3.3 Рекурзивне функције

Као што је већ напоменуто у одељку 3.2.3, примитивно рекурзивне функције покривају широку класу израчунљивих функција, али не све. Нпр. за Акерманову[14] функцију се може доказати да је израчунљива, али не и примитивно рекурзивна. Помоћу оператора за неограничену минимизацију (неограничени μ оператор) могу бити описане још неке израчунљиве функције.

3.3.1 Акерманова функција

Дефинишимо низ функција $\alpha_1, \alpha_2, \ldots : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ на следећи начин:

$\alpha_0(x) = s(x)$

$\alpha_{n+1}(0) = \alpha_n(1)$

$\alpha_{n+1}(x+1) = \alpha_n(\alpha_{n+1}(x))$

Неколико првих вредности ових функција дато је у следећој табели:

$\backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	...
α_0	1	2	3	4	5	6	7	...
α_1	2	3	4	5	6	7	8	...
α_2	3	5	7	9	11	13	15	...
α_3	5	13	29	61	125	253	509	...
α_4	13	65533						...
α_5	65533							...
$\vdots$								...

Може се доказати да важе следеће једнакости:

$\alpha_0(x) = x + 1$

$\alpha_1(x) = x + 2$

$\alpha_2(x) = 2x + 3$

$\alpha_3(x) = 2^{x+3} - 3$

...

[14]Wilhelm Ackermann (1896-1962), немачки логичар

Акерманова функција $A : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ може бити дефинисана на следећи начин:

$$A(x, y) = \alpha_x(y)$$

Важе и следеће једнакости:
$A(0, y) = \alpha_0(y) = s(y) = y + 1$
$A(x + 1, 0) = \alpha_{x+1}(0) = \alpha_x(1) = A(x, 1)$
$A(x + 1, y + 1) = \alpha_{x+1}(y + 1) = \alpha_x(\alpha_{x+1}(y)) = A(x, A(x + 1, y))$
Штавише, може се доказати да постоји јединствена функција $A : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ која задовољава дате услове и тотална је, то јест Акерманова функција може бити добро дефинисана датим једнакостима (видети задатак 148).

Дефиниција 3.11 Акерманова функција *је функција* $A : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ *која задовољава следеће једнакости:*

(*i*) $A(0, y) = y + 1$

(*ii*) $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$

(*iii*) $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$

Лема 3.1 *Акерманова функција задовољава следеће услове:*

(*i*) $A(x, y) > y$

(*ii*) $A(x, y + 1) > A(x, y)$

(*iii*) $y_1 < y_2 \Rightarrow A(x, y_1) < A(x, y_2)$

(*iv*) $A(x + 1, y) \geq A(x, y + 1)$

(*v*) $A(x, y) > x$

(*vi*) $x_1 < x_2 \Rightarrow A(x_1, y) < A(x_2, y)$

(*vii*) $A(x + 2, y) > A(x, 2y)$

Доказ:

(*i*) тврђење ћемо доказати индукцијом по x.

За $x = 0$ важи $A(0, y) = y + 1 > y$.

Претпоставимо да важи $A(x, y) > y$ и докажимо да тада важи и $A(x + 1, y) > y$. Последњу неједнакост ћемо доказати индукцијом по y.

За $y = 0$ важи $A(x+1, 0) = A(x, 1) > 1 > 0$. Претпоставимо да важи $A(x+1, y) > y$ и докажимо да тада важи и $A(x+1, y+1) > y+1$.

$$\begin{aligned}
A(x+1, y+1) =& A(x, A(x+1, y)) \\
& \text{(на основу дефиниције Акерманове функције)} \\
>& A(x+1, y) \\
& \text{(на основу индуктивне претпоставке (за } x\text{))} \\
\geq& y+1 \\
& \text{(на основу индуктивне претпоставке (за } y\text{))}
\end{aligned}$$

(*ii*) тврђење ћемо доказати индукцијом по x.

За $x = 0$ важи $A(0, y+1) = y+1+1 > y+1 = A(0, y)$.

Претпоставимо да важи $A(x, y+1) > A(x, y)$ и докажимо да тада важи $A(x+1, y+1) > A(x+1, y)$.

$$\begin{aligned}
A(x+1, y+1) =& A(x, A(x+1, y)) \\
& \text{(на основу дефиниције Акерманове функције)} \\
>& A(x+1, y) \\
& \text{(на основу услова } (i)\text{)}
\end{aligned}$$

(*iii*) Докажимо да важи $A(x, y_1) < A(x, y_2)$, где је $y_1 < y_2$, индукцијом по y_2 за фиксирано y_1.

За $y_2 = y_1 + 1$ важи $A(x, y_1) < A(x, y_2)$ на основу услова (*ii*).

За $y_2 > y_1$ претпоставимо да важи $A(x, y_1) < A(x, y_2)$ и докажимо да тада важи $A(x, y_1) < A(x, y_2 + 1)$.

$$\begin{aligned}
A(x, y_1) <& A(x, y_2) \\
& \text{(на основу индуктивне претпоставке)} \\
<& A(x, y_2+1) \\
& \text{(на основу услова } (ii)\text{)}
\end{aligned}$$

(*iv*) тврђење ћемо доказати индукцијом по y.

За $y = 0$ важи $A(x+1, 0) = A(x, 1) = A(x, 0+1)$.

Претпоставимо да важи $A(x+1, y) \geq A(x, y+1)$ и докажимо да тада важи $A(x+1, y+1) \geq A(x, y+2)$.

Како важи

$$\begin{aligned}
A(x+1, y) \geq& A(x, y+1) \\
& \text{(на основу индуктивне претпоставке)} \\
\geq& y+2 \\
& \text{(на основу услова } (i)\text{)}
\end{aligned}$$

то, на основу услова (*iii*), следи:

$$A(x, A(x, y+1)) \geq A(x, y+2)$$

одакле се, користећи дефиницију Акерманове функције, непосредно изводи:

$$A(x+1, y+1) \geq A(x, y+2)$$

што је и требало доказати.

(*v*) Да би доказали да је $A(x, y) > x$ искористићемо следећу идеју:

$$A(x, y) \geq A(x-1, y+1) \geq \cdots \geq A(0, x+y) = x+y+1 > x$$

Индукцијом по x доказаћемо следеће тврђење:

$$A(x, y) \geq A(0, x+y)$$

За $x = 0$ важи $A(0, y) = A(0, 0+y)$, па онда и $A(0, y) \geq A(0, 0+y)$.

Претпоставимо да важи $A(x, y) \geq A(0, x+y)$ и докажимо да тада важи и $A(x+1, y) \geq A(0, x+y+1)$.

$$\begin{aligned} A(x+1, y) \geq & A(x, y+1) \\ & \text{(на основу услова } (iv)) \\ \geq & A(0, x+y+1) \\ & \text{(на основу индуктивне претпоставке)} \end{aligned}$$

Сада лако доказујемо дато тврђење:

$$\begin{aligned} A(x, y) \geq & A(0, x+y) \\ & \text{(на основу претходно доказаног тврђења)} \\ \geq & x+y+1 \\ & \text{(на основу дефиниције Акерманове функције)} \\ > & x \end{aligned}$$

(*vi*) Из услова (*iii*) и (*iv*) следи да важи следећа неједнакост:

$$A(x, y) < A(x+1, y) \qquad (*)$$

Докажимо да важи $A(x_1, y) < A(x_2, y)$, где је $x_1 < x_2$, индукцијом по x_2 за фиксирано x_1.

За $x_2 = x_1 + 1$ важи $A(x_1, y) < A(x_2, y)$ на основу неједнакости (*).

За $x_2 > x_1$ претпоставимо да важи $A(x_1, y) < A(x_2, y)$ и докажимо да тада важи $A(x_1, y) < A(x_2+1, y)$.

$$\begin{aligned} A(x_1, y) < & A(x_2, y) \\ & \text{(на основу индуктивне претпоставке)} \\ < & A(x_2+1, y) \\ & \text{(на основу неједнакости (*))} \end{aligned}$$

(vii) тврђење ћемо доказати индукцијом по y.

За $y = 0$ важи:

$$\begin{aligned} A(x+2,0) >&A(x,0) \\ &\text{(на основу услова } (vi)) \\ =&A(x,2\cdot 0) \end{aligned}$$

Претпоставимо да важи $A(x+2,y) > A(x,2\cdot y)$ и докажимо да тада важи и $A(x+2,y+1) > A(x,2(y+1))$.

$$\begin{aligned} &A(x+2,y+1) \\ =&A(x+1,A(x+2,y)) \\ &\text{(на основу дефиниције Акерманове функције)} \\ >&A(x+1,A(x,2\cdot y)) \\ &\text{(на основу индуктивне претпоставке и услова } (iii)) \\ \geq&A(x,A(x,2\cdot y)+1) \\ &\text{(на основу услова } (iv)) \\ \geq&A(x,2\cdot y+1+1) \\ &\text{(на основу услова } (i) \text{ и } (iii)) \\ =&A(x,2(y+1)) \end{aligned}$$

□

Може се показати да Акерманова функција није примитивно рекурзивна иако оне јесте израчунљива. То говори да класа примитивно рекурзивних функција није „довољно јака” да покрије класу свих израчунљивих функција.

Доказ да Акерманова функција није примитивно рекурзивна може се извести тако што се показује да она „расте брже” од било које примитивно рекурзивне функције. Прецизније, за сваку примитивно рекурзивну функцију f може се показати да важи:

$$(\exists k \in \mathbf{N})(\forall x_1,\ldots,x_n \in \mathbf{N})\ A(k,\max(x_1,\ldots,x_n)) > f(x_1,\ldots,x_n)$$

Наведена неједнакост може бити доказана индукцијом по сложености функције f.

Лема 3.2 *За функције $h : \mathbf{N}^m \to \mathbf{N}$ и $g_1,\ldots,g_m : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$, функција $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ дефинисана је са $f = Sub(h; g_1,\ldots,g_m)$.*

Ако су задовољени услови:

(i) *Број k_i ($k_i \in \mathbf{N}$) је такав да за све природне бројеве $x_1,\ldots,x_n$ важи:*

$$A(k_i,\max(x_1,\ldots,x_n)) > g_i(x_1,\ldots,x_n)\ \ (i = 1,\ldots,m)$$

(*ii*) *Број* k_0 *(*$k_0 \in \mathbf{N}$*) је такав да за све природне бројеве* $x_1, \ldots, x_m$ *важи:*

$$A(k_0, \max(x_1, \ldots, x_m)) > h(x_1, \ldots, x_m)$$

(*iii*) $k = \max(k_0, k_1, \ldots, k_m) + 2$

онда за све природне бројеве $x_1, \ldots, x_n$ *важи:*

$$A(k, \max(x_1, \ldots, x_n)) > f(x_1, \ldots, x_n)$$

Доказ:

Нека $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{N}$ и означимо $\hat{x} = \max(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\begin{aligned} A(k, \hat{x}) =& A(k-1+1, \hat{x}) \\ \geq& A(k-1, \hat{x}+1) \\ & \text{(на основу леме 3.1 под } (iv)) \\ =& A(k-2+1, \hat{x}+1) \\ =& A(k-2, A(k-1, \hat{x})) \\ & \text{(на основу дефиниције Акерманове функције)} \end{aligned}$$

С друге стране, за $i = 1, \ldots, m$ важи:

$$\begin{aligned} A(k-1, \hat{x})) >& A(k_i, \hat{x}) \\ & \text{(на основу леме 3.1 под } (vi), \\ & \text{јер је } k-1 > k_i \text{ због услова } (iii)) \\ >& g_i(x_1, \ldots, x_n) \\ & \text{(због услова } (i)) \end{aligned}$$

из чега, на основу леме 3.1 под (*iii*), следи:

$$A(k-2, A(k-1, \hat{x})) > A(k-2, g_i(x_1, \ldots, x_n))$$

за све $i = 1, \ldots, m$, па отуда и:

$$\begin{aligned} A(k-2, A(k-1, \hat{x})) >& A(k-2, \max(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))) \\ \geq& A(k_0, \max(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))) \\ & \text{(на основу леме 3.1 под } (vi), \\ & \text{јер је } k-2 > k_0 \text{ због услова } (iii)) \\ >& h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)) \\ & \text{(због услова } (ii)) \\ =& f(x_1, \ldots, x_n) \\ & \text{(на основу дефиниције функције } f) \end{aligned}$$

Дакле важи,

$$A(k, \hat{x}) \geq A(k-2, A(k-1, \hat{x})) > f(x_1, \ldots, x_n),$$

одакле непосредно следи дато тврђење. □

Лема 3.3 *За функције* $g : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ *и* $h : \mathbf{N}^{n+2} \to \mathbf{N}$*, функција* $f : \mathbf{N}^{n+1} \to \mathbf{N}$ *дефинисана са* $f = Rec(g, h)$*. Ако су задовољени услови:*

(i) *Број* k_g $(k_g \in \mathbf{N})$ *је такав да за све природне бројеве* $x_1, \ldots, x_n$ *важи:*

$$A(k_g, \max(x_1, \ldots, x_n)) > g(x_1, \ldots, x_n)$$

(ii) *Број* k_h $(k_h \in \mathbf{N})$ *је такав да за све природне бројеве* $x_1, \ldots, x_n, y, z$ *важи:*

$$A(k_h, \max(x_1, \ldots, x_n, y, z)) > h(x_1, \ldots, x_n, y, z)$$

(iii) $k = \max(k_g, k_h) + 3$

онда за све природне бројеве $x_1, \ldots, x_n, y$ *важи:*

$$A(k, \max(x_1, \ldots, x_n, y)) > f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

Доказ:

Нека $x_1, \ldots, x_n, \in \mathbf{N}$ и означимо $\hat{x} = \max(x_1, \ldots, x_n)$. Докажимо најпре да $A(k-2, \hat{x}+y) > f(x_1, \ldots, x_n, y)$ важи за све вредности y $(y \in \mathbf{N})$. Доказ изводимо индукцијом по y.

За $y = 0$ имамо:

$$\begin{aligned}
A(k-2, \hat{x}+0) =& A(k-2, \hat{x}) \\
>& A(k_g, \hat{x}) \\
& \text{(на основу леме 3.1 под } (vi), \\
& \text{јер је } k-2 > k_g \text{ због услова } (iii)) \\
>& g(x_1, \ldots, x_n) \\
& \text{(због услова } (i)) \\
=& f(x_1, \ldots, x_n, 0) \\
& \text{(на основу дефиниције функције } f)
\end{aligned}$$

Претпоставимо да $A(k-2, \hat{x}+y) > f(x_1, \ldots, x_n, y)$ и докажимо да тада важи $A(k-2, \hat{x}+y+1) > f(x_1, \ldots, x_n, y+1)$. Како је, на основу индуктивне претпоставке,

$$A(k-2, \hat{x}+y) > f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

и

$$\begin{aligned}
A(k-2, \hat{x}+y) >& \hat{x}+y \\
& \text{(на основу леме 3.1 под } (i)) \\
\geq& x_1, \ldots, x_n, y
\end{aligned}$$

тачна је следећа неједнакост:

$$A(k-2, \hat{x}+y) > \max(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$$

Одавде, на основу дефиниције Акерманове функције, непосредно изводимо

$$A(k-3, \hat{x}+y+1) > \max(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$$

Даље,

$$\begin{aligned}
A(k-3, A(k-2, \hat{x}+y)) >& A(k-3, \max(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \\
& \text{(на основу леме 3.1 под } (iii) \\
& \text{ због последњег услова)} \\
\geq& A(k_h, \max(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \\
& \text{(на основу леме 3.1 под } (vi), \\
& \text{ јер је } k-3 > k_h \text{ због услова } (iii)) \\
>& h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \\
& \text{(због услова } (ii)) \\
=& f(x_1, \ldots, x_n, y+1) \\
& \text{(на основу дефиниције функције } f)
\end{aligned}$$

Дакле, важи:

$$A(k-2, \hat{x}+y+1) > f(x_1, \ldots, x_n, y+1)$$

што је и требало доказати. Коначно,

$$\begin{aligned}
A(k, \max(x_1, \ldots, x_n, y)) =& A(k, \max(\hat{x}, y)) \\
=& A(k-2+2, \max(\hat{x}, y)) \\
>& A(k-2, 2 \cdot \max(\hat{x}, y)) \\
& \text{(на основу леме 3.1 под } (vii)) \\
\geq& A(k-2, \hat{x}+y) \\
& \text{(на основу леме 3.1 под } (vi)) \\
>& f(x_1, \ldots, x_n, y)
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.5 *Нека је функција* $f : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$ *примитивно рекурзивна. Тада постоји вредност* k *(*$k \in \mathbf{N}$*) таква да за све природне бројеве* $x_1, \ldots, x_n$ *важи:*

$$A(k, \max(x_1, \ldots, x_n)) > f(x_1, \ldots, x_n)$$

Доказ:

Нека $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{N}$ и означимо $\hat{x} = \max(x_1, \ldots, x_n)$. Доказ изводимо индукцијом по сложености функције f.

Ако је сложеност функције f једнака 0, тј. у њеној дефиницији не користе се ни супституција ни примитивна рекурзија, тј. ако је f основна функција, онда су могућа следећа три случаја:

$f = \mathbf{0}$**:** Тада је $f(x) = 0$ за све x $(x \in \mathbf{N})$. Ако је $k = 0$, онда важи:

$$\begin{aligned} A(k, \hat{x}) =& A(0, x) \\ >& 0 \\ & \text{(на основу леме 3.1 под } (v)) \\ =& f(x) \end{aligned}$$

$f = P_i^n$**:** Тада је $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$ $(1 \le i \le n)$. Ако је $k = 0$, онда важи:

$$A(k, \hat{x}) = A(0, \hat{x}) = \hat{x} + 1 > x_i = f(x_1, \dots, x_n)$$

$f = s$**:** Тада је $f(x) = x + 1$ за све x $(x \in \mathbf{N})$. Ако је $k = 1$, онда важи:

$$\begin{aligned} A(k, \hat{x}) =& A(1, x) \\ >& A(0, x) \\ & \text{(на основу леме 3.1 под } (vi)) \\ =& x + 1 \\ =& f(x) \end{aligned}$$

Претпоставимо да је тврђење теореме тачно за све функције сложености мање или једнаке w. Нека је функција f сложености $w + 1$. Докажимо да је тврђење тачно и за такву функцију. Могућа су следећа два случаја:

$f = Sub(h; g_1, \dots, g_m)$**:** Тада је свака од функција $h, g_1, \dots, g_n$ сложености мање или једнаке w, па, на основу индуктивне претпоставке, постоје константе $k_0, k_1, \dots, k_m$ које задовољавају услове леме 3.2. На основу леме 3.2, постоји вредност k таква да је $A(k, \hat{x}) > f(x_1, \dots, x_n)$.

$f = Rec(g, h)$**:** Тада је свака од функција h, g сложености мање или једнаке w, па на основу индуктивне претпоставке, постоје константе k_g и k_h које задовољавају услове леме 3.3. На основу леме 3.3, постоји вредност k таква да је $A(k, \hat{x}) > f(x_1, \dots, x_n)$. □

Теорема 3.6 *Акерманова функција није примитивно рекурзивна.*

Доказ:

Претпоставимо супротно — да Акерманова функција јесте примитивно рекурзивна. Тада, на основу теореме 3.5, постоји вредност k $(k \in \mathbf{N})$ таква да за све вредности x и y важи $A(k, \max(x, y)) > A(x, y)$. За $x = y = k$ онда важи $A(k, \max(k, k)) > A(k, k)$, одакле се непосредно изводи нетачна неједнакост $A(k, k) > A(k, k)$. Дакле, Акерманова функција није примитивно рекурзивна. □

Задатак 72 *Нека је* $A : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ *Акерманова функција, а функција* $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ *дефинисана на следећи начин:*

$$f(x,y) = \begin{cases} A(\left[\frac{x}{3}\right], y) & \text{, ако је } x \text{ дељиво са 3} \\ x^x & \text{, иначе} \end{cases}$$

Испитати да ли је функција f *примитивно рекурзивна.*

Решење:

Претпоставимо да функција f јесте примитивно рекурзивна. Важи $A(x,y) = f(3x,y)$, одакле следи да је Акерманова функција примитивно рекурзивна као композиција таквих функција. То, међутим, противречи теореми 3.6. Дакле, функција f није примитивно рекурзивна.

Задатак 73 *Нека је* $A : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ *Акерманова функција, а функција* $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ *дефинисана на следећи начин:*

$$f(x,y) = \begin{cases} A(x,y) & \text{, ако је } x = 2 \\ x^x & \text{, иначе} \end{cases}$$

Испитати да ли је функција f *примитивно рекурзивна.*

Решење:

Може се доказати да важи $A(2,y) = 2y+3$. Штавише, важи

$$f(x) = eq(x,2)\cdot(2y+3) + ne(x,2)\cdot f_3(x,x),$$

где је f_3 функција из задатка 50, а eq и ne функције из задатка 52. На основу ова два задатка, следи да је функција f примитивно рекурзивна као композиција таквих функција.

Задатак 74 *Нека је* $A : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ *Акерманова функција, а функција* $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ *дефинисана на следећи начин:* $f(x,y) = A(rm(3,x),y)$, *где је* $rm(3,x)$ *остатак при дељењу* x *са* 3. *Испитати да ли је функција* f *примитивно рекурзивна.*

Решење:

Дефинишимо функције $a_0, a_1, a_2 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ на следећи начин:
$a_0(y) = A(0,y)$
$a_1(y) = A(1,y)$
$a_2(y) = A(2,y)$

Важи $a_0(0) = A(0,0) = 0+1 = 1$ и $a_0(y+1) = A(0,y+1) = y+2$, па је $a_0 \in \mathcal{PR}$. Важи $a_1(0) = A(1,0) = A(0,1) = 1+1 = 2$ и $a_1(y+1) = A(1,y+1) = A(0,A(1,y)) = a_0(a_1(y))$, па је $a_1 \in \mathcal{PR}$. Важи $a_2(0) = A(2,0) = A(1,1) = A(0,A(1,0)) = A(0,A(0,1)) = A(0,2) = 3$ и $a_2(y+1) = A(2,y+1) = A(1,A(2,y)) = a_1(a_2(y))$, па је $a_2 \in \mathcal{PR}$. (Може се показати и да важи: $a_0(y) = y+1$, $a_1(y) = y+2$ и $a_2(y) = 2y+3$.)

Функције a_0, a_1, a_2, rm и eq су примитивно рекурзивне, па из

$$f(x,y) = eq(rm(3,x),0)\cdot a_0(y) + eq(rm(3,x),1)\cdot a_1(y) + eq(rm(3,x),2)\cdot a_2(y)$$

следи да је и функција f примитивно рекурзивна.

Приметимо да се може доказати и општије тврђење — функција f дефинисана на следећи начин: $f(x,y) = A(rm(k,x),y)$, где је k фиксиран позитиван цео број је примитивно рекурзивна функција.