno, upoređuju se jedni sa drugima i razmatraju kao jedna skupina. Sa istorijskog stanovišta je zanimljivo utvrditi ko je učinio taj važan korak ka apstrakciji i generalizaciji, ko je, i kada, u geometriju uveo pojam pravilnog poliedra.

Zahvaljujući Proklu (410–485) konstrukcija pet pravilnih poliedara: tetraedra, kocke, oktaedra, dodekaedra i ikosaedra (nazvanih u Proklovom delu „kosmičkim telima“) je veoma dugo pripisivana Pitagori. Pokazalo se, međutim, da je Proklo sledio jednu od mnogih antičkih legendi koje su se odnosile na rodonačelnika pitagorejskog bratstva.

U prvoj sholiji trinaeste knjige Euklidovih Elemenata nepoznati autor (verovatno sledeći Geminija) navodi da je od pet takozvanih Platonovih tela tri pripisano Pitagori; to su: kocka, tetraedar i dodekaedar, a dva: oktaedar i ikosaedar, Teetetu. Ovo tvrđenje se najverovatnije oslanja na činjenicu da je Teetet prvi pisao o pomenutim telima i da je ispitivao njihova zajednička svojstva. Stoga se smatra da je pojam pravilnog poliedra u geometriju prvi uveo Teetet (oko −414 do −369), Sokratov sledbenik, učenik Teodora iz Kirene i, uz svog učitelja, jedan od učesnika Platonovog dijaloga koji je po njegovom imenu i dobio ime *Teetet*. Da je Teetet, kasnije učenik Platonove Akademije, pisao o pravilnim poliedrima, potkrepljuje se i činjenicom da postoji njegov prilog teoriji iracionalnih brojeva, čiji je značaj u konstrukciji Platonovih tela vidljiv i u trinaestoj knjizi Euklidovih Elemenata.

Budući da Euklid svoju prvu knjigu Elemenata započinje konstrukcijom pravilnog trougla, a poslednju završava konstrukcijom pravilnog dodekaedra, postoji mišljenje da je njegova osnovna misao bila da razvije i uobliči sva geometrijska znanja nepohodna za konstrukciju i razumevanje osobina pet Platonovih tela, a ne da raspravlja o osnovima geometrije.

Imajući u vidu izvanrednu pravilnost Platonovih tela Grci, skloni metafizici, doveli su ih u vezu sa četiri elementa i univerzumom. U svome *Timaju* Platon piše:

> „Treba sada da kažemo koja su ta četiri najlepša tela, međusobno nejednaka, pa ipak sposobna da se uzajamnim razlaganjem rađaju jedna iz drugih. Jer ako pronađemo odgovor na ovo, imaćemo pred sobom istinu o postanku zemlje i vatre kao i onih tela koja se usrazmerena nalaze između njih. Jer, nikome nećemo dati saglasnost da su vidljiva tela lepša nego ova od kojih je svako pojedinačno jedinstven rod.“ [53e]
>
> „Postoji još jedan, peti sastav; bog ga je upotrebio za svemir, oslikavajući na njemu likove (zodijaka).“ [55c]

Na ovu helensku ideju nadovezao se Johan Kepler (1571–1630) u svome delu Harmonices Mundi, i u mnogome je razvio i dopunio. Kocka oslonjena na svoju osnovu simbolizuje stabilnost, pa je, stoga, u vezi sa Zemljom. Oktaedar koji slobodno rotira ako se pridržavaju njegova naspramna temena simbolizuje pokretljivost Vazduha. Među pravilnim poliedrima tetraedar ima najmanji, a ikosaedar najveći broj pljosni, pa stoga, tetraedar označava suvoću Vatre, a ikosaedar vlažnost Vode. Na posletku, dodekaedar je nebeski simbol jer ima dvanaest pljosni koliko je i zodijačkih znakova, pa je, stoga, pridružen Univerzumu.

Kepler je u svojoj kosmološkoj teoriji stvorenoj mnogo pre njegovih triju zakona po kojima je danas poznat, pokušao da redukuje rastojanja planeta Sunčevog sistema na metričke osobine Platonovih tela alternativno upisanih i opisanih oko nebeskih sfera pridruženih planetama: Saturnu, Jupiteru, Marsu, Zemlji, Veneri i Merkuru koje su odvojene, redom, kockom, tetraedrom, dodekaedrom, oktaedrom i ikosaedrom. Naravno, Kepler nije ništa znao o Uranu, Neptunu i Plutonu koji su otkriveni kasnije, 1781. 1846. i 1930. godine.

ZADACI:

1. Ako je neka grupa izometrija neparnog reda, dokazati da je ona ciklična.
2. Dokazati da je petougao pravilan ako i samo ako su mu sve ivice i svi uglovi međusobno podudarni.
3. Dokazati da svaki prostorni pravilni poligon ima paran broj ivica.
4. Da li postoji šestougao kome su sve ivice i svi uglovi međusobno podudarni, a koji nije pravilan?
5. Može li poliedar da ima sve pljosni pravilne i podudarne, a da sam nije pravilan?
6. Dokazati da je red grupe simetrija pravilnog poliedra jednak četvorostrukom broju njegovih ivica.

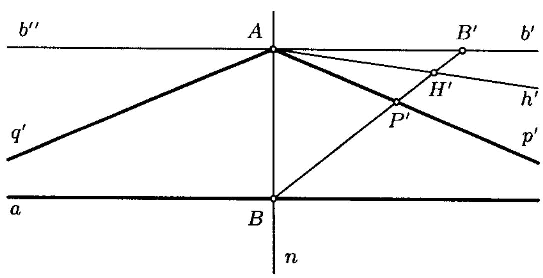
25. Paralelnost u apsolutnom prostoru

Utemeljenje pojma paralelnosti imalo je izvanredno veliki značaj u istoriji geometrije. Platon taj pojam nije nigde spomenuo u svome delu dok je u Aristotela paralelnost uvedena na način koji je kasnije prihvatio Euklid svojom dvadeset trećom definicijom u prvoj knjizi Elemenata. Stoga su vekovima paralelne prave shvatane kao prave „koje se nalaze u istoj ravni i koje se, produžene u beskrajnost na obe strane, ne seku jedna sa drugom“. U nameri da se peti Euklidov postulat dedukuje iz ostalih aksioma i postulata geometrije, paralelnost se u geometriju uvodila na način koji se u nekoliko razlikuje od Euklidovog. Tako su za Posidonija, astronoma i geometričara iz drugog veka stare ere, paralelne prave bile „prave jedne ravni koje ne konvergiraju ni divergiraju, već imaju jednake sve upravne iz bilo koje tačke jedne od njih, na drugoj“. Ovaj način razumevanja paralelnih pravih prema kojem su tačke jedne od njih sve na istom rastojanju od druge, bio je veoma rasprostranjen ne samo u antičko vreme već i mnogo kasnije. Za Ptolemaja, znamenitog astronoma Starog veka, paralelne prave su bile one koje sa iste strane prave koja ih seče sa njome zahvataju podudarne uglove, a za Prokla, prave jedne ravni koje imaju osobinu da svaka prava koja seče jednu od njih, seče i drugu. U razumevanju pojma paralelnosti u osnovi se nije ništa promenilo više od dve hiljade godina, od antičkih vremena pa do prve polovine devetnaestog veka.

Esencijalno nov način poimanja paralelnosti predložio je Lobačevski, a za njim i Janoš Boljaj. Zahvaljujući njima, zasnovana je hiperbolička geometrija u kojoj ne važi peti Euklidov postulat. U svojim **Geometrijskim ispitivanjima iz teorije paralelnih linija** (koju je Branislav Petronijević preveo na naš jezik 1914. godine) Lobačevski na samom početku dokazuje da „sve prave linije, koje polaze u jednoj ravni iz jedne tačke, mogu se u odnosu na jednu datu pravu liniju u istoj ravni podeliti u dve klase, i to u linije koje se seku i linije koje se ne seku". Zahvaljujući tome Lobačevski je mogao da „graničnu liniju između jedne i druge klase tih linija" nazove *paralelnom datoj liniji*. Slično njemu Janoš Boljaj na samom početku svoga **Apendiksa** piše: „Ako BN ne seče, a svaka druga prava BP ugla ABN seče pravu AM, pisaćemo $BN \parallel AM$".

Paralelne prave. Dokažimo najpre tvrđenje koje će nam omogućiti da u apsolutnu geometriju uvedemo pojam paralelnosti.

Teorema 25.1: *Neka su u apsolutnoj ravni zadate neka prava a i tačka A van nje. Među svim polupravama te ravni sa zajedničkim temenom A koje sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka postoje tačno dve, p' i q', takve da proizvoljna poluprava sa temenom A seče pravu a ako i samo ako pripada onom od uglova sa kracima p' i q' kojem pripada i prava a.*



Slika 25a

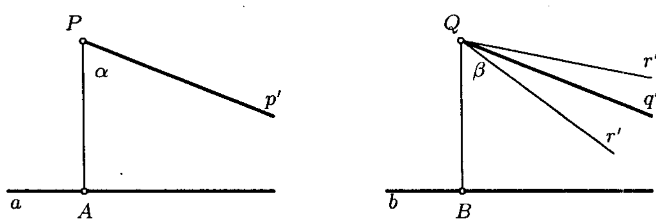
Dokaz: Neka je n prava koja sadrži A i upravna je na a, a B podnožje upravne n na pravoj a. Prava b koja je u tački A upravna na n, sa pravom a nema zajedničkih tačaka jer bi, u suprotnom, iz tačke van n postojale dve prave koje su na njoj upravne. Tačka A razlaže pravu b na dve poluprave, b' i b''. Ako u poluravni (bB) nema polupravih sa temenom A koje ne seku a, onda su b' i b'' tražene poluprave p' i q'. Pretpostavimo zato, da postoji poluprava h' sa temenom A koja pripada (bB) i sa a nema zajedničkih tačaka. Neka je h' u onoj od poluravni sa granicom n u kojoj je i poluprava b'. Obeležimo sa B' proizvoljnu tačku poluprave b', i sa H' presek poluprave h' i duži BB'. Tačke duži BB' možemo da podelimo u dva skupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, takva da za svaku tačku M skupa $\mathcal{M}$ poluprava (AM) seče a, a za svaku tačku N skupa $\mathcal{N}$ poluprava (AN) nema zajedničkih tačaka sa pravom a. Primetimo da su skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ neprazni i da svaka tačka duži BB' pripada jednom od njih. Budući da se jednostavno dokazuje da između tačaka jednog od tih skupova nema tačaka drugog, ispunjeni su uslovi Dedekindove teoreme za duži, pa postoji jedinstvena tačka P' koja razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Ta tačka pripada skupu $\mathcal{N}$ jer bi, u suprotnom, poluprava (AP') sekla a u nekoj tački R pa, ako je T tačka takva da je $\mathcal{B}(B,R,T)$, poluprava AT bi sekla duž BH', odakle bi sledilo da tačka P' ne razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

Obeležimo polupravu AP' sa p', a sa q' obeležimo sliku poluprave p' u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_n$. Poluprave p' i q' razlažu ravan kojoj pripadaju na dva ugla. Obeležimo sa α onaj od tih uglova koji sadrži a. Poluprava sa temenom A će seći pravu a ako i samo ako pripada uglu α. Stoga poluprave p' i q' razdvajaju skup svih polupravih sa zajedničkim temenom A na dva podskupa. Jedan se sastoji iz polupravih koje seku pravu a, a drugi iz polupravih koje je ne seku. □

Za poluprave p' i q' reći ćemo da su *paralelne* ili *uporedne* pravoj a i pisaćemo $p' \| a$ i $q' \| a$. I za (ne neophodno međusobno različite) prave p i q koje sadrže, redom, poluprave p' i q', reći ćemo da su *paralelne* ili *uporedne* pravoj a i pisaćemo $p \| a$ i $q \| a$. Konveksan ugao koji zahvataju poluprave AB i p' (ili q') zvaćemo *uglom paralelnosti tačke A u odnosu na pravu a* ili *uglom paralelnosti duži AB*. Taj ugao će biti prav ako i samo ako su poluprave p' i q' komplementne. Ako je a' proizvoljna poluprava koja pripada pravoj a, takva da poluprave a' i p' pripadaju poluravni čija granica sadrži njihova temena, za polupravu p' ćemo reći da je *paralelna* polupravoj a' i pisaćemo $p' \| a'$. Sledeće tvrđenje neposredno sledi iz prethodne teoreme.

Teorema 25.2: *U ravni određenoj polupravom a' i tačkom A van prave koja sadrži a', postoji jedinstvena poluprava sa temenom A koja je paralelna polupravoj a'.* □

Teorema 25.3: *Ako je poluprava p' paralelna pravoj a, i njena slika q' u nekoj izometriji $\mathcal{I}$ je paralelna slici b prave a, u istoj izometriji.*



Slika 25b

Dokaz: Pretpostavimo da poluprava q' nije paralelna pravoj b. Neka su P i Q temena polupravih p' i q', neka su A i B podnožja upravnih iz tih dveju tačaka, redom, na pravama a i b, a α i β konveksni uglovi koji sa polupravama p' i q' zahvataju, redom, poluprave (PA) i (QB). Neka je, zatim, r' poluprava sa temenom Q paralelna pravoj b, u poluravni sa rubom QB kojoj pripada poluprava q'.

Ako je $\mathcal{I}^{-1}(r') = s'$, tada poluprava r' pripada uglu β ako i samo ako poluprava s' pripada uglu α. Stoga razlikujemo sledeće dve mogućnosti:

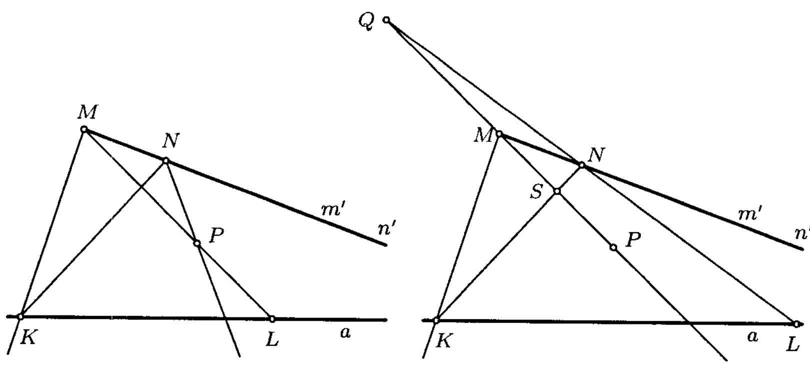
– poluprava r' pripada uglu β. Tada poluprava s' pripada uglu α, pa seče pravu a. Stoga se seku i slike r' i b, poluprave s' i prave a, u izometriji $\mathcal{I}$, što protivreči jednoj od pretpostavki.

– poluprava r' pripada uglu koji je naporedan uglu β. Tada poluprava q' pripada konveksnom uglu čiji su kraci r' i (QB), pa zato seče pravu b u nekoj tački R. Kako $\mathcal{I}^{-1}(R)$ pripada i polupravoj p' i pravoj a, poluprava p' i prava a će se seći što opet protivreči jednoj od pretpostavki. Dakle, $q' \| b$. □

Iz prethodne teoreme neposredno sledi da se prava a koja je paralelna nekoj pravoj b izometrijom $\mathcal{I}$ preslikava na pravu a_1 paralelnu slici b_1 prave b u izometriji $\mathcal{I}$, a da se poluprava a' koja je paralelna nekoj polupravoj b' izometrijom $\mathcal{I}$ preslikava na polupravu a'_1 parelenu slici b'_1 poluprave b' u izometriji $\mathcal{I}$.

Dokažimo redom, tri značajne teoreme koje se odnose na paralelnost pravih: *teoremu o transmisibilnosti*, *teoremu o simetričnosti* i *teoremu o tranzitivnosti relacije paralelnosti.*

Teorema 25.4: *Ako poluprava m' sadrži polupravu n', tada je jedna od tih dveju polupravih paralelna pravoj a ako i samo ako joj je paralelna i druga.*



Slika 25c

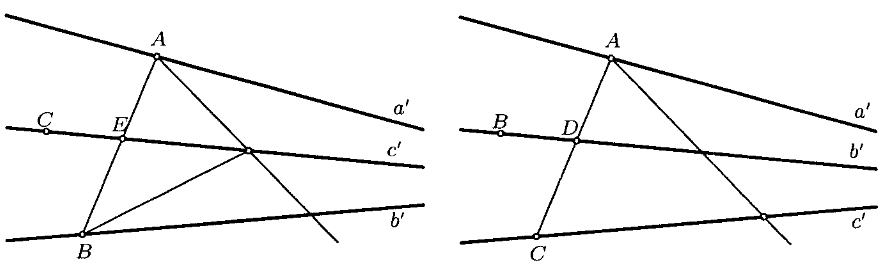
Dokaz: Obeležimo sa M i N temena polupravih m' i n' i sa K proizvoljnu tačku prave a. Pretpostavimo da je poluprava m' paralelna pravoj a. Obeležimo sa P proizvoljnu tačku konveksnog ugla čiji su kraci (NK) i n'. Ako je P na pravoj a ili sa one strane te prave sa koje nije N, neposredno se dokazuje da poluprava (NP) seče pravu a. Stoga pretpostavimo da su tačke N i P sa iste strane prave a. Tada P pripada konveksnom uglu KMN, pa poluprava MP seče a u tački L takvoj da je $\mathcal{B}(M, P, L)$. Pri tome prava NP ne sadrži ni jedno teme trougla KML, a seče njegovu ivicu ML u tački P pa, na osnovu Pašove aksiome, seče još jednu ivicu tog trougla. Budući da prava NP nema tačaka u konveksnom uglu KNM, ona neće imati zajedničkih tačaka sa duži MK. Dakle, poluprava (NP) seče duž KL, pa seče i pravu a. Stoga je poluprava n' paralelna pravoj a.

Ako je poluprava n' paralelna pravoj a, obeležimo sa P proizvoljnu tačku konveksnog ugla KMN i pretpostavimo da su M i P sa iste strane prave a jer se, u suprotnom, jednostavno dokazuje da poluprava (MP) seče a. Kako su tačke K i N na kracima konveksnog ugla sa temenom M kojem pripada poluprava (MP), ta će poluprava seći duž KN u nekoj tački S. Neka je Q proizvoljna tačka poluprave SM sa one strane tačke M sa koje nije S. Tačka Q pripada uglu koji je unakrsan konveksnom uglu sa kracima (NK) i n', pa prava QN seče a u nekoj tački L takvoj da je $\mathcal{B}(Q, N, L)$. Pri tome prava QS ne sadrži ni jedno teme trougla KNL, seče njegovu ivicu KN, a ne seče ivicu NL pa, na osnovu Pašove aksiome, seče ivicu KL. Dakle, kakva god da je tačka P, poluprava (MP) seče pravu a. Stoga je poluprava m' paralelna pravoj a. □

Teorema 25.5: *Ako je poluprava c' paralelna polupravoj b', onda je i poluprava b' paralelna polupravoj c'.*

Dokaz: Kako su prave c i b koje sadrže poluprave c' i b' disjunktne, na osnovu teoreme Hjelmsleva postoji jedinstvena osna refleksija $\mathcal{S}_s$ kojom se prave c i b preslikavaju jedna na drugu. Ako sa a' obeležimo sliku poluprave b' u osnoj refleksiji $\mathcal{S}_s$, i poluprava a' će, na osnovu prethodne teoreme, biti paralelna polupravoj b'. Tada je $b' \| a'$ na osnovu teoreme 25.3, pa je i $b' \| c'$. □

Teorema 25.6: *Ako su a', b' i c' tri disjunktne poluprave jedne ravni takve da je $a' \| c'$ i $c' \| b'$, tada je i $a' \| b'$.*



Slika 25d

Dokaz: Iz teorema 25.2 i 25.4 neposredno sledi da su prave a i b koje sadrže a' i b' međusobno disjunktne. Obeležimo sa c pravu koja sadrži c', a sa A, B i C obeležimo temena polupravih a', b' i c'.

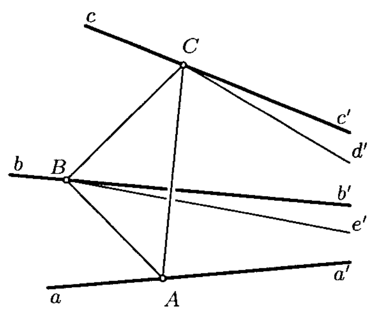
Ako su poluprave a' i b' sa raznih strana prave c, ako je zatim E presek prave c i duži AB, i ako je e' poluprava sa temenom E paralelna polupravoj a', tada jedna od polupravih c' i e' sadrži drugu. Svaka poluprava sa temenom A koja pripada konveksnom uglu sa kracima (AB) i a' seče e' jer je $a' \| e'$, a seče i b' jer je $e' \| b'$. Dakle, $a' \| b'$.

Ako su poluprave a' i b' sa iste strane prave c, a a' i c' sa raznih strana prave b, tada duž AC seče pravu b u nekoj tački D. Obeležimo sa d' polupravu sa temenom D koja sadrži polupravu b' ili je u njoj sadržana. Svaka poluprava sa temenom A koja pripada konveksnom uglu sa kracima (AC) i a', seče c' jer je $a' \| c'$, pa seče i d'. Stoga je $a' \| d'$, pa je i $a' \| b'$. Ako su pak b' i c' sa raznih strana prave a, dokaz je analogan. □

Primetimo da u drugom delu prethodne teoreme nigde nismo koristili paralelnost polupravih b' i c', već samo činjenicu da je poluprava b' „između" polupravih a' i c'. Drugim rečima, dokazali smo i sledeće tvrđenje:

Teorema 25.7: *Ako su a' i c' međusobno paralelne poluprave sa temenima A i C koje pripadaju pravama a i c, a b' otvorena poluprava sa temenom B koja pripada poluravnima (aC) i (cA), a seče duž AC ako i samo ako je tačka B sa one strane prave AC sa koje nisu a' i c', tada je b' paralelna svakoj od polupravih a' i c'.* □

Teorema 25.8: *Neka su a i b dve međusobno paralelne prave i C proizvoljna tačka koja ne pripada ravni $\pi(ab)$. Presek dveju ravni α i β koje sadrže tačku C i, redom, prave a i b je prava c paralelna svakoj od pravih a i b.*



Slika 25e

Dokaz: Presečna prava ravni α i β nema zajedničkih tačaka ni sa a ni sa b jer ako bi, u suprotnom, sekla jednu od njih, onda bi ta presečna tačka pripadala svakoj od ravni α, β, π, dakle i pravama a i b.

Neka su A, B, C temena triju polupravih a', b', c' koje, redom, pripadaju pravama a, b, c i poluprostoru čija je granica ravan ABC, pri čemu su poluprave a' i b' međusobno paralelne. Ako je d' proizvoljna poluprava sa temenom C u konveksnom uglu sa kracima (CA) i c', onda poluravan sa granicom CB koja sadrži polupravu d', seče ravan π duž poluprave e' sa temenom B. Štaviše, e' pripada konveksnom uglu sa kracima (BA) i b' pa, kako je $b' \| a'$, e' seče a' u tački koja pripada i polupravoj d'. Dakle, $c' \| a'$. Na isti način se dokazuje da je $c' \| b'$. □

Prethodna teorema omogućava nam da ustanovimo da važe i sledeća dva tvrđenja:

Teorema 25.9: *Za svaku tačku C van ravni dveju međusobno paralelnih polupravih a' i b' postoji jedinstvena poluprava c' sa temenom C koja je paralelna polupravama a' i b'.* □

Teorema 25.10: *Ako su a', b', c' tri nekoplanarne poluprave apsolutnog prostora takve da je $a' \| c'$ i $c' \| b'$, tada je i $a' \| b'$.* □

Ako pretpostavimo da su dve poluprave apsolutnog prostora međusobno paralelne i u slučaju kada jedna od njih sadrži drugu, prethodne teoreme nam omogućavaju da ustanovimo da je relacija paralelnosti polupravih u apsolutnom prostoru, relacija ekvivalencije.

Parabolički pramenovi. U odeljku posvećenom pramenovima pravih ustanovili smo da postoje bar dva međusobno različita tipa pramenova pravih u apsolutnoj ravni: pramen konkurentnih pravih ili eliptički pramen i hiperbolički ili ortogonalan pramen pravih. Posle uvođenja pojma paralelnosti u mogućnosti smo da definišemo još jedan pramen pravih, zvaćemo ga paraboličkim, za koji u apsolutnoj geometriji nećemo moći da ustanovimo da li se razlikuje od hiperboličkog pramena ili se od njega ne razlikuje. Tome prethodi sledeće tvrđenje:

Teorema 25.11: *Skup $\mathcal{X}$ koji se sastoji iz prave koja sadrži neku polupravu p' ravni π, i svih pravih ravni π paralelnih polupravoj p', je pramen pravih.*

Dokaz: Neka je q prava van ravni π, paralelna datoj polupravoj p'. Na osnovu teoreme 18.6 presek svih ravni koje sadrže q, sa ravni π je pramen pravih koji je, na osnovu teoreme 25.8, istovetan sa skupom pravih ravni π koje su paralelne polupravoj p'. □

Pramen koji se sastoji iz prave koja sadrži neku polupravu p' ravni π, i svih pravih ravni π paralelnih polupravoj p', zvaćemo *paraboličkim pramenom pravih.* Ako je $\mathcal{X}$ parabolički pramen pravih i X proizvoljna tačka ravni toga pramena, epicikl $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X)$ ćemo zvati *oriciklom.* Budući da u apsolutnoj geometriji nije moguće ustanoviti da li se parabolički pramen razlikuje od hiperboličkog, nećemo moći da ustanovimo ni da li se oricikl razlikuje od ekvidistante.

Kako je svakim pramenom pravih određen i pramen ravni koje sadrže prave zadatog pramena i upravne su na ravni toga pramena (teorema 18.2), paraboličkim pramenom pravih određen je *parabolički pramen ravni.* U apsolutnoj geometriji nije moguće ustanoviti da li se parabolički pramen pravih razlikuje od hiperboličkog, pa nećemo moći da ustanovimo ni da li se parabolički pramen ravni razlikuje od hiperboličkog.

Parabolički snopovi. Kako u ravni koja sadrži dve paralelne prave a i b postoji jedinstven parabolički pramen $\mathcal{X}(a, b)$, iz teorema 18.6 i 18.7 neposredno sledi da je skup svih pravih prostora koji se sastoji iz pravih pramena $\mathcal{X}(a, b)$ i svih pravih van ravni ab, koplanarnih i sa a i sa b, snop pravih. Taj snop je jedinstven na osnovu teoreme 18.8 i nazivamo ga *paraboličkim snopom pravih.* Njime definisani snop ravni zvaćemo *paraboličkim snopom ravni.* Ako je $\mathcal{U}$ parabolički snop pravih i X proizvoljna tačka prostora, episferu $\mathcal{F}(\mathcal{U}, X)$ ćemo zvati *orisferom.* Budući da u apsolutnoj geometriji nije moguće ustanoviti da li se parabolički pramen razlikuje od hiperboličkog, nećemo moći da ustanovimo ni da li se parabolički snop pravih ili ravni razlikuje od hiperboličkog, pa nećemo moći da ustanovimo ni da li se orisfera razlikuje od ekvidistantne površi.

Paralelne prave i ravni. Ako je prava p paralelna pravoj p' koja sadrži njenu upravnu projekciju na ravni π, reći ćemo da je prava p *paralelna* ili *uporedna ravni* π i da je ravan π *paralelna pravoj* p ili da su prava p i ravan π *među sobom paralelne* ili *uporedne* i pisaćemo $p\|\pi$ ili $\pi\|p$. Za svaku polupravu koja pripada pravoj p i paralelna je pravoj p' reći ćemo da je *paralelna* i ravni π. Ako je $p\|\pi$ i ako je q' proizvoljna poluprava koja pripada ravni π i paralelna je pravoj p, a π' poluravan koja sadrži q' i čijem rubu pripada teme poluprave q', reći ćemo da je poluravan π' *paralelna* ili *uporedna* pravoj p.

Prva od teorema koje slede neposredna je posledica teoreme 25.8.

Teorema 25.12: *Ako je prava p paralelna ravni π, p' prava koja sadrži njenu upravnu projekciju na π, a α ravan koja sadrži pravu p i seče ravan π duž neke prave q, tada je $p\|q$ i $p'\|q$.* □

Teorema 25.13: *Ako je prava p van ravni π, paralelna bilo kojoj pravoj q te ravni, tada je $p\|\pi$.*

Dokaz: Ako je prava q istovetna pravoj p' koja sadrži upravnu projekciju prave p na ravni π, tada je $p\|\pi$, po definiciji. Pretpostavimo da se prave q i p' razlikuju i sa α obeležimo ravan kojoj pripadaju prave p i p'. Kako ravni π i α sadrže dve paralelne prave q i p, i seku se duž prave p', biće $p\|p'$ na osnovu teoreme 25.8, pa je prava p, po definiciji, paralelna ravni π. □

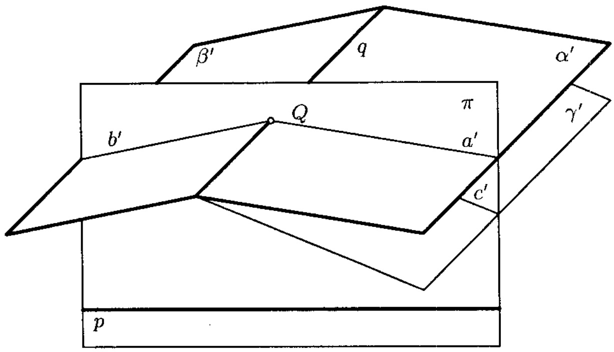
Teorema 25.14: *Ako je poluprava p' paralelna ravni π, a q' poluprava čije je teme tačka Q u ravni π, i paralelna je polupravoj p', tada poluprava q' pripada ravni π.*

Dokaz: Neka je p'' upravna projekcija poluprave p' na ravni π. Kako je $p''\|p'$ i $p'\|q'$ biće, na osnovu teoreme 25.10, $p''\|q'$. Budući da poluprava p'' i tačka Q pripadaju ravni π, i poluprava q' će pripadati toj ravni. □

Dokažimo sada prostorni analogon teoreme 25.1.

Teorema 25.15: *Ako su p i q dve mimoilazne prave, tada postoje tačno dve poluravni α' i β' sa rubom q koje su paralelne pravoj p.*

Dokaz: Neka je Q proizvoljna tačka prave q, neka je π ravan koja sadrži pravu p i tačku Q, neka su a' i b' poluprave sa temenom Q koje pripadaju ravni π i paralelne su pravoj p, a α' i β' poluravni sa zajedničkim rubom q koje, redom, sadrže poluprave a' i b'. Budući da je paralelna polupravama a' i b', prava p je na osnovu teoreme 25.13, paralelna svakoj od poluravni α' i β'.

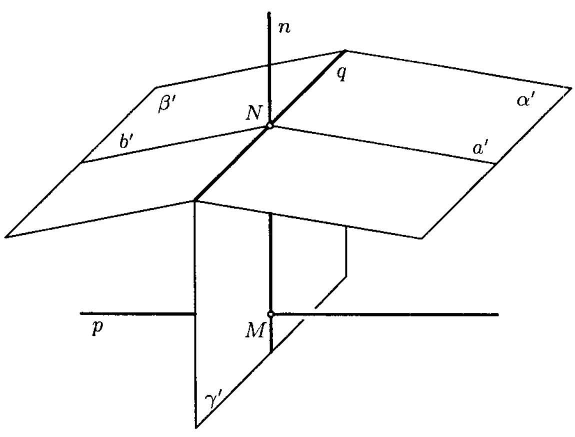


Slika 25f

Bilo koja poluravan γ' sa rubom q, različita od poluravni α' i β', seče ravan π duž poluprave c' različite od polupravih a' i b'. Poluprava c' će seći pravu p ako i samo ako pripada onom od uglova na koje poluprave a' i b' razlažu ravan π, kojem pripada i prava p. Dakle, poluravan γ' seče pravu p ako i samo ako pripada onom od diedara na koje poluravni α' i β' razlažu prostor kojem pripada i prava p. Time je dokazana jedinstvenost poluravni α' i β'. □

U posebnom slučaju kada je γ' poluravan koja diedar $\alpha'\beta'$ kojem pripada prava p razlaže na dva podudarna diedra, poluravan γ' će seći pravu p.

Teorema 25.16: *Postoji jedinstvena prava n koja seče dve mimoilazne prave p i q i na njima je upravna.*



Slika 25g

Dokaz: Neka su α' i β' poluravni koje sadrže q i paralelne su pravoj p, a neka je M tačka u kojoj poluravan γ' koja diedar $\alpha'\beta'$ kojem pripada prava p razlaže na dva podudarna diedra, seče pravu p. Ako je N podnožje upravne iz tačke M na pravoj q, a a' i b' poluprave sa temenom N paralelne pravoj p, te dve poluprave će, na osnovu teoreme 25.14, pripadati poluravnima α' i β'. Kako se osnom simetrijom $\mathcal{S}_{MN}$ poluravni α' i β' preslikavaju jedna na drugu jer osa MN pripada simetralnoj ravni $\gamma \supset \gamma'$ i upravna je na pravoj q, a ravan kojoj pripadaju prave p i MN, i poluprave a' i b', tom simetrijom se preslikava na sebe, biće $\mathcal{S}_{MN}(a') = b'$. Stoga je $MN \perp p$, pa je MN tražena prava n.

Kako je zbir σ uglova bilo kojeg prostornog četvorougla manji od zbira uglova dvaju trouglova na koje je taj četvorougao razložen svojom dijagonalom, biće $\sigma < 2\pi$, pa ne postoji i prava n' različita od n koja je u tačkama M' i N' upravna na pravama p i q jer bi tada bilo $\sigma(MNN'M') = 2\pi$. □

Paralelne ravni. Neka su α i β dve razne ravni i neka je X proizvoljna tačka prostora. Budući da postoje prave m i n koje sadrže X i upravne su, redom, na ravnima α i β, postojaće ravan π koja sadrži prave m i n pa, dakle, i tačku X, i upravna je na ravnima α i β. Neka su a i b prave duž kojih ravan π seče, redom, ravni α i β. Ako se prave a i b seku, seći će se i ravni α i β. Ako su prave a i b međusobno paralelne, za ravni α i β reći ćemo da su međusobno *paralelne* ili *uporedne*. Primetimo da će ravni α i β biti međusobno paralelne nezavisno od izbora ravni π koja je na njima upravna. Zaista, ako je i π' ravan upravna na ravnima α i β tada je i osnova σ refleksije kojom se π i π' preslikavaju jedna na drugu upravna i na ravni α i na ravni β (dokaz teoreme 15.14). Ako su a' i b', redom, presečne prave ravni π' sa ravnima α i β, refleksijom $\mathcal{S}_\sigma$ parovi pravih a, b i a', b' će se preslikavati jedan na drugi, pa će, na osnovu teoreme 25.3, prave a i b biti međusobno paralelne ako i samo ako su prave a' i b' međusobno paralelne.

Teorema 25.17: *Ako su a, b, c tri prave koje ne pripadaju jednoj ravni, a svake dve su međusobno paralelne, tada je zbir uglova konveksnih diedara kojima su ivice a, b, c, a pljosni sadrže parove pravih a, b; b, c; c, a, jednak π.*

Dokaz: Obeležimo sa $\sigma(abc)$ zbir uglova konveksnih diedara kojima su ivice a, b, c, a sa a' obeležimo pravu koja sadrži upravnu projekciju prave a na ravni bc. Kako prave a', b, c pripadaju paraboličkom pramenu tada su, na osnovu teoreme 16.10, dve od tih triju pravih sa raznih strana treće. Ako su b i c sa raznih strana a', biće

$$\sigma(aba') + \sigma(aca') = \sigma(abc) + \pi,$$

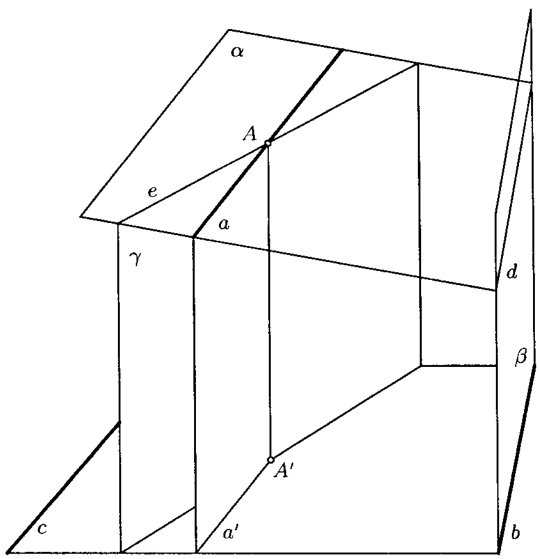
a ako nisu, biće

$$\sigma(abc) + \sigma(aba') = \sigma(aca') + \pi \quad \text{ili} \quad \sigma(abc) + \sigma(aca') = \sigma(aba') + \pi.$$

Da bismo dokazali da je $\sigma(abc) = \pi$ u svakom od prethodnih slučajeva, dovoljno je dokazati da je $\sigma(aba') = \sigma(aca') = \pi$. Dokažimo da je $\sigma(aba') = \pi$.

Neka je β ravan koja sadrži b i upravna je na ravni bc, a α ravan koja sadrži a i upravna je na β. Ako je prava d presek ravni α i β, ona će, na osnovu teorema 25.8 i 25.10, biti paralelna svakoj od pravih a, b, a'. Ravan α će biti paralelna ravni

ba' jer je β upravna na ravnima α i ba', a $d \| b$. Uz to je ravan α upravna na aa'. Zaista, ako je A proizvoljna tačka prave a, ako je γ ravan koja sadrži A i upravna je na ravnima α i ba', i ako je e presek ravni γ i α, tada je $e \| bc$ (jer je $\alpha \| bc$, pa je prava e paralelna preseku ravni γ i bc, a onda i ravni bc). Kako je $a \| bc$ biće $a = e$, ili se ravni γ i aa' seku duž prave AA' koja je upravna na ravnima α i ba'. Ako je $a = e$, tada je $\gamma = aa'$ jer su γ i aa' dve ravni koje sadrže a i upravne su na bc, a nije $a \perp bc$, pa je, stoga, $aa' \perp \alpha$. Ako je $AA' \perp \alpha$, tada je i $aa' \perp \alpha$.



Slika 25h

Kako su ravni aa' i db disjunktne, postojaće jedinstvena refleksija $\mathcal{S}_\sigma$ kojom se te dve ravni preslikavaju jedna na drugu (teorema 15.14). Štaviše, osnova σ će biti upravna na ravnima ad i $a'b$, pa će se refleksijom $\mathcal{S}_\sigma$ i prave a i d, i prave a' i b preslikavati jedna na drugu. Slično, refleksijom $\mathcal{S}_\tau$ kojom se ravni ad i $a'b$ preslikavaju jedna na drugu, i prave a i a', i prave d i b će se preslikavati jedna na drugu. Stoga će se izometrijom $\mathcal{S}_\tau \mathcal{S}_\sigma$ prave a, b, a' preslikati, redom, na b, a, d, pa je $\sigma(aba') = \sigma(bad)$. Kako je $\sigma(aba') + \sigma(bad) = \sigma(aa'bd) = 4\pi/2 = 2\pi$, gde je $\sigma(aa'bd)$ zbir uglova konveksnih diedara kojima su ivice a, a', b, d, a pljosni sadrže parove pravih $aa', a'b, bd, da$, biće $\sigma(aba') = \pi$. Analogno, $\sigma(aca') = \pi$, pa je $\sigma(abc) = \pi$. □

ZADACI:

1. Neka bisektrise uglova koje međusobno paralelne poluprave sa temenima B i C zahvataju sa duži BC seku te dve poluprave, redom, u tačkama B' i C'. Dokazati da će

uglovi koje te dve poluprave zahvataju sa duži BC biti međusobno podudarni ako i samo ako su duži BB' i CC' međusobno podudarne.

2. Ako su M i N podnožja zajedničke upravne dveju mimoilaznih pravih p i q, dokazati da je duž MN manja od svake druge duži koja povezuje tačke pravih p i q.

3. Ako su a i b dve mimoilazne prave, odrediti pravu p takvu da je $\mathcal{S}_p(a) = b$.

4. Šta je proizvod dvaju zavojnih poluobrtanja ako su njihove ose dve mimoilazne prave?

EUKLIDSKA GEOMETRIJA

Geometrija Euklidovih Elemenata u kojoj je bitna pretpostavka peti Euklidov postulat naziva se euklidskom geometrijom. U njoj, uz aksiome prve četiri grupe, važi i tzv. Plejferova aksioma paralelnosti koja je jedan od ekvivalenata petog postulata. Više od dve hiljade godina euklidska geometrija smatrana je jedinom mogućom geometrijom, a ukupna empirijska svedočanstva, stečena pre svega u mehanici krutih tela i geometrijskoj optici, samo su davala potvrdu da je karakter prostornih odlika tela u saglasnosti sa Euklidovim geometrijskim zahtevima i njihovim posledicama. Njutnovo shvatanje da je geometrija najosnovnija oblast mehanike utemeljeno je na prećutnoj pretpostavci da je euklidska geometrija jedina moguća teorija prostornih odnosa. Kada je prostor shvatan kao „čista forma svega čulnog opažanja" kako je to činio Kant u svojoj Kritici čistog uma, onda je geometrija tog prostora mogla da bude samo euklidska, a Euklidove aksiome i njihove posledice su mogle biti samo apodiktične istine o prostornoj formi svakog mogućeg iskustva.

Euklidov autoritet je više od dva milenijuma bio toliki da se nije moglo pretpostaviti da bi geometrija opažajnog prostora mogla biti koja druga do euklidska. U izvesnom smislu ovakvo mišljenje je opravdano budući da se geometrija Euklidovih Elemenata dobro slaže sa svojstvima čvrstih tela. Prostor veličine molekula (to je približno veličina angstrema), kako je empirijski utvrđeno, zaista se ponaša kao euklidski. Naime, u kristalografiji je utvrđeno ograničenje prema kojem se među simetrijama kristala koji se javljaju u prirodi, od rotacija pojavljuju samo one čiji je red 2,3,4 ili 6. Upravo to *kristalografsko ograničenje* je ekvivalentno tvrđenju da je prostor u kojem postoje kristali — euklidski. Međutim, geometrija prostora unutar atoma, kako je poznato, nije euklidska ili, bolje rečeno, neeuklidska geometrija jednostavnije opisuje svojstva subatomskog prostora. Slično, za izražavanje prostornih odnosa tela u kosmičkom prostoru pogodnije je koristiti geometriju sa promenljivom zakrivljenošću, koja nije euklidska. Drugim rečima, možemo pretpostaviti da je geometrija vasione složenija od euklidske i da se ona menja u zavisnosti od blizine neke mase i njene količine.

26. Plejferova aksioma paralelnosti

Plejferova aksioma. Pretpostavimo da uz aksiome prve četiri grupe na kojima je zasnovana apsolutna geometrija kojoj smo posvetili prethodna tri poglavlja, važi samo još jedna aksioma pete grupe, tzv. *Plejferova aksioma paralelnosti*:

Aksioma VE: *Postoje tačka B i prava a koja je ne sadrži takve da u njima određenoj ravni ne postoji više od jedne prave koja sadrži tačku B, a sa pravom a nema zajedničkih tačaka.*

Za tačku B i pravu a reći ćemo da imaju *Plejferovo svojstvo.*

Nije teško primetiti iz dokaza četvrte Ležandrove teoreme (teoreme 23.4) da Plejferova aksioma ima za posledicu postojanje trougla kome je zbir unutrašnjih uglova π. Stoga će, na osnovu iste teoreme, važiti i sledeći stav:

Teorema 26.1: *Za svaku tačku B i pravu a koja je ne sadrži, u njima određenoj ravni postoji jedinstvena prava b koja sadrži B, a sa pravom a nema zajedničkih tačaka.* □

Drugim rečima, ako postoje tačka i prava koje imaju Plejferovo svojstvo, onda svaka tačka i prava imaju isto svojstvo.

Geometrija koja je zasnovana na aksiomama apsolutne geometrije i Plejferovoj aksiomi paralelnosti naziva se *euklidskom* ili *paraboličkom geometrijom.* Prostor koji te aksiome zadovoljava, naziva se *euklidskim prostorom*, a svaka njegova ravan *euklidskom ravni.*

Ekvivalenti Plejferove aksiome. Iz druge i četvrte Ležandrove teoreme i teoreme 26.1 neposredno sledi da je zbir unutrašnjih uglova svakog trougla π ako i samo ako važi Plejferova aksioma paralelnosti. Stoga će u euklidskoj geometriji spoljašnji ugao trougla biti jednak sumi dvaju unutrašnjih nesusednih uglova.

Kako postoji unutrašnja dijagonala svakog prostog ravnog četvorougla zbir unutrašnjih uglova svakog trougla je π ako i samo ako je zbir unutrašnjih uglova svakog prostog, ravnog četvorougla 2π. Stoga su tvrđenja da su uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla pravi i da su svi uglovi Lambertovog četvorougla takođe pravi, ekvivalentna Plejferovoj aksiomi paralelnosti.

Tvrđenje da svaka prava u ravni oštrog ugla koja je upravna na jednom kraku tog ugla, seče njegov drugi krak, ekvivalentno je, na osnovu druge, treće i četvrte Ležandrove teoreme, Plejferovoj aksiomi paralelnosti.

Iz teorema 26.1 i 25.1 neposredno sledi da su poluprave sa istim temenom B, obe paralelne pravoj a, dve međusobno komplementne poluprave, te da je, stoga, ugao paralelnosti tačke B u odnosu na pravu a, prav. Štaviše, ako su poluprave sa istim temenom B, obe paralelne pravoj a, dve međusobno komplementne poluprave, tada važi aksioma VE. Stoga je tvrđenje da su dve prave jedne ravni međusobno paralelne ako i samo ako su disjunktne ekvivalent Plejferove aksiome paralelnosti. Slično tome, tvrđenje da su prava i ravan međusobno paralelne ako i samo ako su disjunktne je ekvivalent aksiome VE. Stoga će sve prave euklidskog prostora koje sadrže zadatu tačku i paralelne su zadatoj ravni, pripadati jednoj ravni. Nije teško primetiti da je i tvrđenje da su dve ravni međusobno paralelne ako i samo ako su disjunktne ekvivalent Plejferove aksiome.

Kako postoji jedinstven pramen koji sadrži dve razne koplanarne prave, u euklidskoj geometriji će postojati samo dve vrste pramenova pravih budući da su disjunktne prave euklidske ravni međusobno paralelne. To su: pramen konkurentnih pravih i ortogonalan pramen. Prave ortogonalnog pramena biće međusobno paralelne, pa se, stoga, taj pramen u euklidskoj geometriji naziva i *pramenom paralenih pravih.* Dakle, u euklidskoj geometriji svaki hiperbolički pramen je istovremeno i parabolički. Štaviše, budući da je tvrđenje da su dve prave jedne ravni međusobno paralelne ako i samo ako su disjunktne ekvivalent Plejferove aksiome paralelnosti, i tvrđenje da je svaki ortogonalan pramen parabolički ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi. Slično, tvrđenje da je svaki hiperbolički snop istovremeno i parabolički ekvivalentno je aksiomi VE.

Kako su pramen konkurentnih pravih i ortogonalan pramen pravih jedini pramenovi euklidske ravni, u euklidskoj geometriji će postojati samo dve vrste epicikala: krugovi i ekvidistante. Ako je $\mathcal{E}(\mathcal{X}_s, X)$ ekvidistanta euklidske ravni, tada tačka Y pripada toj ekvidistanti ako i samo ako je prava XY upravna na normali iz X na osnovici s ortogonalnog pramena $\mathcal{X}_s$, budući da su prave XY i s disjunktne. Kako postoji jedinstvena upravna u tački X na normali iz X na s, svaka ekvidistanta biće prava. Štaviše, tvrđenje da je svaka ekvidistanta prava ekvivalentno je Plejferovoj aksiomi paralelnosti. Stoga je i tvrđenje da je svaki nelinearan epicikl krug, ekvivalentno Plejferovoj aksiomi. Slično, ekvivalent aksiomi VE je i tvrđenje da je svaka neravna episfera, sfera.

Ako je ABC proizvoljan trougao, tada medijatrise njegovih ivica, na osnovu teoreme 16.2, pripadaju jednom pramenu, pa tačke A, B, C pripadaju jednom epiciklu. U euklidskoj geometriji taj epicikl će biti nelinearan ako i samo ako je krug. Dakle, u euklidskoj geometriji postoji krug koji sadrži tri proizvoljne nekolinearne tačke. Važi i obratno, ako za bilo koje tri tačke postoji krug koji ih sadrži tada proizvoljan epicikl može da bude krug ili prava. Stoga je tvrđenje da postoji krug koji sadrži tri proizvoljne nekolinearne tačke ekvivalent Plejferove aksiome paralelnosti.

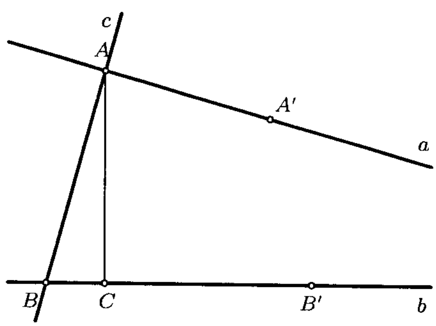
Prethodnim razmatranjima dokazali smo sledeće tvrđenje:

Teorema 26.2: *Sledeći iskazi su ekvivalenti Plejferove aksiome paralelnosti:*

1° *Zbir unutrašnjih uglova svakog trougla je* π.
2° *Zbir unutrašnjih uglova svakog prostog, ravnog četvorougla je* 2π.
3° *Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su pravi.*
4° *Svi uglovi Lambertovog četvorougla su pravi.*
5° *Svaka prava u ravni oštrog ugla koja je upravna na jednom kraku tog ugla, seče njegov drugi krak.*
6° *Dve prave jedne ravni su međusobno paralelne ako i samo ako su disjunktne.*
7° *Svaki ortogonalan pramen pravih je parabolički pramen.*
8° *Svaka ekvidistanta je prava.*
9° *Svaki nelinearan epicikl je krug.*
10° *Postoji krug koji sadrži tri proizvoljne nekolinearne tačke.* □

Peti Euklidov postulat. Među mnogim ekvivalentima aksiome VE, zbog svog istorijskog značaja, ističemo *peti Euklidov postulat*:

> *Ako jedna prava u preseku sa drugim dvema pravama obrazuje sa iste svoje strane dva ugla čiji je zbir manji od zbira dvaju pravih uglova, te dve prave se seku sa one strane zadate prave sa koje su ti uglovi.*



Slika 26a

Nije teško ustanoviti da je ovaj iskaz ekvivalentan Plejferovoj aksiomi paralelnosti. Zaista, ako prava c seče prave a i b u tačkama A i B, ako su A' i B' tačke pravih a i b sa iste strane prave c i ako je zbir uglova $A'AB$ i $B'BA$ manji od π, tada je jedan od tih uglova oštar. Neka je to ugao $B'BA$, i neka je C podnožje upravne iz A na b. I ugao $A'AC$ je oštar jer je

$$\measuredangle A'AC + \measuredangle ACB' = \measuredangle A'AB - \measuredangle CAB + \measuredangle ACB' \leq \measuredangle A'AB + \measuredangle ABC < \pi.$$

Stoga je tvrđenje da se prave a i b seku ekvivalentno teoremi 26.1.

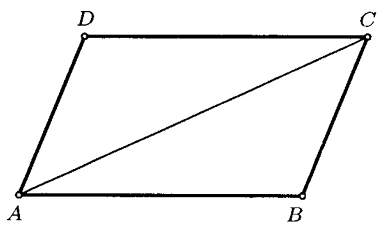
Paralelogrami. Četvorougao $ABCD$ kome ivice AB i CD, kao i ivice BC i AD koje se nazivaju *naspramnim*, pripadaju dvama parovima međusobno paralelnih pravih nazivamo *paralelogramom*. Ako su mu susedne ivice međusobno upravne, paralelogram nazivamo *pravougaonikom*, a ako su međusobno jednake *rombom*. Pravougaonik kome su susedne ivice međusobno podudarne nazivamo *kvadratom*.

Teorema 26.3: *Svaki paralelogram je centralno simetričan lik.*

Dokaz: Ako su dve prave euklidske ravni međusobno paralelne, tada, na osnovu teoreme 15.13, postoji jedinstvena osna refleksija $\mathcal{S}_s$ kojom se te dve prave preslikavaju jedna na drugu. Štaviše, budući da je prava koja je upravna na osi s, upravna i na zadatim pravama, refleksijom u odnosu na upravnu na s zadate prave će se preslikavati svaka na sebe. Kako je proizvod dveju refleksija čije su ose međusobno upravne, centralna simetrija ravni, centralnom simetrijom u odnosu na bilo koju tačku prave s zadate prave će se preslikavati jedna na drugu.

Budući da se ose refleksija parova pravih koje sadrže naspramne ivice paralelograma seku u nekoj tački S, centralnom simetrijom $\mathcal{S}_S$ se taj paralelogram preslikava na sebe. Štaviše, središte S je presek dijagonala paralelograma. □

Teorema 26.4: *Naspramne ivice proizvoljnog četvorougla su međusobno podudarne ako i samo ako je taj četvorougao paralelogram.*



Slika 26b

Dokaz: Kako je svaki paralelogram centralnosimetričan lik, naspramne ivice su mu podudarne. Obratno, ako su naspramne ivice četvorougla $ABCD$ međusobno podudarne, i trouglovi ABC i CDA će biti međusobno podudarni, pa će i uglovi CAB i ACD tih dvaju trouglova biti međusobno podudarni. Ako bi se prave AB i CD sekle u nekoj tački X, u trouglu XAC bi zbir uglova kod temena A i C bio π. Dakle, naspramne ivice četvorougla $ABCD$ su međusobno paralelne. □

Teorema 26.5: *Presek dijagonala proizvoljnog četvorougla je središte svake od tih dijagonala ako i samo ako je taj četvorougao paralelogram.*

Dokaz: Kako je svaki paralelogram centralnosimetričan, presek njegovih dijagonala je središte svake od tih dijagonala.

Obratno, ako je presek S dijagonala četvorougla $ABCD$ središte svake od tih dijagonala, tada se centralnom simetrijom $\mathcal{S}_S$ naspramne ivice tog četvorogla preslikavaju jedna na drugu, pa su zato podudarne. Dakle, na osnovu prethodne teoreme, taj četvorougao je paralelogram. □

Izometrije euklidske ravni i prostora. Već u apsolutnoj geometriji bilo je moguće odrediti sve indirektne izometrije ravni. Za direktne izometrije ravni ništa određenije nije moglo da se ustanovi sem da je svaka direktna izometrija proizvod dveju refleksija čije ose, ako nisu istovetne, mogu da budu konkurentne ili disjunktne prave. Budući da su u euklidskoj ravni dve prave disjunktne ako i samo ako su paralelne, jedine direktne izometrije ravni (uz identičnost) su rotacije i translacije. Time je izvršena klasifikacija izometrija euklidske ravni, drugim rečima dokazano je sledeće tvrđenje:

Teorema 26.6: *Ako nije identičnost, direktna izometrija euklidske ravni je rotacija ili translacija. Ako nije refleksija, indirektna izometrija euklidske ravni je klizajuća refleksija.* □

Na osnovu teoreme 20.6 svaka direktna izometrija prostora može se izraziti kao proizvod dveju osnih simetrija prostora — $\mathcal{S}_n$ i $\mathcal{S}_m$. U zavisnosti od međusobnog položaja osa m i n razlikovaćemo više mogućnosti:

a. Ako ose m i n pripadaju nekoj ravni π, a μ i ν su ravni koje ih sadrže i upravne su na π, tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_\nu \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \mathcal{S}_\mu,$$

pa stoga:

1° Ako su ose m i n istovetne, i ravni μ i ν će biti istovetne pa, s obzirom na involutivnost ravanske refleksije, kompozicija $\mathcal{S}_n \mathcal{S}_m$ će biti identičnost.

2° Ako se ose m i n seku, seći će se i ravni μ i ν duž prave koja je u njihovoj presečnoj tački upravna na π, pa je tada $\mathcal{I}$, po definiciji, rotacija.

3° Ako su m i n međusobno paralelne prave, i ravni μ i ν će biti paralelne, pa je $\mathcal{I}$ translacija prostora.

b. Ako su m i n mimoilazne prave, tada, na osnovu teoreme 25.16, postoji prava s koja ih seče u tačkama M i N i na obema je upravna. Obeležimo tada sa μ i ν ravni koje sadrže pravu s i, redom, prave m i n, a sa μ' i ν' ravni upravne na s u tačkama M i N. Tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\nu'} \mathcal{S}_\nu \mathcal{S}_\mu \mathcal{S}_{\mu'} = \mathcal{S}_\nu \mathcal{S}_\mu \mathcal{S}_{\nu'} \mathcal{S}_{\mu'}.$$

Dakle:

4° Ako su m i n mimoilazne prave, $\mathcal{I}$ je zavojno kretanje.

Ako je $\mathcal{I}$ neka indirektna izometrija euklidskog prostora, tada postoji tačka P toga prostora koja nije invarijantna u transformaciji $\mathcal{I}$. Neka je $\mathcal{I}(P) = P'$, i neka je π medijalna ravan duži PP'. U kompoziciji $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}$ tačka P je invarijantna, a kako je $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}$ direktna izometrija prostora, ona će na osnovu teoreme 20.4, biti ili identičnost, ili osna rotacija. Ako je kompozicija $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I}$ identičnost, $\mathcal{I}$ je ravanska refleksija.

Pretpostavimo da je $\mathcal{S}_\pi \mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$. Prava s je van ravni π jer bi, u suprotnom, izometrija $\mathcal{I}$ bila ravanska refleksija. Stoga sa μ možemo da obeležimo ravan koja sadrži pravu s, a upravna je na π, a sa ν ravan takvu da je $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\mu \mathcal{S}_\nu$. Tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\mu \mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}_p \mathcal{S}_\nu,$$

gde je p presek međusobno upravnih ravni π i μ. Prava p ne pripada ravni ν jer bi, u suprotnom, izometrija $\mathcal{I}$ bila refleksija. Ako sa σ obeležimo ravan koja sadrži p i upravna je na ν, a sa τ ravan koja sadrži p i upravna je na σ, biće

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p\,\mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}_\tau\,\mathcal{S}_\sigma\,\mathcal{S}_\nu = \mathcal{S}_\sigma\,\mathcal{S}_\tau\,\mathcal{S}_\nu .$$

S obzirom na međusobni položaj ravni ν i τ upravnih na σ, razlikujemo sledeće mogućnosti:

1° Ako se ravni ν i τ seku, $\mathcal{I}$ je, po definiciji, rotaciona refleksija.

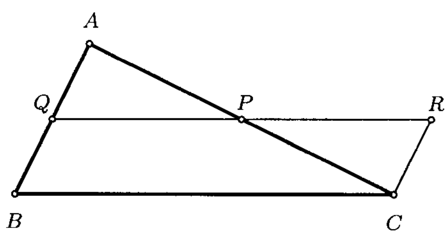
2° Ako su ν i τ međusobno paralelne ravni euklidskog prostora, $\mathcal{I}$ je, po definiciji, klizajuća refleksija.

Time je izvršena klasifikacija izometrija euklidskog prostora. Dakle, dokazano je sledeće tvrđenje:

Teorema 26.7: *Ako nije identičnost, direktna izometrija euklidskog prostora je ili rotacija, ili translacija, ili je zavojno kretanje. Ako nije ravanska refleksija, indirektna izometrija euklidskog prostora je ili rotaciona refleksija ili je klizajuća refleksija.* □

Razloživa jednakost likova euklidske ravni. Imajući u vidu značaj paralelogramskih površi dokazaćemo nekoliko teorema euklidske geometrije koje se odnose na razloživu jednakost trougaonih i paralelogramskih površi, među njima i znamenitu Pitagorinu teoremu.

Teorema 26.8: *Postoji paralelogramska površ razloživo jednaka zadatoj trougaonoj površi.*



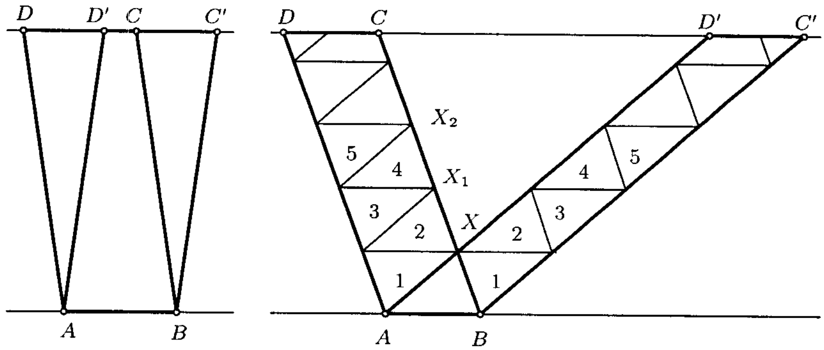
Slika 26c

Dokaz: Ako je ABC proizvoljan trougao, P i Q središta njegovih stranica CA i AB, a R tačka centralnosimetrična tački Q u odnosu na P, tada su trougaona površ ABC i paralelogramska površ $BCRQ$ razloživo jednaki likovi. Zaista, četvorougaona površ $BCPQ$ pripada i trougaonoj površi ABC i paralelogramskoj površi $BCRQ$, a kako su trougaone površi AQP i CRP centralnosimetrične, trougaona površ ABC i paralelogramska površ $BCRQ$ će biti, po definiciji, razloživo jednaki likovi. □

Štaviše, paralelogramska površ i njoj razloživo jednaka trougaona površ imaće dve međusobno podudarne ivice, a visina trougaone površi biće dvostruko veća od *visine* dobijene paralelogramske površi.

Teorema 26.9: *Paralelogramske površi sa podudarnim osnovicama i podudarnim odgovarajućim visinama su razloživo jednaki likovi.*

Dokaz: Neka su $ABCD$ i $ABC'D'$ paralelogramske površi sa podudarnim osnovicama i podudarnim odgovarajućim visinama. Ako ivica AD' nema zajedničkih tačaka ni sa jednom od ivica AD i BC, trouglovi ADD' i BCC' će biti međusobno podudarni, pa će, stoga, $ABCD$ i $ABC'D'$ biti razloživo jednake paralelogramske površi.



Slika 26d

Ako pak AD' seče duž BC u nekoj tački X, obeležimo sa $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tačke duži BC takve da je $BX \cong XX_1 \cong \ldots \cong X_{n-1}X_n$ i $X_nC < BX$. Prave koje sadrže tačke $X, X_1, \ldots, X_n$ i paralelne su pravoj AB razložiće paralelogramske površi $ABCD$ i $ABC'D'$ na $n+2$ paralelogramskih površi. Ove će opet, odgovarajućim dijagonalama paralelnim pravama AD' i BC biti razložene na trougaone površi podudarne trougaonoj površi ABX i, ukoliko se tačka X_n razlikuje od C, na dve međusobno podudarne četvorougaone površi i još dve međusobno podudarne trougaone površi. Kako je broj n, na osnovu Arhimedove aksiome neprekidnosti, konačan, ukupan broj međusobno podudarnih likova na koje su razložene paralelogramske površi $ABCD$ i $ABC'D'$ biće konačan, pa su, po definiciji, te paralelogramske površi razloživo jednaki likovi. □

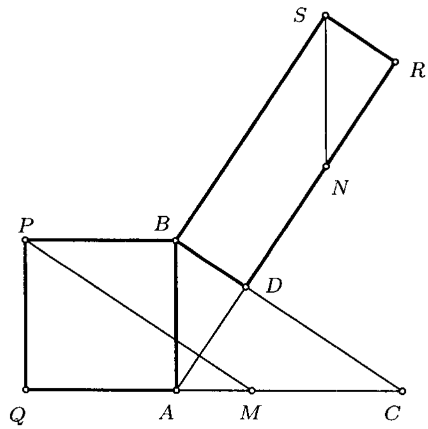
Primetimo da su odgovarajući likovi na koje su razložene paralelogramske površi $ABCD$ i $ABC'D'$ iz dokaza prethodne teoreme, međusobno translatorno podudarni. Stoga, ako sa T obeležimo *grupu svih translacija euklidske ravni*, možemo zaključiti da su $ABCD$ i $ABC'D'$ T-razloživo jednaki likovi.

Sledeća teorema je neposredna posledica prethodnih dveju teorema i činjenice da je razloživa jednakost relacija ekvivalencije.

Teorema 26.10: *Trougaone površi sa podudarnim osnovicama i podudarnim odgovarajućim visinama su razloživo jednaki likovi.* □

Sledeća teorema naziva se *Euklidovom teoremom o razloživoj jednakosti.*

Teorema 26.11: *Kvadratna površ čija je stranica kateta AB pravouglog trougla ABC razloživo je jednaka pravougaonoj površi čija je jedna ivica podudarna hipotenuzi BC tog trougla, a druga ivica je upravna projekcija katete AB na hipotenuzi BC.*



Slika 26e

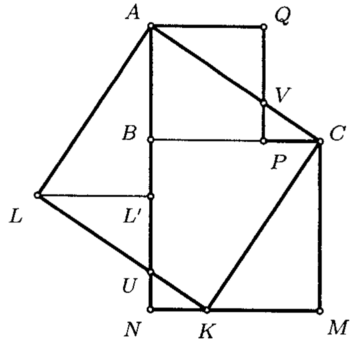
Dokaz: Neka je D podnožje upravne iz temena A na hipotenuzi BC i neka su $ABPQ$ i $DBSR$ razmatrane površi, prva kvadratna, a druga pravougaona. Ako je M tačka u kojoj prava koja sadrži P i paralelna je pravoj BC seče pravu AC, a N tačka u kojoj prava koja sarži S i paralelna je pravoj AB seče pravu DR, paralelogramske površi $ABPQ$ i $CBPM$ će biti razloživo jednake na osnovu teoreme 26.9, paralelogramske površi $CBPM$ i $SBAN$ će biti međusobno podudarne, a paralelogramske površi $ABSN$ i $DBSR$ će biti razloživo jednake, opet na osnovu teoreme 26.9. Stoga će kvadratna površ $ABPQ$ i paralelogramska površ $DBSR$ biti razloživo jednaki likovi. □

Iz Euklidove teoreme o razloživoj jednakosti neposredno sledi jedna od najstarijih i najznačajnijih teorema geometrije, *Pitagorina teorema o razloživoj jednakosti:*

Teorema 26.12: *Kvadratna površ kojoj je ivica hipotenuza pravouglog trougla razloživo je jednaka uniji kvadratnih površi čije su ivice katete toga trougla.* □

Štaviše, može se dokazati da su te površi i T-razloživo jednake.

Zaista, ako je ABC trougao sa pravim uglom kod temena B, bez gubljenja opštosti razmatranja možemo pretpostaviti da je $AB \leq BC$. Ako su zatim, $ACKL$, $BCMN$ i $ABPQ$ kvadrati koji se, redom, nalaze sa onih strana pravih AC, BC i AB sa kojih su, redom, tačke B, K i C, tada, ako sa L' obeležimo podnožje upravne iz tačke L na pravoj AN, a sa U i V tačke u kojima se seku parovi pravih KL i BN, PQ i CA, ivica pomenutih kvadrata, biće trouglovi UNK i VPC, AQV



Slika 26f

i $LL'U$, CMK i $AL'L$, međusobno translatorno podudarni. Odatle, po definiciji, sledi da je kvadratna površ $ACKL$ T-razloživo jednaka uniji kvadratnih površi $ABPQ$ i $BCMN$.

ZADACI:

1. Dokazati da je kompozicija n centralnih simetrija euklidske ravni ili euklidskog prostora centralna simetrija ako je n neparan broj, a translacija ili identičnost ako je n paran.

2. Ako su A, B, C, D četiri razne tačke euklidske ravni i M, N, K, L, P, Q, redom, središta duži AB, BC, CD, DA, AC, BD, dokazati:

a. da su duži MN i KL, MP i QK, NP i QL međusobno podudarne i istosmerne (budući da se istosmernost duži u euklidskoj ravni može definisati i na paralelnim pravama),

b. da duži LN, MK, PQ imaju isto središte,

c. da je svaki od uglova NML, PMQ, PNQ podudaran jednom od uglova koji zahvataju prave AC i BD, BC i AD, AB i CD.

3. Dokazati da se duži koje povezuju temena sa središtima naspramnih ivica nekog trougla (težišne duži tog trougla) seku u tački (težištu tog trougla) koja ih deli u odnosu 2:1.

4. Ako obeležimo sa E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC seku pravu BC, sa D podnožje visine iz temena A na pravoj BC, sa G tačku poluprave AC takvu da je $AB \cong AG$, sa O središte kruga l opisanog oko trougla ABC i sa L tačku u kojoj tangenta kruga l u tački A seče pravu BC, dokazati da je:

a. $\measuredangle DAE \cong \measuredangle AFE \cong \measuredangle GBC \cong \frac{1}{2}(B - C)$,

b. poluprava AE bisektrisa ugla OAD,

c. tačka L središte duži EF.

5. Ako sa A_1, B_1, C_1 obeležimo središta ivica $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ trougla ABC kome je $b \geq c$, sa p poluobim tog trougla, sa $l(O, r)$ opisani krug tog trougla, sa P, Q, R tačke u kojima upisani krug $k(S, \rho)$ dodiruje, redom, stranice BC, CA, AB, sa P_i, Q_i, R_i, $i \in \{a, b, c\}$, tačke u kojima spolja upisani krug $k_i(S_i, \rho_i)$ dodiruje, redom, prave BC, CA, AB, sa M i N tačke u kojima medijatrisa ivice BC seče krug l pri čemu je M na

luku BAC, sa M' i N' podnožja upravnih iz tačaka M i N na pravoj AB, dokazati da je:

1° $AQ_a = AR_a = p$,
2° $QQ_a = RR_a = a$,
3° $Q_bQ_c = R_bR_c = a$,
4° $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$,
5° $PP_a = b - c$, $P_bP_c = b + c$,
6° $PA_1 = A_1P_a$, $P_cA_1 = A_1P_b$,
7° $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$, $A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$,
8° $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$, $NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$,
9° $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN'$, $AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$,
10° $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$,
11° $NS = NS_a = NB = NC$, $MS_b = MS_c = MB = MC$,
12° $M'N' = b$.

6. Dokazati da postoji sfera koja dodiruje sve ivice nekog tetraedra ako i samo ako je

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC.$$

7. Ako je zbir dveju naspramnih ivica nekog tetraedra jednak zbiru drugih dveju naspramnih ivica tog tetraedra, dokazati da je zbir diedara koji odgovaraju prvim dvema naspramnim ivicama jednak zbiru dieara koji odgovaraju drugim dvema naspramnim ivicama.

8. Ako su a, b, c tri mimoilazne prave euklidskog prostora, odrediti tačku O takvu da su ravni Oa, Ob, Oc međusobno upravne.

9. Ako je $ABCD$ pravougaonik kome je $AB = 3BC$, a E i F su tačke ivice AB takve da je $AE \cong EF \cong FB$, dokazati da je

$$\measuredangle AED + \measuredangle AFD + \measuredangle ABD = \frac{\pi}{2}.$$

27. Sličnost

Pojam sličnosti uveli smo već u apsolutnoj geometriji. Tada je bilo moguće ustanoviti da su osnovni pojmovi geometrije invarijante grupe sličnosti (teorema 22.11). U euklidskoj geometriji i paralelnost će biti invarijanta iste grupe. Zaista, budući da su dve prave euklidske ravni međusobno paralelne ako i samo ako su disjunktne, paralelnost pravih je invarijanta grupe transformacija sličnosti euklidske ravni ili euklidskog prostora. Iz istih razloga će i paralelnost pravih i ravni, a i paralelnost ravni, takođe biti invarijante grupe transformacija sličnosti euklidskog prostora.

Paralelno projektovanje. Neka su p i q dve prave euklidske ravni i neka je s prava koja pripada toj ravni, a nije paralelna ni jednoj od pravih p i q. *Paralelnim* *projektovanjem* prave p na pravu q u odnosu na pravu s nazivamo preslikavanje f koje svakoj tački P prave p dodeljuje tačku Q prave q takvu da je $PQ \| s$.

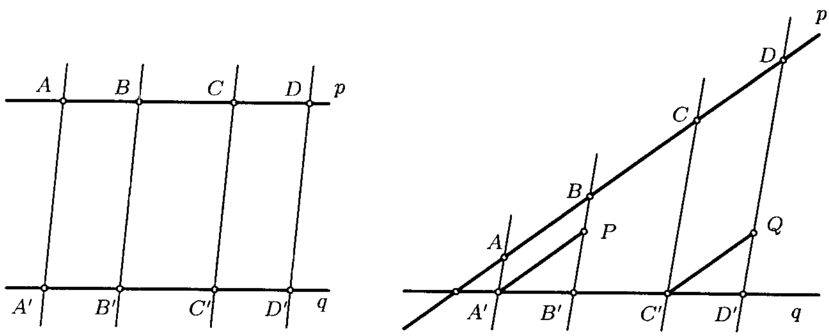
Iz osobina paralelnih pravih euklidskog prostora neposredno sledi da je paralelno projektovanje bijekcija. Štaviše, paralelno projektovanje je i *uređeno preslikavanje*, drugim rečima (na osnovu teoreme 16.10) važi sledeće tvrđenje:

Teorema 27.1: *Ako se tačke A, B, C paralelnim projektovanjem preslikavaju, redom, na tačke A', B', C' i ako je $\mathcal{B}(A, B, C)$, onda je i $\mathcal{B}(A', B', C')$.* □

Uvedeni pojam paralelnog projektovanja omogućava nam da dokažemo jednu od najstarijih teorema geometrije — *Talesovu teoremu:*

Teorema 27.2: *Paralelno projektovanje je transformacija sličnosti.*

Dokaz: Neka su A, B, C, D četiri tačke prave p, a A', B', C', D' njihove slike na pravoj q u paralelnom projektovanju f u odnosu na pravu s. Ako su prave p i q međusobno paralelne, iz osobina paralelograma (teorema 26.4) sledi da je transformacija f izometrija pa, dakle, i sličnost.



Slika 27a

Pretpostavimo da se prave p i q seku. Ako su duži AB i CD podudarne, i njihove slike $A'B'$ i $C'D'$ će takođe biti podudarne duži. Zaista, ako obeležimo sa P i Q tačke u kojima prave koje sadrže A' i C' i paralelne su pravoj p seku, redom, prave BB' i DD', tada su četvorouglovi $ABPA'$ i $CDQC'$ paralelogrami, pa su duži PA' i QC' podudarne. Na osnovu drugog stava o podudarnosti trouglova, $PA'B'$ i $QC'D'$ će biti podudarni trouglovi, pa će, stoga, i duži $A'B'$ i $C'D'$ biti podudarne. Dakle, ako je $AB \cong CD$, tada je $A'B' \cong C'D'$, tj. $\rho(A', B') = \rho(C', D')$. Budući da iz uslova $\mathcal{B}(A, B, C)$, na osnovu prethodne teoreme sledi da je

$$\rho(A', C') = \rho(A', B') + \rho(B', C'),$$

funkcija L definisana na sledeći način:

$$L(AB) = \rho(A', B'),$$

biće mera. Kako je, na osnovu teoreme 22.2,

$$\rho(A',B')=L(AB)=k\rho(A,B),$$

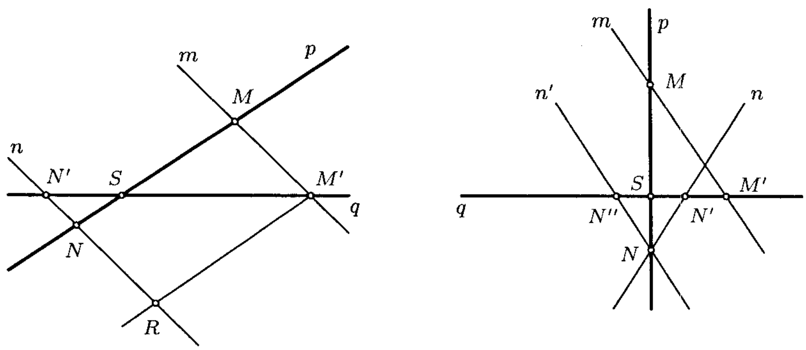
f je sličnost. □

Sledeće tvrđenje je značajna posledica Talesove teoreme.

Teorema 27.3: *Neka se prave p i q seku u tački S i neka su m i n dve prave koje ne sadrže S i seku, redom, prave p i q u tačkama M, M' i N, N'. Ako su m i n dve međusobno paralelne prave, tada je*

$$\frac{SM}{SN}=\frac{SM'}{SN'}=\frac{MM'}{NN'}.$$

Obratno važi ako prave p i q nisu međusobno upravne, a ako su upravne obratno važi kada je ispunjen uslov da su tačke M i N sa iste strane tačke S ako i samo ako su M' i N' sa iste strane te tačke.



Slika 27b

Dokaz: Pretpostavimo da su m i n dve međusobno paralelne prave. Prva jednakost u tom slučaju neposredno sledi iz Talesove teoreme. Dokažimo drugu. U tom cilju označimo sa r pravu koja sadrži tačku M' i paralelna je pravoj p, a sa R presek te prave i prave n. Na osnovu Talesove teoreme paralelno projektovanje prave q na pravu n je takođe sličnost, pa je

$$\frac{SM'}{SN'}=\frac{NR}{NN'}.$$

Kako je $NR\cong MM'$ ispunjena je i druga jednakost.

Ako prave m i n nisu paralelne, tada postoji jedinstvena prava n' koja sadrži N i paralelna je pravoj m. Neka n' seče pravu q u tački N''. Tada je, na osnovu prethodnog,

$$\frac{SM}{SN}=\frac{SM'}{SN''}=\frac{MM'}{NN''},$$

pa je $SN'' \cong SN'$ i $NN'' \cong NN'$. Ako je $N' \neq N''$, te dve tačke će biti sa raznih strana tačke S jer je $SN'' \cong SN'$ pa, kako je $NN'' \cong NN'$, uglovi NSN'' i NSN' će biti podudarni, pa stoga i pravi. □

Homotetija. Neka je O proizvoljna tačka neke ravni ili prostora i neka je k realan broj različit od nule. *Homotetijom* ili *dilatacijom* te ravni ili prostora sa *središtem* O i *koeficijentom* k nazivamo transformaciju $\mathcal{H}_{O,k}$ koja svakoj tački X ravni ili prostora dodeljuje tačku X' prave OX takvu da je $OX' = kOX$, $k \neq 0$, pri čemu su tačke X i X' sa iste strane tačke O ako i samo ako je k pozitivan realan broj. Iz definicije neposredno sledi da je homotetija bijekcija i da je jednoznačno određena središtem O i koeficijentom k. Štaviše, ako je $k \neq 1$, homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ ima jedinstvenu invarijantnu tačku — njeno središte O, ako je $k = 1$, $\mathcal{H}_{O,k}$ je identičnost, a ako je $k = -1$, $\mathcal{H}_{O,k}$ je centralna simetrija $\mathcal{S}_O$.

Neposredno se proverava da je proizvod homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ i $\mathcal{H}_{O,k'}$, homotetija $\mathcal{H}_{O,kk'}$, a da je inverzna transformacija homotetije $\mathcal{H}_{O,k}$ opet homotetija $\mathcal{H}_{O,1/k}$. Stoga je skup svih homotetija sa zajedničkim središtem, grupa u odnosu na proizvod transformacija.

Sledeće tvrđenje je neposredna posledica teoreme 27.3.

Teorema 27.4: *Homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ je transformacija sličnosti sa koeficijentom $|k|$.* □

Budući da je svaka homotetija sličnost, ona može biti direktna ili indirektna transformacija. Neposredno se proverava da je svaka homotetija ravni direktna transformacija, a da je homotetija prostora direktna ili indirektna u zavisnosti od toga da li je njen koeficijent veći ili manji od nule.

Teorema 27.5: *Ako sličnost nije izometrija, ona je homotetija ako i samo ako svaku pravu preslikava na njoj paralelnu pravu.*

Dokaz: Homotetijom se, na osnovu teoreme 27.3, svaka prava preslikava na njoj paralelnu pravu.

Ako je $\mathcal{P}$ sličnost kojom se prava m preslikava u njoj paralelnu pravu n, tada će prave koje sadrže odgovarajuće tačke u transformaciji $\mathcal{P}$ biti međusobno paralelne ili će biti konkurentne. Zaista, ako se tačke M i M' prave m preslikavaju, redom, na tačke N i N' prave n, prave MN i $M'N'$ biće međusobno paralelne ili će se seći u nekoj tački S. Ako su paralelne, duži MM' i NN' biće međusobno podudarne, pa je $\mathcal{P}$ translacija. Ako se seku u tački S, ta tačka će biti invarijantna u transformaciji $\mathcal{P}$ jer se sličnošću $\mathcal{P}$ prave MN i $M'N'$ preslikavaju svaka na sebe budući da se njome prave MS i $M'S$ preslikavaju na njima paralelne prave NS i $N'S$. Stoga je transformacija $\mathcal{P}$, na osnovu teoreme 27.3, homotetija. □

Teorema 27.6: *Proizvod dveju homotetija je homotetija, identičnost ili translacija.*

Dokaz: Proizvod dveju homotetija je sličnost $\mathcal{P}$ koja svaku pravu preslikava na njoj paralelnu pravu, pa je, na osnovu prethodne teoreme, $\mathcal{P}$ homotetija ili izometrija. U drugom slučaju $\mathcal{P}$ može da bude centralna simetrija (dakle opet homotetija), zatim translacija ili identičnost. □

Sličnost trouglova. Za duži PQ i RS reći ćemo da su *srazmerne* dužima $P'Q'$ i $R'S'$ ako je

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{P'Q'}{R'S'}.$$

Teorema 27.7: *Dva trougla su slična ako i samo ako su:*

(i) dve ivice jednog trougla srazmerne odgovarajućim ivicama drugog trougla, a uglovi zahvaćeni tim ivicama međusobno podudarni;

(ii) uglovi jednog trougla podudarni odgovarajućim uglovima drugog trougla;

(iii) ivice jednog trougla srazmerne odgovarajućim ivicama drugog trougla;

(iv) dve ivice jednog trougla srazmerne odgovarajućim ivicama drugog trougla, uglovi naspram dveju od tih odgovarajućih ivica međusobno podudarni, a uglovi naspram drugih dveju odgovarajućih ivica oba oštra, oba prava ili oba tupa.

Dokaz: (i) Pretpostavimo da su ABC i $A'B'C'$ trouglovi kod kojih je

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} = k$$

i uglovi kod temena A i A' podudarni. Ako se homotetijom $\mathcal{H}_{A,k}$ tačke B i C preslikavaju, redom, na B'' i C'', tada je $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$, pa postoji izometrija $\mathcal{I}$ koja tačke A, B'', C'' preslikava, redom, na tačke A', B', C'. U transformaciji sličnosti $\mathcal{P} = \mathcal{I}\mathcal{H}_{A,k}$ tačke A, B, C se preslikavaju, redom, na tačke A', B', C', pa su, stoga, trouglovi ABC i $A'B'C'$ slični.

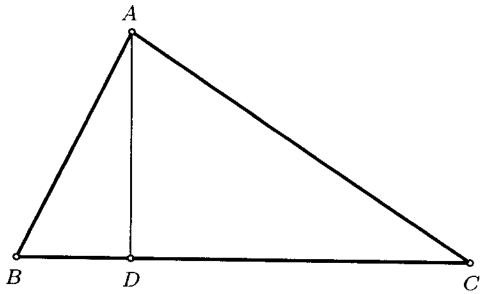
(ii) Ako su uglovi jednog trougla podudarni odgovarajućim uglovima drugog trougla, homotetijom $\mathcal{H}_{A,k}$, gde je $k = A'B'/AB$, tačke B i C preslikavaju se, redom, na B'' i C'' takve da je $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$. Stoga postoji izometrija $\mathcal{I}$ koja tačke A, B'', C'' preslikava, redom, na tačke A', B', C'. U transformaciji sličnosti $\mathcal{P} = \mathcal{I}\mathcal{H}_{A,k}$ tačke A, B, C se preslikavaju, redom, na tačke A', B', C', pa su, stoga, trouglovi ABC i $A'B'C'$ slični.

Slično se dokazuju i poslednja dva stava o sličnosti trouglova. □

Pitagorina teorema. Zahvaljujući pojmu sličnosti moguće je formulisati i *Pitagorinu teoremu:*

Teorema 27.8: *Ako je ugao A trougla ABC prav, tada je*

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$



Slika 27c

Dokaz: Ako je D podnožje upravne iz A na pravoj BC, biće $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ i $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, pa je

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \quad \text{i} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$$

i, prema tome, $AB^2 = BC \cdot BD$ i $AC^2 = BC \cdot CD$. Iz tih dveju jednakosti sledi da je $AB^2 + AC^2 = BC^2$. □

Invarijantna tačka sličnosti. Dokažimo najpre teoremu analognu već dokazanoj teoremi 10.13.

Teorema 27.9: *Ako su ABC i $A'B'C'$ slični trouglovi jedne ravni, tada postoji jedinstvena transformacija sličnosti te ravni koja trougao ABC preslikava na trougao $A'B'C'$.*

Dokaz: Ako su B'' i C'' tačke polupravih $A'B'$ i $A'C'$ takve da je $A'B'' \cong AB$ i $A'C'' \cong AC$, trouglovi ABC i $A'B''C''$ biće međusobno podudarni, a kako su ABC i $A'B'C'$ slični trouglovi, i trouglovi $A'B''C''$ i $A'B'C'$ će biti slični. Oni će, štaviše, biti homotetični. Dakle, postoji izometrija koja preslikava ABC na $A'B''C''$ i homotetija koja preslikava $A'B''C''$ na $A'B'C'$. Njihova kompozicija biće sličnost $\mathcal{P}$ koja preslikava ABC na $A'B'C'$. Ako bi i $\mathcal{P}'$ bila sličnost koja preslikava ABC na $A'B'C'$, tada bi $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}'$ bila identičnost, pa je $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$. □

U analogiji sa aksiomom III6 može se formulisati i jednostavno dokazati da: ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i A', B' tačke ruba neke poluravni π, tada u poluravni π postoji jedinstvena tačka C' takva da je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Stoga važi sledeće tvrđenje:

Teorema 27.10: *Ako su AB i $A'B'$ dve duži jedne ravni, tada postoje tačno dve transformacije sličnosti te ravni koje tačke A i B preslikavaju, redom, na tačke A' i B'; jedna direktna i jedna indirektna.* □

Ako su AB i $A'B'$ dve duži jedne ravni, a $ABCD$ i $A'B'C'D'$ kvadrati iste ravni, njima je određena jedinstvena transformacija sličnosti te ravni kojom se jedan od tih kvadrata preslikava na drugi. U zavisnosti od toga da li su kvadrati

$ABCD$ i $A'B'C'D'$ istosmerni ili suprotnosmerni transformacija sličnosti će biti direktna ili indirektna.

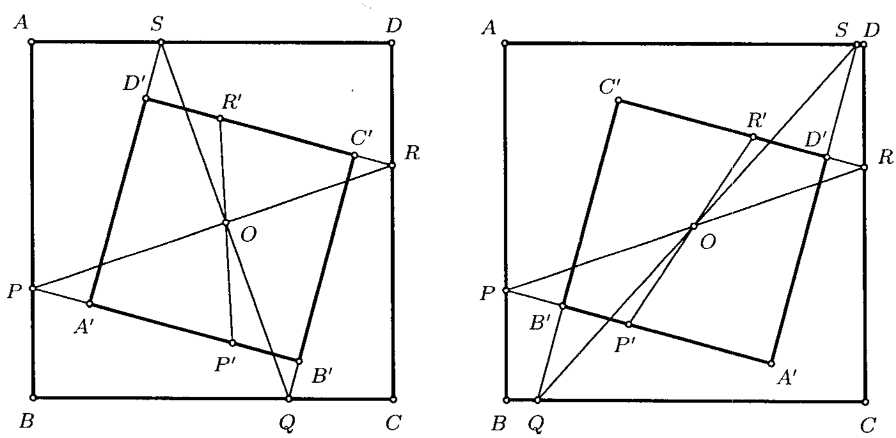
Sledeće dve teoreme se dokazuju slično prethodnim dvema teoremama (oslanjajući se na teoreme 10.14 i 13.12).

Teorema 27.11: *Ako su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ slični tetraedri, tada postoji jedinstvena transformacija sličnosti prostora koja tetraedar $ABCD$ preslikava na tetraedar $A'B'C'D'$.* □

Teorema 27.12: *Ako su ABC i $A'B'C'$ slični trouglovi, tada postoje tačno dve transformacije sličnosti prostora koje trougao ABC preslikavaju na trougao $A'B'C'$; jedna direktna i jedna indirektna.* □

Teorema 27.13: *Svaka transformacija sličnosti koja nije izometrija ima jedinstvenu invarijantnu tačku.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{P}$ neka transformacija sličnosti ravni ili prostora, sa koeficijentom $k \neq 1$. Teorema se neposredno dokazuje ako je $\mathcal{P}$ homotetija budući da ona ima jedinstvenu invarijantnu tačku — središte homotetije. Stoga pretpostavimo da $\mathcal{P}$ nije homotetija već neka sličnost u kojoj se ne preslikava svaka prava u njoj paralelnu pravu.



Slika 27d

Ako je $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti ravni i ako je AB duž koja se sličnošću $\mathcal{P}$ preslikava na duž $A'B'$ koja ne pripada pravoj paralelnoj AB, (istosmernim ili suprotnosmernim) kvadratima $ABCD$ i $A'B'C'D'$ je jednoznačno određena sličnost $\mathcal{P}$. Neka su P, Q, R i S tačke u kojima se, redom, seku odgovarajući parovi pravih: AB i $A'B'$, BC i $B'C'$, CD i $C'D'$, DA i $D'A'$. Ako se sličnošću $\mathcal{P}$ tačka P prave AB preslikava u tačku P' prave $A'B'$, a tačka R prave CD u tačku R' prave $C'D'$, prave PR i $P'R'$ će se seći u nekoj tački O. Zaista, ako bi prave PR i $P'R'$ bile paralelne, četvorougao $PRR'P'$ bi bio paralelogram, pa bi PR i $P'R'$ bile podudarne duži što protivreči pretpostavci da je $k \neq 1$ budući da je $P'R' = kPR$. Kako duži PP' i RR' pripadaju paralelnim pravama biće

$$\frac{OP}{OR} = \frac{OP'}{OR'}$$

pa je O invarijantna tačka transformacije $\mathcal{P}$. Ona je jedina invarijantna tačka te transformacije jer ako bi postojala još jedna O' tada bi duž OO' bila invarijantna u transformaciji $\mathcal{P}$, pa nije $OO' = kOO'$.

U zavisnosti od toga da li su kvadrati $ABCD$ i $A'B'C'D'$ istosmerni ili suprotnosmerni transformacija $\mathcal{P}$ će biti direktna ili indirektna. Primetimo da tačka O, budući da je jedinstvena, pripada i pravoj PR i pravoj QS.

Pretpostavimo da je $\mathcal{P}$ (direktna ili indirektna) transformacija sličnosti prostora koja neku tačku A preslikava u tačku A'. Ako je $A = A'$, A je tražena invarijantna tačka. Ako je $A \neq A'$, označimo sa Q tačku takvu da je $QA' = \pm kQA$ pri čemu je k sa predznakom $+$ ako je $\mathcal{P}$ direktna, a sa predznakom $-$ ako je indirektna. Tada je

$$\mathcal{P}\mathcal{H}_{Q,\pm 1/k}$$

direktna izometrija $\mathcal{I}$ koja tačku A ostavlja invarijantnom, dakle identičnost ili rotacija (teorema 20.4). Ako je $\mathcal{I}$ identičnost, Q je tražena invarijantna tačka. Ako je $\mathcal{I}$ rotacija čija je osa neka prava a koja sadrži tačku A, ravan σ koja je upravna na pravoj a, a sadrži tačku Q, preslikava se na sebe svakom od transformacija

$$\mathcal{P}\mathcal{H}_{Q,\pm 1/k} \quad \text{i} \quad \mathcal{H}^{-1}_{Q,\pm 1/k}$$

pa se, dakle, ta ravan preslikava na sebe i sličnošću $\mathcal{P}$ (koja je proizvod pomenutih dveju transformacija). Sličnošću $\mathcal{P}$ se ravan σ preslikava na sebe pa, na osnovu prethodnog, postoji tačka O koja je invarijantna u toj transformaciji. Ona je jedina invarijantna tačka te transformacije jer ako bi postojala još jedna — O', tada bi duž OO' bila invarijantna u transformaciji $\mathcal{P}$, pa nije $OO' = kOO'$. □

Direktne i indirektne sličnosti. Svaka sličnost $\mathcal{P}$ sa koeficijentom k može se izraziti kao proizvod neke homotetije sa istim koeficijentom i neke izometrije. Zaista, ako su P' i Q' slike tačaka P i Q u transformaciji $\mathcal{P}$, a P'' i Q'' slike istih tačaka u homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$, tada je $P'Q' = kPQ$ i $P''Q'' = kPQ$, pa je $P'Q' \cong P''Q''$. Dakle, kompozicijom $\mathcal{P}\mathcal{H}^{-1}_{O,k}$ svaki par tačaka P'', Q'' se preslikava na njemu podudaran par tačaka P', Q', pa je, zato, taj proizvod neka izometrija $\mathcal{I}$. Stoga je

$$\mathcal{P} = \mathcal{I}\mathcal{H}_{O,k}.$$

Ako je $\mathcal{I}$ centralna rotacija sa središtem O, proizvod $\mathcal{I}\mathcal{H}_{O,k}$ ćemo zvati *dilativnom rotacijom ravni*, a ako je $\mathcal{I}$ refleksija čija osa sadrži tačku O, proizvod $\mathcal{I}\mathcal{H}_{O,k}$ ćemo zvati *dilativnom refleksijom.* Ako je $\mathcal{I}$ osna rotacija čija osa sadrži tačku O, proizvod $\mathcal{I}\mathcal{H}_{O,k}$ ćemo zvati *dilativnom rotacijom prostora.*

Teorema 27.14: *Ako nije izometrija, direktna sličnost ravni je homotetija ili dilativna rotacija.*

Dokaz: Direktna sličnost $\mathcal{P}$ ima invarijantnu tačku O, pa se može izraziti kao proizvod homotetije $\mathcal{H}_{O,k}$ i direktne izometrije u kojoj je tačka O invarijantna. Budući da je ta izometrija identičnost ili rotacija, $\mathcal{P}$ je homotetija ili dilativna rotacija. □

Teorema 27.15: *Ako nije izometrija, indirektna sličnost ravni je dilativna refleksija.*

Dokaz: Indirektna sličnost $\mathcal{P}$ ima invarijantnu tačku O, pa se može izraziti kao proizvod homotetije $\mathcal{H}_{O,k}$ i indirektne izometrije koja tačku O ostavlja invarijantnom. Budući da je ta izometrija refleksija (teorema 15.4), P je dilativna refleksija. □

Teorema 27.16: *Svaka sličnost prostora je izometrija, homotetija ili dilativna rotacija.*

Dokaz: Sličnost $\mathcal{P}$ ima invarijantnu tačku O, pa se, kao u dokazu teoreme 27.13, može izraziti kao proizvod homotetije $\mathcal{H}_{O,\pm 1/k}$ i direktne izometrije koja tačku O ostavlja invarijantnom. Budući da je ta izometrija identičnost ili rotacija (teorema 20.4), P je homotetija ili dilativna rotacija. □

ZADACI:

1. Ako su E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A trougla ABC seku pravu BC, dokazati da je

$$BE : CE = BF : CF = AB : AC.$$

2. Ako je S središte upisanog kruga, ako su S_a, S_b, S_c središta spolja upisanih krugova trougla ABC koji, redom, odgovaraju ivicama BC, CA, AB, a E i F tačke u kojima simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla A tog trougla seku pravu BC, dokazati da je

a. $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$,

b. $AE : SE = (AB + BC + CA) : BC$; $AE : S_aE = (AB + AC - BC) : BC$,

c. $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AB - AC) : BC$.

3. Ako su a, b, c ivice i p poluobim trougla ABC, a ρ_a, ρ_b, ρ_c poluprečnici spolja upisanih krugova tog trougla, dokazati da je

a. $\rho\rho_a = (p - b)(p - c)$,

b. $\rho_b\rho_c = p(p - a)$,

4. Ako su a, b, c ivice i p poluobim trougla ABC, a h_a visina tog trougla koja odgovara ivici a, dokazati da je

$$ah_a = 2[p(p - a)(p - b)(p - c)]^{1/2}.$$

5. Ako su P, P_a, P_b, P_c tačke u kojima upisani krug k i spolja upisani krugovi k_a, k_b, k_c koji, redom, dodiruju ivice BC, CA, AB trougla ABC, dodiruju pravu BC, a P', P'_a, P'_b, P'_c tačke dijametralno suprotne tačkama P, P_a, P_b, P_c u odnosu na krugove k, k_a, k_b, k_c, dokazati da je

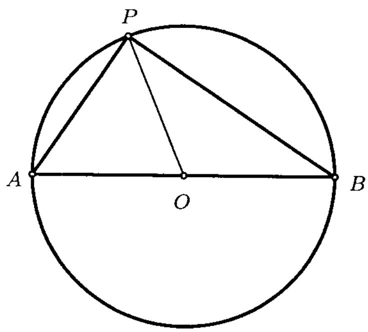
$$\mathcal{B}(A, P', P_a), \ \mathcal{B}(A, P, P'_a), \ \mathcal{B}(P_c, A, P'_b), \ \mathcal{B}(P_b, A, P'_c).$$

6. Ako je proizvod dveju homotetija opet homotetija, dokazati da središta tih triju homotetija pripadaju jednoj pravoj.

28. Krug i sfera

Jedini nelinearni epicikli euklidske ravni su krugovi, a sfere su, kako smo ustanovili, jedine neravne episfere euklidskog prostora. Već time je istaknut značaj ovih geometrijskih likova kojima se u euklidskoj geometriji uvek posvećuje posebna pažnja.

Ako su A i B dve tačke kruga $k(O, r)$, segment AB toga kruga i njegov komplement zvaćemo *lukovima* toga kruga. Ugao AOB zvaćemo *centralnim* ili *središnjim uglom* toga kruga. Ako luk AB pripada uglu AOB, reći ćemo da je tada luk AB *zahvaćen* tim centralnim uglom. Ako je C proizvoljna tačka kruga k različita od A i B, konveksan ugao ACB zvaćemo *periferijskim uglom* toga kruga. Ako luk AB pripada tom uglu, reći ćemo da je tada luk *zahvaćen* tim perferijskim uglom.

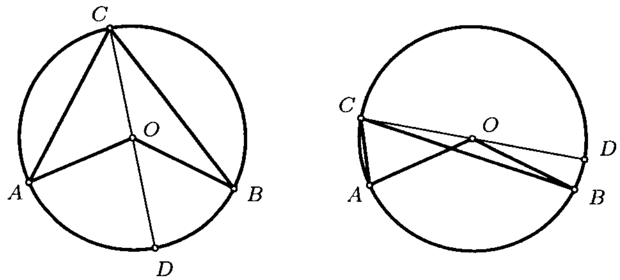


Slika 28a

Ako je AB prečnik kruga $k(O, r)$, a P njegova proizvoljna tačka različita od A i B, tada je ugao APB prav. Zaista, budući da su trouglovi OPA i OPB jednakokraki, uglovi na osnovicama će biti podudarni (teorema 11.12) i biće jednaki polovinama njima nesusednih spoljašnjih uglova BOP i AOP. Zbir uglova BOP i AOP je π, pa će zbir uglova APO i BPO biti $\pi/2$. Dakle, ugao APB je prav. Ako je ugao APB prav, lako se proverava da tada tačka P pripada krugu čiji je prečnik AB. Važi i opštije:

Teorema 28.1: *Periferijski ugao kruga jednak je polovini njegovog centralnog ugla koji zahvata isti luk toga kruga.*

Dokaz: Neka su A, B i C tri razne tačke zadatog kruga $k(O,r)$, a D tačka dijametralno suprotna tački C. Trouglovi OAC i OBC su jednakokraki, pa će, stoga, uglovi na osnovicama biti podudarni (teorema 11.12). Budući da je spoljašnji ugao trougla jednak zbiru dvaju unutrašnjih nesusednih uglova, biće $\measuredangle AOD = 2\measuredangle ACD$ i $\measuredangle BOD = 2\measuredangle BCD$. Zavisno od toga da li su tačke A i B sa iste ili sa raznih strana prave CD, ugao AOB biće jednak razlici ili zbiru uglova AOD i BOD, a ugao ACB razlici ili zbiru uglova ACD i BCD. Stoga je $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB$.



Slika 28b

Naravno, ista relacija će važiti i ako su tačke C, O, B kolinearne. □

Važi i obratno, ako su ACB i ADB dva podudarna ugla kojima su temena C i D sa iste strane prave AB, tada postoji krug koji sadrži tačke A, B, C, D. Zaista, ako su krugovi koji sadrže trojke tačaka A, B, C i A, B, D međusobno različiti, tada će središta O i O' tih dvaju krugova da budu dve razne tačke koje pripadaju medijatrisi duži AB. Ako je S središte duži AB, uglovi AOS i $AO'S$ neće biti podudarni, dakle ni uglovi AOB i $AO'B$ neće biti podudarni, pa ni njihovi periferijski uglovi ACB i ADB neće biti podudarni. Kontradikcija!

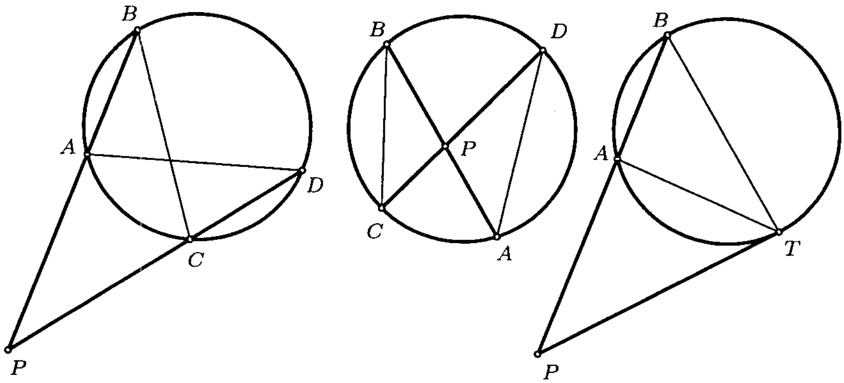
Neposredna posledica teoreme 28.1 je sledeće tvrđenje:

Teorema 28.2: *Svi periferijski uglovi jednog kruga koji zahvataju isti luk međusobno su podudarni.* □

Uglom koji zahvataju dva kruga koja se seku u nekoj tački T, zvaćemo ugao koji zahvataju tangente tih krugova u tački T, a uglom koji *zahvataju prava i krug* koji se seku u tački T, zvaćemo ugao koji zahvataju ta prava i tangenta kruga u tački T. Za dva kruga ili za pravu i krug reći ćemo da su *upravni*, *normalni* ili *ortogonalni* ako zahvataju prav ugao. Dakle, tangente u presečnoj tački dvaju upravnih krugova su međusobno upravne prave. Štaviše, krugovi će biti upravni ako i samo ako tangenta jednog kruga sadrži središte drugog. Prava će biti upravna na krugu ako i samo ako sadrži njegovo središte.

Potencija. Pojam sličnosti i osobine transformacija sličnosti omogućavaju da se u geometriju krugova i sfera uvedu neki novi pojmovi kakav je pojam potencije tačke u odnosu na krug i sferu. Da bismo definisali potenciju neophodno je najpre dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 28.3: *Neka je P proizvoljna tačka neke ravni koja ne pripada zadatom krugu k te ravni, a p i q prave koje sadrže P takve da p seče krug k u tačkama A i B, a q u tačkama C i D. Tada je $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Ako je P izvan kruga k, a T dodirna tačka kruga k i tangente koja sadrži P, tada je $PA \cdot PB = PT^2$.*



Slika 28c

Dokaz: Trouglovi PBC i PDA slični jer su uglovi jednog podudarni uglovima drugog, pa je

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}.$$

Dakle, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Ako je tačka P izvan kruga k, trouglovi PAT i PTB će biti slični, pa je

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB},$$

a odavde sledi da je $PA \cdot PB = PT^2$. □

Proizvod $PA \cdot PB$ koji zavisi od samo od tačke P i kruga k, kako je to već ustanovljeno prethodnom teoremom, nazivamo *potencijom tačke P u odnosu na krug k*. Primetimo da se u prethodnom razmatranju ništa neće promeniti ako pretpostavimo da su PA i PB mere *orijentisanih duži*. Tada je proizvod $PA \cdot PB$ pozitivan ili negativan u zavisnosti od toga da li su te dve duži istosmerne ili nisu, pa je, stoga, tačka P izvan kruga k ako i samo ako je proizvod $PA \cdot PB$ pozitivan.

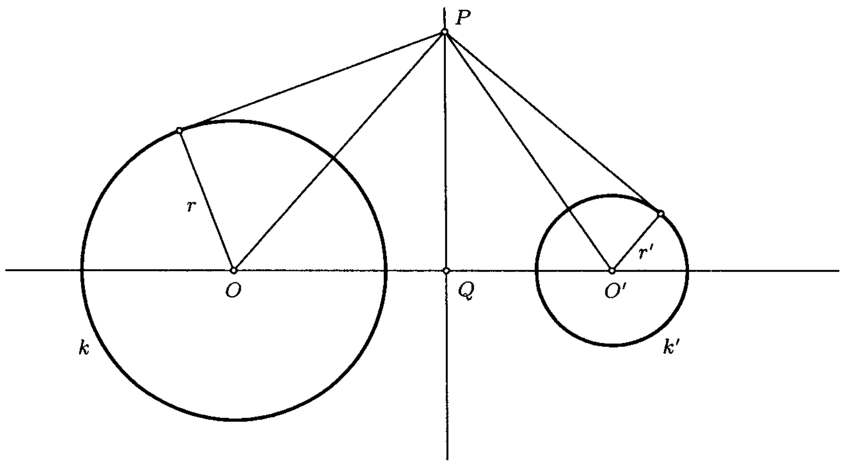
Ako je P tačka koja ne pripada sferi σ, a A tačka sfere σ i B tačka u kojoj prava PA seče sferu σ, neposredno se proverava da proizvod $PA \cdot PB$ ne zavisi od izbora tačke A na zadatoj sferi σ, već samo od izbora tačke P i sfere σ. Stoga proizvod $PA \cdot PB$ nazivamo *potencijom tačke P u odnosu na sferu σ*.

Teorema 28.4: *Skup p svih tačaka zadate ravni kojima su potencije u odnosu na dva kruga $k(Q, r)$ i $k'(O', r')$, $O \neq O'$, međusobno jednake, je prava upravna na pravoj OO'.*

Dokaz: Ako tačka P pripada skupu p, na osnovu Pitagorine teoreme (27.8), biće $OP^2-r^2=O'P^2-r'^2$, pa je $OP^2-O'P^2=r^2-r'^2$. Ako je Q podnožje upravne iz tačke P na pravoj OO', opet na osnovu Pitagorine teoreme, biće

$$OQ^2-O'Q^2=OP^2-O'P^2=r^2-r'^2.$$

Dakle tačka P pripada pravoj koja je u tački Q upravna na OO'.



Slika 28d

Obratno, ako tačka P pripada pravoj koja je u tački Q (koja zadovoljava uslov $OQ^2-O'Q^2=r^2-r'^2$) upravna na pravoj OO', tada je $OP^2=OQ^2+PQ^2$ i $O'P^2=O'Q^2+PQ^2$, pa je $OP^2-O'P^2=OQ^2-O'Q^2=r^2-r'^2$. Stoga je

$$OP^2-r^2=O'P^2-r'^2,$$

pa je potencija tačke P u odnosu na krug k jednaka potenciji iste tačke u odnosu na krug k'. Dakle, p je prava u tački Q upravna na pravoj OO'. □

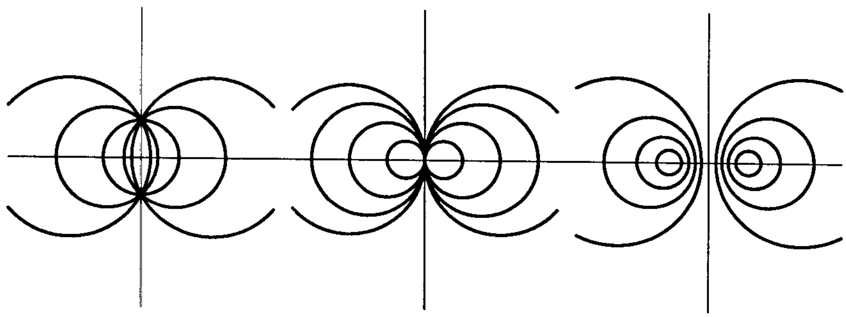
Radikalnom osom dvaju krugova nazivamo pravu koja se sastoji iz tačaka koje imaju jednake potencije u odnosu na zadate krugove. Ako se krugovi seku, neposredno se dokazuje da njihova radikalna osa sadrži presečne tačke. Ako se dodiruju, radikalna osa je zajednička tangenta tih dvaju krugova u njihovoj dodirnoj tački. Ako su krugovi disjunktni, dovoljno je odrediti jednu tačku radikalne ose. Da bi se ona odredila zadati krugovi se preseku trećim krugom i presečne tačke jednog od tih krugova sa trećim krugom obeležimo sa X i Y, a drugog sa X' i Y'. Presek pravih XY i $X'Y'$ je tačka koja pripada radikalnoj osi.

Neposredno se proverava da važi sledeći stav:

Teorema 28.5: *Postoji pramen pravih kome pripadaju radikalne ose triju krugova jedne ravni.* □

U analogiji sa teoremom 28.4 može se dokazati da je skup svih tačaka prostora kojima su potencije u odnosu na dve sfere $\sigma(O,r)$ i $\sigma'(O',r')$, $O \neq O'$, međusobno jednake, ravan upravna na pravoj OO'. Tu ravan ćemo zvati *radikalnom ravni* zadatih sfera.

Pojam radikalne ose omogućava nam definisanje pojma pramena krugova. Skup svih krugova jedne ravni od kojih svaka dva za radikalnu osu imaju istu pravu s zvaćemo *sistemom koaksijalnih krugova* ili *pramenom krugova.* Pravu s zvaćemo *osom* toga *pramena.* Iz definicije pramena krugova neposredno sledi da je svaki pramen jednoznačno određen dvama svojim krugovima. Jasno, skup središta svih krugova jednog pramena pripada jednoj pravoj koja je upravna na osi s toga pramena.



Slika 28e

Iz prethodne definicije i definicije radikalne ose neposredno sledi da će svi krugovi jednog pramena sadržati tačke A i B ako postoje dva kruga toga pramena koja sadrže te dve tačke, da će se svaka dva kruga jednog pramena dodirivati u nekoj tački C ako postoje dva kruga toga pramena koja se dodiruju u tački C i da će svaka dva kruga jednog pramena biti disjunktna ako su bilo koja dva kruga toga pramena disjunktna. Zbog toga razlikujemo tri vrste pramenova krugova: ako se svaka dva kruga pramena seku u dvema raznim tačkama, taj pramen nazivamo *eliptičkim,* ako se svaka dva kruga pramena dodiruju u istoj tački, pramen nazivamo *paraboličkim,* a ako su svaka dva kruga jednog pramena disjunktna, pramen nazivamo *hiperboličkim.*

Neka su k_1 i k_2 dva kruga koji definišu neki pramen krugova $\mathcal{K}$. Svaka tačka radikalne ose tih dvaju krugova ima istu potenciju u odnosu na ta dva kruga, pa je, stoga, ona središte kruga upravnog na krugovima k_1 i k_2. Neka su k_1' i k_2' dva kruga upravna na krugovima k_1 i k_2 čiji centri, stoga, pripadaju radikalnoj osi tih dvaju krugova. I krugovi k_1' i k_2' jednoznačno određuju neki pramen krugova $\mathcal{K}'$. Svaki krug jednog od pramenova $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}'$ upravan je na svakom krugu drugog pramena, a osa jednog od tih pramenova sadržaće središta krugova koji pripadaju drugom. Stoga ćemo pramenove $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}'$ zvati međusobno *upravnim pramenovima krugova.* Razume se, i ose tih dvaju pramenova biće međusobno upravne. Ako je jedan od pramenova $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}'$ parabolički, neposredno se proverava da će takav biti i drugi. Ako je jedan od pramenova eliptički, drugi će biti hiperbolički. Zaista, ako je Q presek osa tih dvaju pramenova, i ako su $k(O,r)$ i $k'(O',r')$ krugovi pramenova $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}'$, na osnovu Pitagorine teoreme 27.8, biće

$$OO'^2 = QO^2 + QO'^2 = r^2 + r'^2,$$

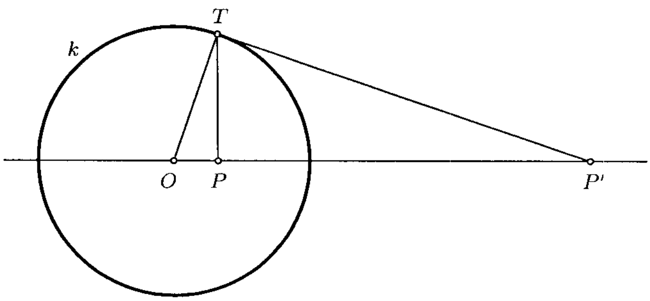
tj.

$$QO^2 - r^2 = -(QO'^2 - r'^2),$$

pa stoga tačka Q pripada unutrašnjostima krugova jednog pramena ako i samo ako pripada spoljašnjostima krugova drugog.

Inverzija u odnosu na krug. Neka je zadat krug $k(O,r)$ koji pripada ravni α. Reći ćemo da se tačka $P \in \alpha$ (različita od O) *inverzijom* ψ_k *u odnosu na krug* $k(O,r)$ preslikava u tačku P' ako su O, P i P' tri kolinearne tačke takve da je

$$OP \cdot OP' = r^2.$$



Slika 28f

Za tačku P' reći ćemo da je *inverzna* tački P *u odnosu na krug* $k(O,r)$, a taj krug ćemo zvati i *krugom inverzije* ψ_k. Tačku O ćemo zvati *središtem inverzije.* Iz definicije neposredno sledi da je inverzija bijektivno preslikavanje definisano na ravni α bez tačke O. Ako je tačka P' inverzna tački P, tada je i tačka P inverzna tački P', pa je, stoga, inverzija involucija. Štaviše, tačka unutar kruga k (različita od O) se inverzijom preslikava u tačku izvan toga kruga, a tačka izvan kruga u tačku unutar toga kruga. Tačka će pripadati krugu inverzije ako i samo ako je u toj inverziji invarijantna.

Ako je tačka P unutar kruga $k(O,r)$ i ako je T tačka u kojoj prava koja sadrži P i upravna je na pravoj OP, seče k, onda tangenta kruga k u tački T seče pravu OP u nekoj tački P'. Tada su trouglovi OPT i OTP' slični, pa je

$$\frac{OP}{OT} = \frac{OT}{OP'}.$$

Dakle, $OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$, pa je tačka P' inverzna tački P.

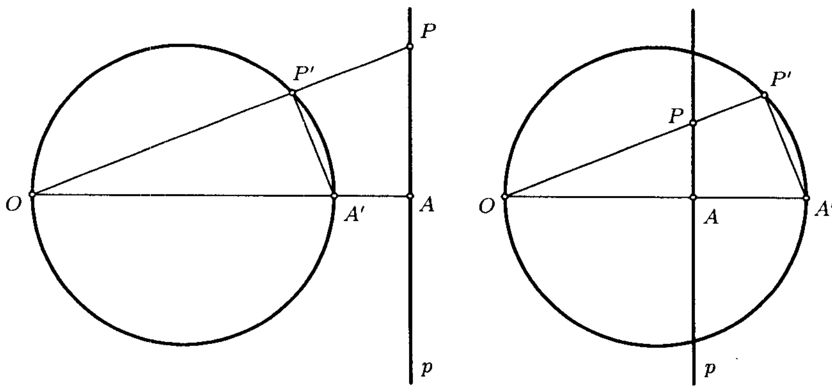
Ako je P' izvan kruga $k(O,r)$, krug čiji je prečnik OP' seče krug k u nekoj tački T. Ugao OTP' je prav pa je podnožje upravne iz T na pravoj OP' tačka P koja pripada duži OP'. Opet će trouglovi OPT i OTP' biti slični, pa će biti $OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$. Dakle, tačka P biće inverzna tački P'.

Teorema 28.6: *Proizvod dveju inverzija u odnosu na koncentrične krugove $k(O,r)$ i $k'(O,r')$ je homotetija sa koeficijentom $(r'/r)^2$.*

Dokaz: Ako se tačka P preslikava prvom inverzijom u P', a P' drugom inverzijom u P'', tada je $OP \cdot OP' = r^2$ i $OP' \cdot OP'' = r'^2$, pa proizvod zadatih inverzija preslikava tačku P u tačku P'' takvu da je

$$\frac{OP''}{OP} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2. \qquad \square$$

Teorema 28.7: *Ako sadrži središte inverzije, prava se inverzijom preslikava na sebe, a ako ne sadrži središte inverzije, preslikava se na krug kome nedostaje središte inverzije.*



Slika 28g

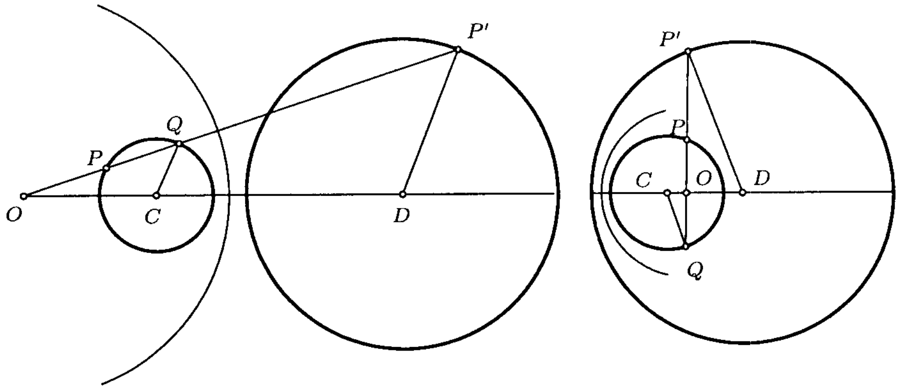
Dokaz: Iz definicije inverzije neposredno sledi da se prava koja sadrži središte inverzije preslikava u istu pravu. Pretpostavimo da prava p ne sadrži središte inverzije — tačku O. Neka je A podnožje upravne iz tačke O na pravoj p, neka je A' slika tačke A u zadatoj inverziji, a P' slika bilo koje tačke P zadate prave p. Tada je

$$OP \cdot OP' = r^2 = OA \cdot OA',$$

pa su trouglovi OAP i $OP'A'$ slični budući da imaju jedan ugao zajednički. Kako je ugao OAP prav, i ugao $OP'A'$ biće prav, pa tačka P' pripada krugu čiji je prečnik OA'.

Obratno, ako je P' tačka kruga čiji je prečnik OA', ugao $P'OA'$ biće oštar, pa prava koja sadrži tačku A i upravna je na pravoj OA seče polupravu OP' u nekoj tački P. Tada su trouglovi OAP i $OP'A'$ slični, pa je $OP \cdot OP' = OA \cdot OA'$. Dakle, tačka P je slika tačke P' u zadatoj inverziji. $\square$

Teorema 28.8: *Ako sadrži središte O inverzije, krug (kome nedostaje tačka O) se preslikava na pravu, a ako ne sadrži središte inverzije, krug se preslikava na krug.*



Slika 28h

Dokaz: Iz dokaza prethodne teoreme sledi da se krug koji sadrži središte inverzije preslikava na pravu. Pretpostavimo, stoga, da krug čije je središte neka tačka C ne sadrži središte O. Ako su P i Q tačke u kojima neka prava koja sadrži O, seče taj krug, proizvod $p = OP \cdot OQ$, na osnovu teoreme 28.3, ne zavisi od izbora tačke P. Homotetijom $\mathcal{H}_{O,r^2/p}$, gde je r poluprečnik kruga inverzije, krug sa središtem C i njegov poluprečnik CQ preslikavaju se na neki krug sa središtem D i njegov poluprečnik DP'. Pri tome je

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OD}{OC} = \frac{r^2}{p},$$

pa kako je $OP \cdot OQ = p$, biće $OP \cdot OP' = r^2$. Stoga je tačka P' inverzna tački P. Slično, svaka tačka kruga sa središtem D je slika neke tačke kruga sa središtem C, pa je zato krug sa središtem D inverzna slika kruga sa središtem C. □

U posebnom slučaju kada krug sa središtem C sadrži dve inverzne tačke, tada se on, na osnovu teoreme 28.3, inverzijom preslikava na sebe. Tada će prava koja sadrži središte inverzije i presek T kruga inverzije i kruga sa središtem C biti upravna na pravoj CT, pa će ti krugovi biti upravni. Obratno, kada je krug sa središtem C upravan na krugu inverzije taj krug se inverzijom preslikava na sebe. Zaista, ako prava koja sadrži središte inverzije seče krug sa središtem C u tačkama A i B, na osnovu teoreme 28.3, biće $OA \cdot OB = OT^2 = r^2$. Dakle, svaki krug eliptičkog pramena koji sadrži dve inverzne tačke A i B je upravan na krugu inverzije i obratno, skup krugova koji sadrže neku tačku A i upravni su na krugu inverzije je eliptički pramen krugova koji pored tačke A sadrže i njoj inverznu tačku B.

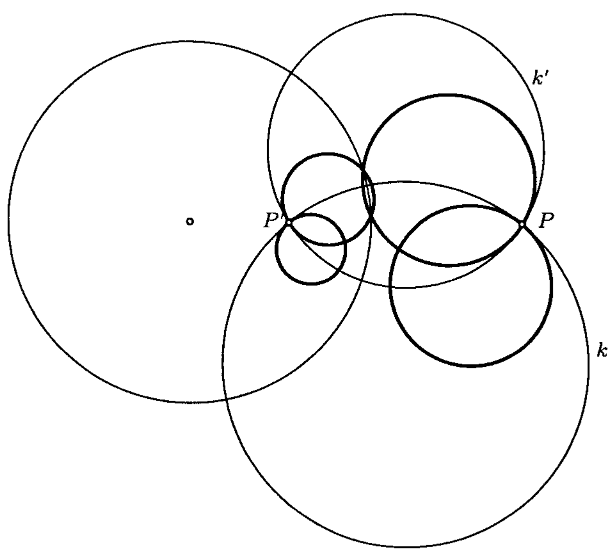
Inverzivna ravan. Primetimo da inverzija i osna refleksija imaju jedno zajedničko svojstvo: krugovi koji sadrže neku tačku A i upravni su na osi refleksije (krugu inverzije) pripadaju eliptičkom pramenu krugova koji, pored tačke A, sadrže i njoj osnosimetričnu (inverznu) tačku B. Stoga se inverzija ponekad naziva i *refleksijom u odnosu na krug*, pa možemo proširiti definiciju kruga i dopustiti da i prava bude (granični) *krug* neograničenog poluprečnika. Tada možemo reći da postoji jedinstven krug koji sadrži tri razne tačke i da se inverzijom krug preslikava na krug.

U istom smislu možemo proširiti euklidsku ravan dodajući joj „idealnu" tačku O' koja je i zajednička tačka i zajedničko središte svih pravih koje shvatamo kao krugove sa neograničenim poluprečnikom. Dva kruga sa zajedničkom tačkom se dodiruju ili imaju još jednu zajedničku tačku. Ovo je jasno kada je jedan od krugova prava. Ako su oba kruga prave, u prvom slučaju one su paralelne, pa se dodiruju u tački O', a ako se seku, tačka O' im je druga zajednička tačka.

Primetimo da dodavanjem tačke O' euklidskoj ravni, u zadatoj inverziji svaka tačka ima svoju inverznu tačku. Sve prave koje sadrže središte O zadate inverzije sadrže i tačku O' koja je inverzna tački O. Ako su O i O' istovetne tačke, krug inverzije postaje prava, a inverzija postaje osna refleksija. Euklidska ravan dopunjena tačkom O' naziva se *inverzivnom* (ili *konformnom*) *ravni.* Inverzija definisana na inverzivnoj ravni je bijekcija.

Pod uglovima u inverzivnoj ravni podrazumevaju se uglovi koje zahvataju krugovi te ravni. Ako se dva kruga seku u tačkama T i T', uglovi koje ta dva kruga zahvataju u tim dvema tačkama refleksijom u odnosu na pravu koja sadrži njihova središta, preslikaće se jedan na drugi, pa će, stoga, biti međusobno podudarni. To nam omogućava da dokažemo sledeći stav:

Teorema 28.9: *Inverzijom se uglovi preslikavaju u njima podudarne uglove.*

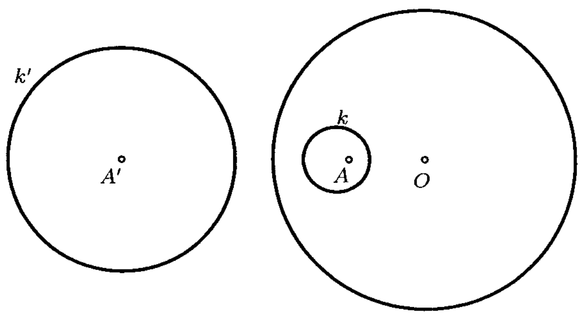


Slika 28i

Dokaz: Neka su zadata dva kruga koja se seku u nekoj tački P. Ako tačka P ne pripada krugu inverzije, njoj inverzna tačka P' sa njome nije istovetna. Tada postoje krugovi k i k' koji oba sadrže tačke P i P', a tangente u tački P tih dvaju krugova su istovetne sa tangentama zadatih krugova u istoj tački. Krugovi k i k' inverzijom se preslikavaju svaki na sebe, a zadati krugovi na krugove koji ih dodiruju u tački P'. Stoga se ugao koji zahvataju krugovi k i k' inverzijom preslikava na njemu podudaran ugao, pa se, dakle, i ugao koji zahvataju dati krugovi preslikava na njemu podudaran ugao.

Ako tačka P pripada krugu inverzije, zadatu inverziju možemo, na osnovu teoreme 28.6, izraziti kao prizvod homotetije i inverzije u odnosu na krug koncentričan zadatom krugu inverzije. Kako se svakom od tih dveju transformacija uglovi preslikavaju u njima podudarne uglove, istu osobinu imaće i njihov proizvod. □

U posebnom slučaju, pravi uglovi se inverzijom preslikavaju na prave uglove, pa se zato upravni krugovi preslikavaju na upravne krugove.

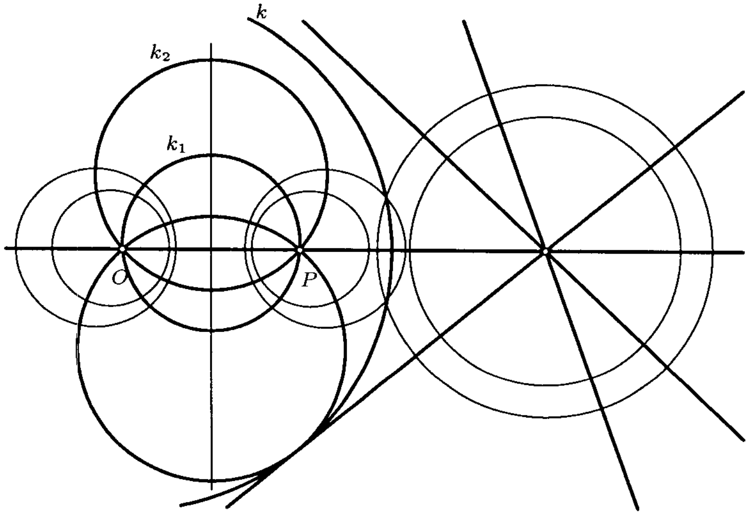


Slika 28j

Budući da su krugovi koji sadrže inverzne tačke upravni na krugu inverzije, zadati krug k i, u odnosu na njega, dve inverzne tačke A i B se inverzijom ψ u odnosu na neki krug sa središtem O preslikavaju na krug k' i, u odnosu na njega, dve inverzne tačke A' i B'. U posebnom slučaju kada je B središte inverzije ψ, tačka B' je O'. Tada je tačka O inverzna tački A u odnosu na krug k, a A' je središte kruga k'. Drugim rečima, ako se tačka O inverzijom u odnosu na krug k preslikava u tačku A dok se inverzijom ψ krug k i tačka A preslikavaju na k' i A', tada je A' središte kruga k'.

Inverzivno rastojanje. Neka su O i P tačke u kojima se seku krugovi k_1 i k_2 nekog pramena $\mathcal{K}$ i neka je P' slika tačke P u inverziji u odnosu na proizvoljan krug k sa središtem O. Skup krugova pramena $\mathcal{K}$ preslikava se tom inverzijom u skup pravih koje sadrže P'. Skup svih (koncentričnih) krugova sa središtem P' istom inverzijom se preslikava na skup krugova pramena koji je upravan na pramenu $\mathcal{K}$. Kako je pramen $\mathcal{K}$ eliptički, na njemu upravan pramen biće hiperbolički. Dakle, ako su zadata dva kruga hiperboličkog pramena, tada postoji inverzija kojom se ta dva kruga preslikavaju na dva koncentrična kruga. Središte te inverzije je tačka koja pripada svakom krugu pramena koji je upravan na dvama zadatim krugovima. Odnos poluprečnika slika tih dvaju krugova u inverziji sa središtem

O ne zavisi od poluprečnika kruga inverzije. Zaista, proizvod dveju inverzija sa središtem O je homotetija (teorema 28.6), pa je svaka inverzija sa središtem O proizvod zadate inverzije i neke homotetije. Stoga odnos poluprečnika slika dvaju disjunktnih krugova u inverziji sa središtem O ne zavisi od poluprečnika inverzije.



Slika 28k

Ako su a, b, c $(a<b<c)$ poluprečnici triju koncentričnih krugova koji su slike triju krugova nekog hiperboličkog pramena, tada je

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c},$$

pa je, stoga,

$$\ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{c} = \ln \frac{a}{c}.$$

Kako odnos ovih poluprečnika ne zavisi od inverzije kojom se krugovi hiperboličkog pramena preslikavaju na koncentrične krugove poluprečnika a, b, c, prirodni logaritam odnosa poluprečnika koncentričnih krugova u koje se preslikavaju krugovi nekog hiperboličkog pramena zadovoljava sve uslove da bude rastojanje. To rastojanje naziva se *inverzivnim rastojanjem* disjunktnih krugova.

Kružne transformacije. Bijekcije inverzivne ravni na sebe koje krugove preslikavaju na krugove zvaćemo *kružnim transformacijama.* Kako smo već dokazali, primeri kružnih transformacija su transformacije sličnosti i inverzije. Može se dokazati i obratno:

Teorema 28.10: *Kružna transformacija inverzivne ravni je ili sličnost ili proizvod inverzije i izometrije.*

Dokaz: Pretpostavimo najpre da se kružnom transformacijom $\mathcal{T}$ (idealna) tačka O' inverzivne ravni preslikava na sebe. Tada se krugovi preslikavaju na krugove, a prave na prave. Štaviše, paralelne prave se preslikavaju na paralelne prave. Stoga će se pravougaonik (naspramne ivice pripadaju paralelnim pravama, a temena jednom krugu) preslikavati na pravogaonik, pa će se upravne prave preslikavati na upravne prave, a središte duži u središte duži (presek dijagonala je središte svake od njih). Dakle kvadrat $ABCD$ će se kružnom transformacijom $\mathcal{T}$ preslikati na kvadrat $A'B'C'D'$. Budući da postoji sličnost $\mathcal{P}$ kojom se kvadrat $A'B'C'D'$ preslikava na kvadrat $ABCD$, proizvod $\mathcal{P}\mathcal{T}$ će biti kružna transformacija koja temena kvadrata $ABCD$ ostavlja invarijantnim. Ako su tačke A i C invarijantne u transformaciji $\mathcal{P}\mathcal{T}$, u toj transformaciji će svaka tačka prave AC takođe biti invarijantna. Zaista, postoji jedinstvena mera L u kojoj je duž AC jedinična (teorema 22.3), a svaki realan broj se može predstaviti u obliku

$$\alpha = n_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{2^k},$$

(gde je n_0 prirodan broj ili nula, i $t_k \in \{0, 1\}$) pa, budući da se središte svake duži kružnom transformacijom $\mathcal{P}\mathcal{T}$ preslikava na sebe, svaka tačka prave AC će u toj transformaciji da bude invarijantna. Iz istih razloga će svaka tačka pravih AB i BC da bude invarijantna, pa će, na osnovu drugog Peanovog stava, svaka tačka ravni ABC biti invarijantna u kompoziciji $\mathcal{P}\mathcal{T}$. Dakle, $\mathcal{T} = \mathcal{P}$, pa je, u ovom slučaju, $\mathcal{T}$ sličnost.

Ako se kružnom transformacijom $\mathcal{T}$ neka tačka O preslikava u O', proizvod $\psi\mathcal{T}$, gde je ψ inverzija sa središtem O koeficijenta 1, će biti sličnost budući da je tačka O' invarijantna. Ako je k^2 koeficijent te sličnosti, a ψ' inverzija sa središtem O i koeficijentom k, proizvod $\psi\psi'$ će na osnovu teoreme 28.6, biti homotetija $\mathcal{H}_{O,k^2}$. Stoga se sličnost $\psi\mathcal{T}$ može izraziti kao kompozicija $\psi\psi'\mathcal{I}$, gde je $\mathcal{I}$ neka izometrija, pa je

$$\mathcal{T} = \psi'\mathcal{I}.$$ □

Dakle, svaka kružna transformacija inverzivne ravni je proizvod najviše četiri inverzije (od kojih neke mogu biti i refleksije). U zavisnosti od toga da li je broj inverzija paran ili neparan kružnu transformaciju ćemo zvati *homografijom* ili *antihomografijom.* Proizvod dveju inverzija (koje mogu biti i refleksije) ćemo zvati *rotacijom*, *paraboličkom* ili *dilativnom homografijom* u zavisnosti od toga da li se krugovi (prave) inverzije seku, da li se dodiruju ili su disjunktni. Proizvod dveju inverzija u odnosu na dva međusobno upravna kruga se naziva *Mebijusovom involucijom.* Ako se kružna transformacija inverzivne ravni može predstaviti kao proizvod najmanje četiri inverzije, ta transformacija se naziva *loksodromičnom homografijom.*

Inverzija u odnosu na sferu. U analogiji sa pojmom inverzije u odnosu na krug može se u euklidsku geometriju uvesti i pojam inverzije u odnosu na sferu. Reći ćemo da se tačka P (različita od O) *inverzijom u odnosu na zadatu sferu*

$\sigma(O, r)$ preslikava u tačku P' ako je

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Za tačku P' reći ćemo da je *inverzna* tački P *u odnosu na sferu* $\sigma(O,r)$, a tu sferu ćemo zvati i *sferom inverzije*. Tačku O ćemo zvati *središtem inverzije*. Iz definicije neposredno sledi da je inverzija bijektivno preslikavanje definisano na prostoru bez tačke O. Ako je tačka P' inverzna tački P, tada je i tačka P inverzna tački P', pa je, stoga, inverzija involucija. Štaviše, tačka unutar sfere σ (različita od O) se inverzijom preslikava u tačku izvan te sfere, a tačka izvan sfere u tačku unutar te sfere. Tačka će pripadati sferi inverzije ako i samo ako je u toj inverziji invarijantna.

U analogiji sa pojmom inverzivne ravni pojam inverzivnog prostora se uvodi dodavanjem euklidskom prostoru „idealne tačke" O' koja pripada svim pravama i ravnima. Euklidski prostor dopunjena tačkom O' naziva se *inverzivnim* (ili *konformnim*) *prostorom*. Inverzija definisana na inverzivnom prostoru je bijekcija. Lako se dokazije da se inverzijom inverzivnog prostora sfera (ili ravan) preslikava na sferu (ili ravan), a krug (ili prava) na krug (ili pravu).

Bijekcije inverzivnog prostora na sebe koje sfere preslikavaju na sfere zvaćemo *sfernim transformacijama*. Primeri sfernih transformacija su transformacije sličnosti i inverzije. Slično teoremi 28.10 može se dokazati sledeći stav koji je njen prostorni analogon:

Teorema 28.11: *Svaka sferna transformacija inverzivnog prostora je ili sličnost ili proizvod inverzije u odnosu na sferu i i izometrije.* □

ZADACI:

1. Dokazati da su krugovi opisani oko trouglova ABC i ACD međusobno upravni ako i samo ako je

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}}\,\mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}}\,\mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}}\,\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_A.$$

2. Odrediti skup svih tačaka ravni kojima je odnos rastojanja od dveju zadatih tačaka jednak odnosu dveju zadatih duži (Apolonijev krug).

3. Odrediti skup svih tačaka ravni kojima je razlika (zbir) kvadrata rastojanja od dveju zadatih tačaka jednaka kvadratu date duži.

4. Ako su zadate tri tačke A, B, O koje pripadaju nekoj pravoj p, na toj pravoj odrediti tačke C i D takve da je $AC : BC = AD : BD$ i da je O središte duži CD.

5. Ako su zadate tačke A i B i neka duž l, odrediti na na pravoj AB tačke C i D takve da je $AC : BC = AD : BD$ i da je $CD \cong l$.

6. Konstruisati krug koji dodiruje tri data kruga (Apolonijev problem).

7. Ako jedan krug pripada unutrašnjosti drugog i ako postoji cikličan niz krugova koji ima osobinu da se svaka dva susedna kruga toga niza spolja dodiruju (uključujući i prvi i poslednji u tom nizu), a svi krugovi toga niza dodiruju oba zadata kruga, dokazati

da svaki cikličan niz krugova kojem se svaka dva susedna kruga toga niza spolja dodiruju i koji dodiruju oba zadata kruga ima istu osobinu (prvi i poslednji u tom nizu se takođe dodiruju) bez obzira kako izabrali prvi član toga niza (Štajnerov problem).

29. Merenje površi

Neka je ω bilo koji lik koji pripada euklidskoj ravni π, a ω_0 kvadratna površ čija su temena A_0, B_0, C_0, D_0. Razložimo svaku od stranica kvadrata $A_0B_0C_0D_0$ na 10^k podudarnih duži i u dobijenim podeonim tačkama konstruišimo prave paralelne ivicama zadatog kvadrata. Konstruisane prave razložiće kvadratnu površ ω_0 na 10^{2k} međusobno podudarnih kvadratnih površi. Obeležimo sa ω_k jednu od njih, a sa A_k, B_k, C_k, D_k temena te kvadratne površi.

Razložimo zatim ravan π dvama skupovima pravih takvih da je svaka prava prvog skupa paralelna pravoj A_kB_k, a svaka prava drugog skupa pravoj A_kD_k, na beskonačno mnogo kvadratnih površi od kojih je svaka podudarna površi ω_k. Nazovimo to razlaganje ravni π *kvadratnom k-mrežom* i obeležimo ga sa M_k.

Obeležimo sa m_k ukupan broj kvadratnih površi mreže M_k koje pripadaju liku ω, a sa m'_k ukupan broj kvadratnih površi te mreže koje sa ω imaju zajedničkih tačaka. Na taj način dobijamo dva niza

$$\left(\frac{m_k}{10^{2k}}\right)_{k=0,1,2,\ldots} \quad \text{i} \quad \left(\frac{m'_k}{10^{2k}}\right)_{k=0,1,2,\ldots}.$$

Pri tome je

$$m_0 \leq \frac{m_1}{10^2} \leq \ldots \leq \frac{m_k}{10^{2k}} \leq \ldots$$

i

$$m'_0 \geq \frac{m'_1}{10^2} \geq \ldots \geq \frac{m'_k}{10^{2k}} \geq \ldots$$

pa je, stoga, prvi od nizova neopadajući, a drugi nerastući. Kako je uz to i $m_k \leq m'_k$ biće

$$m_0 \leq \frac{m_k}{10^{2k}} \leq \frac{m'_k}{10^{2k}} \leq m'_0.$$

Dakle, prvi od nizova je ograničen sa gornje, a drugi sa donje strane. Zato su oba niza konvergentna, pa postoje granične vrednosti

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{10^{2k}} = \underline{S}(\omega) \quad \text{i} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{m'_k}{10^{2k}} = \overline{S}(\omega),$$

pri čemu je $\underline{S}(\omega) \leq \overline{S}(\omega)$.

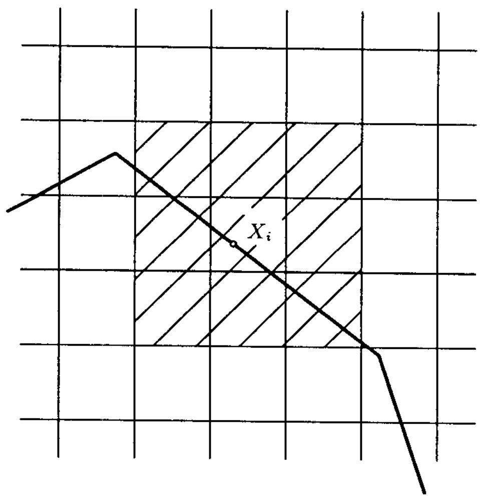
Broj $\underline{S}(\omega)$ zvaćemo *unutrašnjom*, a $\overline{S}(\omega)$ *spoljašnjom merom* lika ω. Ako je $\underline{S}(\omega) = \overline{S}(\omega)$, lik ω ćemo zvati *merljivim*, a broj $S(\omega)$ koji je istovetan i unutrašnjoj i sa spoljašnjoj meri lika ω, zvaćemo *merom* ili *površinom lika* ω.

Kvadratnu površ ω_0 zvaćemo *jediničnom* i pretpostavićemo da su njene ivice mere 1.

Teorema 29.1: *Unutrašnjost svakog poligona je merljiva poligonska površ.*

Dokaz: Neka je p prost ravan poligon i $L(p)$ zbir mera njegovih stranica ili kratko, njegova dužina. Razložimo poligon p tačkama $X_1, X_2, \ldots, X_n$ na poligonske linije takve da je dužina svake sem eventualno jedne od njih, jednaka $1/10^k$, gde je k proizvoljan prirodan broj, a dužina te jedne eventualno preostale poligonske linije manja od $1/10^k$. Tada je

$$n \leq L(p)10^k + 1.$$



Slika 29a

Označimo sa ω_i uniju devet kvadratnih površi mreže M_k takvih da tačka X_i pripada jednoj od tih kvadratnih površi, a da su ostalih osam kvadratnih površi njoj susedne. Neposredno se dokazuje da sve tačke poligona p na rastojanju manjem od $1/10^k$ od tačke X_i, pripadaju kvadratnoj površi ω_i. Stoga sve kvadratne površi mreže M_k koje sa poligonom p imaju zajedničkih tačaka, pripadaju uniji površi $\omega_1, \ldots, \omega_n$ koja se sastoji iz najviše $9n$ kvadratnih površi te mreže, pri čemu je

$$9n \leq 9(L(p)10^k + 1).$$

Neka je m_k broj kvadratnih površi mreže M_k koje pripadaju unutrašnjosti (p) poligona p, a m'_k broj površi te mreže koje sa (p) imaju zajedničkih tačaka. Tada je

$$0 \leq m'_k - m_k \leq 9(L(p)10^k + 1),$$

a odatle sledi da je

$$0 \leq \frac{m'_k}{10^{2k}} - \frac{m_k}{10^{2k}} \leq \frac{9L(p)}{10^k} + \frac{9}{10^{2k}},$$

pa, ako dopustimo da k neograničeno raste, biće

$$0 \leq \overline{S}(\omega) - \underline{S}(\omega) \leq 0.$$

Dakle $\underline{S}(\omega) = \overline{S}(\omega)$, pa je unutrašnjost poligona p merljiva površ. □

Teorema 29.2: *Prosto povezani lik ω u euklidskoj ravni je merljiv ako i samo ako za svaki pozitivan realan broj ε postoje poligoni p i q takvi da je*

$$(p) \subset \omega \subset (q) \quad i \quad S[(q)] - S[(p)] < \varepsilon.$$

Dokaz: Neka je ω merljiv lik euklidske ravni. Tada je $\overline{S}(\omega) = \underline{S}(\omega)$ pa, za svaki realan pozitivan broj ε, postoji prirodan broj k i likovi σ i σ' koji se, redom, sastoje iz m_k i m'_k kvadratnih površi mreže M_k, takvi da je

$$\sigma \subset \omega \subset \sigma' \quad \text{i} \quad \frac{m'_k}{10^{2k}} - \frac{m_k}{10^{2k}} < \varepsilon.$$

Dakle, $S(\sigma') - S(\sigma) < \varepsilon$, pa su granice površi σ i σ', poligoni p i q koji zadovoljavaju uslov teoreme.

Obratno, neka za svaki pozitivan realan broj ε postoje poligonske površi (p) i (q) takve da je $S[(q)] - S[(p)] < \varepsilon$ i $(p) \subset \omega \subset (q)$. Kako su (p) i (q) merljivi likovi, postoje likovi σ i σ' koji se, redom, sastoje iz m_k i m'_k kvadratnih površi mreže M_k, takvi da je

$$\sigma \subset (p), \quad \sigma' \supset (q), \quad S[(p)] - S[\sigma] < \varepsilon \quad \text{i} \quad S[\sigma'] - S[(q)] < \varepsilon.$$

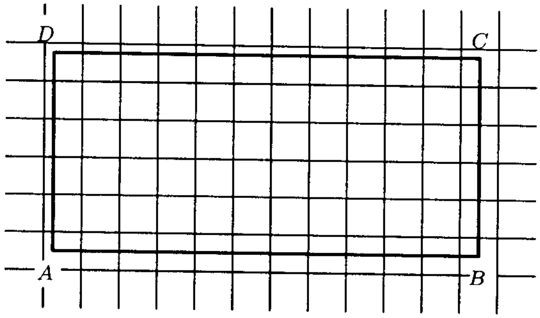
Tada je $\sigma \subset \omega \subset \sigma'$ i $S(\sigma') - S(\sigma) < 2\varepsilon$, tj.

$$\frac{m'_k}{10^{2k}} - \frac{m_k}{10^{2k}} < 2\varepsilon.$$

Zato je $\overline{S}(\omega) - \underline{S}(\omega) = 0$, pa je ω merljiv lik. □

Teorema 29.3: *Ako su a i b dužine stranica neke pravougaone površi ω, tada je $S(\omega) = ab$.*

Dokaz: Neka je $ABCD$ pravougaona površ kojoj je ivica AB dužine a, a ivica AD dužine b. Pretpostavimo da su ivice te pravougaone površi paralelne ivicama jedinične kvadratne površi. Kvadratna mreža M_k ravni π kojoj pripada površ ω određuje na svakoj od pravih AB i AD k-tu gradaciju N_k. Ako su a_k i b_k brojevi duži gradacije N_k koje, redom, pripadaju dužima AB i AD, a a'_k i b'_k brojevi duži te gradacije koje, redom, sa dužima AB i AD imaju zajedničkih tačaka, onda je $a'_k \leq a_k + 2$ i $b'_k \leq b_k + 2$. Ako zatim, sa m_k obeležimo ukupan broj kvadratnih površi



Slika 29b

mreže M_k koje pripadaju ω, a sa m'_k ukupan broj kvadratnih površi te mreže koje sa ω imaju zajedničkih tačaka, onda je $m_k = a_k b_k$ i $m'_k = a'_k b'_k$. Kako je uz to i

$$\frac{m'_k - m_k}{10^{2k}} = \frac{a'_k b'_k - a_k b_k}{10^{2k}} \leq \frac{(a_k+2)(b_k+2) - a_k b_k}{10^{2k}} = \frac{2}{10^k}\frac{a_k + b_k + 2}{10^k}$$
$$\leq \frac{2}{10^k}\left(a + b + \frac{2}{10^k}\right),$$

biće

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m'_k - m_k}{10^{2k}} = 0,$$

pa je ω merljiva površ. Štaviše,

$$\frac{a_k}{10^k} \leq a \leq \frac{a'_k}{10^k} \quad \text{i} \quad \frac{b_k}{10^k} \leq b \leq \frac{b'_k}{10^k},$$

pa odatle sledi da je

$$\frac{m_k}{10^{2k}} = \frac{a_k b_k}{10^{2k}} \leq ab \leq \frac{a'_k b'_k}{10^{2k}} = \frac{m'_k}{10^{2k}}.$$

Stoga je $S(\omega) = ab$. □

Teorema 29.4: *Mera S definisana na skupu merljivih skupova euklidske ravni je funkcija koja ima sledeća svojstva:*

1° *mera kvadratne površi ω_0 je 1,*

2° *za svaki merljivi lik ω je $S(\omega) \geq 0$,*

3° *ako je lik ω unija disjunktnih merljivih likova ω_1 i ω_2, tada je i ω merljiv lik, i $S(\omega) = S(\omega_1) + S(\omega_2)$,*

4° *ako je ω merljiv lik i ako je ξ njemu podudaran lik, tada je i ξ merljiv lik, i $S(\xi) = S(\omega)$.*

Dokaz: 1° Neposredno se dokazuje da kvadratna površ čija je stranica mere 1 ima meru 1.

2° Broj m_0 kvadratnih površi mreže M_0 koje pripadaju merljivom liku ω je ili nula, ili je to neki prirodan broj. Stoga, kako je $0 \leq m_0 \leq m_k/10^{2k}$ biće $\underline{S}(\omega) \geq 0$. Budući da je ω merljiv lik, biće i $S(\omega) = \underline{S}(\omega) \geq 0$.

3° Neka su m_{1k} i m_{2k} brojevi kvadratnih površi mreže M_k koje, redom, pripadaju likovima ω_1 i ω_2, a m'_{1k} i m'_{2k} brojevi takvih površi koje sa njima imaju zajedničkih tačaka. Kako su likovi ω_1 i ω_2 disjunktni, ni jedna kvadratna površ mreže M_k ne pripada i liku ω_1 i liku ω_2. Zato je broj m_k, kvadratnih površi mreže M_k koje pripadaju liku $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$, veći ili jednak od $m_{1k} + m_{2k}$ jer je moguće da postoji kvadratna površ mreže M_k koja ne pripada ni ω_1 ni ω_2, a pripada njihovoj uniji. Kako je dakle, $m_k \geq m_{1k} + m_{2k}$ biće i

$$\frac{m_k}{10^{2k}} \geq \frac{m_{1k}}{10^{2k}} + \frac{m_{2k}}{10^{2k}}$$

za svaki prirodan broj k. Odatle sledi da je $\underline{S}(\omega) \geq S(\omega_1) + S(\omega_2)$. Budući da je $m'_k \leq m'_{1k} + m'_{2k}$, biće i $\overline{S}(\omega) \leq S(\omega_1) + S(\omega_2)$, pa iz relacija

$$\underline{S}(\omega) \leq \overline{S}(\omega) \quad \text{i} \quad \overline{S}(\omega) \leq S(\omega_1) + S(\omega_2) \leq \underline{S}(\omega)$$

sledi da je $\underline{S}(\omega) = \overline{S}(\omega)$. Stoga je lik ω merljiv i

$$S(\omega) = S(\omega_1) + S(\omega_2).$$

4° Ako je lik ξ translatorno podudaran jediničnoj kvadratnoj površi ω_0, on će biti merljiv i njegova će površina, na osnovu teoreme 29.3, biti jednaka 1 jer su mere njegovih ivica takođe jednake 1. Na isti način, ako je lik ξ translatorno podudaran kvadratnoj površi ω_k mreže M_k, on će biti merljiv i njegova mera će biti $1/10^{2k}$.

Neka je lik ξ translatorno podudaran nekom merljivom liku ω. Tada, na osnovu teoreme 29.2, za svaki pozitivan realan broj ε postoje prirodan broj k i likovi σ i σ' sastavljeni iz kvadratnih površi mreže M_k, takvi da je $S(\omega) - S(\sigma) < \varepsilon/2$ i $S(\sigma') - S(\omega) < \varepsilon/2$. Ako se nekom translacijom lik ω preslikava u ξ, njome će se poligonske površi σ i σ' preslikati u, kako je već dokazano, merljive likove δ i δ', pa stoga, za svaki pozitivan realan broj ε postoje prirodan broj l i likovi ϕ i ϕ' sastavljeni iz kvadratnih površi mreže M_l takvi da je $S(\delta) - S(\phi) < \varepsilon/2$ i $S(\phi') - S(\delta') < \varepsilon/2$. Tada je

$$\underline{S}(\xi) \geq S(\phi) > S(\delta) - \varepsilon/2 = S(\sigma) - \varepsilon/2 > S(\omega) - \varepsilon$$

i

$$\overline{S}(\xi) \leq S(\phi') < S(\delta') + \varepsilon/2 = S(\sigma') + \varepsilon/2 < S(\omega) + \varepsilon$$

za svako ε. Zato je

$$\underline{S}(\xi) \geq S(\omega) \geq \overline{S}(\xi).$$

Budući da je $\underline{S}(\xi) \leq \overline{S}(\xi)$, biće $\underline{S}(\xi) = \overline{S}(\xi)$, pa je i ξ merljiv lik takav da je $S(\xi) = S(\omega)$.

Dakle, s obzirom na osobinu 3°, T-razloživo jednaki likovi imaju iste površine.

Ako ne postoji translacija koja lik ξ podudaran jediničnoj kvadratnoj površi ω_0, preslikava na ω_0, tada postoje kvadratne površi ω_1 i ω_2 kojima su ivice katete pravouglog trougla kojem je hipotenuza ivica kvadratne površi ξ. Tada je, na osnovu Pitagorine teoreme o razloživoj jednakosti (teorema 26.12) unija kvadratnih površi ω_1 i ω_2 T-razloživo jednaka kvadratnoj površi ξ, pa je, na osnovu već dokazanog,

$$S(\xi) = S(\omega_1) + S(\omega_2).$$

Sa druge strane, ako su a i b mere ivica kvadratnih površi ω_1 i ω_2, na osnovu Pitagorine teoreme 27.8, biće $a^2 + b^2 = 1$, pa je, na osnovu teoreme 29.3,

$$S(\omega_1) + S(\omega_2) = S(\omega_0).$$

Dakle $S(\xi) = S(\omega_0)$. Na isti način, ako je lik ξ podudaran kvadratnoj površi mreže M_k, on će biti merljiv i njegova mera će biti $1/10^{2k}$.

Pretpostavimo na kraju, da je lik ξ podudaran proizvoljnom merljivom liku ω. Tada za svaki pozitivan realan broj ε postoje prirodan broj k i poligonske površi σ i σ' sastavljene iz kvadratnih površi mreže M_k, takve da je $\sigma \subset \omega \subset \sigma'$ i $S(\sigma') - S(\sigma) < \varepsilon$. Ako su δ i δ', redom, slike poligonskih površi σ i σ' u izometriji koja preslikava ω u ξ, biće $\delta \subset \xi \subset \delta'$, pri čemu je na osnovu već dokazanog, $S(\delta) = S(\sigma)$ i $S(\delta') = S(\sigma')$, pa je

$$S(\delta') - S(\delta) = S(\sigma') - S(\sigma) < \varepsilon.$$

Stoga je i ξ merljiv lik, i $S(\xi) = S(\omega)$. □

Iz prethodne teoreme (3° i 4°) sledi da ako je ω merljiv lik i ako je ξ lik koji je razloživo jednak liku ω, tada je i ξ merljiv lik, i $S(\xi) = S(\omega)$. Stoga iz teorema 26.12 i 27.8 koje smo nazvali Pitagorinim teoremama, sledi još jedno tvrđenje koje takođe nazivamo *Pitagorinom teoremom*:

Teorema 29.5: *Površina kvadratne površi čija je ivica hipotenuza nekog pravouglog trougla jednaka je zbiru površina dveju kvadratnih površi kojima su ivice katete tog trougla.* □

ZADACI:

1. Ako je p poluobim trougla ABC, ako je ρ poluprečnik njemu upisanog kruga, a ρ_a poluprečnik kruga koji dodiruje njegovu ivicu BC i prave AB i AC ali ne i ivice AB i AC (spolja upisanog kruga tog trougla), dokazati da je njegova površina P zadata izrazom

$$P = \rho p = \rho_a (p - a).$$

2. Ako su a, b, c ivice trougla ABC, a p njegov poluobim, dokazati da je njegova površina P zadata izrazom

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(Heronov obrazac).

HIPERBOLIČKA GEOMETRIJA

Od Euklidovih vremena pa sve do prve polovine devetnaestog veka u osnovima geometrije ništa se suštinski nije promenilo. Mnogi pokušaji da se razreši pitanje petog Euklidovog postulata, osobito s kraja osamnaestog i početka devetnaestog veka, ostali su bezuspešni. Gaus u jednoj recenziji iz 1816. godine piše: „Malo je predmeta u području matematike o kojima se toliko pisalo koliko o nedostatku kod utvrđivanja teorije paralela. Retko prođe koja godina da ne izađe kakav nov pokušaj kako bi se ta praznina ispunila. A ipak, ako hoćemo da govorimo otvoreno i pošteno, ne možemo kazati da smo u suštini te stvari otišli dalje od Euklida pre dve hiljade godina". I istaknuti matematičari onoga vremena poput Dalambera, Laplasa i Lagranža bavili su se teorijom paralela. Ostalo je zabeleženo da je Lagranž pod starost pripremio jednu raspravu o paralelama i da je na samom početku njenog izlaganja u Akademiji zastao i završio rečima: „moram još o tome da razmislim". No, nije trebalo još dugo da se čeka do konačnog rasvetljenja ovog problema. Rešenje je, međutim, bilo u neskladu sa predrasudama koje su stolećima sputavale generacije Euklidovih sledbenika.

U trećoj deceniji devetnaestog veka Nikolaj Lobačevski i Janoš Boljaj, nezavisno jedan od drugoga, predlažu da se teorija paralelnih utemelji na aksiomi koja negira peti Euklidov postulat. Nemajući pred sobom očigledne slike koja bi poduprla njihov pogled na osnove geometrije, oni su umeli da izgrade teoriju koja je, kako je kasnije pokazano, isto onoliko logički valjana koliko i euklidska geometrija. Oni su, kako mladi Janoš Boljaj ističe u jednom pismu svome ocu, „ni iz čega" stvorili „jedan sasvim novi svet". Prvi put je zasnovana jedna teorija u kojoj se ne može pozvati na očiglednost, zasnovana je geometrija u kojoj postoje tačka B i prava a koja je ne sadrži, takve da u njima određenoj ravni postoji više od jedne prave koja sadrži tačku B, a sa pravom a nema zajedničkih tačaka. Iz geometrijskog sveta u kojem se u potpunosti moglo osloniti na intuiciju zasnovanu na predstavama koja stvaraju čula, zakoračilo se u svet koji postoji izvan dohvata našeg iskustva. Nije stoga iznenađujuće to što njihove zamisli nisu za njihova života doživele priznanje koje im pripada. Samo je Gaus razumeo dubinu i dalekosežnost njihovih ideja, budući da su se, prema njegovim rečima, one podudarile sa njegovim zamislima od kojih je neke snivao više od trideset godina. Zanimljivo, Gaus je znao za radove obojice zasnivača hiperboličke geometrije, no nije upoznao ni jednog od njih sa rezultatima drugog. Do Boljaja je dospela jedna rasprava na nemačkom jeziku Nikolaja Lobačevskog, dok Lobačevski nikada nije saznao za rad Janoša Boljaja.

30. Aksioma Lobačevskog

Pretpostavimo da uz aksiome prve četiri grupe na kojima je zasnovana apsolutna geometrija važi samo jedna aksioma paralelnosti, tzv. *aksioma Lobačevskog*:

Aksioma VL: *Postoje tačka B i prava a koja je ne sadrži takve da u njima određenoj ravni postoji više od jedne prave koja sadrži B, a sa a nema zajedničkih tačaka.*

Za tačku B i pravu a reći ćemo da imaju *svojstvo Lobačevskog.*

Geometriju koja je zasnovana na aksiomama apsolutne geometrije i aksiomi Lobačevskog zvaćemo *geometrijom Lobačevskog* ili *hiperboličkom geometrijom.* Ta geometrija se ponekad naziva i *geometrijom Boljaj-Lobačevskog* ili *geometrijom Gaus-Boljaj-Lobačevskog.* Prostor u kojem su zadovoljene aksiome hiperboličke geometrije zvaćemo *hiperboličkim* ili *prostorom Lobačevskog*, a svaku njegovu ravan *hiperboličkom ravni* ili *ravni Lobačevskog.*

Ako bi u hiperboličkom prostoru postojale tačka i prava koje zadovoljavaju Plejferovu aksiomu, onda bi, na osnovu teoreme 26.1, svaka tačka i prava koja je ne sadrži zadovoljavale istu aksiomu, što protivreči aksiomi Lobačevskog. Dakle, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 30.1: *Za svaku tačku B hiperboličkog prostora i pravu a koja je ne sadrži, u njima određenoj ravni postoje bar dve prave koje sadrže tačku B, a sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka.* □

Drugim rečima, ako postoje tačka i prava koje imaju svojstvo Lobačevskog, onda svaka tačka i prava imaju isto svojstvo. Stoga za svaku tačku B hiperboličkog prostora i pravu a koja je ne sadrži, polupravе sa temenom B koje su paralelne pravoj a nisu komplementne, pa u hiperboličkoj geometriji postoje dve prave koje sadrže tačku B i paralelne su pravoj a. Zato će i ugao paralelnosti tačke B u odnosu na pravu a da bude oštar. Štaviše, tvrđenje da je ugao paralelnosti oštar ekvivalentno je aksiomi Lobačevskog.

Na osnovu Ležandrovih teorema 23.1 i 23.4 neposredno možemo da ustanovimo da je aksioma Lobačevskog ekvivalentna tvrđenju da je zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg trougla manji od π. Stoga će u hiperboličkoj geometriji spoljašnji ugao proizvoljnog trougla biti veći od sume njegovih dvaju unutrašnjih nesusednih uglova. Zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg prostog četvorougla hiperboličke ravni biće manji od 2π, a zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg prostog ravnog n-tougla hiperboličke ravni je manji od $(n-2)\pi$. Odatle sledi i da je četvrti ugao Lambertovog četvorougla oštar, a da su uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla takođe oštri.

Iz druge, treće i četvrte Ležandrove teoreme (23.2-4) sledi da je tvrđenje prema kojem postoji prava u ravni oštrog ugla koja je upravna na jednom kraku tog ugla, a sa njegovim drugim krakom nema zajedničkih tačaka, ekvivalentno aksiomi Lobačevskog.

Prethodnim razmatranjima dokazali smo sledeće tvrđenje:

Teorema 30.2: *Sledeći iskazi su ekvivalenti aksiome Lobačevskog:*

1° *Ugao paralelnosti je oštar.*

2° *Zbir unutrašnjih uglova svakog trougla je manji od π.*

3° *Zbir unutrašnjih uglova svakog prostog, ravnog četvorougla je manji od 2π.*

4° *Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su oštri.*

5° *Jedan ugao Lambertovog četvorougla je oštar.*

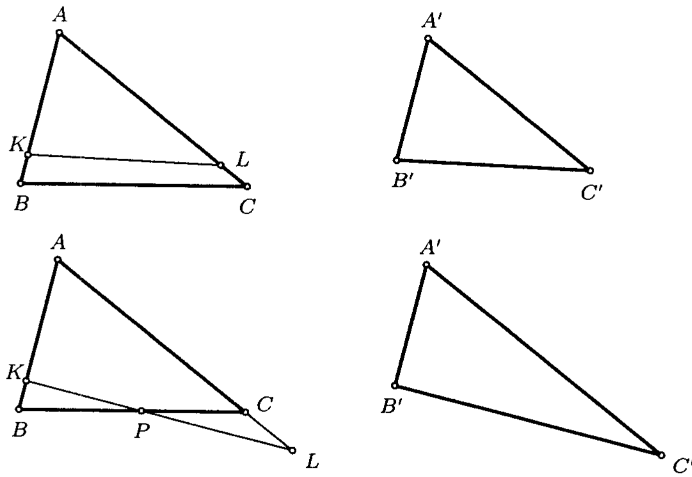
6° *Postoji prava u ravni oštrog ugla koja je upravna na jednom kraku tog ugla, a ne seče njegov drugi krak.* □

Podudarnost trouglova. U apsolutnoj geometriji bilo je moguće dokazati pet stavova o podudarnosti trouglova (teorema 11.15). Pored pet navedenih stavova, u hiperboličkoj geometriji će važiti još jedan, takozvani ***šesti stav o podudarnosti trouglova*** kojim se karakteriše hiperbolički prostor.

Teorema 30.3: *Dva trougla su podudarna ako i samo ako su im odgovarajući uglovi međusobno podudarni.*

Dokaz: Pretpostavimo da su uglovi kod temena A, B, C trougla ABC podudarni, redom, uglovima kod temena A', B', C' trougla $A'B'C'$, a da ivice AB i $A'B'$ nisu međusobno podudarne, već da je jedna od njih veća od druge. Ako je, na primer, $AB > A'B'$, tada između tačaka A i B postoji tačka K takva da je $AK \cong A'B'$. Neka je L tačka poluprave (AC) takva da je $AL \cong A'C'$. Tada je na osnovu prvog stava o podudarnosti trouglova, $\triangle AKL \cong \triangle A'B'C'$, pa su uglovi kod temena K i L trougla AKL podudarni uglovima kod temena B i C trougla ABC.

Ako bi tačke A i L bile sa iste strane prave BC, onda bi u četvorouglu $BCLK$ zbir unutrašnjh uglova bio 2π, što je nemoguće. Ako tačke A i L ne bi bile sa iste strane prave BC, onda bi duž $[KL]$ sekla duž $[BC]$ u tački P (koja ne mora biti različita od C, dakle ni od L), pa bi u trouglu BPK spoljašnji ugao kod temena K



Slika 30a

bio podudaran unutrašnjem uglu kod temena B, što je takođe nemoguće. Dakle, nije $AB > A'B'$. Na isti način nije ni $AB < A'B'$, pa je $AB \cong A'B'$. Stoga su, na osnovu drugog stava o podudarnosti (teorema 11.15), trouglovi ABC i $A'B'C'$ međusobno podudarni. □

Pretpostavimo da je $\mathcal{P}$ sličnost kojom se duž AB preslikava na duž $A'B'$. Ako se tom sličnošću tačka C koja ne pripada pravoj AB, preslikava u tačku C', tada će uglovi trouglova ABC i $A'B'C'$ biti podudarni (teorema 22.14), pa će, na osnovu prethodne teoreme, biti $AB \cong A'B'$. Time smo dokazali sledeću, izuzetno značajnu posledicu prethodne teoreme:

Teorema 30.4: *U hiperboličkoj geometriji svaka sličnost je podudarnost.* □

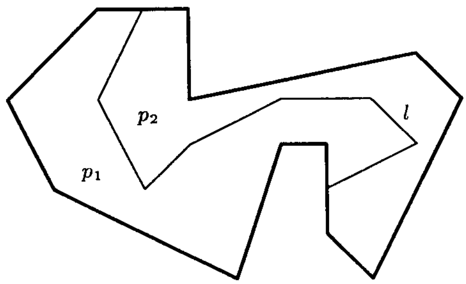
U hiperboličku geometriju pojam homotetije se može uvesti na isti način kao i u euklidsku geometriju: ako je O proizvoljna tačka hiperboličke ravni ili prostora i ako je k realan broj različit od nule, tada *homotetijom* ili *dilatacijom* te ravni ili prostora, sa *središtem* O i *koeficijentom* k nazivamo transformaciju $\mathcal{H}_{O,k}$ koja svakoj tački X te ravni ili prostora dodeljuje tačku X' prave OX takvu da je $OX' = kOX$, $k \neq 0$, pri čemu su tačke X i X' sa iste strane tačke O ako i samo ako je k pozitivan realan broj. Međutim, u hiperboličkoj geometriji homotetija neće biti sličnost.

Defekt. Budući da je u hiperboličkoj geometriji zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg prostog ravnog n-tougla $A_1A_2 \dots A_n$ manji od $(n-2)\pi$, defekt

$$\delta(A_1A_2 \dots A_n) = (n-2)\pi - \sigma(A_1A_2 \dots A_n)$$

tog poligona će biti pozitivan. Ako sa p obeležimo unutrašnjost zadatog poligona $A_1A_2 \dots A_n$, *defektom poligonske površi* p koji ćemo obeležavati sa $\delta(p)$, zvaćemo defekt poligona $A_1A_2 \dots A_n$.

Teorema 30.5: *Ako je poligonska površ p razložena nekom poligonskom linijom na dve poligonske površi p_1 i p_2, tada je defekt površi p jednak zbiru defekata površi p_1 i p_2.*



Slika 30b

Dokaz: Ako su m, m_1, m_2, redom, brojevi temena površi p, p_1, p_2, a n broj temena poligonske linije l koja površ p razlaže na površi p_1 i p_2 (izuzimajući krajeve linije l), onda je

$$m_1 + m_2 = m + 2n + 2 + r$$

i

$$\sigma(p_1) + \sigma(p_2) = \sigma(p) + 2n\pi + r\pi,$$

gde je $r = 0, 1, 2$ u zavisnosti od toga da li su oba kraja poligonske linije l istovetna sa temenima površi p, ili je samo jedan od tih krajeva teme površi p, ili ni jedan od tih krajeva nije teme površi p. Tada je

$$\begin{aligned}\delta(p) &= (m-2)\pi - \sigma(p)\\ &= (m_1 + m_2 - 2n - r - 4)\pi - \sigma(p_1) - \sigma(p_2) + 2n\pi + r\pi\\ &= [(m_1 - 2)\pi - \sigma(p_1)] + [(m_2 - 2)\pi - \sigma(p_2)]\\ &= \delta(p_1) + \delta(p_2).\end{aligned}$$

Dakle, defekt površi p jednak je zbiru defekata površi p_1 i p_2 □

.

Sledeće tvrđenje se dokazuje korišćenjem prethodne teoreme i metode potpune indukcije.

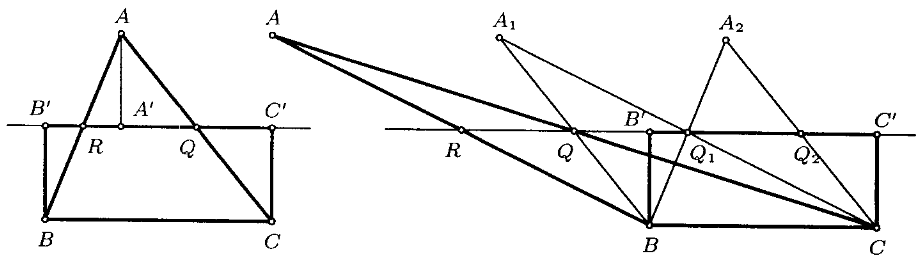
Teorema 30.6: *Ako je poligonska površ p poligonskim linijama razložena na konačno mnogo poligonskih površi $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tada je defekt površi p jednak zbiru defekata površi $p_1, p_2, \ldots, p_n$.* □

Iz definicije razložive jednakosti likova i prethodne teoreme sledi da razloživo jednake poligonske površi (koje su razložene na poligonske površi) imaju jednake defekte. Pre no što ustanovimo da važi i obratno, dokažimo nekoliko važnih tvrđenja. Prvo među njima je stav apsolutne geometrije.

Teorema 30.7: *Ako su B' i C' podnožja upravnih iz temena B i C trougla ABC na pravoj koja sadrži središta R i Q ivica AB i AC, tada je trougaona površ ABC razloživo jednaka četvorougaonoj površi $BCC'B'$.*

Dokaz: Neka je A' podnožje upravne iz tačke A na pravoj RQ. Tada su trouglovi $AA'R$ i $BB'R$ međusobno podudarni. Na isti način podudarni su i trouglovi $AA'Q$ i $CC'Q$. Stoga je $AA' \cong BB' \cong CC'$, pa je četvorougao $BCC'B'$ Sakerijev. Uz to je R središte duži $A'B'$, a Q središte duži $A'C'$, pa je $RQ \cong \frac{1}{2}B'C'$.

Ako pretpostavimo da duž RQ pripada duži $B'C'$, tada je dužima RQ i AA' trougaona površ ABC razložena na četvoruogaonu površ $BCQR$ i trougaone površi $AA'R$ i $AA'Q$, dok je dužima BR i CQ četvorougaona površ $BCC'B'$ razložena na četvorougaonu površ $BCQR$ i trougaone površi $BB'R$ i $CC'Q$. Kako je $\triangle AA'R \cong \triangle BB'R$ i $\triangle AA'Q \cong \triangle CC'Q$, trougaona površ ABC je razloživo jednaka četvorougaonoj površi $BCC'B'$.



Slika 30c

Pretpostavimo da duž RQ ne pripada duži $B'C'$, već da ima tačaka sa one strane tačke B' sa koje nije tačka C'. Ako je $\mathcal{S}_Q(B) = A_1$, tačke A_1 i C su sa raznih strana prave RQ, pa duž A_1C seče pravu RQ u nekoj tački Q_1. Budući da su trouglovi ABQ i CA_1Q centralnosimetrični u odnosu na tačku Q biće $\mathcal{S}_Q(R) = Q_1$ pa, kako je R središte duži AB, i Q_1 će biti središte duži A_1C. Uz to su i trougaone površi ABQ i CA_1Q međusobno podudarne, pa su trougaone površi ABC i A_1BC razloživo jednake. Na isti način možemo konstruisati međusobno razloživo jednake trougaone površi $A_2BC, A_3BC, \ldots$ itd. Tada su na pravoj RQ određene tačke $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots$ takve da je

$$\mathcal{B}(R, Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots)$$

i

$$RQ \cong QQ_1 \cong Q_1Q_2 \cong \ldots \cong Q_{k-1}Q_k \cong \ldots.$$

Iz Arhimedove aksiome sledi da postoji prirodan broj n takav da su tačke Q_n i C' istovetne ili je $\mathcal{B}(Q_n, C', Q_{n+1})$. Odavde, prema prethodnom, sledi da je trougaona površ A_nBC razloživo jednaka četvorougaonoj površi $BCC'B'$, a kako su trougaone površi niza $ABC, A_1BC, A_2BC, \ldots, A_nBC$ međusobno razloživo jednake, biće i trougaona površ ABC razloživo jednaka površi $BCC'B'$. □

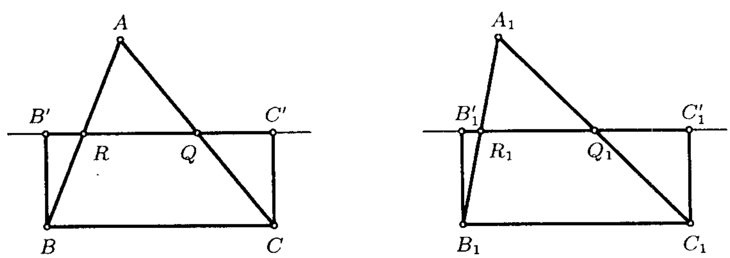
Budući da razloživo jednake površi imaju jednake defekte biće

$$\delta(ABC) = \delta(BCC'B')$$

pa, kako je $BCC'B'$ Sakerijev četvorougao kome su uglovi kod temena B' i C' pravi, uglovi kod temena B i C tog četvorougla su međusobno podudarni i oštri i svaki od njih je jednak poluzbiru unutrašnjih uglova trougla ABC.

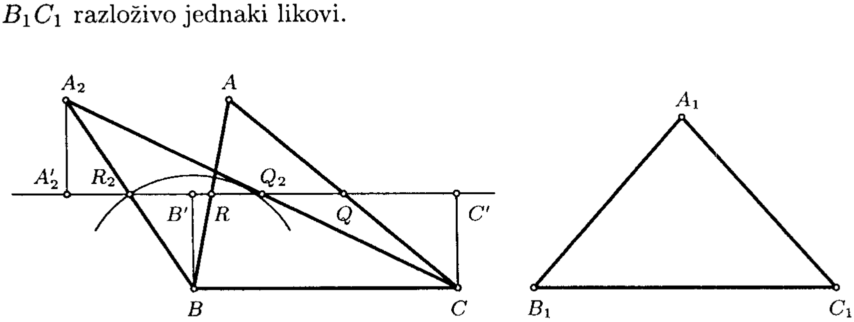
Teorema 30.8: *Trougaone površi jednakih defekata su međusobno razloživo jednaki likovi.*

Dokaz: Neka su R i Q središta ivica AB i AC, a R_1 i Q_1 središta ivica A_1B_1 i A_1C_1, trougaonih površi ABC i $A_1B_1C_1$ koje imaju jednake defekte. Ako sa B', C', odnosno B_1', C_1', obeležimo podnožja upravnih iz tačaka B,C, odnosno B_1, C_1, redom, na pravama RQ i R_1Q_1, oštri uglovi kod temena B i C, odnosno B_1 i C_1 Sakerijevih četvorouglova $BCC'B'$ i $B_1C_1C_1'B_1'$ biće jednaki poluzbiru unutrašnjih uglova trougla ABC, odnosno $A_1B_1C_1$, a četvorougaone površi $BCC'B'$ i $B_1C_1C_1'B_1'$ biće razloživo jednake, redom, trougaonim površima ABC i $A_1B_1C_1$.



Slika 30d

Ako su duži BC i B_1C_1 međusobno podudarne, iz podudarnosti uglova kod temena B, C i B_1, C_1 Sakerijevih četvorouglova $BCC'B'$ i $B_1C_1C_1'B_1'$, sledi da su i ti četvorouglovi međusobno podudarni, pa su, stoga, trougaone površi ABC i $A_1B_1C_1$ razloživo jednaki likovi.



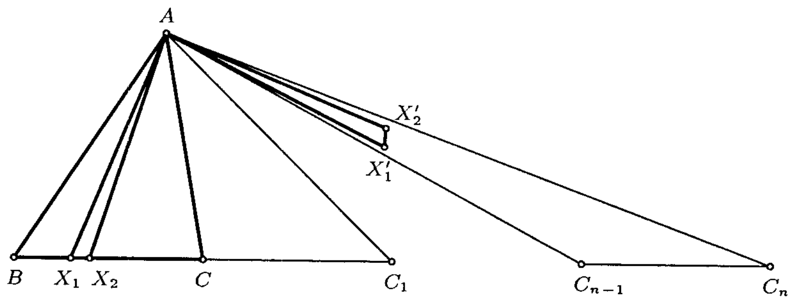
Slika 30e

Pretpostavimo da ni jedna ivica trougaone površi ABC nije podudarna nekoj od ivica površi $A_1B_1C_1$ i da je, na primer, $AB < A_1B_1$. Tada je $BR < \frac{1}{2}A_1B_1$, pa krug $k(B, \frac{1}{2}A_1B_1)$ seče pravu RQ jer je tačka R unutar kruga k. Neka je R_2 bilo koja od presečnih tačaka kruga k i prave RQ, neka je A_2 tačka centralnosimetrična tački B u odnosu na R_2, neka je Q_2 presečna tačka duži A_2C i prave RQ, a A_2' podnožje upravne iz A_2 na pravoj RQ. Tada su trouglovi $A_2A_2'R_2$ i $BB'R_2$ međusobno podudarni, pa je $A_2A_2' \cong BB'$, a kako je $BB' \cong CC'$, biće i $A_2A_2' \cong CC'$, pa su i trouglovi $A_2A_2'Q_2$ i $CC'Q_2$ međusobno podudarni. Stoga je $BCC'B'$ Sakerijev četvorougao kome je svaki od uglova kod temena B i C jednak poluzbiru unutrašnjih uglova trougla A_2BC, a četvorougaona površ $BCC'B'$ je razloživo jednaka trougaonoj površi A_2BC. Dakle, trougaone površi ABC i A_2BC imaju jednake defekte i razloživo su jednake. Kako trougaone površi ABC i $A_1B_1C_1$ imaju, po pretpostavci, jednake defekte, površi A_2BC i $A_1B_1C_1$ će takođe imati jednake defekte, a stranice A_2B i A_1B_1 će biti međusobno podudarne, pa će, na osnovu prethodnog slučaja, biti i razloživo jednake. Zato su trougaone površi ABC i $A_1B_1C_1$ razloživo jednake. □

Teorema 30.9: *Ako je X promenljiva tačka ivice BC trougla ABC i ako je x mera duži BX, tada je funkcija*

$$f(x) = \delta(ABX)$$

neprekidna i strogo rastuća.



Slika 30f

Dokaz: Da bismo dokazali da je $f(x)$ strogo rastuća funkcija, obeležimo sa X_1 i X_2 tačke ivice BC takve da je $\mathcal{B}(B, X_1, X_2, C)$, tj. $x_1 < x_2$. Duž AX_1 razlaže površ ABX_2 na površi ABX_1 i AX_1X_2, pa je $\delta(ABX_2) = \delta(ABX_1) + \delta(AX_1X_2)$. Tada je $\delta(ABX_1) < \delta(ABX_2)$, tj. $f(x_1) < f(x_2)$.

Neposredno se proverava da je mera ugla BAX neprekidna funkcija mere x duži BX. Da bismo dokazali da je $f(x)$ neprekidna funkcija, pretpostavimo da je $AB \leq AC$ i da su $X_1, X_2, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ tačke poluprave BC takve da je

$$\mathcal{B}(B, X_1, X_2, C, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n, \ldots)$$

i

$$BC \cong CC_1 \cong C_1C_2 \cong \ldots \cong C_{n-1}C_n \cong \ldots$$

Tada su duži AX_1 i AX_2 manje od duži AC, a $AC < AC_1 < AC_2 < \ldots < AC_n < \ldots$ Uz to je i

$$\delta(ABC) + \delta(ACC_1) + \delta(AC_1C_2) + \delta(AC_2C_3) + \cdots + \delta(AC_{n-1}C_n) = \delta(ABC_n) < \pi,$$

pa, kako je prethodna suma ograničena, red

$$\delta(ABC) + \delta(ACC_1) + \delta(AC_1C_2) + \delta(AC_2C_3) + \cdots + \delta(AC_{n-1}C_n) + \ldots$$

je konvergentan, pa je

$$\lim_{n\to\infty} \delta(AC_{n-1}C_n) = 0.$$

Kako je mera ugla BAX neprekidna funkcija mere x duži BX, koliko god mala bila mera ugla $C_{n-1}AC_n$, broj δ (koji zavisi od n) takav da je $|BX_2 - BX_1| < \delta$ može se izabrati da bude toliko mali da mera ugla X_1AX_2 bude manja od mere ugla $C_{n-1}AC_n$. Stoga postoji trougao $AX_1'X_2'$ podudaran trouglu AX_1X_2, kome temena X_1' i X_2' pripadaju trougaonoj površi $AC_{n-1}C_n$, pa je

$$\delta(AX_1X_2) = \delta(AX_1'X_2') < \delta(AC_{n-1}C_n) < \varepsilon.$$

Dakle, za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da, ako je

$$|BX_2 - BX_1| = |x_2 - x_1| < \delta,$$

onda je

$$\delta(AX_1X_2) = |\delta(ABX_2) - \delta(ABX_1)| = |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Stoga je $f(x)$ neprekidna funkcija. □

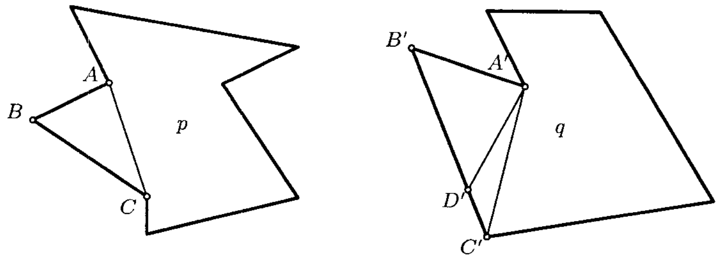
Sada možemo da pristupimo dokazivanju nagoveštene teoreme.

Teorema 30.10: *Poligonske površi jednakih defekata su razloživo jednaki likovi.*

Dokaz: Neka su p i q dve poligonske površi od kojih prva ima a, a druga b ivica. U posebnom slučaju kada je $a = b = 3$, tj. kada je $k = a + b = 6$, teorema je već dokazana. Metodom potpune indukcije dokazaćemo da su poligonske površi p i q razloživo jednake za svaki prirodan broj $k > 6$, odnosno pretpostavićemo da je tvrđenje tačno za svaki $k = 7, 8, \ldots, n$ i dokazaćemo da je tačno i za $k = n+1$.

Neka su A, B, C tri uzastopna temena poligonske površi p takva da dijagonala AC pripada toj površi, a A', B', C' uzastopna temena poligonske površi q takva da dijagonala $A'C'$ pripada površi q. Tada dijagonale AC i $A'C'$ razlažu površi p i q, redom, na neku poligonsku površ p' koja ima $a-1$ ivica i trougaonu površ ABC, odnosno poligonsku površ q' sa $b-1$ ivica i trougaonu površ $A'B'C'$.

Ako trougaone površi ABC i $A'B'C'$ imaju jednake defekte, imaće ih i površi p' i q' jer površi p i q imaju jednake defekte. Tada će, prema indukcijskoj pretpostavci, p' i q' biti razloživo jednake površi pa, kako su ABC i $A'B'C'$ razloživo jednake površi, takve će da budu i p i q.



Slika 30g

Ako trougaone površi ABC i $A'B'C'$ nemaju jednake defekte, već je, naprotiv, $\delta(ABC) < \delta(A'B'C')$, tada, na osnovu prethodne teoreme, na ivici $B'C'$ postoji takva tačka D' da je $\delta(ABC) = \delta(A'B'D')$. Obeležimo sa q'' poligonsku površ koja se dobija razlaganjem površi q ivicom $A'D'$. Tada, s obzirom na to da površi p i q imaju jednake defekte, imaće ih i površi p' i q'', jer trougaone površi ABC i $A'B'D'$ imaju jednake defekte. Dakle, prema indukcijskoj pretpostavci, površi p' i q'' su razloživo jednake pa, kako su i trougaone površi ABC i $A'B'D'$ razloživo jednake, takve će da budu i poligonske površi p i q. $\square$

Površina. Obeležimo sa $\mathcal{P}$ skup svih poligonskih površi hiperboličke ravni. Budući da smo dokazali da je funkcija

$$\delta : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$$

kojom svakoj poligonskoj površi p dodeljujemo njen defekt $\delta(p)$ nenegativna i aditivna, tu funkciju definisanu na skupu $\mathcal{P}$ možemo smatrati merom. Zato ćemo broj $\delta(p)$ zvati i *površinom* poligonske površi p.

Prosto povezani lik ω u hiperboličkoj ravni zvaćemo *merljivim* ako postoji niz $(p_n)_{n=1,2,\ldots}$ poligonskih površi koje pripadaju liku ω i niz $(q_n)_{n=1,2,\ldots}$ poligonskih površi koje sadrže taj lik, pri čemu je

$$p_1 \subset p_2 \subset \cdots \subset p_n \subset \ldots \qquad \text{i} \qquad q_1 \supset q_2 \supset \cdots \supset q_n \supset \ldots,$$

takvih da je

$$\delta(\omega) = \lim_{n\to\infty} \delta(p_n) = \lim_{n\to\infty} \delta(q_n).$$

Zajedničku graničnu vrednost $\delta(\omega)$ zvaćemo *merom* ili *površinom* lika ω.

Za proizvoljan lik ω hiperboličke ravni reći ćemo da pripada skupu $\mathcal{M}$ merljivih likova ako se može predstaviti kao unija konačno mnogo disjunktnih, prosto povezanih, merljivih likova $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$. *Merom* lika ω zvaćemo zbir mera likova $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Može se dokazati da i funkcija

$$\delta : \mathcal{M} \to \mathbb{R},$$

kojom svakom merljivom liku ω dodeljujemo njegovu meru $\delta(\omega)$, ima sledeća svojstva:

(N) za svaki merljiv lik ω je $\delta(\omega) \geq 0$,

(A) ako je lik ω unija disjunktnih merljivih likova $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, tada je

$$\delta(\omega) = \delta(\omega_1) + \delta(\omega_2) + \cdots + \delta(\omega_n),$$

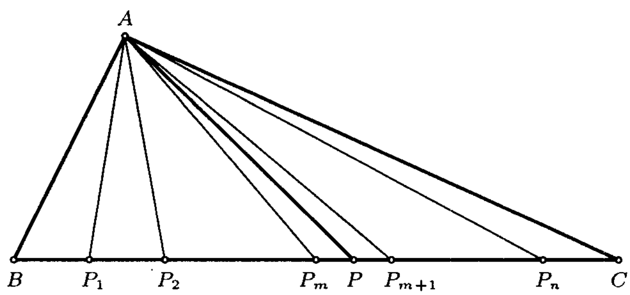
(P) podudarni likovi imaju istu meru.

Ako je defekt δ poligonske površi mera definisana na skupu $\mathcal{P}$ poligonskih površi i ako je $\delta' = k\delta$, neposredno se dokazuje da i δ' zadovoljava uslove (N),(A),(P), pa je, stoga, i δ' mera definisana na skupu poligonskih površi. Dokažimo da važi i obratno.

Teorema 30.11: *Ako funkcija*

$$\delta' : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$$

zadovoljava uslove (N),(A),(P), *tada postoji broj* $k > 0$ *takav da je* $\delta' = k\delta$.



Slika 30h

Dokaz: Budući da se može izvršiti triangulacija bilo koje poligonske površi, s obzirom na uslov (A) dovoljno je dokazati da teorema važi ako je funkcija δ' definisana na skupu trouglova. Drugim rečima, dovoljno je dokazati da je

$$\frac{\delta'(ABC)}{\delta(ABC)} = \frac{\delta'(A'B'C')}{\delta(A'B'C')} = k$$

za bilo koja dva trougla ABC i $A'B'C'$.

Ako je $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$, trougaone površi ABC i $A'B'C'$ će, na osnovu teoreme 30.8, biti razloživo jednake, pa je, s obzirom na uslove (P) i (A), $\delta'(ABC) = \delta'(A'B'C')$.

Ako trougaone površi ABC i $A'B'C'$ nemaju jednake defekte, već je, na primer, $\delta(ABC) > \delta(A'B'C')$, onda, na osnovu teoreme 30.9, na duži BC postoji takva tačka P da je $\delta(ABP) = \delta(A'B'C')$, i takve tačke $P_1, P_2, \dots, P_n$ da je

$$\delta(ABP_1) = \delta(AP_1P_2) = \ldots = \delta(AP_nC) = \frac{1}{n}\delta(ABC).$$

Pretpostavimo da je tačka P između P_m i P_{m+1} ili da je istovetna sa tačkom P_{m+1}. Tada je

$$\frac{m}{n} < \frac{\delta(ABP)}{\delta(ABC)} = \frac{\delta(A'B'C')}{\delta(ABC)} \leq \frac{m+1}{n}.$$

Sa druge strane, iz uslova (P) i (A) sledi da je

$$\frac{m}{n} < \frac{\delta'(ABP)}{\delta'(ABC)} = \frac{\delta'(A'B'C')}{\delta'(ABC)} \leq \frac{m+1}{n}.$$

Dakle, svaki racionalan broj $\frac{m}{n}$ je manji od

$$\frac{\delta(A'B'C')}{\delta(ABC)}$$

ako i samo ako je manji od

$$\frac{\delta'(A'B'C')}{\delta'(ABC)}.$$

Stoga je

$$\frac{\delta(A'B'C')}{\delta(ABC)} = \frac{\delta'(A'B'C')}{\delta'(ABC)}.$$

Dakle,

$$\frac{\delta'(ABC)}{\delta(ABC)} = \frac{\delta'(A'B'C')}{\delta(A'B'C')} = k.$$ □

ZADACI:

1. Dokazati da su Lambertovi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa oštrim uglovima D i D' međusobno podudarni likovi ako i samo ako je:

1° $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$,
2° $AB \cong A'B'$, $AD \cong A'D'$,
3° $AD \cong A'D'$, $BC \cong B'C'$,
4° $AD \cong A'D'$, $CD \cong C'D'$,
5° $AD \cong A'D'$, $D \cong D'$,
6° $AB \cong A'B'$, $D \cong D'$,

2. Dokazati da su Sakerijevi četvorouglovi $ABCD$ i $A'B'C'D'$ sa osnovicama AB i $A'B'$ međusobno podudarni likovi ako i samo ako je:

1° $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$,
2° $AB \cong A'B'$, $CD \cong C'D'$,
3° $CD \cong C'D'$, $BC \cong B'C'$,
4° $AB \cong A'B'$, $C \cong C'$,
5° $BC \cong B'C'$, $C \cong C'$,
6° $CD \cong C'D'$, $C \cong C'$,

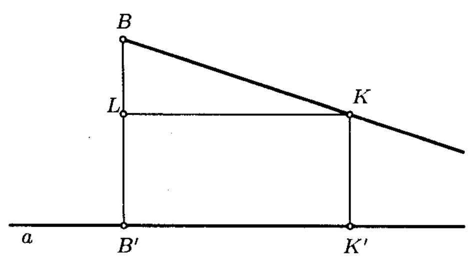
3. Dokazati da je duž određena središtem hipotenuze i temenom pravog ugla pravouglog trougla hiperboličke ravni, manja od polovine hipotenuze.

4. Ako su A, B, C tri razne tačke neke prave l, a O tačka izvan te prave, dokazati da središta duži OA, OB i OC ne pripadaju jednoj pravoj.

31. Paralelnost i hiperparalelnost

Paralelne prave. Već u apsolutnoj geometriji bilo je moguće dokazati osnovne osobine paralelnih pravih, pre svega osobine transmisibilnosti, simetričnosti i tranzitivnosti relacije paralelnosti. Hiperboličku geometriju karakterišu neke osobine paralelnih pravih kojima se ona bitno razlikuje od euklidske geometrije. U euklidskoj geometriji koplanarne prave su bile paralelne ako i samo ako su disjunktne, a svaka ekvidistanta je bila prava. U hiperboličkoj geometriji osobine paralelnih pravih se suštinski razlikuju od navedenih.

Teorema 31.1: *Ako je B teme proizvoljne poluprave paralelne nekoj pravoj a, K proizvoljna tačka te poluprave, a B' i K' podnožja upravnih iz B i K na pravoj a, onda je $KK' < BB'$.*

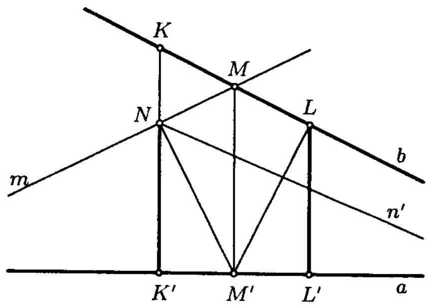


Slika 31a

Dokaz: Neka je L tačka poluprave $(B'B)$ takva da je $LB' \cong KK'$. Budući da su u četvorouglu $B'K'KL$ uglovi kod temena B' i K' pravi, a ivice LB' i KK' međusobno podudarne, uglovi kod temena K i L biće međusobno podudarni (teoreme 11.17) i oštri (teorema 30.2,4°). Kako je uz to ugao BKK' tup jer je njemu naporedni ugao oštar, tačka L pripada uglu BKK', dakle i duži BB'. Stoga je $KK' \cong LB' < BB'$. □

Teorema 31.2: *Ako su a i b dve međusobno paralelne prave, a l proizvoljna duž, tada na pravoj b postoji jedinstvena tačka L kojoj je L' podnožje upravne na pravoj a, takva da je $LL' \cong l$.*

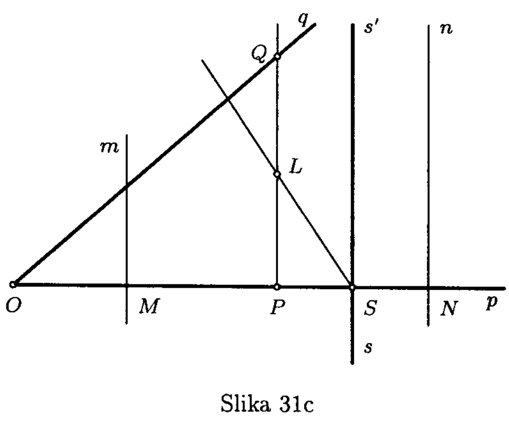
Dokaz: Neka je K proizvoljna tačka prave b, K' njena upravna projekcija na pravoj a, a N tačka poluprave $(K'K)$ takva da je $NK' \cong l$. Pretpostavimo da su tačke K i N međusobno različite, budući da bi, u suprotnom, dokaz teoreme bio završen. Obeležimo sa n' polupravu čije je teme N, paralelnu pravama a i b, a sa m pravu koja ne sadrži n' i paralelna je pravoj a. Prava m seče b jer je $n' \| b$. Ako je M presek pravih m i b, M' podnožje upravne iz M na pravoj a, L tačka prave b takva da su $N, L \div MM'$ i $ML \cong MN$, a L' podnožje upravne iz L na a, onda su trouglovi MNM' i MLM' podudarni jer su simetrični u odnosu na pravu MM', pa su i trouglovi $NK'M'$ i $LL'M'$ podudarni iz istog razloga. Dakle, $LL' \cong NK' \cong l$.



Slika 31b

Jedinstvenost tačke L dokazuje se neposrednom primenom teoreme 31.1. □

Teorema 31.3: *U hiperboličkoj ravni postoji jedinstvena prava upravna na jednom kraku, a paralelna sa drugim krakom oštrog ugla.*



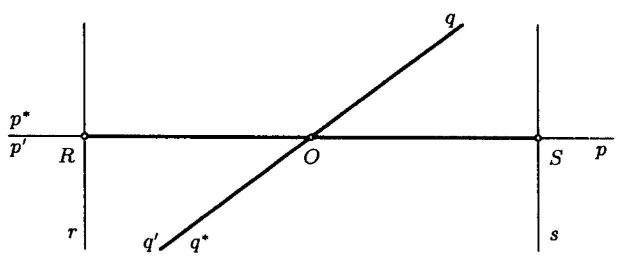
Slika 31c

Dokaz: Ako bi svaka prava upravna na jednom kraku oštrog ugla Opq sekla drugi krak, onda bi, na osnovu treće Ležandrove teoreme (23.3), u hiperboličkoj ravni postojao trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π, što je nemoguće. Stoga tačke poluprave p možemo da podelimo u dva skupa $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, takva da za svaku tačku M skupa $\mathcal{M}$ prava m koja je u tački M upravna na p, seče q, a za svaku tačku N skupa $\mathcal{N}$ prava n koja je u tački N upravna na p, nema zajedničkih tačaka sa polupravom q. Primetimo da su skupovi $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ neprazni i da svaka tačka poluprave p pripada jednom od njih. Budući da se jednostavno dokazuje da između tačaka jednog od tih skupova nema tačaka drugog, ispunjeni su uslovi Dedekindove teoreme za poluprave, pa postoji jedinstvena tačka S koja razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$. Ta tačka pripada skupu $\mathcal{N}$ jer bi, u suprotnom, prava s koja je u tački S upravna na p sekla q u nekoj tački R pa, ako bi T bila tačka takva da je $\mathcal{B}(O,R,T)$, prava t koja sadrži T i upravna je na p, sekla bi polupravu p u tački T' takvoj da je $\mathcal{B}(O,S,T')$. Odatle bi sledilo da tačka S ne razdvaja skupove $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

Dakle, prava s je upravna na p i nema zajedničkih tačaka sa polupravom q. Obeležimo sa s' onu od polupravih na koje S razlaže pravu s, koja je sa one strane prave OS sa koje je poluprava q, i dokažimo da je $q \| s'$. Neka je L proizvoljna tačka u konveksnom uglu čiji su kraci (SO) i s'. Ako je L van oštrog ugla pq, neposredno se dokazuje da (SL) seče q. Stoga pretpostavimo da L pripada uglu $\angle pq$ i sa P obeležimo podnožje upravne iz L na p. Kako je OSL oštar ugao, tačka P pripada duži OS, pa zato prava PL seče q u nekoj tački Q. Prava SL pripada ravni trougla OPQ, seče njegovu ivicu PQ, a ne seče ivicu OP pa, na osnovu Pašove aksiome, seče ivicu OQ. Dakle, (SL) seče q, pa je $q \| s'$. □

Centralnom simetrijom $\mathcal{S}_O$ poluprave p i q se preslikavaju u p' i q', a prava s u pravu r, pri čemu je $p' \perp r \| q'$, pa odavde sledi da je upravna projekcija prave q^* koja sadrži poluprave q i q', na pravoj p^* koja sadrži p i p', duž (RS), gde je R presek pravih p^* i r. Dakle, dokazno je sledeće tvrđenje:

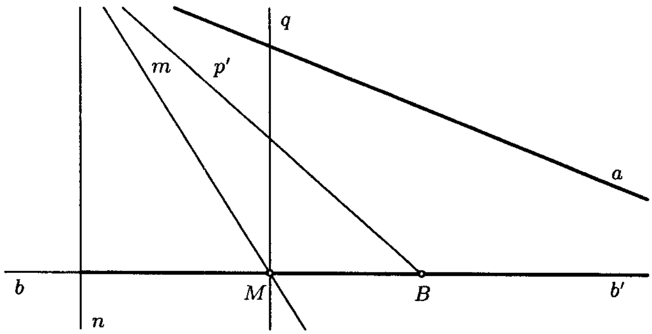
Teorema 31.4: *Ako se prave a i b seku, upravna projekcija jedne na drugu je tačka ili otvorena duž.* □



Slika 31d

Teorema 31.5: *Ako su prave a i b međusobno paralelne, upravna projekcija jedne na drugu je otvorena poluprava.*

Dokaz: Neka je B proizvoljna tačka prave b i p' poluprava sa temenom B koja ne pripada b, a paralelna je pravoj a. Ako je p' upravna na b, obeležimo sa n pravu koja je sadrži, a ako nije, na osnovu teoreme 31.3 postoji jedinstvena prava n upravna na b, a paralelna polupravoj p'. Poluprava b' čije je teme na pravoj



Slika 31e

n, koja pripada pravoj b i otvorenoj poluravni sa granicom n kojoj pripada prava a, je upravna projekcija prave a na pravoj b. Zaista, neposredno se dokazuje da podnožje upravne iz proizvoljne tačke prave a, na pravoj b, pripada b'. Ako sa M obeležimo proizvoljnu tačku poluprave b', a sa m pravu koja sadrži M i paralelna je pravama a i n, tada prava q koja je u tački M upravna na b pripada onom paru unakrsnih uglova na koje prave m i b razlažu ravan, kojem pripada i prava a. Stoga q seče a. □

Hiperparalelne prave. U hiperboličkoj ravni poluprave p' i q' koje sadrže proizvoljnu tačku A i paralelne su nekoj pravoj a kojoj ne pripada tačka A, nisu komplementne, pa prava a pripada konveksnom uglu $p'q'$. Stoga prave p i q koje sadrže poluprave p' i q' razlažu ravan kojoj pripadaju na dva para unakrsnih uglova. Sve prave koje sadrže tačku A i pripadaju onom paru unakrsnih uglova kojem pripada i prava a seku tu pravu. One, pak, prave koje ne pripadaju tom paru unakrsnih uglova, sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka. Budući da takvih pravih ima neograničeno mnogo, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 31.6: *U hiperboličkoj ravni postoji neograničeno mnogo pravih koje sadrže proizvoljnu tačku A, a sa nekom pravom a kojoj ne pripada tačka A nemaju zajedničkih tačaka.* □

Za sve prave hiperboličke ravni koje sadrže tačku A, ne seku pravu a i nisu paralelne toj pravoj, reći ćemo da su *hiperparalelne* pravoj a.

Ako je b' proizvoljna poluprava koja pripada pravoj b, i za nju ćemo reći da je *hiperparalelna* pravoj a.

Iz teorema 25.4 i 25.5 neposredno sledi da u hiperboličkoj geometriji važe osobine transmisibilnosti i simetričnosti relacije hiperparalelnosti pravih. Time je dokazano da važe sledeća dva stava:

Teorema 31.7: *Ako poluprava m' sadrži polupravu n', tada je jedna od tih dveju polupravih hiperparalelna pravoj a ako i samo ako joj je hiperparalelna i druga.* □

Teorema 31.8: *Ako je prava c hiperparalelna pravoj b, onda je i prava b hiperparalelna pravoj c.* □

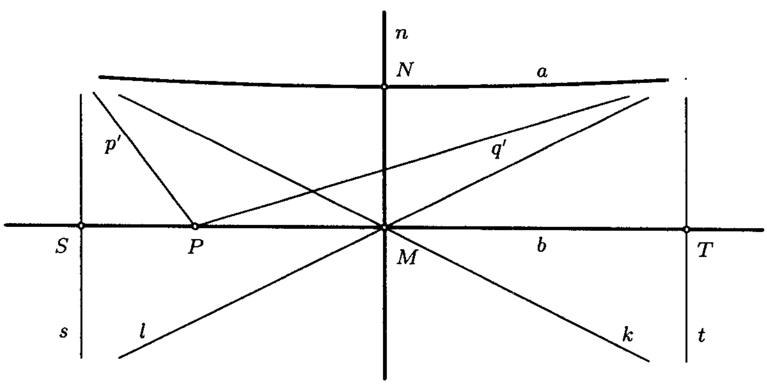
Dakle, možemo reći da su dve prave b i c *međusobno hiperparalelne.*

Neposredno se proverava da hiperparalelnost pravih nije tranzitivna jer dve prave koje sadrže neku tačku B i hiperparalelne su sa pravom a, nisu međusobno hiperparalelne.

Dve prave upravne na trećoj međusobno su hiperparalelne. Dokažimo da važi i obratno.

Teorema 31.9: *Postoji jedinstvena prava upravna na dvema međusobno hiperparalelnim pravama.*

Dokaz: Neka su a i b dve međusobno hiperparalelne prave, P proizvoljna tačka prave b, a p' i q' poluprave sa zajedničkim temenom P paralelne pravoj a. Na osnovu teoreme 31.3, postoje jedinstvene prave s i t, u tačkama S i T upravne na pravoj b, koje su paralelne polupravama p' i q'. Neka je M središte duži ST, n prava koja sadrži M i upravna je u tački N na pravoj a, a k i l prave koje sadrže M, takve da je k paralelna pravama a i s, a l pravama a i t. Centralnom simetrijom $\mathcal{S}_M$ svaka od pravih k i l se preslikava na sebe, a prave s i t jedna na drugu. Stoga su prave k i l paralelne i pravoj s i pravoj t, pa je prava b osa refleksije kojom se prave k i l preslikavaju jedna na drugu. Kako se i osnom refleksijom $\mathcal{S}_n$ prave k i l preslikavaju jedna na drugu jer su obe paralelne pravoj a, prave b i n će biti međusobno upravne.



Slika 31f

Ako bi pored prave n još neka prava m bila upravna i na pravoj a i na pravoj b, onda bi te dve prave bile disjunktne jer bi, u protivnom, iz njihove presečne tačke postojale dve upravne na pravoj a. Tada bi svaki od uglova četvorougla čije ivice pripadaju pravama a, m, b, n bio prav, što je nemoguće. □

Iz dokaza prethodne teoreme neposredno sledi da je upravna projekcija prave a na pravoj b otvorena duž ST. Dakle:

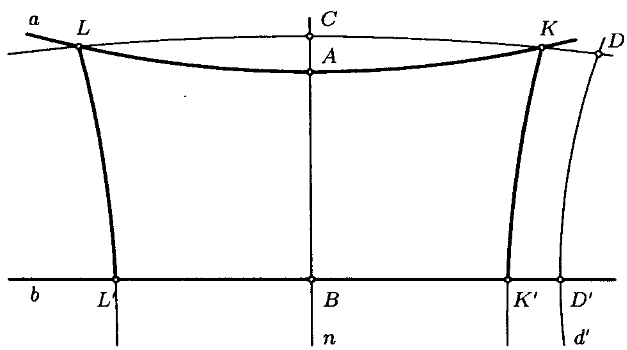
Teorema 31.10: *Ako su prave a i b hiperparalelne, upravna projekcija jedne na drugu je otvorena duž.* □

Sledeća dva tvrđenja ćemo formulisati slično teoremama 31.1 i 31.2. Prvo od njih se dokazuje u potpunoj analogiji sa dokazom teoreme 31.1.

Teorema 31.11: *Ako je n prava u tačkama M i N upravna na dvema različitim pravama a i b, K i B tačke prave a takve da je $\mathcal{B}(M,K,B)$, a K' i B' podnožja upravnih iz tih dveju tačaka na pravoj b, onda je $KK'<BB'$.* □

Teorema 31.12: *Ako je prava n u tačkama A i B upravna na dvema različitim pravama a i b, a l proizvoljna duž veća od duži AB, onda na pravoj a postoje tačno dve tačke K i L kojima su podnožja upravnih na pravoj b, K' i L', takve da je $KK'\cong LL'\cong l$.*

Dokaz: Neka je C tačka poluprave (BA) takva da je $BC\cong l$, neka je d' poluprava upravna na b, a paralelna pravoj a, kojoj je teme D' na pravoj b, i neka je D tačka poluprave d' takva da je $DD'\cong l$. Tačke C i D pripadaju ekvidistanti $\mathcal{E}$ definisanoj u odnosu na pramen pravih upravnih na b, i nalaze se sa raznih strana prave a pa, na osnovu teoreme 21.8, postoji tačka K koja pripada i pravoj a i ekvidistanti $\mathcal{E}$. Stoga je $KK'\cong l$. U refleksiji $\mathcal{S}_n$ prava a i ekvidistanta $\mathcal{E}$ su invarijantne, pa je $\mathcal{S}_n(K)=L$ i $LL'\cong l$.



Slika 31g

Ako tačke K i L ne bi bile jedinstvene, prava a i ekvidistanta $\mathcal{E}$ bi imale više od dve zajedničke tačke. □

Izometrije hiperboličke ravni. Već u apsolutnoj geometriji bilo je moguće ustanoviti da su osna i klizajuća refleksija jedine indirektne izometrije ravni. Budući da u apsolutnoj ravni nismo mogli da odredimo odnos između dveju disjunktnih pravih, nismo mogli ni da klasifikujemo direktne izometrije. U hiperboličkoj geometriji, kao i u euklidskoj, to možemo da učinimo.

Ako se dve prave hiperboličke ravni ne seku, one su ili hiperparalelne ili su međusobno paralelne. Stoga, ako nije ni rotacija ni translacija, direktna izometrija hiperboličke ravni je kompozicija osnih refleksija u odnosu na dve međusobno paralelne prave. Takvu transformaciju zvaćemo *paralelnim pomeranjem* ili *oricikličkom rotacijom* hiperboličke ravni. Dakle:

Teorema 31.13: *Ako nije identičnost, direkna izometrija hiperboličke ravni je ili rotacija, ili translacija, ili paralelno pomeranje.* □

Klasifikacionim teoremama 20.2 i 31.13 određene su sve izometrije hiperboličke ravni. Istaknimo ponovo da su to: identičnost, osna refleksija, rotacija, translacija, paralelno pomeranje i klizajuća refleksija.

Prave i ravni u hiperboličkom prostoru. Ako prava p sa ravni π nema zajedničkih tačaka, tada je ona paralelna pravoj p' koja sadrži njenu upravnu projekciju na π, ili je sa tom pravom hiperparalelna. U prvom slučaju prava p i ravan π, kako smo već ustanovili u odeljku 27, međusobno su paralelne, a u drugom slučaju reći ćemo da su prava p i ravan π među sobom *hiperparalelne.*

Iz definicije i teorema 31.5 i 31.10 neposredno sledi da je upravna projekcija prave p koja je paralelna ravni π, na toj ravni, otvorena poluprava, a da je njena projekcija na π, otvorena duž ako je prava p hiperparalelna ravni π. Ako prava p ne pripada ravni π već je seče, njena projekcija na π, na osnovu teoreme 31.4, će biti tačka ako je prava p upravna na π, a otvorena duž ako nije.

Sledeća dva tvrđenja su neposredna posledica teorema 25.12 i 25.13.

Teorema 31.14: *Ako je prava p hiperparalelna ravni π, p' prava koja sadrži njenu upravnu projekciju na π, a α ravan koja sadrži pravu p i seče ravan π duž neke prave q, tada su prave p i p' hiperparalelne pravoj q.* □

Štaviše, podnožja zajedničkih upravnih parova p, p' zatim p, q i p', q su tri nekolinearne tačke koje pripadaju ravni upravnoj na svim pravama p, p', q.

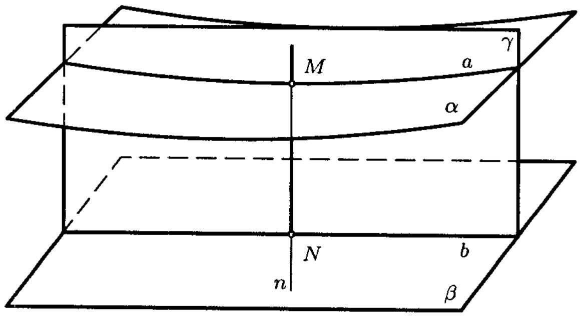
Teorema 31.15: *Ako je prava p van ravni π, hiperparalelna bilo kojoj pravoj q te ravni, tada je prava p hiperparalelna i ravni π.* □

Paralelne ravni je bilo moguće definisati već u apsolutnoj geometriji. Ravan γ upravna na dvema međusobno paralelnim ravnima α i β sekla je te dve ravni duž dveju međusobno paralelnih pravih a i b. Prave a i b su bile međusobno paralelne nezavisno od izbora ravni γ upravne na α i β. Ako su prave a i b duž kojih ravan γ seče, redom, ravni α i β na kojima je upravna, međusobno hiperparalelne, za ravni α i β reći ćemo da su međusobno *hiperparalelne.*

Teorema 31.16: *Postoji jedinstvena prava upravna na dvema međusobno hiperparalelnim ravnima.*

Dokaz: Neka su α i β dve međusobno hiperparalelne ravni, neka je γ ravan upravna na tim dvema ravnima i neka su a i b prave duž kojih γ seče, redom,

α i β. Kako su ravni α i β međusobno hiperparalene, takve će biti i prave a i b pa, na osnovu teoreme 31.9, postoji jedinstvena prava n koja je u tačkama M i N upravna na pravama a i b. Budući da pripada ravni γ koja je upravna na ravnima α i β, i upravna je na pravama a i b duž kojih ravan γ seče ravni α i β, prava n je upravna i na ravni α i na ravni β (teorema 14.1).



Slika 31h

Ako bi pored n i prava n' bila upravna u tačkama M' i N', na ravnima α i β, svi uglovi ravnog četvorougla $MNN'M'$ bi bili pravi, što je u hiperboličkoj geometriji nemoguće. □

Primetimo da će svaka ravan γ' koja je upravna i na α i na β sadržati pravu n. Zaista, ako su a' i b' prave duž kojih γ' seče, redom, α i β, prava n' koja je upravna na pravama a i b biće upravna i na ravnima α i β, pa je $n = n'$.

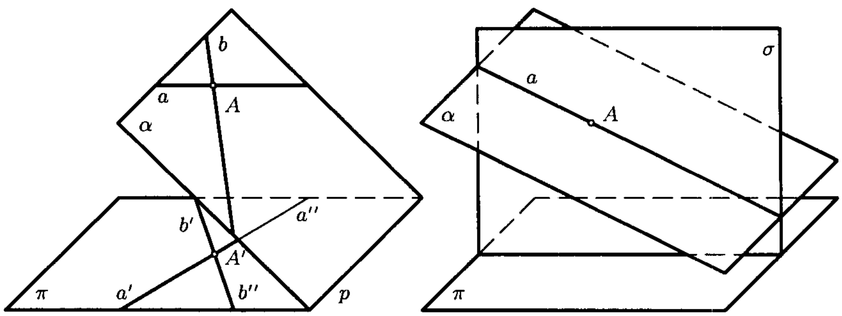
Budući da ravan koja je upravna na zadatim ravnima α i β seče te dve ravni duž pravih koje se seku, koje su paralelne ili koje su hiperparalelne, ravni α i β mogu da se seku, da budu paralelne ili da budu hiperparalelne.

Teorema 31.17: *Broj pravih neke ravni α koje sadrže tačku A te ravni i paralelne su nekoj ravni π, nije veći od dva. Štaviše, taj broj će biti 2, 1 ili 0 ako i samo ako se ravni α i π, redom, seku, paralelne su ili su hiperparalelne.*

Dokaz: Ako se ravni α i π seku duž neke prave p i ako tačka A ne pripada p, tada postoje dve prave koje sadrže A i paralelne su pravoj p, pa su, stoga, paralelne i ravni π. Kako je prava koja sadrži A paralelna pravoj p ako i samo ako je paralelna ravni π (teoreme 25.12–13), postoje samo dve prave koje sadrže A i paralelne su ravni π. Važi i obratno, ako postoje dve prave a i b ravni α koje sadrže tačku A te ravni i paralelne su ravni π, tada se ravni α i π seku. Zaista, ako su a' i b' upravne projekcije pravih a i b na ravni π, a p prava te ravni paralelna polupravama a'' i b'' koje pripadaju pravama a' i b', a paralelne su pravama a i b, tada prave a, b, p pripadaju jednoj ravni, pa se ravni α i π seku duž prave p.

Ako su ravni α i π hiperparalelne i ako je ravan σ koja sadrži A upravna na obema, tada se prava koja sadrži A i paralelna je π, budući da ne pripada ravni σ, refleksijom u odnosu na tu ravan preslikava na pravu c koja je paralelna ravni

π, pa postoje dve prave koje sadrže A i paralelne su π, što je nemoguće. Dakle, ako su ravni α i π hiperparalelne, nema pravih u ravni α koje sadrže A i paralelne su π. Obratno, ako u ravni α nema pravih koje sadrže A i paralelne su π, tada se te dve ravni ne mogu seći jer bi tada u ravni α postojale dve prave paralene ravni π, a ne mogu biti ni paralelne budući da u svakoj tački jedne od dveju paralelnih ravni postoji prava koja je paralelna drugoj.



Slika 31i

Ako su ravni α i π paralelne, ravan σ koja sadrži A i upravna je na ravnima α i π seče α i π duž pravih koje su paralelne, pa stoga postoji prava a ravni α, koja sadrži A i paralelna je ravni π. Ako bi postojala još jedna prava b ravni α koja sadrži A i paralelna je ravni π, tada bi se, na osnovu prethodnog, ravni α i π sekle. Dakle, ako su ravni α i π paralelne, u ravni α postoji jedinstvena prava koja sadrži neku tačku te ravni i paralelna je ravni π. Obratno, ako u ravni α postoji jedinstvena prava koja sadrži tačku A te ravni i paralelna je π, tada se ravni α i π ne seku, a nisu ni hiperparalelne, pa su, stoga, paralelne. $\square$

Izometrije hiperboličkog prostora. Pre no što izvršimo klasifikaciju izometrijskih transformacija hiperboličkog prostora definišimo dve izometrije sa kojima se do sada nismo susreli. To su *oriciklička rotacija* ili *paralelno pomeranje* hiperboličkog prostora, i *oriciklička refleksija.* Prva od njih je kompozicija dveju ravanskih refleksija u odnosu na međusobno paralelne ravni, a druga je kompozicija triju ravanskih refleksija čije osnove su ravni od kojih su dve međusobno paralelne i upravne na trećoj.

U analogiji sa klasifikacijom izometrija euklidskog prostora (teorema 26.7), u sledećim dvema teoremama nabrojaćemo sve izometrije hiperboličkog prostora.

Teorema 31.18: *Ako nije identičnost, direktna izometrija hiperboličkog prostora je ili rotacija, ili translacija, ili paralelno pomeranje, ili zavojno kretanje.*

Dokaz: Budući da se, na osnovu teoreme 20.6, svaka direktna izometrija prostora može izraziti kao kompozicija dveju osnih simetrija $\mathcal{S}_n$ i $\mathcal{S}_m$, u zavisnosti od međusobnig položaja osa m i n razlikovaćemo više mogućnosti:

a. Ako ose m i n pripadaju nekoj ravni π, a μ i ν su ravni koje ih sadrže i upravne su na π, tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_\nu \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\pi \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \mathcal{S}_\mu,$$

pa stoga:

1° Ako su ose m i n istovetne i ravni μ, i ν će biti istovetne pa, s obzirom na involutivnost ravanske refleksije, kompozicija $\mathcal{S}_n \mathcal{S}_m$ je identičnost.

2° Ako se ose m i n seku, seći će se i ravni μ i ν duž prave koja je u njihovoj presečnoj tački upravna na π pa je tada $\mathcal{I}$, po definiciji, rotacija.

3° Ako su m i n međusobno paralelne prave, i ravni μ i ν će biti paralelne, pa je tada $\mathcal{I}$ paraleno pomeranje prostora.

4° Ako su m i n upravne na nekoj pravoj a ravni π, na toj pravoj će biti upravne i ravni μ i ν, pa je tada $\mathcal{I}$ translacija.

b. Ako su m i n mimoilazne prave, tada, na osnovu teoreme 25.16, postoji prava s koja ih seče u tačkama M i N i na obema je upravna. Obeležimo tada sa μ i ν ravni koje sadrže pravu s i, redom, prave m i n, a sa μ' i ν' ravni upravne na s u tačkama M i N. Tada je

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\nu'} \mathcal{S}_\nu \mathcal{S}_\mu \mathcal{S}_{\mu'} = \mathcal{S}_\nu \mathcal{S}_\mu \mathcal{S}_{\nu'} \mathcal{S}_{\mu'}.$$

Dakle, kao i u euklidskoj geometriji (teorema 26.7):

5° Ako su m i n mimoilazne prave, kompozicija $\mathcal{S}_n \mathcal{S}_m$ je, po definiciji, zavojno kretanje. □

Teorema 31.19: *Ako nije ravanska refleksija, indirektna izometrija hiperboličkog prostora je ili rotaciona, ili oriciklička, ili klizajuća refleksija*

Dokaz: Ako nije ravanska refleksija, neka indirektna izometrija $\mathcal{I}$ hiperboličkog prostora se na isti način kao i u euklidskoj geometriji (teorema 26.7) može izraziti u obliku

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_\sigma \mathcal{S}_\tau \mathcal{S}_\nu,$$

gde su ravni ν i τ upravne na ravni σ. S obzirom na međusobni položaj ravni ν i τ, razlikujemo sledeće mogućnosti:

1° Ako se ravni ν i τ seku, $\mathcal{I}$ je, po definiciji, rotaciona refleksija.

2° Ako su ν i τ međusobno paralelne ravni, $\mathcal{I}$ je, po definiciji, oriciklička refleksija.

3° Ako su ravni ν i τ hiperparalelne, $\mathcal{I}$ je klizajuća refleksija. □

ZADACI:

1. Neka je $ABCD$ četvorougao hiperboličke ravni takav da je $(AB)\|(DC)$ i $(BC)\|(AD)$. Dokazati da su simetrale unutrašnjih uglova kod temena A i C i spoljašnjih uglova kod temena B i D prave istog pramena.

2. Dokazati da je svaka izometrija hiperboličke ravni ili proizvod dveju oricikličkih rotacija ili proizvod jedne oricikličke rotacije i jedne osne refleksije.

3. Ako je ABC trougao hiperboličke ravni, dokazati da je proizvod $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}}\mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}}\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ triju translacija, rotacija $\mathcal{R}_{A,\omega}$, gde je ω defekt tog trougla.

4. Ako ivice prostornog četvorougla $ABCD$ pripadaju pravama koje su paralelne nekoj ravni π, dokazati da su zbirovi ili razlike naspramnih ivica tog četvorougla međusobno jednaki.

5. Dokazati da se svaka indirektna izometrija hiperboličkog prostora može predstaviti kao proizvod jedne ravanske refleksije i jedne ili dve oricikličke rotacije.

6. Neka su A, B, C, D četiri nekoplanarne tačke hiperboličkog prostora. Dokazati da je proizvod $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AD}}\mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ triju translacija, zavojno kretanje.

7. Ako su ose dveju translacija mimoilazne prave, dokazati da je njihov proizvod zavojno kretanje.

32. Pramenovi i snopovi

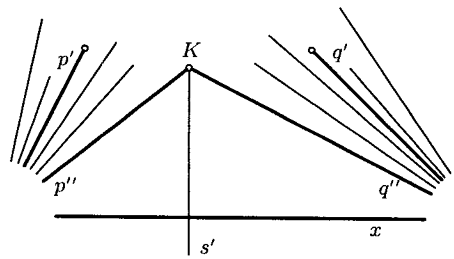
Pramenovi pravih u hiperboličkoj ravni. U odeljku posvećenom pramenovima pravih ustanovili smo da postoje bar dva međusobno različita tipa pramenova pravih u apsolutnoj ravni: pramen konkurentnih pravih ili eliptički pramen, i ortogonalan ili hiperbolički pramen pravih. Posle uvođenja pojma paralelnosti u odeljku 27 u mogućnosti smo bili da definišemo još jedan pramen pravih — parabolički, za koji u apsolutnoj geometriji nismo mogli da ustanovimo da li se razlikuje od hiperboličkog pramena ili se od njega ne razlikuje. U euklidskoj geometriji ti pramenovi se nisu razlikovali, pa je dakle, svaki hiperbolički pramen bio i parabolički. Budući da se u hiperboličkoj geometriji paralelne prave razlikuju od hiperparalelnih i parabolički pramen pravih će se razlikovati od hiperboličkog, pa će postojati tri vrste pramenova hiperboličke ravni: eliptički, parabolički i hiperbolički.

Pretpostavimo da su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ dva razna pramena pravih iste ravni. Ako je jedan od tih pramenova eliptički, tada postoji jedinstvena prava koja pripada tim dvama pramenovima pravih, bez obzira na to da li je drugi pramen eliptički, parabolički ili hiperbolički. Ako je $\mathcal{X}$ hiperbolički, a $\mathcal{X}'$ parabolički pramen pravih, postojaće jedinstvena prava koja pripada tim dvama pramenovima pravih ako i samo ako osnovica pramena $\mathcal{X}$ nije paralelna pravama pramena $\mathcal{X}'$, budući da postoji jedinstvena prava upravna na zadatoj pravoj, a paralelna polupravoj koja nije paralelna toj pravoj. Ako su oba pramena hiperbolička, postojaće jedinstvena prava koja pripada tim dvama pramenovima pravih ako i samo ako su osnovice tih dvaju pramenova međusobno hiperparalelne prave. Razmotrimo i slučaj kada su zadati pramenovi pravih parabolički.

Teorema 32.1: *Postoji jedinstvena prava koja pripada dvama raznim paraboličkim pramenovima pravih.*

Dokaz: Budući da dva razna pramena mogu imati najviše jednu zajedničku pravu (posledica teoreme 16.14) dovoljno je dokazati da postoji prava koja pripada dvama raznim paraboličkim pramenovima.

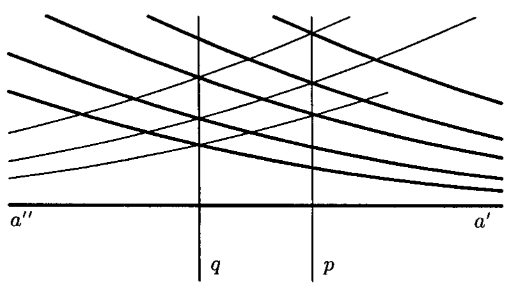
Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ međusobno različiti parabolički pramenovi pravih, tada poluprave p' i q' kojima su paralelne prave tih dvaju pramenova, ne sadrže jedna drugu. Ako te dve poluprave pripadaju istoj pravoj, ta prava pripada i pramenu $\mathcal{X}$ i pramenu $\mathcal{X}'$.



Slika 32a

Neka su poluprave p' i q' na dvema raznim pravama p i q, neka je K tačka koja ne pripada tim dvema pravama, a p'' i q'' poluprave sa temenom K paralelne, redom, polupravama p' i q'. Ako poluprave p'' i q'' pripadaju jednoj pravoj, ta prava pripada pramenovima $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$. Ako su p'' i q'' kraci nekog konveksnog ugla kojem je poluprava s' bisektrisa, tada, na osnovu teoreme 31.3, postoji jedinstvena prava x upravna na s', a paralelna svakoj od polupravih p'' i q''. Prava x pripada i pramenu $\mathcal{X}$ i pramenu $\mathcal{X}'$ jer je paralelna svakoj od polupravih p' i q'. □

Teorema 32.2: *Translacijom duž bilo koje prave koja mu pripada, parabolički pramen se preslikava na sebe.*

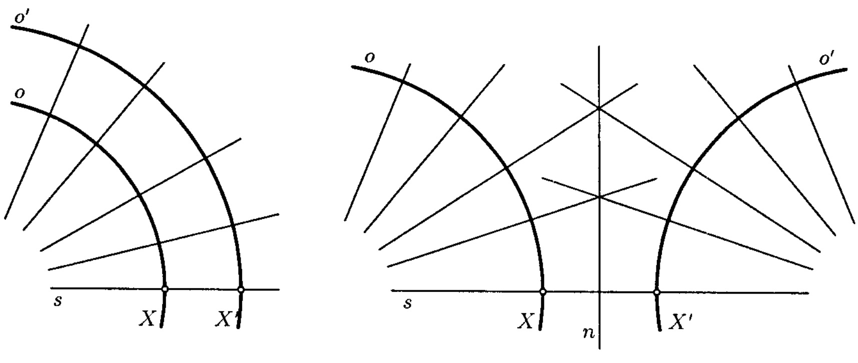


Slika 32b

Dokaz: Neka je a proizvoljna prava zadatog paraboličkog pramena $\mathcal{X}$ koja je bilo kojom svojom tačkom razložena na dve poluprave a' i a'' takve da su prave pramena $\mathcal{X}$ paralelne polupravoj a'. Neka su zatim, p i q bilo koje dve međusobno različite prave upravne na pravoj a. Osnom refleksijom $\mathcal{S}_p$ svaka prava pramena $\mathcal{X}$, budući da je paralelna polupravoj a', preslikava se u pravu paralelnu polupravoj a''. Ova prava se osnom refleksijom $\mathcal{S}_q$ preslikava u pravu paralelnu polupravoj a', dakle, u pravu pramena $\mathcal{X}$, pa se zbog toga translacijom $\mathcal{S}_q\,\mathcal{S}_p$ pramen $\mathcal{X}$ preslikava na sebe. □

Epicikli u hiperboličkoj ravni. Krug i ekvidistantu bilo je moguće definisati već u apsolutnoj geometriji u odeljku o epiciklima. Nakon uvođena pojma paraboličkog pramena bilo je moguće definisati i oricikl. U apsolutnoj geometriji, međutim, nije bilo moguće razlikovati ekvidistante i oricikle od pravih. U euklidskoj geometriji ekvidistante i oricikli su zaista i bili prave, te su, stoga, jedini epicikli od interesa bili krugovi. U hiperboličkoj geometriji skup nelinearnih epicikala će biti znatno bogatiji. Štaviše, epicikl će biti linearan samo ako je osnova ekvidistante. U svakom drugom slučaju epicikl će biti nelinearan (teorema 26.2, 7°–9°). Zato ćemo za dva epicikla u hiperboličkoj geometriji reći da su *istovrsni* ako su oba krugovi ili su oba oricikli ili su oba ekvidistante, a u protivnom ćemo reći da su *raznovrsni*. S obzirom na teoremu 17.2 dva raznovrsna epicikla nikada ne mogu da budu podudarni likovi. Neposredno se može proveriti da će dva kruga biti podudarna ako i samo ako su im poluprečnici međusobno podudarni. Sledećim dvema teoremama odgovorićemo na pitanje kada su dva oricikla ili dve ekvidistante međusobno podudarni likovi.

Teorema 32.3: *Bilo koja dva oricikla su podudarni likovi.*



Slika 32c

Dokaz: Neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ parabolički pramenovi u odnosu na koje su definisani oricikli o i o', neka je s prava koja pripada svakom od pramenova $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$, a X i X' tačke u kojima o i o' seku pravu s.

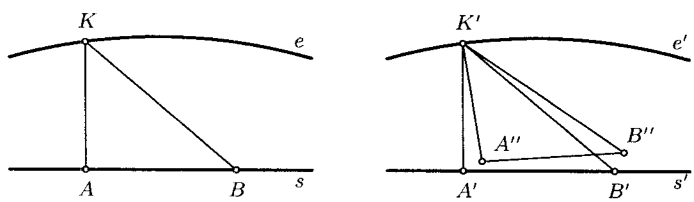
Ako su pramenovi $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ istovetni, s je bilo koja prava koja im pripada. Translacija $\mathcal{T}_{\overrightarrow{XX'}}$ ostavlja invarijantnim pramen $\mathcal{X}=\mathcal{X}'$, a preslikava tačku X oricikla o u tačku X' oricikla o', pa je, stoga,

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{XX'}}(o)=o'.$$

Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ međusobno različiti pramenovi, prava s je, na osnovu teoreme 32.1, jedinstvena, pa se osnom refleksijom u odnosu na bilo koju pravu upravnu na s pramenovi $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ preslikavaju jedan na drugi. Ako su tačke X i X' međusobno različite, obeležimo sa n medijatrisu duži XX', a ako su te dve tačke istovetne, sa n ćemo obeležiti pravu koja sadrži tačku $X=X'$ i upravna je na s. Kako se osnom refleksijom $\mathcal{S}_n$ pramenovi $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ preslikavaju jedan na drugi, a tačka X u X', i oricikli o i o' će se preslikavati jedan na drugi, pa su, stoga, o i o' međusobno podudarni likovi. □

U euklidskoj ravni ekvidistanta je bila prava, pa su zato u euklidskoj geometriji svake dve ekvidistante bile međusobno podudarne. U hiperboličkoj ravni ekvidistanta nije prava budući da je suprotno tvrđenje ekvivalent Plejferove aksiome paralelnosti (teorema 26.2, 8°).

Teorema 32.4: *Dve ekvidistante su podudarne ako i samo ako su im visine podudarne.*



Slika 32d

Dokaz: Neka su s i s' osnove ekvidistanti e i e' kojima pripadaju tačke K i K' čija su podnožja upravnih na pravama s i s' tačke A i A', a AB i $A'B'$ dve međusobno podudarne duži pravih s i s', i neka su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ hiperbolički pramenovi kojima su ekvidistante e i e' definisane.

Ako su visine KA i $K'A'$ ekvidistanti e i e' međusobno podudarne duži, onda postoji jedinstvena izometrija hiperboličke ravni kojom se trougao ABK preslikava na $A'B'K'$. Tom izometrijom se pramen $\mathcal{X}$ preslikava na $\mathcal{X}'$, pa se njome i ekvidistanta e preslikava na ekvidistantu e'.

Ako su e i e' podudarne ekvidistante, onda postoji izometrija $\mathcal{I}$ koja preslikava jednu na drugu. Tom izometrijom se pramen $\mathcal{X}$ preslikava na $\mathcal{X}'$, a tačke A, B, K u tačke $A''B''K'$. Ako bi se prave s' i $\mathcal{I}(s)$ razlikovale, svaka prava pramena $\mathcal{X}'$ bi bila upravna na dvema pravama s' i $A''B''$, što je nemoguće. Dakle, visine ekvidistanti e i e' su međusobno podudarne. □

Pramenovi ravni. Budući da u hiperboličkoj ravni postoje tri vrste pramenova pravih: eliptički, parabolički i hiperbolički, u hiperboličkom prostoru će postojati tri vrste pramenova ravni: eliptički, parabolički i hiperbolički (teorema 18.2).

Teorema 32.5: *Ako su α i β dve ravni koje se seku, koje su međusobno paralelne ili su hiperparalelne, tada je skup $\mathcal{Y}$ svih ravni upravnih i na ravni α i na β, redom, hiperbolički, parabolički ili eliptički pramen.*

Dokaz: Ako se ravni α i β seku duž neke prave s, tada je $\mathcal{Y}$ skup svih ravni upravnih na s, dakle hiperbolički pramen ravni.

Ako su ravni α i β hiperparalelne, tada postoji jedinstvena zajednička upravna n tih dveju ravni, pa svaka ravan upravna i na α i na β sadrži pravu n. Stoga je $\mathcal{Y}$ eliptički pramen ravni.

Ako su α i β dve međusobno paralelne ravni, tada je presek skupa $\mathcal{Y}$ sa svakom od ravni α i β skup pravih od kojih su svake dve međusobno paralelne, pa je $\mathcal{Y}$ pramen paralelnih ravni. □

Kako je ravan koja je upravna na dvema ravnima, upravna na svakoj ravni pramena koji je tim dvema ravnima određen, svaka ravan pramena $\mathcal{Y}$ upravna na ravnima α i β biće upravna na svim ravnima pramena $\mathcal{Y}'(\alpha, \beta)$, pa možemo reći da su $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Y}'$ međusobno *upravni pramenovi ravni*. Stoga će, na osnovu prethodne teoreme, pramen upravan na eliptičkom pramenu da bude hiperbolički pramen ravni, pramen upravan na paraboličkom pramenu biće takođe parabolički, a pramen upravan na hiperboličkom pramenu biće eliptički. Dakle, važi sledeći stav:

Teorema 32.6: *Pramen ravni upravan, redom, na eliptičkom, paraboličkom ili hiperboličkom pramenu ravni biće, redom, hiperbolički, parabolički ili eliptički pramen ravni.* □

Na osnovu prethodne teoreme možemo ustanoviti i da je upravna projekcija ravni α na ravan β presek unutrašnjosti dveju ekvidistanti sa istom osnovom i podudarnim visinama ako se ravni α i β seku, da je ta projekcija unutrašnjost oricikla ako su α i β paralelne ravni, a otvorena kružna površ ako su α i β hiperparalelne ravni.

Snopovi pravih i ravni u hiperboličkom prostoru. Već u apsolutnoj geometriji uveli smo pojam snopa pravih i dokazali da postoji jedinstven snop pravih koji sadrži dve koplanarne prave (teorema 18.8). I prve primere snopova naveli smo u apsolutnoj geometriji: eliptički i hiperbolički snop u odeljku o snopovima, a parabolički snop nakon uvođenja pojma paralelnosti u odeljku 27. Kako u apsolutnoj geometriji nismo mogli da ustanovimo u kakvom su odnosu dve disjunktne prave, nismo mogli da utvrdimo ni razliku između paraboličkog i hiperboličkog snopa. U euklidskoj geometriji ti snopovi se nisu međusobno razlikovali, pa su postojale samo dve vrste snopova: snop koaksijalnih pravih i snop paralelnih pravih. U hiperboličkoj geometriji dve disjunktne prave jedne ravni mogu da budu paralelne ili hiperparalelne, pa stoga, u hiperboličkoj geometriji razlikujemo tri vrste snopova pravih: *eliptički*, *parabolički* i *hiperbolički*. Budući da svaki snop pravih definiše i jedan snop ravni, u hiperboličkoj geometriji razlikovaćemo i tri vrste snopova ravni: *eliptički*, *parabolički* i *hiperbolički*.

Ako je jedan od zadatih dvaju snopova pravih eliptički, tada postoji jedinstvena prava koja pripada tim dvama snopovima, bez obzira na to da li je drugi snop eliptički, parabolički ili hiperbolički. Ako je jedan od njih hiperbolički, a drugi parabolički, postojaće jedinstvena prava koja pripada tim dvama snopovima pravih ako i samo ako prave paraboličkog snopa nisu paralelne osnovi hiperboličkog snopa, budući da postoji jedinstvena prava upravna na zadatoj ravni, a paralelna polupravoj koja nije paralelna toj ravni. Ako su oba snopa hiperbolička, postojaće jedinstvena prava koja pripada tim dvama snopovima pravih ako i samo ako su osnove tih dvaju snopova međusobno hiperparalelne ravni. Kada su zadati snopovi (oba) parabolički, važiće sledeće tvrđenje koje se dokazuje u potpunoj analogiji sa dokazom teoreme 32.1:

Teorema 32.7: *Postoji jedinstvena prava koja pripada dvama raznim paraboličkim snopovima pravih.* □

I sledeći stav se dokazuje u analogiji sa planimetrijskim tvrđenjem (teorema 32.2):

Teorema 32.8: *Translacijom duž bilo koje prave koja mu pripada parabolički snop se preslikava na sebe.* □

Episfere hiperboličkog prostora. Budući da je svaka episfera definisana jednim snopom pravih i bilo kojom svojom tačkom (teorema 19.2), a da u hiperboličkom prostoru postoje tri vrste snopova, postojaće i tri vrste episfera hiperboličkog prostora: *sfere*, *orisfere* i *ekvidistantne površi*. Neposredno se može proveriti da će dve sfere biti podudarne ako i samo ako su im poluprečnici međusobno podudarni. Sledećim dvema teoremama koje se dokazuju u analogiji sa teoremama 32.3 i 32.4, odgovorićemo na pitanje kada su dve orisfere ili dve ekvidistantne površi međusobno podudarni likovi.

Teorema 32.9: *Bilo koje dve orisfere su podudarni likovi.* □

Teorema 32.10: *Dve ekvidistantne površi su podudarne ako i samo ako su im visine podudarne.* □

Presek dveju episfera ili presek episfere i ravni je epicikl (teorema 19.4). Ako ravan sadrži pravu snopa kojim je definisana neka episfera $\mathcal{F}$, presek te ravni i episfere je krug, oricikl ili ekvidistanta u zavisnosti od toga da li je $\mathcal{F}$ sfera, orisfera ili ekvidistantna površ. Ako je ravan upravna na pravoj snopa kojim je definisana episfera $\mathcal{F}$ i sa njome ima zajedničkih tačaka, presek te ravni i episfere je krug ili tačka budući da je, na osnovu teoreme 19.3, svaka episfera istovetna sa skupom svih slika nekog epicikla u rotacijama oko prave snopa kojim je episfera

$\mathcal{F}$ definisana. Budući da postoji jedinstvena prava zadatog paraboličkog snopa upravna na zadatoj ravni koja ne sadrži pravu tog snopa, (neprazan) presek neke ravni koja ne sadrži pravu snopa kojim je definisana orisfera, i te orisfere je krug ili tačka. Ako ravan seče osnovu ekvidistantne površi, lako se proverava da je presek te ravni i ekvidistantne površi, ekvidistanta. Sledećom teoremom ćemo odgovoriti na pitanje o preseku ekvidistantne površi i ravni paralelne njenoj osnovi.

Teorema 32.11: *Presek ravni α koja je paralelna osnovi π neke ekvidistantne površi $\mathcal{F}$ i pripada poluprostoru sa rubom π kojem pripada i $\mathcal{F}$, je oricikl.*

Dokaz: Presek paraboličkog pramena $\mathcal{Y}$ ravni upravnih na ravnima α i π, i ravni α je parabolički pramen pravih. Proizvoljna prava toga pramena seče zadatu ekvidistantnu površ u nekoj tački P (teorema 31.2). Budući su ravni pramena $\mathcal{Y}$ upravne i na α i na π, refleksijama u odnosu na ravni toga pramena ekvidistantna površ $\mathcal{F}$ se preslikava na sebe, a skup svih slika tačke P u tim refleksijama će biti oricikl. Stoga će presek ravni α i ekvidistantne površi $\mathcal{F}$ biti oricikl. □

Geometrija orisfere. Neka je

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}, X)$$

orisfera i neka je $\mathcal{V}$ snop ravni definisan snopom $\mathcal{U}$. Nazovimo tu orisferu *e-ravni*, a svaku njenu tačku *e-tačkom*. Presek svake ravni snopa $\mathcal{V}$, i orisfere $\mathcal{E}$, biće oricikl. Svaki takav oricikl nazovimo *e-pravom*, a svaki segment tog oricikla nazovimo *e-duži*. Za e-tačku B reći ćemo da je *e-između* e-tačaka A i C i pisaćemo

$$\mathcal{B}_e(A, B, C)$$

ako e-tačka B pripada e-duži AC. Za par e-tačaka (A, B) reći ćemo da je *e-podudaran* paru e-tačaka (C, D) i pisaćemo

$$(A, B) \overset{e}{\cong} (C, D)$$

ako postoji izometrija hiperboličkog prostora koja ostavlja invarijantnom orisferu $\mathcal{E}$, a par (A, B) preslikava na par (C, D). Dokažimo da na ovaj način uvedeni pojmovi e-tačke, e-prave, e-između i e-podudarnosti zadovoljavaju sve aksiome apsolutne planimetrije.

Budući da svaki oricikl sadrži bar dve tačke i da postoji jedinstven oricikl zadate orisfere koji sadrži dve njene međusobno različite tačke, biće zadovoljene prve tri aksiome pripadanja: svaka e-prava sadrži najmanje dve razne e-tačke; postoji najmanje jedna e-prava koja sadrži dve e-tačke; postoji najviše jedna e-prava koja sadrži dve razne e-tačke. Ako tačke jedne e-prave nazovemo *e-kolinearnim*, a tačke koje ne priradaju jednoj e-pravoj *e-nekolinearnim*, tada e-ravan sadrži najmanje tri e-nekolinearne tačke jer postoji tačka orisfere koja ne pripada zadatom oriciklu te orisfere. Stoga je zadovoljena i poslednja planimetrijska aksioma prve grupe.

Neposredno se proverava da su zadovoljene i prve aksiome rasporeda jer: ako je $\mathcal{B}_e(A, B, C)$, tada su A, B, C tri razne e-kolinearne tačke; ako je $\mathcal{B}_e(A, B, C)$, tada je $\mathcal{B}_e(C,B,A)$; ako je $\mathcal{B}_e(A,B,C)$, tada nije $\mathcal{B}_e(A,C,B)$; ako su A i B dve razne e-tačke, tada postoji e-tačka C takva da je $\mathcal{B}_e(A,B,C)$; ako su A,B,C tri razne e-kolinearne tačke, tada je $\mathcal{B}_e(A,B,C)$ ili $\mathcal{B}_e(B,C,A)$ ili $\mathcal{B}_e(C,A,B)$. Nije teško proveriti da važi i Pašova aksioma. Zaista, ako su A,B,C tri e-nekolinearne tačke orisfere, tada će ravan seći neku e-duž AB,BC,CA ako i samo ako seče duž AB,BC,CA (posledica teoreme 21.8). Ako ravan α snopa $\mathcal{V}$ kojim je definisana orisfera $\mathcal{E}$, seče jednu ivicu trougla ABC, a ne sadrži ni jedno njegovo teme, ona će seći još jednu ivicu tog trougla. Stoga će ravan α koja seče jednu od e-duži AB,BC,CA seći još jednu. Dakle, ako su A,B,C tri e-nekolinearne tačke i ako je p e-prava koja ne sadrži e-tačku A i seče e-pravu BC u tački P takvoj da je $\mathcal{B}_e(B,P,C)$, tada e-prava p seče e-pravu CA u tački Q takvoj da je $\mathcal{B}_e(C,Q,A)$ ili e-pravu AB u tački R takvoj da je $\mathcal{B}_e(A,R,B)$.

Iz definicije e-podudarnosti neposredno sledi da su zadovoljene prve četiri aksiome treće grupe: ako su A,B,C,D e-tačke takve da je $(A,B)\stackrel{e}{\cong}(C,D)$ i $A=B$, tada je $C=D$; ako su A i B bilo koje dve e-tačke, tada je $(A,B)\stackrel{e}{\cong}(B,A)$; ako su A,B,C,D,E,F e-tačke takve da je $(A,B)\stackrel{e}{\cong}(C,D)$ i $(A,B)\stackrel{e}{\cong}(E,F)$, tada je $(C,D)\stackrel{e}{\cong}(E,F)$; ako su C i C' tačke e-duži (AB) i $(A'B')$ takve da je $(A,C)\stackrel{e}{\cong}(A',C')$ i $(B,C)\stackrel{e}{\cong}(B',C')$, tada je i $(A,B)\stackrel{e}{\cong}(A',B')$. Da bismo dokazali da važe i ostale aksiome treće grupe definišimo najpre pojmove e-poluprave i e-poluravni. Ako je α ravan snopa $\mathcal{V}$ koja sadrži e-tačku P neke e-prave p i upravna je na ravni toga snopa koja sadrži p, presek e-prave p i poluprostora čiji je rub ravan α nazivamo *e-polupravom*, a tačku P njenim *temenom*. Presek poluprostora čiji je rub α i zadate orisfere zvaćemo *e-poluravni*. Budući da refleksije u odnosu na ravni snopa $\mathcal{V}$ ostavljaju orisferu $\mathcal{E}$ invarijantnom i da medijalna ravan duži čija temena pripadaju toj orisferi, pripada snopu $\mathcal{V}$, iz definicije e-podudarnosti sledi da važe i ostale aksiome treće grupe: ako su A i B dve razne e-tačke i C teme neke e-poluprave, tada na toj e-polupravoj postoji e-tačka D takva da je $(A,B)\stackrel{e}{\cong}(C,D)$; ako su A,B,C tri e-nekolinearne tačke i A',B' tačke ruba neke e-poluravni π takve da je $(A,B)\stackrel{e}{\cong}(A',B')$, tada u e-poluravni π postoji jedinstvena e-tačka C' takva da je $(A,C)\stackrel{e}{\cong}(A',C')$ i $(B,C)\stackrel{e}{\cong}(B',C')$; ako su A,B,C i A',B',C' dve trojke e-nekolinearnih tačaka i D i D' tačke e-polupravih BC i $B'C'$ takve da je $(A,B)\stackrel{e}{\cong}(A',B')$, $(B,C)\stackrel{e}{\cong}(B',C')$, $(C,A)\stackrel{e}{\cong}(C',A')$, $(B,D)\stackrel{e}{\cong}(B',D')$, tada je i $(A,D)\stackrel{e}{\cong}(A',D')$.

Budući da su Arhimedova i Kantorova aksioma posledice Dedekindove teoreme i da važi Dedekindova teorema za segmente (teorema 21.7), važiće i dve aksiome neprekidnosti: ako su AB i CD bilo koje dve e-duži, tada na e-polupravoj AB postoji konačan niz e-tačaka $A_1,A_2,\ldots,A_n$ takvih da je $\mathcal{B}_e(A_1,A_2,\ldots,A_n)$, pri čemu je svaka od e-duži $AA_1,A_1A_2,\ldots,A_{n-1}A_n$ e-podudarna e-duži CD i $\mathcal{B}_e(A,B,A_n)$; ako je $A_1B_1,A_2B_2,\ldots,A_nB_n,\ldots$ niz e-duži neke e-prave, takvih da svaka od tih e-duži sadrži sledeću, tada postoji e-tačka X koja pripada svakoj e-duži tog niza. Time smo dokazali da pojmovi e-tačke, e-prave, e-između i e-podudarnosti zadovoljavaju sve aksiome apsolutne planimetrije.

Ako su A,B,C tri e-nekolinearne tačke, skup koji se sastoji iz tih e-tačaka i tačaka e-duži AB,BC,CA zvaćemo *e-trouglom*. Ako su a,b,c prave snopa $\mathcal{U}$ koje sadrže tačke A, B, C, tada ćemo uglove konveksnih diedara kojima su ivice a, b, c, a pljosni sadrže parove pravih a, b, b, c, c, a, zvati *uglovima e-trougla ABC*. Iz teoreme 25.17 neposredno sledi da je zbir unutrašnjih uglova svakog e-trougla, π, pa je, na osnovu teoreme 26.2,1°, zadovoljena i Plejferova aksioma paralelnosti. Time smo dokazali da je e-ravan model euklidske ravni. Dakle, dokazali smo sledeće tvrđenje:

Teorema 32.12: *Na orisferi se realizuje euklidska geometrija.* □

Budući da postoji bijekcija između skupova e-tačaka i e-pravih sa jedne strane i pravih i ravni snopova $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ sa druge, iz prethodne teoreme sledi da je geometrija pravih i ravni snopova $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ istovetna sa geometrijom tačaka i pravih euklidske ravni. Odatle sledi da svakom tvrđenju euklidske planimetrije odgovara teorema hiperboličke streometrije. Na primer iz Plejferove aksiome sledi da važi sledeći stav hiperboličke geometrije:

Teorema 32.13: *Ako je ravan α paralelna pravoj p, tada postoji jedinstvena ravan β koja sadrži p i nema zajedničkih tačaka sa ravni α.* □

U potpunoj analogiji sa teoremom 32.12 može se dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 32.14: *Na ekvidistantnoj površi se realizuje hiperbolička planimetrija.* □

ZADACI:

1. Neposredno se proverava da je presek sfere i bilo koje druge episfere, krug. Šta je presek dveju orisfera, dveju ekvidistantnih površi ili jedne orisfere i jedne ekvidistantne površi?

2. Odrediti sve izometrije hiperboličke ravni koje ostavljaju invarijantnim neki parabolički pramen pravih.

3. Šta je proizvod dveju translacija ako ose tih translacija pripadaju dvema paralelnim pravama.

4. Ako su zadata dva para paralelnih ravni dokazati da postoji izometrija koja preslikava jedan par na drugi.

33. Asimptotski poligoni i poliedri

Poligoni sa nesvojstvenim temenima. Ako dopustimo da dve susedne ivice poligona ne budu duži već dve međusobno paralelne poluprave, dobijeni lik zvaćemo *asimptotskim poligonom sa jednim nesvojstvenim temenom.* Dopustićemo da poligon ima i više nesvojstvenih temena, a nećemo isključiti ni mogućnost da dva susedna temena poligona budu nesvojstvena. Ivica određena dvama susednim nesvojstvenim temenima je prava paralelna susednim ivicama tog poligona koje mogu biti poluprave ili prave. Poligon koji ima bar jedno teme nesvojstveno zvaćemo *nesvojstvenim* ili *asimptotskim poligonom.* Pretpostavićemo da je mera ugla kod nesvojstvenog temena nula.

Asimptotski trougao može imati jedno, dva ili tri nesvojstvena temena. Izdvajamo nekoliko osobina takvih trouglova koje su analogoni već poznatih stavova iz geometrije trouglova. Prva od tih osobina odnosi se na zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg nesvojstvenog trougla.

Teorema 33.1: *Spoljašnji ugao α' kod svojstvenog temena A trougla kome je teme N nesvojstveno, veći je od unutrašnjeg ugla β kod svojstvenog temena B tog trougla.*

Dokaz: Ako bi uglovi α' i β bili međusobno podudarni, prava koja sadrži središte duži AB i upravna je na pravoj BN, bila bi upravna i na AN, što je nemoguće jer bi tada poluprave AN i BN bile hiperparalelne.

Ako bi bilo $\alpha' < \beta$, u uglu β bi postojala poluprava p sa temenom B koja sa polupravom BA zahvata ugao podudaran uglu α'. Kako je $(BN) \| (AN)$, poluprava p bi sekla (AN) u nekoj tački P, pa bi u trouglu ABP spoljašnji ugao kod temena A bio jednak unutrašnjem uglu kod temena B, što je nemoguće. Dakle, $\alpha' > \beta$. □

Drugim rečima, zbir unutrašnjih uglova nekog nesvojstvenog trougla je manji od π, pa je njegov defekt pozitivan.

Od teorema o podudarnosti asimptotskih trouglova dokažimo najpre onu koja se odnosi na trouglove sa jednim nesvojstvenim temenom.

Teorema 33.2: *Trouglovi ABN i $A'B'N'$ sa nesvojstvenim temenima N i N' su međusobno podudarni ako i samo ako su:*

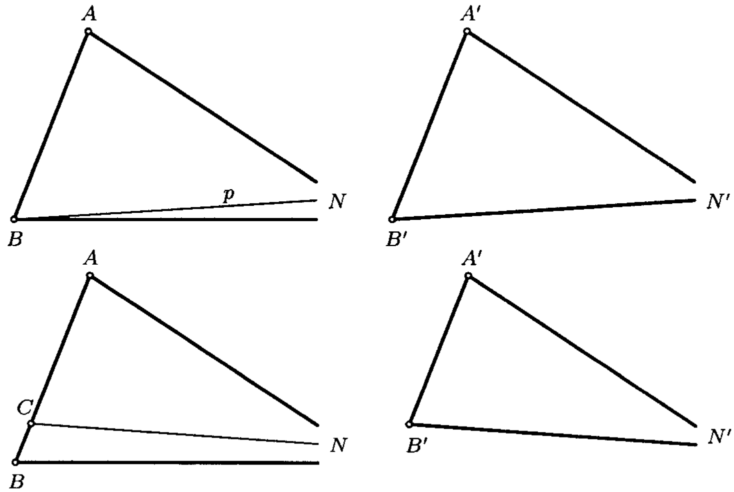
(a) međusobno podudarni uglovi A i A' i ivice AB i $A'B'$,

(b) uglovi A i B podudarni uglovima A' i B'.

Dokaz: Iz podudarnosti trouglova ABN i $A'B'N'$ neposredno sledi da su ispunjeni uslovi (a) i (b). Dokažimo i obratno:

(a) Ako pretpostavimo da trouglovi ABN i $A'B'N'$ nisu međusobno podudarni, već da je jedan od uglova B i B', recimo B, veći od drugoga, tada bi poluprava p sa temenom B koja sa polupravom (BA) zahvata ugao podudaran uglu B', bila paralelna polupravoj (AN), pa bi postojale dve poluprave sa zajedničkim temenom B, paralelne polupravoj (AN).

(b) Ako bi jedna od ivica AB i $A'B'$, recimo ivica AB, bila veća od druge, tada bi postojala tačka C duži AB takva da je $AC \cong A'B'$ i jedinstvena poluprava (CN) paralelna svakoj od ivica (AN) i (BN). U tom slučaju asimptotski trouglovi ACN i $A'B'N'$ bili bi podudarni, pa bi u asimptotskom trouglu CBN spoljašnji



Slika 33a

ugao kod temena C bio podudaran unutrašnjem uglu kod temena B, što je nemoguće. □

Budući da prethodna teorema važi i u posebnom slučaju kada je jedan od asimptotskih trouglova pravougli, nepostredno se dokazuje da važi i sledeće tvrđenje:

Teorema 33.3: *Ako su ABN i $A'B'N'$ asimptotski trouglovi sa nesvojstvenim temenima N i N' i pravim uglovima kod temena B i B', tada su uglovi A i A' tih dvaju trouglova međusobno podudarni ako i samo ako je $AB \cong A'B'$.* □

Refleksijom u odnosu na pravu koja sadrži jedino svojstveno teme A asimptotskog trougla AMN, i upravna je na naspramnoj ivici MN tog trougla, trougao AMN se preslikava na trougao ANM. Stoga, iz teorema 33.3 i 33.2 sledi:

Teorema 33.4: *Dva asimptotska trougla AMN i $A'M'N'$ sa nesvojstvenim temenima M, N, M', N', su podudarna ako i samo ako su im uglovi A i A' međusobno podudarni.* □

Da bismo dokazali da postoji trougao kome su sva tri temena nesvojstvena pretpostavimo da su a i b dve međusobno paralelne prave. Iz dokaza teoreme 31.5 sledi da postoji prava n upravna na pravoj b, a paralelna pravoj a. Refleksijom $\mathcal{S}_n$ prava b se preslikava na sebe, a prava a na neku pravu c paralelnu i pravoj b i pravoj a. Prave a, b, c će biti ivice asimptotskog trougla kome su sva temena nesvojstvena. Budući da prava n razlaže taj trougao na dva asimptotska trougla kojima su uglovi kod jedinih svojstvenih temena pravi, iz prethodne teoreme sledi da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 33.5: *Bilo koja dva trougla kojima su sva temena nesvojstvena su međusobno podudarni likovi.* □

Prave upravne na jednoj, a paralelne drugim dvema ivicama nekog asimptotskog trougla kome su sva tri temena nesvojstvena, seku se u nekoj tački S koja se naziva *središtem* tog *trougla.* Poluprave sa temenom S koje su paralelne ivicama tog trougla razlažu ravan kojoj pripadaju na tri međusobno podudarna ugla. Svaki od trouglova ABC kojima su temena na tim trima polupravama takva da je $SA \cong SB \cong SC$, je pravilan jer se rotacijama

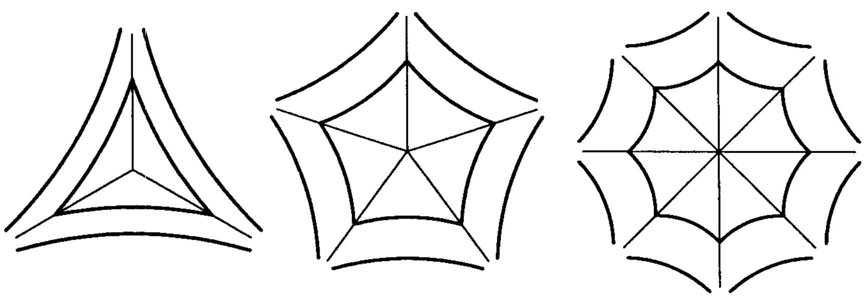
$$\mathcal{R}^k_{S,2\pi/3}, \quad k \in \{1,2,3\},$$

skup temena A, B, C preslikava na sebe. Tim rotacijama se i skup temena asimptotskog trougla kome su sva temena nesvojstvena preslikava na sebe, pa stoga, možemo reći da je i taj trougao *pravilan.*

Opštije, ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ poluprave sa zajedničkim temenom S koje ravan kojoj pripadaju razlažu na n podudarnih uglova, a $A_1, A_2, \ldots, A_n$, redom, tačke tih polupravih takve da je $SA_1 \cong SA_2 \cong \ldots \cong SA_n$, poligon $A_1A_2\ldots A_n$ će biti pravilan jer se rotacijama

$$\mathcal{R}^k_{S,2\pi/n}, \quad k \in \{1,2,\ldots,n\},$$

skup njegovih temena preslikava na sebe. Zato za asimptotski n-tougao kome su ivice prave paralelne susednim polupravama skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, možemo reći da je *pravilan asimptotski n-tougao* čija su temena na polupravama $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

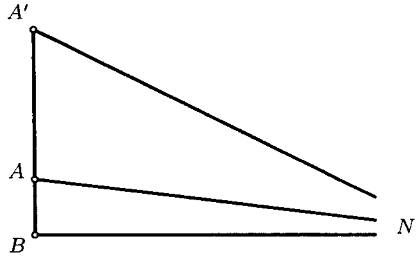


Slika 33b

Funkcija Lobačevskog. Teorema 33.3 nam omogućava da definišemo funkciju kojom svakoj duži AB mere x dodeljujemo ugao A mere $\Pi(x)$. Tu funkciju koja skup $\mathbb{R}^+$ nenegativnih realnih brojeva preslikava u interval $[0, \pi/2)$, nazivamo *funkcijom Lobačevskog.* Nećemo načiniti nikakvu konfuziju ukoliko pretpostavimo da je funkcijom Lobačevskog svakoj duži AB dodeljen oštar ugao $\Pi(AB)$ koji smo (u odeljku 27) nazvali uglom paralelnosti duži AB.

Teorema 33.6: *Ako je A' tačka poluprave (BA), onda je $A'B > AB$ ako i samo ako je $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$.*

Dokaz: Neka je N zajedničko nesvojstveno teme trouglova ABN i $A'BN$ kojima je zajednički ugao B prav. Ako je $A'B > AB$, iz teoreme 33.1 primenjene na asimptotski trougao $AA'N$ sledi da je $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$.



Slika 33c

Obratno, ako je $\Pi(A'B) < \Pi(AB)$, onda ne može biti ni $A'B \cong AB$ zbog teoreme 33.3, ni $A'B < AB$ zbog teoreme 33.1. □

Dakle, funkcija $\Pi(x)$ opada od $\pi/2$ do 0 kad x raste od 0 do ∞.

Defekt asimptotskog poligona. Kako je zbir unutrašnjih uglova nekog nesvojstvenog trougla manji od π, njegov defekt je pozitivan, pa je, stoga, i zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog prostog ravnog asimptotskog n-tougla $A_1A_2\ldots A_n$ manji od $(n-2)\pi$, a defekt

$$\delta(A_1A_2\ldots A_n) = (n-2)\pi - \sigma(A_1A_2\ldots A_n)$$

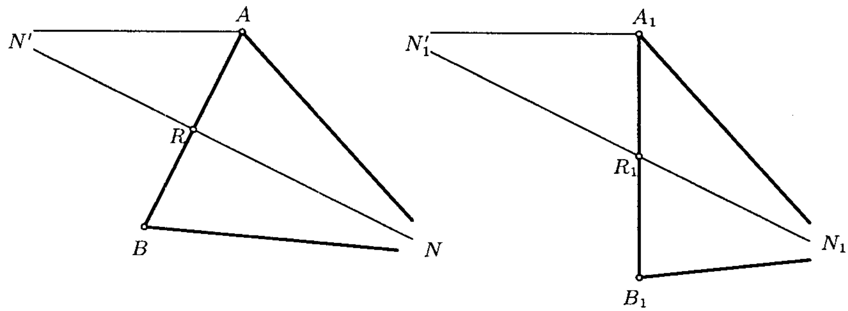
tog poligona pozitivan.

Ne menjajući ništa u dokazu teoreme 30.5 može se ustanoviti da je defekt poligonske površi p kojoj su neka temena nesvojstvena jednak zbiru defekata poligonskih površi p_1 i p_2 na koje je površ p razložena nekom poligonskom linijom. Stoga razloživo jednake poligonske površi (razložene na poligonske površi) koje mogu imati i nesvojstvenih temena, imaju jednake defekte.

I teorema 30.8 prema kojoj su trougaone površi jednakih defekata međusobno razloživo jednaki likovi, može se dokazati i u slučaju kada te trougaone površi imaju po jedno teme nesvojstveno.

Zaista, ako pretpostavimo da su trouglovi ABN i $A_1B_1N_1$ asimptotski sa nesvojstvenim temenima N i N_1, kojima su defekti jednaki, i ako su R i R_1 središta stranica AB i A_1B_1, centralnom simetrijom $\mathcal{S}_R$ trougao RBN se preslikava na asimptotski trougao RAN', a centralnom simetrijom $\mathcal{S}_{R'}$ trougao $R_1B_1N_1$ se preslikava u asimptotski trougao $R_1A_1N_1'$. Trougaone površi ANN' i $A_1N_1N_1'$ sa nesvojstvenim temenima N i N', odnosno N_1 i N_1', će biti podudarne jer imaju podudarne uglove kod temena A i A_1, pa su, stoga, trougaone površi ABN i

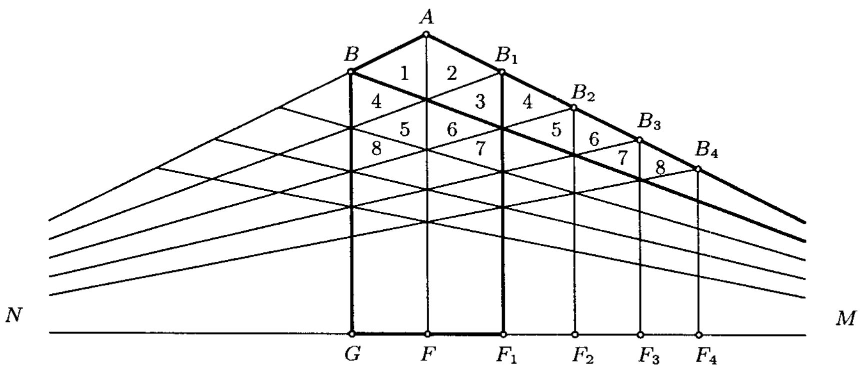
$A_1B_1N_1$ razloživo jednake. Primetimo da smo time dokazali i da su trougaona površ ABN sa nesvojstvenim temenom N i trougaona površ $A_1N_1N_1'$ sa nesvojstvenim temenima N_1 i N_1', kojima su defekti međusobno jednaki, razloživo jednaki likovi. Ako pretpostavimo da trougaone površi ABN i $A_1B_1N_1$ imaju sva temena nesvojstvena ili da su im po dva temena nesvojstvena, a defekti jednaki, tada su te trougaone površi međusobno podudarne, pa su, dakle, i razloživo jednaki likovi.



Slika 33d

Nije teško primetiti da dve trougaone površi (ili, u opštem slučaju, dve poligonske površi) Φ i Φ', prva bez nesvojstvenih temena, a druga sa bar jednim nesvojstvenim temenom nisu razloživo jednaki likovi. Zaista, bar jedno teme neke od (konačno mnogo) poligonskih površi na koje je razložena površ Φ' je nesvojstveno, pa ne postoji kružna površ kojoj je središte jedna od tačaka te poligonske površi, koja sadrži sve tačke te površi. Kako svaka poligonska površ na koje je razložena površ Φ ima tu osobinu, Φ i Φ' nisu razloživo jednaki likovi. Drugim rečima defekt definisan na skupu poligonskih površi sa nesvojstvenim temenima i bez njih, nema osobinu aditivnosti. Zapitajmo se da li, bez obira na to, defekt može da posluži kao funkcija mere definisana na skupu poligonskih površi sa nesvojstvenim temenima i bez njih.

Pretpostavimo da je ABM asimptotski trougao sa nesvojstvenim temenom M. Refleksijom u odnosu na simetralu unutrašnjeg ugla A tog trougla, asimptotski trougao ABM preslikava se na asimptotski trougao AB_1N sa nesvojstvenim temenom N. Neka je F podnožje upravne iz tačke A na pravoj MN koja je paralelna polupravama AB i AB_1, a neka je G podnožje upravane iz tačke B na istoj pravoj MN. Refleksijom u odnosu na simetralu B_1F_1 (F_1 je podnožje upravne iz B_1 na pravoj MN) ugla NB_1M prava BM se preslikava na pravu koja AM seče u nekoj tački B_2. Refleksijom u odnosu na AF trougao B_1B_2N se preslikava na trougao kome svojstvena temena pripadaju polupravoj AB, a nesvojstveno teme je M. Nastavljajući ovaj postupak konstruisaćemo skup trouglova 1,2,3,.. kojima stranice upravne na pravoj MN u tačkama $G, F, F_1, F_2, F_3, \ldots$, pripadaju simetralama uglova kod temena $B, A, B_1, B_2, B_3, \ldots$ Neposredno se proverava da je $FF_1 \cong F_1F_2 \cong F_2F_3 \cong \ldots$ Stoga će trouglovi na koje je konstruisanim pravama razložena trougaona površ ABM, biti podudarni odgovarajućim trouglovima na koje je razložena petougaona površ $ABGF_1B_1$. Dakle, trougaona površ ABM i petougaona površ $ABGF_1B_1$ neće biti razloživo jednaki likovi jer ukupan broj trouglova na koje su razloženi nije konačan, pa ćemo za njih reći da su *granično jednaki likovi.* Zato defekt definisan na skupu poligonskih površi sa nesvojstvenim temenima i bez njih, neće imati osobinu aditivnosti, već osobinu *σ-aditivnosti*: ako je lik Φ unija prebrojivo mnogo disjunktnih likova, tada je mera lika Φ jednaka zbiru mera disjunktnih likova na koje je lik Φ razložen. I takvu funkciju možemo zvati *merom.*



Slika 33e

Dakle, površina asimptotskog trougla ABM će biti jednaka površini petougaone površi $ABGF_1B_1$. Kako se svaki asimptotski trougao sa dvama ili trima nesvojstvenim temenima može razložiti na asimptotske trouglove sa jednim nesvojstvenim temenom, površine tih trouglova biće takođe konačne. Dakle:

Teorema 33.7: *Svaka trougaona površ sa nesvojstvenim temenima, pa stoga, i svaka poligonska površ sa nesvojstvenim temenima, ima konačnu površinu.* □

U posebnom slučaju kada asimptotski trougao ima sva tri temena nesvojstvena njegov defekt, pa dakle i njegova površina, će biti π.

Poliedri sa nesvojstvenim temenima. Ako dopustimo da pljosni nekog poliedra budu poligonske površi sa nesvojstvenim temenima, dobijeni lik ćemo zvati *asimptotskim poliedrom.* Kao i u slučaju poligona ivice asimptotskog poliedra moći će da budu poluprave ili prave u zavisnosti od toga da li im je samo jedno teme nesvojstveno ili oba.

Pretpostavimo da je S središte nekog pravilnog poliedra, a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ poluprave sa temenom S koje sadrže temena tog poliedra. Asimptotski poliedar kome su ivice prave paralelne parovima polupravih skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ koje sadrže susedna temena bilo koje pljosni tog poliedra zvaćemo *pravilnim asimptotskim poliedrom.* Budući da su pravilan tetraedar, pravilan heksaedar, pravilan oktaedar, pravilan dodekäedar i pravilan ikosaedar jedini pravilni poliedri apsolutnog prostora, svakom od njih će odgovarati po jedan pravilan asimptotski poliedar hipeboličkog prostora. Zvaćemo ih *pravilnim asimptotskim tetraedrom*, *pravilnim asimptotskim heksaedrom*, *pravilnim asimptotskim oktaedrom*, *pravilnim asimptotskim dodekaedrom* i *pravilnim asimptotskim ikosaedrom*.

ZADACI:

1. Ako je a proizvoljna ivica nekog trougla hiperboličke ravni i σ zbir njegovih unutrašnjih uglova, dokazati da je:

$$\Pi\left(\frac{a}{2}\right) < \frac{\sigma}{2}.$$

2. Neka su sva tri temena trougla ABC hiperboličke ravni, nesvojstvena, P proizvoljna tačka ivice BC, a Q i R podnožja upravnih iz P na ivicama CA i AB. Odrediti ugao QPR.

3. Ako je B tačka izvan zadate prave a, ako je C proizvoljna tačka prave a različita od podnožja A upravne iz B na pravoj a i ako je P tačka u kojoj krug sa središtem B i poluprečnika AC seče upravnu iz C na pravoj b koja je u tački B upravna na pravoj AB, dokazati da je prava BP paralelna pravoj a.

4. Odrediti pravu n koja je upravna na jednom kraku zadatog oštrog ugla, a paralelna njegovom drugom kraku.

5. Neka je ABC trougao hiperboličke ravni kome je ugao C prav. Ako je

$$A = \Pi(x) \quad \text{i} \quad B = \Pi(y),$$

dokazati da je

$$\Pi(x - CA) + \Pi(BC + y) = \frac{\pi}{2}.$$

6. Neka je $ABCD$ Lambertov četvorougao kome je ugao D oštar. Ako je

$$\Pi(x) = \frac{\pi}{2} - \Pi(BC) \quad \text{i} \quad \Pi^{-1}(D) = l,$$

dokazati da je

$$\Pi(DA + l) + \Pi(x - AB) = \frac{\pi}{2}.$$

7. Ako su A i B dve razne tačke neke orisfere, dokazati da su tangentne ravni orisfere u tačkama A i B

1° konkurentne ako i samo ako je $\Pi\left(\frac{AB}{2}\right) > \frac{\pi}{4}$,

2° paralelne ako i samo ako je $\Pi\left(\frac{AB}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$,

3° hiperparalelne ako i samo ako je $\Pi\left(\frac{AB}{2}\right) < \frac{\pi}{4}$.

8. Ako dva asimptotska trougla kojima su sva temena nesvojstvena imaju jednu ivicu zajedničku, kojom se izometrijom preslikavaju jedan na drugi?

9. Neka su a, b, c, d tangente oricikla u tačkama A, B, C, D takve da je $a \| b$ i $c \perp d$, $c \cap d = K$. Dokazati da je $AB = 2CK$.

34. Modeli hiperboličke ravni i prostora

Poenkareov disk model. Neka je zadat proizvoljan krug euklidske ravni. Nazovimo taj krug *apsolutom*, njegovu unutrašnjost nazovimo *h-ravni*, a svaku tačku h-ravni nazovimo *h-tačkom*. Ako je proizvoljan krug (ili prava) euklidske ravni upravan na apsoluti, njegov presek sa h-ravni nazovimo *h-pravom*. Tačke u kojima taj krug (ili prava) seku apsolutu zvaćemo *krajevima* te h-prave. Svaki segment kruga (ili duž prave) koji je upravan na apsoluti, čija temena pripadaju h-ravni nazovimo *h-duži*, a segment toga kruga čije je jedno teme na apsoluti, a drugo pripada h-ravni nazovimo *h-polupravom*. Prvo od tih dvaju temena zvaćemo *krajem*, a drugo *temenom h-poluprave*. Neposredno se proverava da h-prava razlaže h-ravan na dve oblasti koje nazivamo *h-poluravnima*. Tu h-pravu zvaćemo *rubom* te *h-poluravni*. Dve h-poluprave koje imaju zajedničko teme razlažu h-ravan na dve oblasti koje nazivamo *h-uglovima*, a te dve poluprave nazivamo *kracima* toga *h-ugla*.

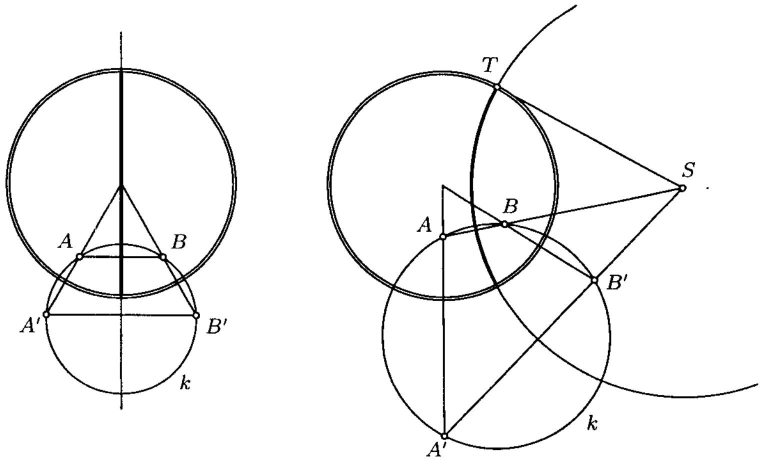
Ako su A, B, C tri h-tačke koje ne pripadaju jednoj h-pravoj, tada skup koji se sastoji iz tačaka h-duži AB, BC, CA nazivamo *h-trouglom*. U analogiji sa pojmom ugla trougla (odeljak 8) može se uvesti i pojam *ugla h-trougla*. I pojam *h-poligonske linije* i *h-poligona* se uvode u analogiji sa odgovarajućim pojmovima apsolutne geometrije. Isto tako i pojmovi *ugla h-poligona* i *h-poligonske površi*, pojam *h-triangulacije* itd.

Inverzijom u odnosu na krug k upravan na apsoluti ili refleksijom u odnosu na pravu k upravnu na apsoluti (koja stoga sadrži središte apsolute), h-ravan se preslikava na sebe. Restrikciju te inverzije (ili refleksije) na h-ravan zvaćemo *h-refleksijom*. *Osom* te *h-refleksije* zvaćemo h-pravu koja pripada krugu (ili pravoj) k. Svaka poluravan kojoj je rub osa neke h-refleksije tom h-refleksijom se preslikava na njoj komplementnu h-poluravan. Uvođenju pojma h-podudarnosti prethodi nekoliko teorema koje se odnose na h-refleksije.

Teorema 34.1: *Za dve razne h-tačke A i B postoji jedinstvena h-refleksija kojom se te dve tačke preslikavaju jedna na drugu.*

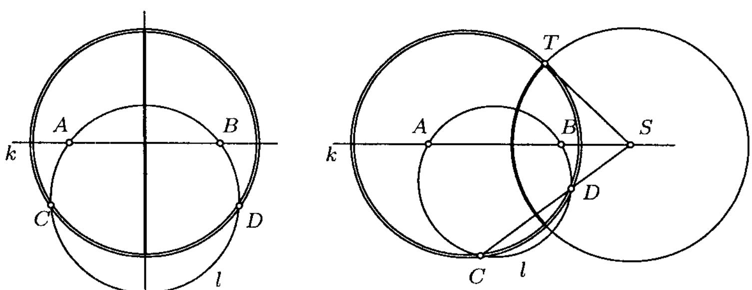
Dokaz: Neka su A' i B' slike tačaka A i B u inverziji u odnosu na apsolutu. Postoji jedinstven krug (ili prava) k koji sadrži tačke A, B, A', B', pa stoga postoji jedinstvena h-prava koja sadrži tačke A i B.

Ako su prave AB i $A'B'$ paralelne, h-prava koja pripada medijatrisi duži AB (i $A'B'$) će biti osa h-refleksije kojom se h-tačke A i B preslikavaju jedna na drugu. Ako se prave AB i $A'B'$ seku, osa h-refleksije kojom se tačke A i B preslikavaju jedna na drugu biće h-prava koja pripada krugu upravnom na apsoluti i na krugu



Slika 34ab

k. Središte S kruga koji sadrži tu h-pravu pripadaće pravoj AB i radikalnoj osi apsolute i kruga k, a poluprečnik toga kruga biće duž ST gde je T dodirna tačka apsolute i njene tangente koja sadrži tačku S.

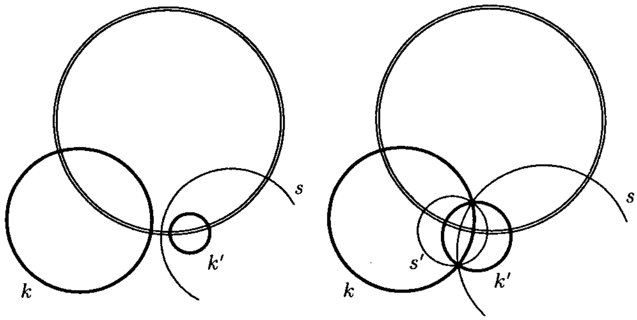


Slika 34cd

Ako h-duž AB pripada prečniku apsolute, tada postoji krug l koji sadrži tačke A i B, a seče apsolutu u tačkama C i D. Ako su prave AB i CD paralelne, središte apsolute biće i središte duži AB, pa je tada prečnik apsolute koji je upravan na AB, osa h-refleksije kojom se tačke A i B preslikavaju jedna na drugu. Ako je presek pravih AB i CD neka tačka S, osa h-refleksije kojom se tačke A i B preslikavaju jedna na drugu biće h-prava koja pripada krugu upravnom na apsoluti i na krugu l. Središte toga kruga biće tačka S koja pripada pravoj AB i radikalnoj osi apsolute i kruga l, a poluprečnik toga kruga biće duž ST gde je T dodirna tačka apsolute i njene tangente koja sadrži tačku S.

Jedinstvenost tražene ose se, u svakom slučaju, dokazuje neposredno. □

Teorema 34.2: *Ako se dve h-prave seku, tada postoje dve h-refleksije kojima se one preslikavaju jedna na drugu, a ako su disjunktne, tada postoji jedinstvena h-refleksija kojom se one preslikavaju jedna na drugu.*



Slika 34ef

Dokaz: Neka su k i k' krugovi koji sadrže zadate h-prave. Ako su zadate prave disjunktne, i krugovi k i k' su disjunktni ili se dodiruju u tački koja pripada apsoluti, pa stoga postoji jedinstvena inverzija kojom se ti krugovi preslikavaju jedan na drugi. Kako krug te inverzije pripada pramenu kojem pripadaju i k i k', on će biti upravan na apsoluti. Dakle, postoji jedinstvena h-refleksija kojom se zadate prave preslikavaju jedna na drugu. Osa te h-refleksije pripada krugu s upravnom na apsoluti, čije je središte presek zajedničkih spoljašnjih tangenti krugova k i k'.

Ako se krugovi k i k' seku, tada postoje dve inverzije kojima se ti krugovi preslikavaju jedan na drugi, pa će postojati dve h-refleksije kojima se zadate prave preslikavaju jedna na drugu. Osa jedne od tih dveju h-refleksija pripada krugu s upravnom na apsoluti, čije je središte presek zajedničkih tangenti krugova k i k', a osa druge h-refleksije pripada krugu s' koji sadrži presečne tačke krugova k i k' i upravan je na krugu s. □

Iz dokaza prethodne teoreme neposredno sledi sledeće tvrđenje:

Teorema 34.3: *Postoji jedinstvena h-refleksija kojom se dve h-poluprave sa zajedničkim temenom preslikavaju jedna na drugu.* □

Za h-tačku B koja se razlikuje od dveju h-tačaka A i C reći ćemo da je *h-između* tih *dveju h-tačaka* i pisaćemo

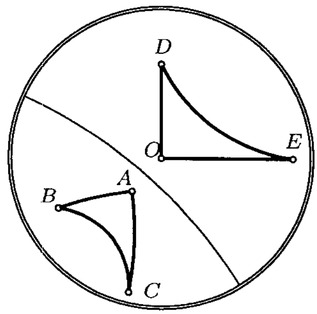
$$\mathcal{B}_h(A, B, C)$$

ako h-tačka B pripada h-duži AC. Za par h-tačaka (A, B) reći ćemo da je *h-podudaran* paru h-tačaka (C, D) i pisaćemo

$$(A, B) \overset{h}{\cong} (C, D)$$

ako postoji niz h-refleksija čiji proizvod preslikava par (A, B) na par (C, D). Proizvod tih h-refleksija zvaćemo *h-podudarnošću* ili *h-izometrijom h-ravni.* Pre no što dokažemo da na ovaj način uvedeni pojmovi h-tačke, h-prave, h-između i h-podudarnosti parova tačaka zadovoljavaju sve aksiome apsolutne planimetrije dokažimo sledeći stav.

Teorema 34.4: *Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog h-trougla je manji od π.*



Slika 34g

Dokaz: Ako je ABC h-trougao i O središte apsolute, tada postoji h-refleksija kojom se tačka A preslikava u O, a tačke B i C, redom, u D i E. Tom refleksijom se uglovi h-trougla ABC preslikavaju na njima podudarne uglove h-trougla ODE, a h-duži AB i AC se preslikavaju na h-duži OD i OE koje pripadaju prečnicima apsolute. Kako su uglovi kod temena D i E h-trougla ODE manji od uglova kod istih temena (euklidskog) trougla ODE, zbir unutrašnjih uglova h-trougla ODE biće manji od π. Stoga će i zbir unutrašnjih uglova h-trougla ABC biti manji od π. □

Dakle, zbir unutrašnih uglova proizvoljnog prostog h-četvorougla biće manji od 2π, a zbir unutrašnjih uglova h-poligonske površi koja ima n ivica biće manji od $(n-2)\pi$.

Teorema 34.5: *h-ravan je model hiperboličke ravni.*

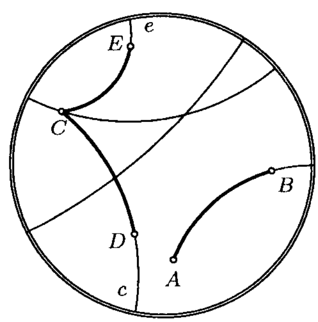
Dokaz: Dokažimo najpre da pojmovi h-tačke, h-prave, h-između i h-podudarnosti parova tačaka zadovoljavaju sve aksiome apsolutne planimetrije.

Budući da svaki krug sadrži bar dve tačke i da postoji jedinstven krug upravan na apsoluti koji sadrži dve razne tačke, biće zadovoljene prve tri aksiome pripadanja: svaka h-prava sadrži najmanje dve razne h-tačke; postoji najmanje jedna h-prava koja sadrži dve h-tačke; postoji najviše jedna h-prava koja sadrži dve razne h-tačke. Ako tačke jedne h-prave nazovemo *h-kolinearnim*, a tačke koje ne pripadaju jednoj h-pravoj *h-nekolinearnim*, tada h-ravan sadrži najmanje tri h-nekolinearne tačke. Stoga je zadovoljena i poslednja planimetrijska aksioma prve grupe.

Neposredno se proverava da su zadovoljene i prve aksiome rasporeda jer: ako je $\mathcal{B}_h(A,B,C)$, tada su A,B,C tri razne h-kolinearne tačke; ako je $\mathcal{B}_h(A,B,C)$, tada je $\mathcal{B}_h(C,B,A)$; ako je $\mathcal{B}_h(A,B,C)$, tada nije $\mathcal{B}_h(A,C,B)$; ako su A i B dve razne h-tačke, tada postoji h-tačka C takva da je $\mathcal{B}_h(A,B,C)$; ako su A,B,C tri razne h-kolinearne tačke, tada je $\mathcal{B}_h(A,B,C)$ ili $\mathcal{B}_h(B,C,A)$ ili $\mathcal{B}_h(C,A,B)$. Nije teško proveriti da važi i Pašova aksioma. Zaista, ako su A,B,C tri h-nekolinearne tačke i ako je p h-prava koja ne sadrži h-tačku A i seče h-pravu BC u tački P takvoj da je $\mathcal{B}_h(B,P,C)$, tada tačka A pripada ili onoj h-poluravni sa rubom p kojoj pripada i tačka B ili onoj h-poluravni kojoj pripada tačka C. S obzirom na teoreme 21.9–10, h-prava p će seći h-pravu CA u h-tački Q takvoj da je $\mathcal{B}_h(C,Q,A)$ ili h-pravu AB u h-tački R takvoj da je $\mathcal{B}_h(A,R,B)$.

Iz definicije h-podudarnosti neposredno sledi da važi prva aksioma treće grupe: ako su A,B,C,D h-tačke takve da je $(A,B) \overset{h}{\cong} (C,D)$ i $A=B$, tada je $C=D$. Relacija h-podudarnosti zadovoljava drugu aksiomu treće grupe budući da za zadate h-tačke A i B postoji h-refleksija kojim se te dve h-tačke preslikavaju jedna na drugu (teorema 34.1). Dakle, ako su A i B bilo koje dve h-tačke, tada je $(A,B) \overset{h}{\cong} (B,A)$. Kako je svaka inverzija involucija, treća aksioma podudarnosti se neposredno proverava; ako su A,B,C,D,E,F h-tačke takve da je $(A,B) \overset{h}{\cong} (C,D)$ i $(A,B) \overset{h}{\cong} (E,F)$, tada je $(C,D) \overset{h}{\cong} (E,F)$.

Da bismo dokazali da važi peta aksioma podudarnosti pretpostavimo da su A i B dve razne h-tačke, a da je C teme neke h-poluprave c. Tada, na osnovu teoreme 34.1, postoji jedinstvena h-refleksija kojom se tačka A preslikava u tačku C. Neka se tom h-refleksijom h-poluprava AB preslikava na neku h-polupravu e, a tačka B u tačku E te h-poluprave. Kako postoji h-refleksija kojom se h-poluprave c i e preslikavaju jedna na drugu, tom h-refleksijom se h-tačka E preslikava u neku h-tačku D. Dakle, ako su A i B dve razne h-tačke i C teme neke h-poluprave, tada na toj h-polupravoj postoji h-tačka D takva da je $(A,B) \overset{h}{\cong} (C,D)$. Štaviše, h-tačka D je jedinstvena.



Slika 34h

Zaista, ako bi postojala još neka tačka D' takva da je $(A,B) \overset{h}{\cong} (C,D')$, tada bi se h-refleksijom kojom se h-tačka E preslikava u h-tačku D, h-tačka D' preslikavala u neku h-tačku E' h-poluprave e. Budući da h-podudarnost čuva h-uglove jer uglove čuva svaka inverzija (i refleksija), $DD'E'E$ će biti h-četvorougao kome je zbir unutrašnjih uglova 2π, što je nemoguće na osnovu posledice teoreme 34.4.

Dokažimo da važi i šesta aksioma podudarnosti. U tom cilju pretpostavimo da se uređeni par (A,B) preslikava nekom h-podudarnošću na uređeni par (A',B'). Ako se h-tačka C koja ne pripada h-pravoj AB preslikava tom h-podudarnošću u h-tačku C', tada je $(A,C) \overset{h}{\cong} (A',C')$ i $(B,C) \overset{h}{\cong} (B',C')$. U h-poluravni sa rubom $A'B'$, kojoj pripada C' postoji jedinstvena h-tačka koja zadovoljava te uslove jer h-podudarnost čuva h-uglove budući da ih čuva i svaka inverzija (i refleksija). Dakle, ako je $(A,B) \overset{h}{\cong} (A',B')$, $(B,C) \overset{h}{\cong} (B',C')$ i $(C,A) \overset{h}{\cong} (C',A')$, tada postoji h-izometrija koja uređenu trojku (A,B,C) preslikava na uređenu trojku (A',B',C'). Štaviše, ta h-izometrija je jedinstvena.

Da bismo dokazali da je zadovoljena i sedma aksioma podudarnosti pretpostavimo da su A,B,C i A',B',C' dve trojke h-nekolinearnih tačaka i D i D' tačke h-polupravih BC i $B'C'$ takve da je $(A,B) \overset{h}{\cong} (A',B')$, $(B,C) \overset{h}{\cong} (B',C')$, $(C,A) \overset{h}{\cong} (C',A')$, $(B,D) \overset{h}{\cong} (B',D')$. Kako postoji jedinstvena h-izometrija koja uređenu trojku (A,B,C) preslikava na uređenu trojku (A',B',C'), tom h-izometrijom se tačka D preslikava u D' jer na h-polupravoj $B'C'$ postoji jedinstvena h-tačka D takva da je $(B,D) \overset{h}{\cong} (B',D')$, pa je, stoga, i $(A,D) \overset{h}{\cong} (A',D')$.

Na posletku, dokažimo da je zadovoljena i četvrta aksioma podudarnosti: ako su C i C' tačke h-duži AB i $A'B'$ takve da je $(A,C) \overset{h}{\cong} (A',C')$ i $(B,C) \overset{h}{\cong} (B',C')$, tada je i $(A,B) \overset{h}{\cong} (A',B')$. Zaista, budući da na h-polupravoj $A'B'$ postoji jedinstvena h-tačka C' takva da je $(A,C) \overset{h}{\cong} (A',C')$, a da na h-polupravoj $C'B'$ postoji jedinstvena h-tačka B' takva da je $(C,B) \overset{h}{\cong} (C',B')$, h-izometrijom kojom se uređeni par (A,C) preslikava na (A',C'), uređeni par (B,C) se preslikava na (B',C'), pa se njome i uređeni par (A,B) preslikava na (A',B').

Budući da važi Dedekindova teorema za segmente (teorema 21.7) te da su Arhimedova i Kantorova aksioma posledice Dedekindove teoreme, na h-pravoj su zadovoljene i obe aksiome neprekidnosti. Time smo dokazali da pojmovi h-tačke, h-prave, h-između i h-podudarnosti parova tačaka zadovoljavaju sve aksiome apsolutne planimetrije, te da je, stoga, h-ravan model apsolutne ravni.

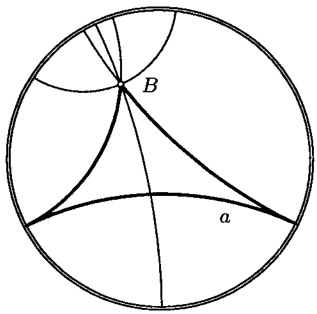
Kako je, na osnovu teoreme 34.4, zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog h-trougla manji od π, u h-ravni će, na osnovu teoreme 30.2,2°, važiti aksioma Lobačevskog, pa je h-ravan model hiperboličke ravni. □

Upravo konstruisani model hiperboličke ravni naziva se *Poenkareovim disk modelom.*

Iz prethodne teoreme sledi da je svakom pojmu hiperboličke planimetrije pridružen pojam geometrije h-ravni i da svaka teorema hiperboličke planimetrije ima svoju interpretaciju u geometriji h-ravni. Važi i obratno, dokazujući stavove geometrije h-ravni, dokazujemo teoreme hiperboličke geometrije.

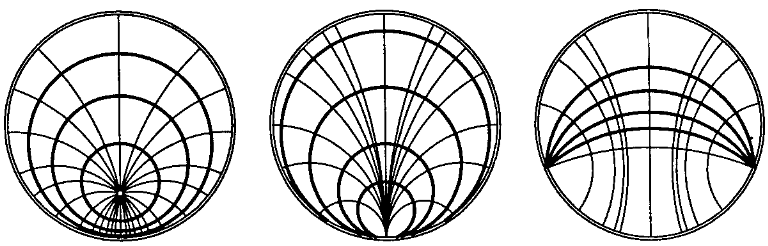
Pojam paralelnosti je jedan od značajnih pojmova apsolutne geometrije, pa ćemo, stoga, obratiti posebnu pažnju na njegovu interprataciju u h-ravni. Ako dve

h-poluprave sa zajedničkim temenom B imaju iste krajeve kao i neka h-prava a (koja ne sadrži B), tada će proizvoljna h-poluprava sa temenom B seći h-pravu a ako i samo ako pripada onom od h-uglova na koje zadate h-poluprave razlažu h-ravan, kojem pripada i h-prava a. Stoga za te dve h-poluprave možemo reći da su *h-paralelne h-pravoj a*. Za dve h-prave možemo reći da su *međusobno h-paralelne* ako imaju jedan zajednički kraj.



Slika 34i

Eliptički pramen h-pravih će biti skup svih h-pravih koje sadrže neku h-tačku. Krugovi koji sadrže neku h-tačku sadržaće i njoj inverznu tačku u odnosu na apsolutu (budući da su na njoj upravni) pa h-prave nekog eliptičkog pramena pripadaju krugovima nekog eliptičkog pramena krugova. Parabolički pramen h-pravih će biti skup svih h-pravih sa zajedničkim krajem. Budući da središta krugova koji sadrže h-prave jednog paraboličkog pramena pripadaju tangenti apsolute u zajedničkom kraju zadatog pramana h-pravih, h-prave nekog paraboličkog pramena pripadaju krugovima nekog paraboličkog pramena krugova. Slično, h-prave nekog hiperboličkog pramena pripadaju krugovima nekog hiperboličkog pramena krugova.



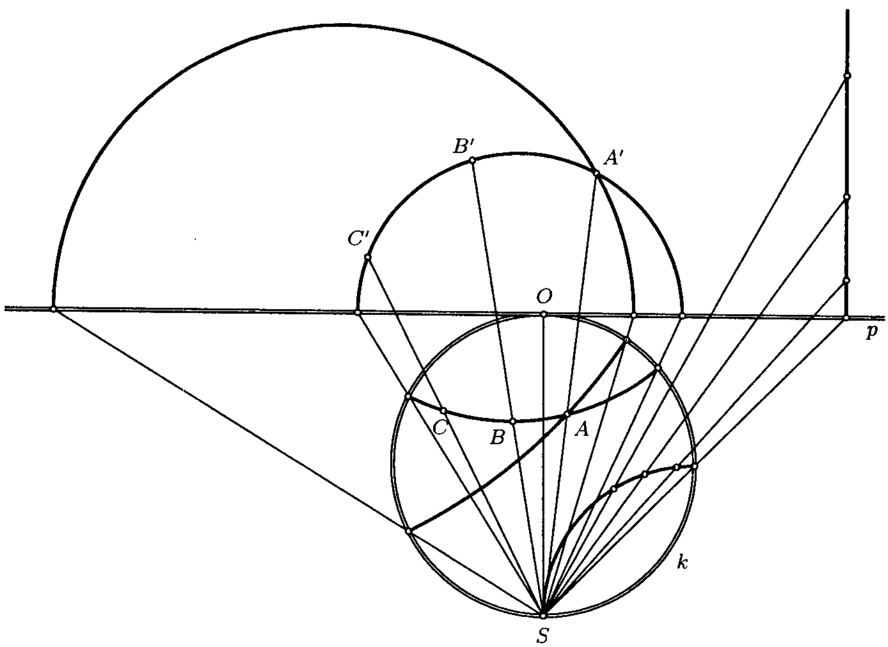
Slika 34j

Budući da je skup svih slika proizvoljne tačke ravni u inverzijama u odnosu na krugove nekog pramena, krug koji je upravan na svim krugovima zadatog pramena krugova, h-epicikl će biti (euklidski) krug ili deo toga kruga. On neće biti upravan na apsoluti osim u slučaju kada je je taj h-epicikl osnova neke h-ekvidistante.

Ako je zadat pramen konkurentnih h-pravih, njemu odgovarajući h-krug će biti (euklidski) krug koji pripada h-ravni. Kako je h-oricikl upravan na paraboličkom pramenu, on će biti (euklidski) krug kome nedostaje zajednički kraj h-pravih zadatog paraboličkog pramena. Ako je zadat hiperbolički pramen h-pravih, njemu odgovarajuća h-ekvidistanta je deo (euklidskog) kruga koji je upravan na zadatom pramenu krugova.

Primetimo, na posletku, da se u h-ravni na prirodan način može uvesti metrika. U tom cilju pretpostavimo da su A i B dve h-tačke, a a i b dve h-prave upravne na pravoj AB. Inverzivno rastojanje među krugovima koji sadrže h-prave a i b upravne na AB će biti funkcija definisana na skupu parova h-tačaka A, B koja zadovoljava sve uslove da bude mera duži. Stoga tu funkciju možemo nazvati *h-rastojanjem* ili *h-metrikom*.

Poenkareov poluravanski model. Neka su zadati krug k i prava p koja krug k dodiruje u nekoj tački O. Ako je S tačka kruga k dijametralno suprotna tački O, inverzijom ψ u odnosu na krug čije je središte S, a poluprečnik SO, krug k se preslikava na pravu p, a unutrašnjost σ toga kruga na otvorenu poluravan π sa rubom p. Neposredno se proverava da je to preslikavanje bijekcija.



Slika 34k

Nazovimo poluravan π *h-ravni*, a svaku njenu tačku *h-tačkom*. Budući da inverzija čuva uglove, h-prave unutrašnjosti σ kruga k se preslikavaju na polukrugove i poluprave poluravni π, upravne na rubu te poluravni. Te polukrugove i poluprave nazovimo *h-pravama h-ravni* π. Ako je tačka B h-ravni σ h-između tačaka A i C, tada ćemo za sliku B' tačke B (koja pripada h-ravni π) reći da je *h-između* slika A' i C' tačaka A i C (koje takođe pripadaju h-ravni π) u inverziji ψ i pisaćemo

$$\mathcal{B}_h(A', B', C').$$

Ako postoji niz inverzija u odnosu na krugove upravne na k takvih da se proizvodom tih inverzija par tačaka (A, B) h-ravni σ preslikava na par (C, D) iste h-ravni, postojaće i niz inverzija u odnosu na slike tih krugova u inveziji ψ takvih da se proizvodom tih inverzija par tačaka $(A', B') = \psi(A, B)$ h-ravni π preslikava na par $(C', D') = \psi(C, D)$ iste h-ravni. Kako su (A, B) i (C, D) h-podudarni parovi tačaka h-ravni σ, za parove (A', B') i (C', D') ćemo reći da su *h-podudarni parovi tačaka* h-ravni π i pisaćemo

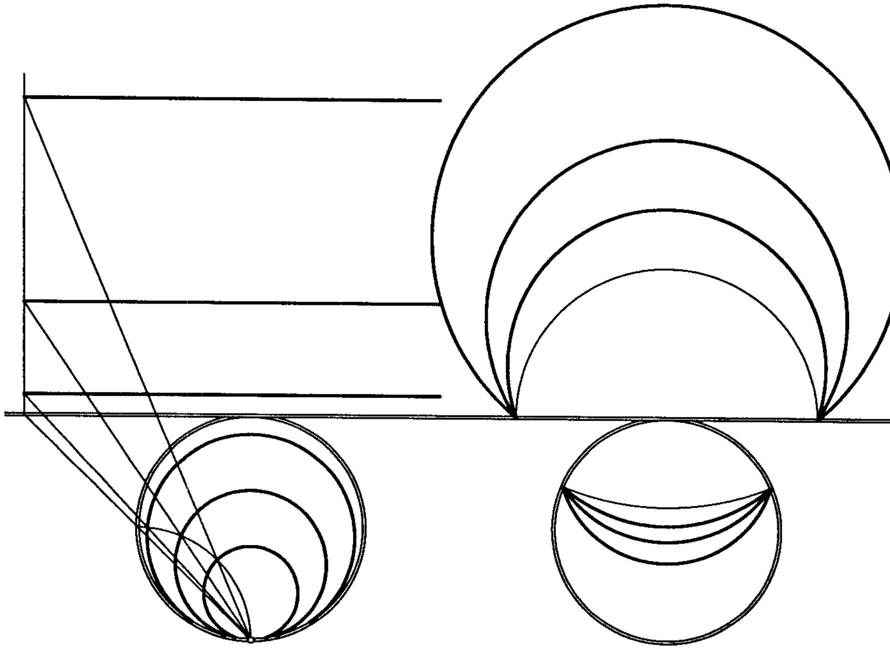
$$(A', B') \stackrel{h}{\cong} (C', D').$$

Budući da pojmovi h-tačke, h-prave, h-između i h-podudarnosti parova tačaka h-ravni σ zadovoljavaju sve aksiome hiperboličke planimetrije, te da se inverzijom ψ h-tačke i h-prave h-ravni σ preslikavaju na h-tačke i h-prave h-ravni π, i da na posletku inverzija ψ čuva relacije h-između i h-podudarnosti, pojmovi h-tačke, h-prave, h-između i h-podudarnosti parova tačaka h-ravni π će takođe zadovoljavati sve aksiome hiperboličke planimetrije. Stoga će i h-ravan π biti model hiperboličke planimetrije koji nazivamo *Poenkareovim poluravanskim modelom.*

Inverzijom ψ eliptički, parabolički i hiperbolički pramenovi h-pravih h-ravni σ se preslikavaju, redom, na eliptičke, paraboličke i hiperboličke pramenove h-pravih h-ravni π. Budući da h-prave nekog pramena h-pravih h-ravni σ pripadaju krugovima nekog pramena krugova, i h-prave pramena h-pravih h-ravni π pripadaju krugovima nekog pramena krugova.

Inverzijom ψ h-krugovi h-ravni σ se preslikavaju na (euklidske) krugove h-ravni π koji, stoga, predstavljaju h-krugove h-ravni π. Tom inverzijom h-oricikli h-ravni σ koji sadrže središte S zadate inverzije, preslikavaju se na (euklidske) prave h-ravni π koje su (euklidski) paralelne rubu p poluravni π, a ostali h-oricikli se preslikavaju na (euklidske) krugove poluravni π koji dodiruju pravu p. Stoga se skup h-oricikala h-ravni π sastoji iz (euklidskih) pravih poluravni π koje su paralelne pravoj p i krugova te poluravni koji dodiruju p. Inverzijom ψ h-ekvidistante h-ravni σ koje sadrže središte S te inverzije, preslikavaju se na (euklidske) poluprave sa temenima na pravoj p, a ostale h-ekvidistante na lukove krugova čija temena pripadaju pravoj p. Stoga se skup h-ekvidistanti h-ravni π sastoji iz (euklidskih) h-polupravih kojima su temena na rubu p poluravni p i lukova krugova čija temena pripadaju pravoj p.

Kako je inverzivno rastojanje invarijanta inverzije, Poenkareov poluravanski model hiperboličke ravni naslediće h-metriku Poenkareovog disk modela. Dakle, ako pretpostavimo da su A i B dve h-tačke poluravni π, a a i b dve h-prave upravne na pravoj AB, inverzivno rastojanje među krugovima koji sadrže h-prave a i b upravne na AB će biti funkcija definisana na skupu parova h-tačaka A, B



Slika 341

Poenkareovog poluravanskog modela, koja zadovoljava sve uslove da bude mera duži. Stoga tu funkciju možemo nazvati *h-rastojanjem* ili *h-metrikom Poenkareovog poluravanskog modela.*

Svaka teorema hiperboličke planimetrije ima svoju interpretaciju u geometriji h-ravni, a teoreme hiperboličke planimetrije mogu se dokazivati i na modelu. Pretpostavljajući znanje (euklidske) trigonometrije, ilustrujmo ovo samo jednim primerom.

Teorema 34.6: *Funkcija Lobačevskog se može izraziti sledećom formulom:*

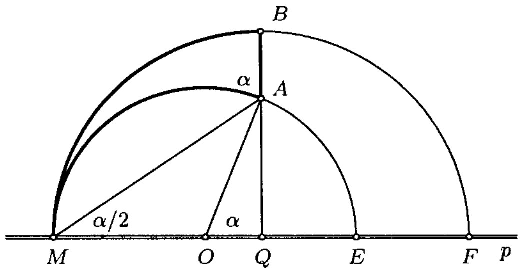
$$\Pi(x) = 2\,\mathrm{arctg}\, e^{-x}.$$

Dokaz: U poluravanskom modelu hiperboličke ravni neka je M zajednički kraj dveju h-pravih poluravni π kojima su drugi krajevi tačke E i F (koje pripadaju rubu p poluravni π) takve da je $\mathcal{B}(M, E, F)$. Neka je zatim B središte polukruga MF, a A tačka u kojoj upravna iz B na pravoj p seče polukrug ME. Ugao paralelnosti α duži AB je h-ugao MAB. Ako je Q podnožje upravne iz B na pravoj p, a O središte duži ME, biće

$$\measuredangle QOA \overset{h}{\cong} \alpha \quad \text{i} \quad \measuredangle QMA \overset{h}{\cong} \alpha/2.$$

Ako je x mera duži AB, x će biti inverzivno rastojanje koncentričnih krugova čiji su poluprečnici QB i QA. Stoga je

$$e^x = \frac{QB}{QA} = \frac{QM}{QA} = \operatorname{ctg} \alpha/2.$$



Slika 34m

Dakle,

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} e^{-x}. \qquad \square$$

Poenkareovi modeli hiperboličke stereometrije. Budući da se u analogiji sa pojmom inverzije u odnosu na krug može uvesti i pojam inverzije u odnosu na sferu, u analogiji sa Poenkareovim disk modelom hiperboličke ravni može se uvesti i Poenkareov disk model hiperbiličkog prostora. *Apsoluta* toga modela biće proizvoljna sfera, njena unutrašnjost biće *h-prostor*, a tačke h-prostora biće *h-tačke.* Presek h-prostora i proizvoljne sfere (ili ravni) euklidskog prostora upravne na apsoluti biće *h-ravan*, a presek h-prostora i proizvoljnog kruga (ili prave) upravne na apsoluti biće *h-prava.* Pojmovi *h-između* i *h-podudarnosti h-prostora* se uvode u potpunoj analogiji sa odgovarajućim pojmovima h-ravni.

U analogiji sa dokazanim osobinama h-ravni proverava se da važe i aksiome apsolutne planimetrije i aksioma paralelnosti. Da bismo dokazali da je h-prostor model hiperboličkog prostora neophodno je proveriti da li važe i stereometrijske aksiome prve grupe: postoji najmanje jedna h-ravan koja sadrži tri tačke; postoji najviše jedna h-ravan koja sadrži tri h-nekolinearne tačke; ako dve razne h-tačke neke h-prave pripadaju jednoj h-ravni, onda svaka h-tačka te h-prave pripada istoj h-ravni; ako dve razne h-ravni imaju jednu zajedničku h-tačku, onda one imaju najmanje još jednu zajedničku h-tačku; postoje četiri h-nekoplanarne tačke. Sva ova tvrđenja se neposredno proveravaju.

I Poenkareov poluprostorni model se uvodi u analogiji sa poluravanskim modelom hiperboličke planimetrije. Inverzijom ψ u odnosu na sferu σ koja dodiruje ravan π u tački O, čije je središte tačka sfere σ dijametralno suprotna tački O, unutrašnjost sfere σ (ona je h-prostor) preslikava se na otvoreni poluprostor sa rubom π (koji takođe predstavlja model hiperboličkog prostora). Restrikciju te inverzije na sferu σ, kojom se ta sfera preslikava na ravan π, nazivamo *sterografskom projekcijom*. Njome je uspostavljen izomorfizam dvaju modela hiperboličkog prostora.

35. Kratka istorija paralelnosti

U dokazima prvih dvadeset osam stavova Euklidovih Elemenata nigde se ne koristi peti postulat. Euklid je, reklo bi se, odlagao momenat kada je neophodno koristiti ovu aksiomu paralelnosti na kojoj počiva euklidska geometrija, nadajući se da će uspeti da je izvede iz ostalih aksioma i postulata. Stoga možemo reći da je Euklid prvi geometričar u istoriji koji se bavio neeuklidskom geometrijom budući da je na samom početku svoga dela dokazao mnoštvo teorema apsolutne geometrije.

Helenski i helenistički period. Neosporno, i u predeuklidskim vremenima bilo je razmatranja iz teorije paralelnih koja se tiču tvrđenja iskazanog petim Euklidovim postulatom. I Talesova i Pitagorina teorema pretpostavljaju peti postulat, a teoreme o svojstvima sličnih likova, koje takođe pretpostavljaju peti postulat, našle su mesto u Hipokratovim Elementima sudeći prema njihovim odlomcima sačuvanim u delu ranovizantijskog neoplatoničara Simplikija koji je s početka šestog veka živeo i radio u Aleksandriji i Atini. Zahvaljujući Proklovim komentarima Euklidovih Elemenata možemo pomenuti još neka imena grčkih autora koji su se bavili teorijom paralelnih u predeuklidsko vreme — pre svega Teeteta i Eudoksa (s početka IV veka stare ere). Arapski pesnik i mislilac Omar Hajam (1048–1131), citirajući neku Aristotelovu raspravu koja do nas nije dospela, među Aristotelovim principima ističe jedan ekvivalent petog Euklidovog postulata — tvrđenje prema kojem se „dve konvergentne prave linije seku, a nemoguće je da se dve konvergentne prave linije razilaze u smeru konvergencije". Iz Aristotelovog dela možemo posredno, i uz mnoge ograde, utvrditi stanje u teoriji paralelnih neposredno pre nastanka Euklidovih Elemenata. O tome da li je i pre Euklida bilo indirektnih pokušaje dokazivanja petog postulata možemo samo da pravimo pretpostavke.

Samo nekoliko decenija nakon nastanka Elemenata, Arhimed je napisao raspravu O paralelnim linijama koja je izgubljena, a o čijem postojanju sudimo na osnovu Bibliografije nauka koju je u desetom veku sastavio Muhamed ibn an-Nadim. Sadržaj ove rasprave izvesno je poznavao Sabit ibn Kora (836–901), a možda je, uz druge Arhimedove rasprave koje su do nas dospele u njegovom prevodu, i preveo na arapski jezik. Dve rasprave ibn Kore koje se odnose na teoriju paralelnih najverovatnije su nastale pod uticajem ovog Arhimedovog dela.

U svojim komentarima prve knjige Euklidovih Elemenata Proklo navodi i Posidonijev pokušaj dedukcije petog postulata iz ostalih aksioma geometrije koji počiva na definiciji prema kojoj su dve prave paralelne ako su tačke jedne od njih sve na istom rastojanju od druge. Međutim, kako Proklo primećuje, već navedena definicija sadrži pretpostavku da važi peti postulat. I Klaudije Ptolemej, pisac **Velikog zbornika astronomije** ili **Velike sintakse** koja je spajanjem arapskog „al“ sa grčkim „megiste“ dobila ime **Almagest**, bavio se teorijom paralelnih i, prema Proklovom svedočenju, dokazivao da prava koja seče dve disjunktne prave jedne ravni, sa svoje iste strane, sa njima zahvata podudarne uglove. I sam Proklo, uz kritike Ptolemajevog dokaza, iznosi svoj dokaz petog Euklidovog postulata i tvrdi da svaka prava koja seče jednu od dveju disjunktnih pravih jedne ravni, seče i drugu.

Vizantijski period. Sudeći prema arapskim izvorima, u ranovizantijskom periodu, uz Prokla, još dva geometričara su se u petom i šestom veku bavila pitanjima iz teorije paralelnih — Aganis o kojem do nas nisu dospeli nikakvi biografski podaci i njegov savremenik Simplikije, učenik Damaskijev koji je, opet, bio Proklov učenik. Zahvaljujući persijskom matematičaru Hatimu an-Nairiziju, koji je u desetom veku komentarisao Euklidove Elemente, znamo da su se Simplikije i Aganis bavili pretpostavkama neophodnim za dokaz 29. stava prve knjige Elemenata koji glasi: „Ako prava seče dve paralelne prave, ona gradi unutrašnje naizmenične uglove jednake, spoljašnji ugao jednak odgovarajućem unutrašnjem uglu i dva unutrašnja ugla sa iste strane jednaka dvama pravim uglovima“. Kako piše an-Nairizi, Simplikije je u svojoj raspravi posvećenoj 29. stavu najpre pomenuo da su se istim problemom bavili Antiniat i Diodor, a potom je izneo razmišljanja „svoga prijatelja“, pa stoga i savremenika, Aganisa. Prema njegovim rečima, Aganis je dokazivao da su dve prave disjunktne ako i samo ako postoji prava upravna na obema, a paralelne prave je definisao, slično Posidoniju, kao ekvidistantne. An-Nairizi ne iznosi dokaz aksiome paralelnosti samog Simplikija, već samo ističe njegovo tvrđenje da su ekvidistantne prave paralelne. Detalje Simplikijevog dokaza petog postulata saznajemo iz jednog pisma al-Hanafija (1178–1258) Nasiru ad-Dina at-Tusiju (1201–1274), znamenitom geometričaru svoga vremena. U tom pismu se iznosi značajan argument u dokazu petog postulata prema kojem prava upravna na jednom kraku oštrog ugla seče drugi krak. Hiljadu dvesta godina posle Simplikija istim argumentom se poslužio i Ležandr, kako smo već istakli u 23. odeljku.

Helenistička kultura, u osnovi paganska, polako je u ranovizantijskom periodu zalazila pod naletima hrišćanstva. Nekoliko tužnih događaja obeležilo je ovo doba. Veliku aleksandrijsku biblioteku razorila je 342. godine hrišćanska „rulja fanatizovana od aleksandrijskog arhiepiskopa Teofila“. Konačno, 529. godine Justinijan je zatvorio Platonovu Akademiju u Atini i time ukinuo poslednji centar paganskog neoplatonizma. Tako je u Vizantiji jedna vera konačno nestala, a sa njom i jedno veliko poglavlje svetske istorije. Prognani učitelji našli su novo utočište u Persiji i

Arabiji, a mnogi među njima na dvoru Persijskih vladara. Plodovi grčke kulture, a sa njima i Euklidovo delo, dospeli su tako Persijancima i Arapima koji su ga strastveno proučavali, komentarisali i dopunjavali sve do početka četrnaestog veka.

Arapski period. S početka devetog veka, za vreme vladanja „pravednog kalife“ Haruna al-Rašida, Elemente je na Arapski preveo al-Hadžadž, a prvi arapski komentator bio je al-Džauhari za koga se zna da je 829–833. godine učestvovao u astronomskim posmatranjima u Bagdadu i Damasku. Njegovi komentari su u mnogome slični Simplikijevim. Polazeći od tvrđenja da postoji prava koja sadrži proizvoljnu tačku unutar oštrog ugla i seče krake tog ugla, on dokazuje peti postulat.

Već pomenuti devetovekovni geometričar Sabit ibn Kora autor je čak dveju rasprava koje se odnose na teoriju paralelnih. U prvoj raspravi on dokazuje da postoji pravougaonik i odatle izvodi aksiomu paralelnosti. U svom dokazu on koristi tvrđenje da postoje slični trouglovi, na kojem se temelji dokaz petog postulata koji je u sedamnaestom veku izveo Džon Valis. U drugoj raspravi ibn Kora pretpostavlja da su neke dve prave AC i BD upravne na trećoj pravoj AB i da je neka prava iz tačke prave AC upravna na BD i dokazuje da je tada ta prava upravna i na AC, a odatle izvodi peti Euklidov postulat.

I an-Nairizi, desetovekovni komentator Aganisove teorije paralelnih, bio je autor Traktata o dokazu izvesnog Euklidovog postulata u kojem je dokazao da prava koja seče dve prave koje među sobom imaju isto rastojanje, sa tim pravama zahvata uglove čiji je zbir jednak zbiru dvaju pravih uglova, i odatle je dedukovao peti postulat.

Ibn Sina (980–1037), znameniti lekar, u Evropi poznat i pod imenom Avicena, tvorac čuvenog Kanona medicine, bavio se i teorijom paralelnih i, slično Posidoniju, paralelne prave definisao kao ekvidistantne.

Možda najzanimljiviji doprinos teoriji paralelnih iz ovog perioda dao je ibn al-Hajsam, arapski matematičar, fizičar i astronom koji je živeo na prelazu iz desetog u jedanaesti vek, „otac optike“, u srednjevekovnoj Evropi poznat kao Alhazen po latinskoj transkripciji svoga imena. Da bi dokazao peti Euklidov postulat, al-Hajsam na originalan način dokazuje da postoji pravougaonik. On ispituje četvorougao kome su tri ugla prava i razmatra tri mogućnosti koje se odnose na njegov četvrti ugao koji može biti oštar, prav ili tup. Oborivši „hipoteze oštrog i tupog ugla“, al-Hajsam dokazuje da je četvrti ugao prav i odatle izvodi aksiomu paralelnosti. Više od sedamsto godina posle al-Hajsama istim putem krenuo je Lambert, te se po njemu četvorougli kojima su tri ugla prava nazivaju Lambertovim.

I već spominjani pesnik Omar Hajam (1048–1131) bavio se teorijom paralelnih i, u cilju dedukovanja petog Euklidovog postulata iz ostalih aksioma euklidske geometrije, razmatrao četvorougle kojima su uglovi na jednoj ivici koja se naziva osnovicom pravi, a njoj susedne bočne ivice podudarne. Centralno mesto njegovog dokaza je tvrđenje da su kod takvih četvorouglova i uglovi na ivici koja je naspram osnovice pravi, te da stoga postoji pravougaonik, odakle jednostavno sledi peti postulat. Primetimo da će se istim četvorouglovima, šeststo godina kasnije, baviti Sakeri po kome će ti četvorougli dobiti ime Sakerijevi.

Nasir ad-Dina at-Tusi (1201–1274) se nadovezao na delo al-Hajsama i kritikujući njegov dokaz petog postulata dokazao „hipotezu pravog ugla", koristeći tvrđenje prema kojem prava upravna na jednom kraku oštrog ugla seče drugi krak. U Rimu je 1594. godine publikovana rasprava **Euclidis Elementorum geometricorum libri tredecim ex traditione doctorissimi Nasiridini Tusini** koja je, kako se vidi iz naslova, pripisana Nasir ad-Dina at-Tusiju. U njoj je autor, koji se obično naziva pseudo at-Tusijem budući da je ovo delo najverovatnije nastalo posle at-Tusijeve smrti, komentarišući Elemente, konstruisao pravougaonik oslanjajući se na tvrđenje prema kojem je zbir uglova u trouglu jednak zbiru dvaju pravih uglova i, zahvaljujući tome, dokazao peti postulat. Značaj ovoga dela ogleda se u tome što su, zahvaljujući njemu, sistematisana arapska razmišljanja na temu teorije paralelnih dospela u Evropu, do Valisa i Sakerija.

Prvi zapadnoevropski pokušaji. Pod uticajem arapskih i persijskih geometričara u Evropi je od trinaestog do kraja sedamnaestog veka bilo više pokušaja da se dokaže aksioma paralelnosti. Prvi od tih pokušaja, koliko je do sada poznato, načinio je Vitelo (oko 1230–1275), koji je u svojoj **Optici** štampanoj prvi put 1572. godine, čiji sadržaj je veoma blizak Optici ibn al-Hajsama, u poglavlju posvećenom perspektivi pokušao da dokaže peti postulat.

S početka četrnaestog veka nastala su dva dela posvećena petom postulatu u kojima je ponovljen pokušaj da se konstruiše pravougaonik, oba pisana na starojevrejsom jeziku. Prvo je nastalo u južnoj Francuskoj i napisao ga je Gersonid (Levi ben Geršon 1288–1344), a drugo u Španiji i njegov autor je izvesni Alfonso, najverovatnije Alfonso de Viljadolid (1270–1346).

Kritikujući antičke, arapske i latinske geometričare koji su paralelne prave definisali kao ekvidistantne, Zadranin Frederik Grisogono (1472–1538) u svom delu **Speculum astronomicum terminans intellectum humanum in omni scientia** publikovanom u Veneciji 1507. godine iznosi veome zanimljivo tvrđenje da je pronašao površ na kojoj postoje prave koje nisu ekvidistantne i koje se, koliko god produžene, nikada ne seku. Sudeći prema analizi Grisogonovog dela koju je načinio Ernest Stipanić, u njemu se nigde ne pominje o kakvoj je površi reč.

Kristofor Klavije (1509–1575), jedan od tvoraca grigorijanskog kalendara, u svojim komentarima Euklidovih Elemenata publikovanim 1574. godine, paralelne prave definiše kao ekvidistantne i iz konstrukcije pravougaonika izvodi aksiomu paralelnosti.

Antonio Kataldi (1548–1626) svoj dokaz petog postulata temelji na tvrđenju da se „dve neekvidistantne prave koje sa jedne strane konvergiraju, produžene sa one strane sa koje se približavaju, na kraju krajeva seku".

I dvojica italijanskih geometričara sedamnaestog veka, Đovani Alfonso Boreli

(1608–1679) i Vitale Đordano (1633–1711) su, baveći se teorijom paralelnih, izvodili peti postulat iz tvrđenja da postoji pravougaonik.

Među evropskim autorima koji su se bavili dedukcijom petog postulata iz ostalih aksioma euklidske geometrije, pomenimo i Džona Valisa (1616–1703), autora rasprave koja je pod naslovom **De postulato quinto et definitione quinta lib. 6 Euclidis; disceptatio geometrica** izašla iz štampe 1693. godine. U njoj Valis, u njenom prvom delu, komentariše petu definiciju šeste knjige Euklidovih Elemenata — „Kaže se da je razmera satavljena od razmera ako posle međusobnog množenja vrednosti tih razmera dobivamo nešto" — koja po svome karakteru i stilu odudara od ostalih Euklidovih definicija. U drugom delu rasprave Valis donosi prevod dokaza petog postulata pripisanog at-Tusiju, a treći deo sadrži autorov dokaz petog postulata. U njemu se, polazeći od pretpostavke da postoje slični trouglovi, izvodi Euklidova aksioma paralelnosti uz pomoć „kinematičkih" argumenata koji su slični argumentima iz dela ibn Kore i al-Hajsama.

XVIII vek. Zbog obilja posledica izvedenih iz pretpostavke da ne važi Euklidova aksima paralelnosti, za koje danas znamo da su teoreme hiperboličke geometrije, izdvajamo dva pokušaja učinjena u osamnaestom veku da se dokaže peti postulat. Prvi od tih pokušaja je delo Đ. Đ. Sakerija (Giovanni Girolamo Saccheri 1667–1733), profesora jezuitskog univerziteta u Paviji, a drugi J. H. Lamberta (Johann Heinrich Lambert 1728–1777) poznatog i po tome što je prvi dokazao iracionalnost broja π.

Sakerijeva razmišljanja koja se odnose na teoriju paralelnih obelodanjena su 1733. godine, iste godine kada je Sakeri umro. Tada je u Milanu izdato njegovo delo **Euclides ob omni naevo vindicatus**. U njemu se Sakeri, slično Omaru Hajamu, bavio četvorouglovima kojima su uglovi na jednoj ivici koja se naziva osnovicom pravi, a njoj susedne bočne ivice podudarne. Takve četvorougle, kako je to naglašeno u jednaestom odeljku, danas nazivamo Sakerijevim. Lako je dokazao da je takav četvorougao osnosimetričan u odnosu na medijatrisu osnovice, te da su, stoga, uglovi na ivici naspram osnovice koja se naziva i protivosnovicom tog četvorougla, međusobno podudarni (teorema 11.17), a potom je ustanovio da su uglovi na protivosnovici oba oštra, oba prava ili oba tupa ako i samo ako je protivosnovica veća, jednaka ili manja od osnovice. Sakeri razmatra ove tri „hipoteze o oštrom, pravom i tupom uglu" i izvodi nekoliko značajnih stavova. Dokazuje da:

1. „ako ta hipoteza važi u jednom pojedinačnom četvorouglu sa zadatim svojstvima, onda ona važi u svakom drugom četvorouglu sa zadatim svojstvima", zatim da

2. „važi hipoteza o oštrom, pravom i tupom uglu ako i samo ako je zbir unutrašnjih uglova nekog trougla manji, jednak ili veći od zbira dvaju pravih uglova" i da

3. „iz egzistencije pojedinačnog trougla u kojem je zbir unutrašnjih uglova manji, jednak ili veći od zbira dvaju pravih uglova sledi hipoteza o oštrom, pravom ili tupom uglu".

Dakle, iz egzistencije pojedinačnog trougla u kojem je zbir unutrašnjih uglova manji, jednak ili veći od zbira dvaju pravih uglova sledi da je zbir unutrašnjih uglova svakog drugog trougla manji, jednak ili veći od zbira dvaju pravih uglova. Jedan vek kasnije ovaj stav će dokazati i Ležandr, no samo u slučaju hipoteze oštrog ili pravog ugla.

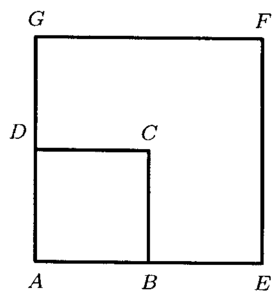
U nameri da dokaže da su uglovi na protivosnovici razmatranog četvorougla pravi, Sakeri je pokušao da isključi mogućnosti da su oni tupi ili oštri. Jednostavno je dokazao da ti uglovi ne mogu biti tupi i na taj način isključio „hipotezu tupog ugla". Pokazalo se da je „hipotezu oštrog ugla" neuporedivo teže oboriti. Da bi dokazao da uglovi na protivosnovici ne mogu biti oštri, Sakeri je iz pretpostavke da su oni upravo oštri dedukovao mnoga tvrđenja nadajući se da najzad izvesti i neko tvrđenje protivrečno nekom poznatom stavu geometrije koji ne zavisi od aksiome paralelnosti. Tako Sakeri dokazuje da „dve prave jedne ravni ili imaju zajedničku normalu ili se, produžene u jednom pravcu, u jednom slučaju seku, a u drugom se neograničeno približavaju jedna drugoj". Ovaj poslednji slučaj Sakeri odbacije pozivajući se na neobičan argument da on „protivreči prirodi prave". Sakeri naime nalazi da bi, u tom slučaju, dve prave bile upravne na tećoj, u istoj, beskonačno udaljenoj tački, pa bi, stoga, ove dve prave jednim svojim delom bile istovetne, a u drugom bi se razilazile. Uviđajući kasnije neubedljivost svojih argumenata, Sakeri dopisuje drugi deo svoje knjige u kojem ponovo pokušava da izvede peti Euklidov postulat iz ostalih pretpostavki geometrije. Ovde on pogrešno dokazuje da je dužina segmenta ekvidistante jednaka upravnoj projekciji tog segmenta na osnovici te ekvidistante.

Istaknimo da je Sakeriju prvom palo na um da bi trebalo naći empirijske (fizikalno-geometrijske) potvrde petog Euklidovog postulata i odmah naveo tri načina da se to učini. Prvim načinom predložio je da se nađu tri tačke jednako udaljene od jedne prave (sa iste njene strane) i ustanovi da li one pripadaju jednoj pravoj. Drugi način podrazumeva da se proveri da li je ugao „nad prečnikom kruga" prav, a treći, da li su krajevi poligonske linije čija temena pripadaju jednom krugu, koja se sastoji iz triju duži podudarnih poluprečniku tog kruga, kolinearne sa središtem tog kruga.

I Lambert kao i Sakeri razmatra tri „hipoteze o oštrom, pravom i tupom uglu", no ne Sakerijevih, već takozvanih Lambertovih četvorouglova kod kojih su tri ugla prava, a četvrti može biti oštar, prav ili tup. U jedanaestom odeljku (teorema 11.18) dokazali smo da je Lambertov četvorougao „polovina" Sakerijevog. Zahvaljujući toj osobini Lambert, slično Sakeriju, isključuje „hipotezu tupog ugla" dokazujući da će protivosnovica Sakerijevog četvorougla dobijenog udvostručenjem polaznog Lambertovog četvorougla biti manja od osnovice, a udaljavanjem od tačke u kojoj osa simetrije tog Sakerijevog četvorougla seče pravu koja sadrži tu protivosnovicu odstojanje tačaka na toj pravoj od prave koja sadrži osnovicu biće sve manje, pa će se te dve prave seći u dvema tačkama simetričnim u odnosu na osu tog Sakerijevog četvorougla. No, prema aksiomi 9 Euklidovih Elemenata, dve prave ne ograničavaju oblast, pa je time isključena hipoteza tupog ugla.

Kao i Sakeri, i Lambert pokušava da hipotezu oštrog ugla dovede do apsurda.

On je, pretpostavljajući da je oštar preostali ugao četvorougla kome su tri ugla prava, dedukovao mnoga tvrđenja nadajući se da će najzad izvesti i neko tvrđenje protivrečno nekom poznatom stavu geometrije koji ne zavisi od aksiome paralelnosti. Tako Lambert ide još dalje od Sakerija i dokazuje da se udaljavanjem od temena Lambertovog četvorougla koje je kod pravog ugla, duž prave koja sadrži to teme i teme kod kojeg je ugao oštar, odstojanje tačaka na toj pravoj od prave koja sadrži naspramnu ivicu, sve veće, a ugao sve oštriji. Dokazuje i da je, uz ovu pretpostavku, zbir uglova u trouglu manji od zbira dvaju pravih uglova, a među posledicama hipoteze oštrog ugla posebno ističe tvrđenje da postoji „apsolutna mera“ duži, pa stoga, i „apsolutna površina“ i „apsolutna zapremina“. Ovaj izvanredni rezultat Labmert dokazuje na sledeći način:



Slika 35a

Ako je $ABCD$ četvorougao kome su uglovi A, B i D pravi, a ugao C oštar i ako je pri tome $AB \cong AD$, ugao C možemo shvatiti kao meru četvorougaone površi $ABCD$. Zaista, svaki drugi četvorougao $AEFG$ kome su uglovi A, E i G pravi, a $AE \cong AG$, imaće oštar ugao F manji ili veći od ugla C u zavisnosti od toga da li je duž AB manja ili veća od AE. Ugao C je, prema tome, apsolutna mera četvorougaone površi $ABCD$, jer je tim uglom do na podudarnost zadat i taj četvorougao i njegova ivica AB.

Kako smo već primetili, i Lambert razumeva da je, uz pretpostavku hipoteze oštrog ugla, zbir uglova u trouglu manji od zbira dvaju pravih uglova, i ne samo to, već dokazuje da ta razlika koju smo u 23. odeljku nazvali defektom, raste sa površinom trougla. Kako Lambert primećuje, iz pretpostavke tupog ugla sledi da defekt opada sa površinom. Štaviše, ističe da tu osobinu imaju sferni trouglovi, te da se, stoga, ova geometrija „hipoteze tupog ugla“ realizuje na sferi. Najzanimljivije je to što u jednoj rečenici ističe: „Skoro da sam sklon da izvučem zaključak da se hipoteza oštrog ugla javlja na nekoj imaginarnoj površi“. Jedan vek kasnije (1868. godine) Beltrami (Eugenio Beltrami 1835–1900) će dokazati da zaista postoji „imaginarna površ“ euklidskog prostora (tzv. pseudosfera) na kojoj se realizuje geometrija „hipoteze oštrog ugla“ i time će otkloniti svaku sumnju koja se odnosila na neprotivrečnost hiperboličke geometrije.

Lambertova teorija paralelnih nije dovršeno delo. Napisana je oko 1766. godine, a pod naslovom Theorie der Parallel-Linien objavili su je posle Lambertove smrti, 1786. godine, J. Bernuli, unuk poznatog matematičara, i K.F. Hindenburg.

Osam godina nakon publikovanja Lambertovog dela štampano je i prvo izdanje Ležandrovog (Adrien Marie Legendre 1752–1833) udžbenika **Eléments de Géométrie** koji je doživeo dvanaest izdanja (poslednje je iz 1823. godine). To je prvo delo te vrste koje se bitno razlikuje od Euklidovih Elemenata. Zahvaljujući, pre svega, svojim metodičkim odlikama, ovo Ležandrovo delo veoma je uticalo na potonje udžbenike geometrije. Štaviše, moglo bi se reći da je ovaj udžbenik prvi počeo da istiskuje Euklidove Elemente kao nastavno geometrijsko štivo.

Osnovne ideje Ležandrove teorije paralelnih izložene su u 23. odeljku. One, kako videsmo, nisu bile originalne budući da su Ležandrovi rezultati u kojima se, između ostalog, ističe ekvivalentnost petog Euklidovog postulata i tvrđenja da postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π, ranije već bili poznati. No, ove osnovne činjenice iz teorije paralelnih, u Ležandrovom delu bile su pregledno i jasno izložene i stoga su često citirane. Međutim, u izgrađivanju posledica hipoteza koje protivreče petom postulatu Sakeri, a naročito Lambert, mnogo su dalje odmakli.

Gaus i njegovi savremenici. Zanimanje za pitanja iz teorije paralelnih bilo je naročito živo s kraja osamnaestog i početka devetnaestog veka. Gausov prijatelj iz mladosti Farkaš Boljaj (Bolyai Farkas 1775–1856) neuspešno se bavio dokazivanjem petog Euklidovog postulata proveravajući da li tri nekolinearne tačke uvek pripadaju krugu i, u jednom pismu svome sinu Janošu, gorko primećuje da „bedni ljudski rod ne može imati ništa čisto pa ni u geometriji".

Sam Gaus, sudeći prema njegovim pismima, upinjao se da dokaže peti postulat sve do 1813. godine, a iz njegovih pisama posle te godine može se uvideti da je prevazišao tu uobičajenu predrasudu koja se odnosila na jedinstvenost prave u zadatoj ravni koja sadrži datu tačku i paralelna je datoj pravoj, i razvio „antieuklidsku" ili „neeuklidsku" geometriju u kojoj važi Sakerijeva hipoteza oštrog ugla. Njegov učenik Vahter (F.L. Wachter 1792–1817) primetio je 1816. da se na graničnoj površi koja se dobija neograničenim uvećavanjem sfere ostvaruju sve Euklidove aksiome i postulati, uključujući i peti, ili, kako bismo danas rekli: na orisferi se realizuje euklidska geometrija (teorema 32.12).

Nezavisno od Gausa, Švajkart (F.K. Schweikart 1780–1859) je razvio svoju „astralnu" geometriju u kojoj je zbir unutrašnjih uglova trougla manji od zbira dvaju pravih uglova. U Memorandumu iz 1818. godine primećuje da se „visina jednakokrako pravouglog trougla uvećava kada se uvećavaju ivice tog trougla ali nikada ne prevazilazi određenu dužinu" koju naziva Konstantom. Hvaleći Švajkartove rezultate Gaus primećuje da je ta konstanta $k = \log(1 + \sqrt{2})$ ako i samo ako je gornja granica površine trougla πk^2.

I Taurinus (F.A. Taurinus 1794–1874), Švajkartov nećak, bavio se istim pitanjem i razvio „logaritamski-sfernu geometriju" u kojoj važe formule sferne trigonometrije u kojima se dužina k poluprečnika sfere zamenjuje sa ik. U pismu Taurniusu, iz 1824. godine, Gaus najpotpunije iznosi svoje ideje koje se odnose na

„antieuklidsku" geometriju. No, zanimljivo je, Gaus u svome matematičkom delu nigde ne pominje rezultate iz teorije paralelnih plašeći se, kako veli, vike Beoćana. Bez obzira na to, značaj Gausa u istoriji neeuklidske geometrije je ogroman već i zbog toga što je on bio jedini među matematičarima prve polovine devetnaestog veka koji je mogao da razume i prihvati ideje dvojice rodonačelnika hiperboličke geometrije, Nikolaja Lobačevskog i Janoša Boljaja.

Janoš Boljaj. Svome delu **Tentemen** izašlom 1832. godine, već pomenuti Gausov savremenik i, štaviše, prijatelj i školski drug Farkaš Boljaj pridodao je i jednu raspravu svoga sina Janoša koja se ticala teorije paralelnih. Ovaj dodatak očevom delu poznat, jednostavno, kao **Apendiks**, Janoš Boljaj (1802–1860) je napisao po očevom savetu sa ciljem da ga otac i on upute samom Gausu na ocenu, budući da je Farkaš Boljaj imao izvesne rezerve prema sinovljevom delu.

Apendiks se sastoji iz ukupno 43 paragrafa. Prvih 10 paragrafa posvećeni su teoriji paralelnosti. Ovde mladi Boljaj izlaže teoriju paralelnih definišući najpre paralelne prave i dokazujući njihova elementarna svojstva: transmisibilnost, simetričnost i tranzitivnost relacije paralelnosti pravih (teoreme 25.4–6). Ne bi li dokazao ove tri osobine Boljaj, između ostalog, koristeći neprekidnost, dokazuje da postoji prava koja sa iste svoje strane zahvata podudarne uglove sa dvema paralelnim pravama (teorema 15.13), a zatim dokazuje da je medijatrisa duži čija su temena presečne tačke ove prave sa paralelama, paralelna svakoj od ovih dveju pravih. Za ove dve tačke u kojima ova prava seče dve paralelne može se reći da su jedna drugoj *izogonalno pridružene*. Na kraju ove celine, u desetom paragrafu, Boljaj dokazuje da je relacija izogonalne pridruženosti tranzitivna. Ta osobina mu omogućava da u paragrafu 11 definiše oricikl i orisferu koje naziva ***L**-linijom* i ***F**-površi*, i da primeti da svaka tačka **L**-linije nju razlaže na dve podudarne polovine, a da je **F**-površ istovetna je sa skupom svih slika neke **L**-linije u rotacijama oko neke prave (teorema 19.3). Nakon toga (paragrafi 13 i 14) Boljaj dokazuje da je zbir uglova koje jedna prava zahvata sa iste svoje strane sa nekim dugim dvema pravama jednak (manji) zbiru dvaju pravih uglova ako i samo ako ista osobina važi za bilo koju pravu koja seče druge dve. Time je omogućeno da se geometrijski sistem (Boljaj ga označava sa Σ) koji počiva na Euklidovom petom postulatu strogo odvoji od geometrijskog sistema (koji Boljaj označava sa S) u kojem se pretpostavlja negacija ovog Euklidovog postulata. Zbog toga u paragrafu 15 Boljaj predlaže da se geometrija koja ne zavisi od od izbora geometrijskog sistema nazove *apsolutnom geometrijom.* U narednim paragrafima (zaključno sa paragrafom 24) Boljaj razmatra osobine **L**-linija i **F**-površi najpre u euklidskoj (sistem Σ), a potom i u hiperboličkoj geometriji (sistem S). U paragrafu 21 dokazuje da je zbir unutrašnjih uglova na **F**-površi čije ivice pripadaju **L**-linijama te površi jednak zbiru dvaju pravih uglova i primećuje da na **F**-površi važi peti Euklidov postulat (ili XI aksioma). Na kraju 24. paragrafa dokazuje da, za razliku od Σ sistema, u S sistemu, dakle u hiperboličkoj geometriji, svaki par paralelnih pravih je podudaran svakom drugom paru paralelnih pravih i primećuje da, ma kako čudan bio ovaj rezultat, on još uvek ne obara sistem S.

U paragrafima 25–31 u Apendiksu razvija se hiperbolička trigonometrija, a u paragrafima 32–33 određuju se mere pojedinih geometrijskih likova.

Poslednji paragrafi Apendiksa posvećeni su konstrukcijama. U paragrafu 34 Boljaj kroz zadatu tačku konstruiše pravu paralelnu zadatoj pravoj, a u paragrafu 35 pravu koja je upravna na jednom kraku, a paralelna sa drugim krakom oštrog ugla. Na kraju, u paragrafima 41 i 42 Boljaj dokazuje da trouglovi imaju istu površinu ako i samo ako su im jednaki zbirovi unutrašnjih uglova, a u poslednjem, 43. paragrafu određuje odnos površine i defekta i završava tvrdnjom da trougao kome su sva tri temena nesvojstvena, ima najveću površinu.

U svome odgovoru na pismo starog Boljaja Gaus je, potvrdivši naučnu valjanost dela njegovog sina, napisao da iz skromnosti ne može da pohvali rad mladoga Boljaja budući da bi, hvaleći njega, hvalio samoga sebe jer je i sam imao iste zamisli i dobio iste rezultate. Ovim odgovorom Farkaš Boljaj je bio veoma zadovoljan, ali njegov sin nije hteo da veruje da je Gaus samostalno i davno pre njega došao do neeuklidske geometrije. Razočaran, Janoš Boljaj do kraja života nije publikovao više ništa što bi po dubini ideja i sadržaju bilo blizu njegovom Apendiksu.

Napomenimo da je Apendiks je na naš jezik preveo Branislav Petronijević 1928. godine.

Nikolaj Lobačevski. Predavanjem Nikolaja Lobačevskog, sa naslovom „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des paralléles“, održanom na univerzitetu u Kazanju 24. februara 1826. godine, prvi put je javno saopštena ideja da se geometrija može zasnovati na aksiomi koja negira peti Euklidov postulat. Sadržaj ovog predavanja objavljen je u raspravi О началахъ геометрий štampanoj u Kazanjskom Vesniku za 1829. godinu. Ovom publikacijom Lobačevski je pretekao Janoša Boljaja čiji je Apendix izašao 1832. godine. U učenim zapisima Kazanjskog univerziteta 1835. i 1836. godine štampana su još dva članka Nikolaja Lobačevskog, a u istim zapisima od 1835. do 1838. godine publikovan je potpun udžbenik geometrije Lobačevskog pod naslovom Новыя начала геометрий съ полной теорией параллельныихъ. U nameri da svoje ideje učini dostupnim i izvan Rusije, Lobačevski 1840. godine štampa u Berlinu na nemačkom jeziku knjigu sa naslovom Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinen koju je na naš jezik preveo Branislav Petronijević 1914. godine. Za svečanu spomenicu pedesetogodišnjice Kazanjskog univerziteta 1855. godine Lobačevski je napisao rad Pangéometrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, koji je sledeće godine preveden na ruski jezik.

Uz novu definiciju paralelnosti i dokaze elementarnih osobina relacije paralelnosti pravih, Lobačevski uvodi pojam ugla parelelnosti zadate duži AB koji označava sa $\Pi(AB)$ i dokazuje da je funkcija $\Pi(x)$ (uvedena u odeljku 33) zadata formulom

$$\Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-x} = \operatorname{arcctg}(\sinh x) = \arccos(\theta x)$$

(teorema 34.6).

Lobačevski izvodi i formule hiperboličke trigonometrije razmatrajući osobine oricikala i orisfera i, kao i Vahter i Boljaj, dokazuje da je geometrija orisfere istovetna sa euklidskom geometrijom. Baveći se merenjem u geometriji, dokazuje da je površina trougla proporcionalna njegovom defektu, a u izračunavanju zapremine tetraedra koristi znamenitu transcendentnu funkciju

$$L(x) = \int_0^x \log \sec y dy.$$

Svoju „imaginarnu geometriju" ili „pangeometriju" Lobačevski je testirao i kao mogući model geometrije univerzuma. Njemu je, naime, prvom palo na um da pretpostavi da geometrija svemira nije euklidska. Da bi proverio svoju pretpostavku pokušao je da ustanovi da paralaksa zvezda nekretnica (ugao pod kojim se vidi prečnik zemljine putanje meren sa zvezde) ne može biti proizvoljno mala. Njegova izračunavanja su bila veoma neprecizna budući da su počivala na grubim procenama paralakse zvezde Sirijus i konačan zaključak je bio da stvarni prostor u apsolutnom smislu ipak najverovatnije podleže zakonima euklidske geometrije. Međutim, sama pomisao Lobačevskog da univerzum možda i nije euklidski doživela je potpunu satisfakciju u dvadesetom veku.

Da bi pokazao da je njegova „imaginarna geometrija" neprotivrečna kao i euklidska, Lobačevski je istakao da ona počiva na formulama koje se odnose na metričke osobine trouglova koje, kada se vrednosti a, b, c dužina njegovih stranica zamene sa ia, ib, ic, prelaze u poznate formule sferne geometrije. Odatle je zaključio da svaka protivrečnost „pangeometrije" ima za posledicu protivrečnost sferne pa, dakle, i euklidske geometrije. Time je, posle dve hiljade godina sumnji, nezavisnost aksiome paralelnosti konačno bila utvrđena.

LITERATURA

[1] А. Д. АЛЕКСАНДРОВ, Основания геометрии, Издательство Наука, Москва, 1987.

[2] W. W. R. BALL and H. S. M. COXETER, Mathematical Recreations & Essays, Twelfth ed, University of Toronto Press, 1974.

[3] F. BACHMAN, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer, Berlin 1959. (Prevod na ruski: Ф. БАХМАН, Построение геометрии на основе понятия симметрии, Издательство Наука, Москва, 1969.)

[4] С. В. БАХВАЛОВ, В. П. ИВАНИЦКАЯ, Основания геометрии, Высшая школа, Москва, 1972.

[5] В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, Третья проблема Гильберта, Издательство Наука, Москва, 1977.

[6] J. БОЉАЈ, Апендикс, превод Б. Петронијевића, Београд, 1928.

[7] J. BOLYAI, Appendix — the Teory of Space, Akadémia Kiadó, Budapest, 1987.

[8] R. BONOLA, Non-Euclidean Geometry, Dover, New York, 1955.

[9] K. BORSUK, W. SZMIELEW, Foundations of Geometry, North-Holland, Amsterdam, 1960. (Prevod poljskog izdanja: Podstawy Geometrii, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1955.)

[10] H. S. M. COXETER, The inversive plane and hyperbolic space, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 29 (1966), 217–241.

[11] H. S. M. COXETER, Non-Euclidean Geometry (5th. ed), University of Toronto Press, 1968.

[12] H. S. M. COXETER, Twelwe Geometric Essays, Southern Illinois University Press, Carbondale, 1968.

[13] H. S. M. COXETER, Introduction to Geometry, John Wiley & Sons, Inc. 1969.

[14] H. S. M. COXETER, Regular Polytopes (3rd ed.), Dover, New York, 1973.

[15] H. S. M. COXETER, Regular Complex Polytopes, Cambridge University Press, 1974.

[16] H. S. M. COXETER, Parallel lines, Canad. Math. Bull. 21 (1978), 385–397.

[17] H. S. M. COXETER, Angles and arcs in the hyperbolic plane, Math. Chronicle 9 (1980), 17–33.

[18] H. S. M. COXETER, S. L. GREITZER, Geometry Revisited, Random House, New York, 1967.

[19] H. S. M. COXETER, W. O. J. MOSER, Generators and Relations for Discrete Groups, fourth ed., Springer, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[20] EUKLID, Elementi, Naučna knjiga, Beograd, 1957.

[21] W. FENCHEL, Elementary Geometry in Hyperbolic Space, Walter de Gruyter, Berlin and New York, 1989.

[22] A. I. FETISOV, O euklidskoj i neeuklidskim geometrijama, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[23] J. V. FIELD, Keplers star polyhedra, Vistas in Astr. 23 (1979), 109–141.

[24] H. G. FORDER, The Foundatoins of Euclidean Geometry, Dover, New York, 1958.

[25] B. GRÜNBAUM, Regular polyhedra — old and new, Aequationes Math. 16 (1977), 1–20.

[26] T. L. HEATH, The Thirteen Books of Euclid's Elements, vol. I–III (2nd ed.), Dover, New York, 1956.

[27] T. L. HEATH, A History of Greek Mathematics, vol. I–II, Dover, New York, 1981.

[28] D. HILBERT, Osnove geometrije, Naučno delo, Beograd, 1957.

[29] D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN, Geometry and the Imagination, Chelsea, New York, 1952.

[30] V. JANKOVIĆ, Orientation of absolute space S^n, Publ. Inst. Math. 35(49) (1984), 131–137.

[31] N. V. JEFIMOV, Viša geometrija, Naučna knjiga, Beograd, 1948.

[32] J. KEPLER, Harmonices Mundi, Libri V (prevod na engleski [23]), Lincii 1619.

[33] R. C. LYNDON, Groups and Geometry, Cambridge University Press, 1985.

[34] Н. И. ЛОБАЧЕВСКИ, Геометријска испитивања из теорије паралелних линија, превод Б. Петронијевића, Научна књига, Београд, 1951.

[35] D. LOPANDIĆ, Geometrija Lobačevskog, PMF, Beograd 1968.

[36] D. LOPANDIĆ, Zbirka zadataka iz osnova geometrije, PMF, Beograd 1971.

[37] D. LOPANDIĆ, G-razloživa i G-dopunska jednakost poligonskih površi. Teoreme Boljaja i Gervina, Hadvigera i Glura, Matematika 4 (1973), 56–63.

[38] D. LOPANDIĆ, Uzajamna ekvivalentnost relacija $\stackrel{r}{=}$ i $\stackrel{d}{=}$ u skupu poliedara. Sidlerova teorema, Matematika 2 (1974), 78–81.

[39] D. LOPANDIĆ, Geometrija, Naučna Knjiga, Beograd 1979.

[40] D. LJUBIĆ, Bireflectionality and Normal Forms of n-dimensional Isometry Groups, PhD Thesis, University of Washington, 1987.

[41] H. MESCHOWSKI, Noneuclidean Geometry, Academic Pres,New York and London, 1964.

[42] H. MESCHOWSKI, Temelji euklidske geometrije, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

[43] J. MILNOR, Hyperbolic geometry: the first 150 years, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 9–24.

[44] P. S. MODENOV, A. S. PARKHOMENKO, Geometric Transformations, vol. I–II, Academic Press, New York and London, 1965.

[45] E. E. MOISE, Elementary Geometry from an Advanced Standpoint (2nd ed.), Addison–Wesley Publishing Company, 1974.

[46] D. PEDOE, Circles, a Mathematical View, Dover, New York, 1979.

[47] A. V. POGORELOV, Predavanja iz osnova geometrije, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd 1963.

[48] А. В. ПОГОРЕЛОВ, Элементарная геометрия, Издательство Наука, Москва, 1977.

[49] PROCLUS, In Primium Euclidis Elementorum Librum Commentarii, ed. Friedlein, Leipzig: B. G. Teubner 1873.

[50] M. PRVANOVIĆ, Osnove geometrije, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

[51] I. PUCELJ, Neevklidične geometrije, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1969.

[52] M. RADOJČIĆ, Opšta matematika, Naučna knjiga, Beograd, 1950.

[53] M. RADOJČIĆ, Elementarna geometrija, Naučna knjiga, Beograd, 1961.

[54] L. RÉDEI, Foundations of Euclidean and Non-euclidean Geometries, Akadémiai Kiadó, 1968.

[55] J. REŠ, Osnove geometrije, Sveučilište u Rijeci, 1980.

[56] Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД, А. П. ЮШКЕВИЧ, Теория параллельних линий на средневековом востоке IX–XIV вв. Издательство Наука, Москва, 1983.

[57] V. VARIĆAK, Prvi osnivači neeuklidske geometrije, Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umj. 169 (1907), 110–194.

[58] W. C. WATERHOUSE, The discovery of the regular solids, Arch. Hist. Ex. Sci. 9 (1972), 212–221.

[59] H. WEIL, Symmetry, Princeton University Press, 1952.

[60] P. YALE, Geometry and Symetry, Holden-Day, 1968.

INDEKS

Zoran Lučić
Euklidska i hiperbolička geometrija
2. izdanje

Za izdavače:
Branko Gavrić
(Total Design)
011.62 51 53
i
Prof. Dr Zoran Kadelburg
(Matematički fakultet)
011.63 01 51

Štampa:
CICERO, Beograd
011.66 76 32

Dizajn korica:
Branko Gavrić

Godina izdanja:
1997.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

514.12/.13(075.8)

ЛУЧИЋ, Зоран
Geometrija - euklidska i hiperbolička / Zoran Lučić. - 2. izd. - Beograd : Total Design : Matematički fakultet, 1997 (Beograd : Cicero). - VII, 312 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Na vrhu nasl. str.: Univerzitet u Beogradu. - Bibliografija: str.301-303. - Registar.

а) Геометрија
ID=57066508

ISBN 86-7589-007-9