1. (Osnovni materijal s prve godine koji je neophodno znati) Prisjetiti se pojma svojstvenih vrijednosti kvadratne matrice i metoda nalaženja svojstvenih vrijednosti (korijeni karakterističnog polinoma).

2. (Veoma brzo i lako) Naći svojstvene vrijednosti sljedećih matrica:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

3. (Veoma brzo i lako) Ispitati stabilnost položaja ravnoteže $(x_0, y_0) = (0, 0)$ u sljedećim sistemima:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = -x + 3y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -4x - y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

4. Neka je $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ rješenje sistema jednačina

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Tada se ovo rješenje može grafički prikazati kao dvije funkcije $\tilde{x}(t)$ i $\tilde{y}(t)$ u ravnima (x, t) i (y, t), respektivno.
Međutim, postoje i drugi načini. Na primjer, možemo uzeti vrijeme t za parametar, onda ćemo dobiti parametarski zadatu krivu u ravni (x, y). U tom slučaju se ova ravan naziva *fazna ravan.*
Za različite početne uslove dobijamo različite krive u faznoj ravni (x, y).
Topološki (kvalitativan) izgled krivih u faznoj ravni zavisi od svojstvenih vrijednosti matrice sistema.

5. Tipovi položaja ravnoteže u sistemima 2×2

Pošto je matrica sistema dimenzija 2×2, to su njene svojstvene vrijednosti rješenja kvadratne jednačine.
Postoji ukupno 6 kvalitativno različitih slučajeva:
a) Obije svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 su realne i pozitivne. U tom slučaju kažemo da je položaj ravnoteže $(0, 0)$ *nestabilan čvor.*
b) Obije svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 su realne i negativne. U tom slučaju kažemo da je položaj ravnoteže $(0, 0)$ *stabilan čvor.*
c) Obije svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 su realne i različitog znaka. U tom slučaju kažemo da je položaj ravnoteže $(0, 0)$ *sedlo.* Sedlo je uvijek nestabilno.
d) Obije svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 su kompleksne i realni djelovi su im pozitivni. U tom slučaju kažemo da je položaj ravnoteže $(0, 0)$ *nestabilan fokus.*
e) Obije svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 su kompleksne i realni djelovi su im negativni. U tom slučaju kažemo da je položaj ravnoteže $(0, 0)$ *stabilan fokus.*
f) Obije svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 su čisto imaginarne (tj. njihovi realni djelovi su jednaki nuli). U tom slučaju kažemo da je položaj ravnoteže $(0, 0)$ *centar.*

6. Gore smo vidjeli da položaj ravnoteže u sistemu sa dvije jednačine može pripadati jednom od 6 topoloških tipova. Pogledati detaljnije o tipovima položaja ravnoteže u sljedećem tekstu:

https://nasport.pmf.ni.ac.rs/materijali/2215/DS$_B$2*.pdf*

Poželjno je pročitati prvih 26 stranica ovog teksta.

7. Ispitati tip i stabilnost položaja ravnoteže $(x_0, y_0) = (0, 0)$ u zavisnosti od parametra α sljedećim sistemima:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - \alpha y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -4x + 3y \\ \dot{y} = \alpha x \end{cases}$$

8. Ispitati stabilnost i tip položaja ravnoteže u linearnim modelima 2×2 koje smo do sada obrađivali. To su modeli malih oscilacija matematičkog klatna i lanac hemijskih reakcija prvog reda. (Primjetimo da je u modelu hemijskih reakcija prvog reda položaj ravnoteže jednostavno pomjeren iz koordinatnog početka.)

9. Ispitati stabilnost i tip položaja ravnoteže u modelu matematičkog klatna u zavisnosti od koeficijenta trenja $k > 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - ky \end{cases}$$