

Glava 3

Oscilacije

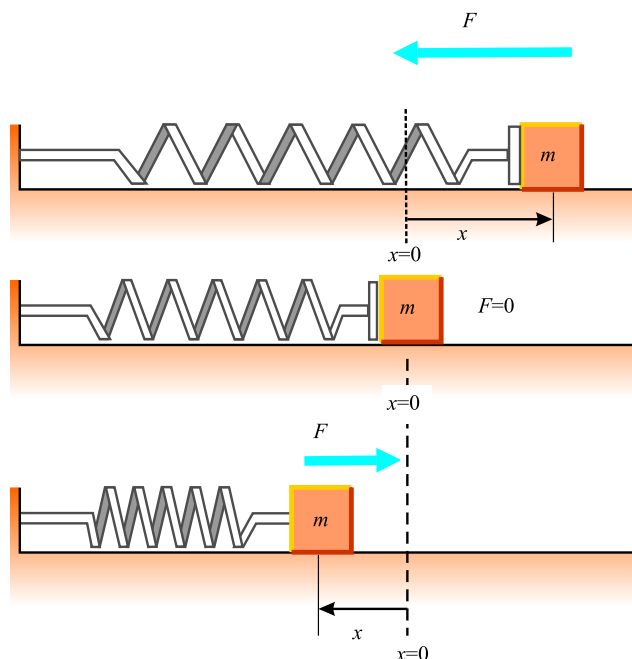
Veoma specifična vrsta kretanja se dešava kada na telo deluje sila proporcionalna odklonu tela od ravnotežnog položaja. Ukoliko je ta sila uvek usmerena ka ravnotežnom položaju, uspostavlja se "napred-nazad" kretanje oko tog položaja. Takvo kretanje se naziva *periodično kretanje*, *harmonijsko kretanje*, *osilovanje* ili *vibriranje*.¹ Primeri takve vrste kretanja su: ljuljanje na ljuljaški, kretanje klatna sata, vibriranje žica zičanih muzičkih instrumenata, ... Osim ovih primera iz svakodnevnog života, postoji niz drugih primera sistema koji se kreću periodično. Na primer, molekuli u telu koje je u čvrstom agregatnom stanju osciluju oko čvora kristalne rešetke (svog ravnotežnog stanja), elektromagnetni talasi (svetlost, radio talasi, ... u svima postoje oscilacije električnog i magnetnog polja), kolo naizmenične struje (jačina struje i napon variraju sa vremenom na periodičan način), ... Većina materijala ove glave će biti posvećena prostom harmonijskom kretanju, odnosno kretanju u kome je položaj tela sinusna funkcija vremena, što je slučaj kada se telo kreće bez gubitka mehaničke energije. U realnim mehaničkim sistemima međjutim uvek postoji gubitak energije koji se manifestuje kao prigušenje oscilatornog kretanja, čemu će takodje biti posvećen deo ove glave.

3.1 Prosto harmonijsko kretanje

Razmotrimo fizički sistem koji se sastoji od tela mase m okačenog na kraj opruge koja može da se kreće bez trenja po horizontali (slika 3.1).

Kada opruga nije ni istegnuta ni sabijena, telo je u tački određenoj sa $x = 0$, koja se naziva *položajem ravnoteže* sistema. Iz iskustva je poznato da

¹Ova četiri izraza su u principu ekvivalentna.



Slika 3.1: .

kada se telo izvede iz ovog položaja, počinje da osciluje oko njega. Ukoliko otklon tela iz ravnotežnog položaja, koji se inače naziva *elongacija* označimo sa x , sila koja deluje na telo, težeći da ga vrati u taj položaj je

$$\vec{F} = -kx\vec{e}_x. \quad (3.1)$$

Ovu silu se zove **restituciona** jer je uvek usmerena ka ravnotežnom položaju, odnosno uvek je suprotnog smera od *pomeraja*. Odgovarajuća jednačina kretanja, projektovana na x osu

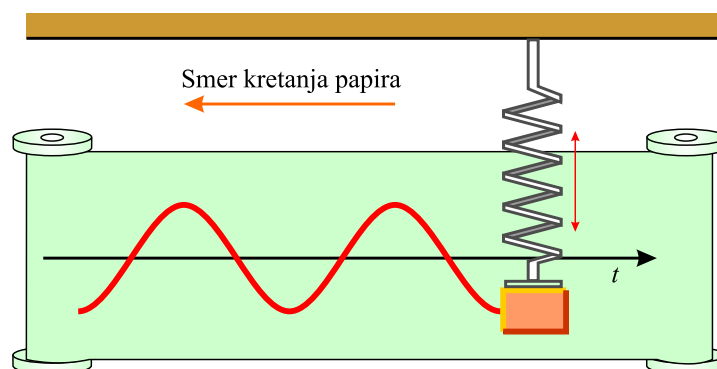
$$m\ddot{x} = -kx, \quad (3.2)$$

uz uvođenje $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, postaje

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.3)$$

a za opšte rešenje ima funkciju

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.4)$$



Slika 3.2: Uredjaj za demonstraciju prostog harmonijskog kretanja. Olovka prikačena za telo koje osciluje ostavlja na pokretnom papiru talasasti trag.

gde su A i φ konstante.² Ilustracija ovakve zavisnosti elongacije tela od vremena se može dobiti pomoću uređaja prikazanog na slici 3.2.

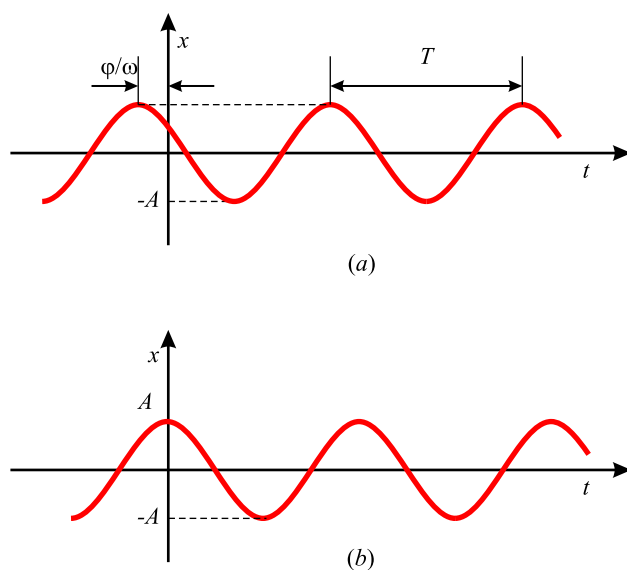
Telo određene mase je zakačeno za oprugu i osciluje u vertikalnoj ravni. Dok se telo kreće oscilujući, papir se kreće pod pravim uglom u odnosu na pravac oscilovanja i za to vreme olovka koja je prikačena za telo opisuje talasastu liniju po papiru.

Da bi videli koji je fizički smisao konstanti A , ω_0 i φ predstavimo grafički vremensku zavisnost elongacije x od vremena t (3.4) (slika 3.3).

Na ovoj slici je u stvari predstavljen deo traga olovke sa slike 3.2. **Amplituda** kretanja je maksimalni otklon (elongacija) čestice. Konstanta ω_0 se naziva **ugaona frekvencija** kretanja i ima jedinicu rad/s (geometrijski smisao ove konstante će biti naknadno diskutovan). Konstantni ugao φ , se naziva početna faza kretanja i određen je početnom vrednošću elongacije i brzinom čestice. U tom smislu argument trigonometrijske funkcije (3.4) $\omega_0 t + \varphi$, se naziva **faza** oscilovanja.

Primetimo da je elongacija x , izražena preko trigonometrijske funkcije (3.4), periodična funkcija vremena sa periodom 2π , odnosno da joj se vrednosti ponavljaju nakon određenog vremena. **Period oscilovanja T je vreme potrebno telu da prodje jedan pun ciklus kretanja.** U tom

²Ovo nije jedini način da se zapiše opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine. Ono se može predstaviti i u obliku $x = B \sin(\omega_0 t + \alpha)$ gde su B i α konstante različite od konstanti A i φ . Treći oblik rešenja je $x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$, uz nove dve konstante C_1 i C_2 (prisetimo se da broj konstanti koje se pojavljuju u opštem rešenju diferencijalne jednačine odgovara njenom redu). Koji god oblik da se iskoristi, kada se za dato kretanje, iz početnih uslova, odrede vrednosti dveju konstanti ono je na jednoznačan način opisano datim izrazom.



Slika 3.3: (a) Zavisnost elongacije tela koje vrši prosto harmonijsko kretanje od vremena. (b) $x - t$ kriva za specijalan slučaj $x = A$ za $t = 0$ i $\varphi = 0$.

slučaju kažemo da je telo napravilo jednu *punu oscilaciju*. Ovakva definicija perioda zapravo kazuje da su vrednosti elongacije x u trenutku t i $t + T$ jednake. Obzirom da je elongacija zadata kosinusnom funkcijom, to znači da se faze u t i $t + T$ razlikuju za 2π , odnosno da važi

$$\omega_0 t + \varphi + 2\pi = \omega_0(t + T) + \varphi. \quad (3.5)$$

Odavde se dobija da je $\omega_0 T = 2\pi$, ili

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (3.6)$$

Recipročna vrednost perioda je **frekvencija** kretanja. **Frekvencija kretanja predstavlja broj oscilacija koje telo napravi u jedinici vremena:**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (3.7)$$

Jedinica za frekvenciju je s^{-1} , ili **herc** (Hz).

Linearna brzina čestice koja vrši prosto harmonijsko kretanje se dobija diferenciranjem jednačine (3.4) po vremenu

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.8)$$

dok je ubrzanje

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.9)$$

Kako je $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, poslednja relacija može da se zapiše u obliku

$$a = -\omega_0^2 x. \quad (3.10)$$

Iz jednačine (3.8) se vidi, pošto sinusna funkcija osciluje između ± 1 , da brzina za ekstremalne vrednosti ima $\pm \omega_0 A$. Pošto za kosinusnu funkciju važi takodje da su joj ekstremalne vrednosti ± 1 , iz jednačine (3.9) se vidi da su maksimalne vrednosti ubrzanja $\pm \omega_0^2 A$. Na osnovu ovih razmatranja su amplitudne vrednosti brzine i ubrzanja

$$v_{max} = \omega_0 A \quad (3.11)$$

$$a_{max} = \omega_0^2 A. \quad (3.12)$$

Na slici 3.4 (a), (b) i (c) su prikazane zavisnosti elongacije, brzine i ubrzanja, respektivno. Sa nje se vidi da se faza ubrzanja razlikuje od faze elongacije za $\pi/2$ rad, odnosno, tamo gde x ima maksimum ili minimum, brzina je nula.

Takodje, tamo gde je elongacija nula, brzina je maksimalna. Osim toga se vidi da je faza ubrzanja pomeren za π radijana u odnosu na fazu elongacije, što znači da tamo gde x ima maksimum i ubrzanje ima maksimalnu vrednost ali suprotnog predznaka u odnosu na znak elongacije. Ako pretpostavimo da je u $t = 0$ početna elongacija bila x_i a brzina v_i , jednačine (3.8) i (3.12) daju

$$x_i = A \cos \varphi, \quad (3.13)$$

$$v_i = -\omega_0 A \sin \varphi. \quad (3.14)$$

Deljenje ovih dveju jednačina eliminiše amplitudu i daje $v_i/x_i = -\omega_0 \tan \varphi$, odnosno

$$\tan \varphi = -\frac{v_i}{\omega_0 x_i}. \quad (3.15)$$

Ukoliko ih pak kvadriramo, podelimo drugu sa ω_0^2 i nakon toga saberemo, dobija se

$$x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega_0}\right)^2 = A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi. \quad (3.16)$$

Ako iskoristimo identitet $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, za amplitudu se dobija

$$A = \sqrt{x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega_0}\right)^2}. \quad (3.17)$$

gde je t zadato u sekundama a ugao u zagradi u radijanima.

(a) Odrediti amplitudu, frekvenciju, i period kretanja.

◇ Upoređivanje jednačine ovog oscilovanja sa jednačinom (3.4) da su amplituda i ugaona učestnost $A = 4$ m i $\omega_0 = \pi$ rad/s. Odavde je sada frekvencija $\nu = \omega_0/2\pi = \pi/2\pi = 0,5$ Hz, dok je period $T = 1/\nu = 2$ s.

(b) Odrediti brzinu i ubrzanje čestice u ma kom momentu vremena

◇

$$v = \frac{dx}{dt} = -4m \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \frac{d}{dt}(\pi t) = -4\pi m/s \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -4\pi m/s \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \frac{d}{dt}(\pi t) = -4\pi^2 m/s^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right).$$

(c) Odrediti položaj, brzinu i ubrzanje tela u $t = 1$ s.

◇

$$x = (4m) \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = (4m) \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 4m(-0,707) = -2,83m.$$

$$v = -4\pi m/s \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\pi m/s(-0,707) = 8,89m/s$$

$$a = -4\pi^2 m/s^2 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\pi^2 m/s^2(-0,707) = 27,9m/s^2.$$

(d) Odrediti maksimalne (amplitudne) vrednosti brzine i ubrzanja.

$$v_{max} = \omega_0 A = 12,6m/s$$

$$a_{max} = \omega_0^2 A = 39,5m/s.$$

(e) Odrediti pomeraj tela za interval vremena od $t = 0$ s do $t = 1$ s.

◇ x koordinata u momentu vremena $t = 0$ je

$$x_i = 4m \cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = 4m(0,707) = 2,83m.$$

Pod (c) smo našli da je u $t = 0$ s elongacija $-2,83$ m, pa je pomeraj

$$\Delta x = x_f - x_i = -2,83m - 2,83m = -5,66m.$$

Telo je krenuši iz tačke $-2,83$ m, otišlo do amplitudnog položaja $A = -4$ m i vratilo se ponovo u polaznu tačku.

(f) Kolika je faza kretanja u $t = 2$ s?

$$\diamond \omega_0 t + \varphi = \pi t + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}.$$

3.1.1 Energija prostog harmonijskog oscilatora

Pošto se smatra da na telo koje se kreće po zakonu prostog harmonijskog oscilatora, ne deluje sila trenja, treba očekivati da je njegova ukupna mehanička energija konstantna.

Kinetička energija takvog oscilatora je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.20)$$

Potencijalna energija je sa druge strane

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.21)$$

Primetimo da su i kinetička i potencijalna energija pozitivne veličine. Kako je $\omega_0^2 = k/m$, ukupna mehanička energija oscilatora je

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}kA^2[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (3.22)$$

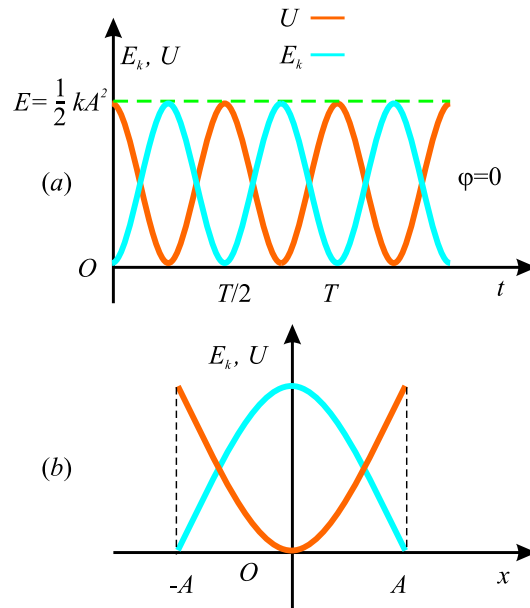
Imajući u vidu da je izraz u uglastoj zagradi prema osnovnom trigonometrijskom identitetu jednak jedinici, izraza za ukupnu energiju postaje

$$E = \frac{1}{2}kA^2. \quad (3.23)$$

Na osnovu ovoga se može reći da je **ukupna mehanička energija prostog harmonijskog oscilatora konstanta kretanja i da je proporcionalna kvadratu amplitude**. Obzirom da je ukupna energija zbir kinetičke i potencijalne, ovo tvrdjenje znaci da onda kada je kinetička velika, potencijalna je proporcionalno mala, itd. Na osnovu onoga što nam je već poznato o kretanju harmonijskog oscilatora, jasno je da je u amplitudnim tačkama, kada je $x = \pm A$, ukupna energija jednaka maksimalnoj potencijalnoj, $E = U_{max} = \frac{1}{2}kA^2$, jer je u tim tačkama $v = 0$. U položaju ravnoteže, je pak, potencijalna energija nula jer je $x = 0$, dok je ukupna mehanička jednaka maksimalnoj kinetičkoj

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}m \frac{k}{m} A^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Zavisnost kinetičke i potencijalne energije od vremena je predstavljena na slici 3.5 (a) za slučaj kada je početna faza $\varphi = 0$. Kao što je već napomenuto, i E_k i U su pozitivne veličine, a njihov zbir je stalno jednak $\frac{1}{2}kA^2$, ukupnoj mehaničkoj energiji sistema. Promena E_k i U sa elongacijom je predstavljena na delu (b) iste slike. Energija se neprekidno transformiše između



Slika 3.5: (a) Zavisnost E_k i U od vremena za slučaj kada je početna faza jednaka nuli. (b) Zavisnost E_k i U od elongacije.

potencijalne energije koja se akumulira u deformisanoj opruzi i kinetičke energije tela koje ona pokreće.

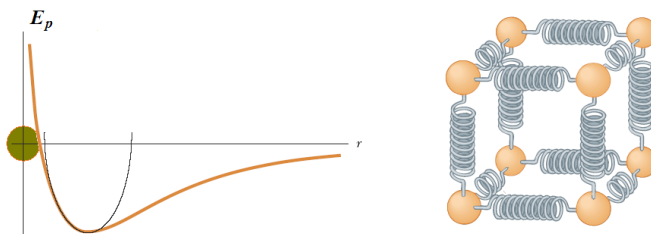
Zakon održanja energije se može iskoristiti za određivanje brzine za proizvoljnu elongaciju sistema koji osciluje na ovaj način, polazeći od izraza za ukupnu energiju

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}. \quad (3.24)$$

Na kraju se može opravdano da postavi pitanje, zbog čega smo puno vremena potrošili na studiranje prostog harmonijskog oscilovanja. To je uradjeno jer je to dobar model za puno fizičkih fenomena. Na primer Lennard-Jones-ov potencijal diskutovan u prethodnoj glavi, je komplikovana funkcija koja opisuje sile koje drže atome na okupu unutar molekula. Slika 3.6 pokazuje da je za mala pomeranja atoma od njihovih ravnotežnih položaja, deo krive koja opisuje potencijalnu energiju atoma u molekulu, približno parabola, a kao što znamo potencijalna energija prostog harmonijskog

oscilatora ima upravo takvu zavisnosto od elongacije (slika 3.5). Ovo znači da možemo sile koje povezuju atome u molekulu da predstavimo tankim oprugama.



Slika 3.6: Za mala pomeranja atoma, grafik potencijalne u zavisnosti od rastojanja molekula je sličan grafiku zavisnosti potencijalne energije oscilatora od elongacije.

3.1.2 Klatno

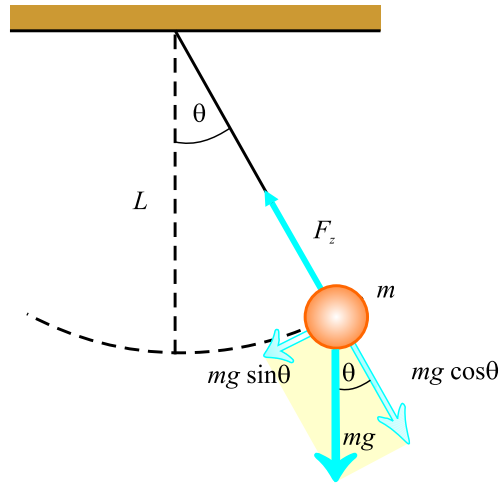
Klatno je mehanički sistem koji se kreće na periodičan način u polju Zemljine teže. U pogledu realizacije razlikujemo sledeće vrsta klatna: matematičko, fizičko, torziono, ...

Matematičko klatno

Matematičko klatno se sastoji od tela mase m (koje smatramo materijalnom tačkom) okačenog o tanku i neistegljivu nit, dužine l , u polju Zemljine teže (slika ...). Kretanje ovog tela, koje se odvija u vertikalnoj ravni, nakon izvodjenja iz ravnotežnog položaja, se na dalje odvija pod dejstvom sile gravitacije. U slučaju da su uglovi otklona mali,³ ovakav sistem se kreće kao prost oscilator.

Sile koje deluju na telo u ovom slučaju su sila zatezanja, F_z , i gravitaciona sila $m\vec{g}$. Tangencijalna komponenta sile zemljine teže $mg \sin \theta$, je uvek usmerena kao ravnotežnom položaju, $\theta = 0$, odnosno uvek je suprotno usmerena od vektora pomeraja. Iz tog razloga je tangencijalna komponenta gravitacione sile, ustvari restituciona sila, tako da drugi Njutnov zakon, za

³Dovoljno "mali" uglovi su uglovi manji od 15° i za njih je $\sin \theta \approx \theta$. Naime, za ovako male uglove je greška prilikom zamene $\sin \theta$ sa θ manja od 1%. U to se je lako uveriti ako ugao θ predstavimo u radijanima a zatim izračunamo na digitronu vrednost $\sin \theta$.



Slika 3.7: Kada je ugao otklona θ dovoljno mali, matematičko klatno se kreće kao prosti harmonijski oscilator oko ravnotežnog položaja $\theta = 0$. Restituciona sila je u ovom slučaju $-mg \sin \theta$.

kretanje po tangenti glasi

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta, \quad (3.25)$$

gde je s deo luka koji je prešlo telo mase m a znak $-$ pokazuje da je tangencijalna sila usmerena ka ravnotežnom položaju. Kako za male uglove važi, $s = L\theta$, ta jednačina postaje

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta. \quad (3.26)$$

Na prvi pogled ova jednačina ne opisuje linearno harmonijsko oscilovanje jer na desnoj strani ne stoji veličina od koje se traži izvod na levoj strani jednačine (uporedi sa jednačinom (3.2)), već njen sinus. Medjutim, kako smo pretpostavili da je ugao otklona mali, $\sin \theta$ se može aproksimirati sa θ , tako da jednačina kretanja matematičkog klatna postaje

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta. \quad (3.27)$$

Kako ova jednačina ima formu jednačine koja opisuje kretanje linearnog harmonijskog oscilatora, zaključujemo da se, za male uglove otklona (ampli-

tude), kretanje matematičkog klatna, svodi na linearno harmonijsko oscilovanje. U skladu sa tim, rešenje poslednje diferencijalne jednačine je

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.28)$$

gde je θ_{max} , maksimalna ugaona elongacija, a ugaona frekvencija je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (3.29)$$

Na osnovu ovoga je period oscilovanja klatna⁴

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (3.30)$$

Drugim rečima, **period i frekvencija matematičkog klatna zavise jedino od dužine klatna i od ubrzanja zemljine teže**. Kako je period nezavisan od mase klatna, može da se zaključi da sva klatna jednake dužine, koja osciluju na istom mestu (isto g), osciluju sa istim periodom.⁵

Fizičko klatno

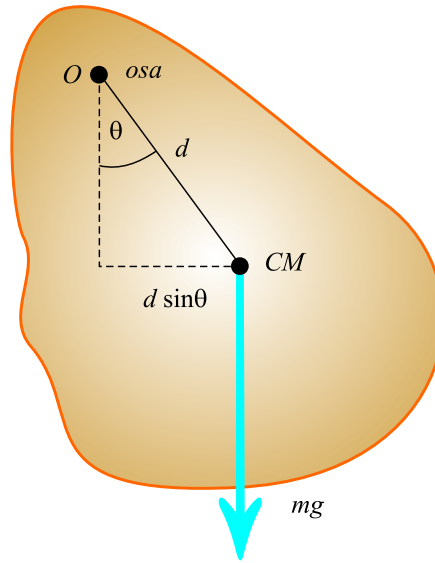
Pretpostavimo da smo na kažiprst okačili ofinger za kačenje odeće. Ukoliko ga sada drugom rukom izvedemo iz ravnotežnog položaja, za neki mali ugao, i pustimo, on će početi da osciluje. Kako osciluje oko fiksne ose koja **ne prolazi** kroz njegov centar masa, ne možemo ga aproksimirativno posmatrati kao materijalnu tačku, a njegovo kretanje se onda ne svodi na kretanje matematičkog klatna. Takvo telo se naziva **fizičko klatno**.

Razmotrimo kretanje krutog tela, okačenog u tački O koja je na udaljenosti d od centra mase tela (slika 3.8). Gravitacija stvara moment sile oko ose kroz tačku O , a intenzitet tog momenta je $mgd \sin \theta$, gde je ugao θ prikazan na slici 3.8. Na osnovu zakona kretanja $I\vec{\alpha} = \vec{M}$, gde je I moment inercije tela u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku O , dobija se

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd \sin \theta. \quad (3.31)$$

⁴Ukoliko se jednačina (3.25) rešava bez aproksimacije da je reč o malim uglovima, za period se dobija formula $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_{max}}{2} + \dots \right]$, iz koje se vidi da se za male amplitudne uglove dobija dobro poznata relacija za period malih oscilacija matematičkog klatna (3.30).

⁵Matematičko klatno može da služi za baždarenje časovnika jer njegov period kretanja zavisi samo od dužine klatna i lokalne vrednosti ubrzanja zemljine teže g . Ono je takodje uobičajeni uredjaj za određivanje ubrzanja zemljine teže. Takva merenja su jako bitna jer varijacije lokalne vrednosti g mogu da ukažu na promene u sastavu zemljišta, odnosno na postojanje izvora nafte ili nekih drugih supstanci ispod zemljine površine.



Slika 3.8: Fizičko klatno.

Negativan predznak izraza na desnoj strani jednačine kretanja ukazuje na tendenciju momenta sile da smanji ugao otklona θ . To znači da gravitaciona sila proizvodi restitucioni momenat. Ukoliko razmatramo kretanje fizičkog klatna za male ugaone elongacije, možemo da primenimo aproksimaciju $\sin \theta \approx \theta$, jednačina kretanja postaje

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta. \quad (3.32)$$

Kako ova jednačina ima isti oblik kao i jednačina kretanja lineranog harmonijskog oscilatora, kretanje fizičkog klatna je dakle harmonijsko oscilovanje, a rešenje jednačine kretanja je $\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$, gde je θ_{max} maksimalna ugaona elongacija klatna, dok je ugaona frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}. \quad (3.33)$$

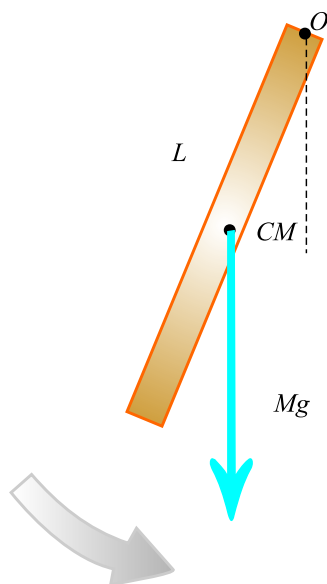
Period fizičkog klatna je prema tome

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \quad (3.34)$$

Ovaj rezultat može da se iskoristi za određivanje momenata inercije pljosnatih krutih tela. Ukoliko je za njih poznato kolika je veličina d , tj. gde

se nalazi centar masa, moment inercije može da se izračuna iz obrasca za period. Na kraju, primetimo da se za slučaj kada je $I = md^2$, tj. kada je celokupna masa tela skoncentrisana u centru masa, period fizičkog klatno postaje jednak periodu matematičkog.

Zadatak. Homogen štap, dužine L i mase M , okačen za jedan kraj, osciluje u vertikalnoj ravni (slika 3.9). Odrediti period malih oscilacija.



Slika 3.9: Štap koji osciluje okačen o jedan kraj.

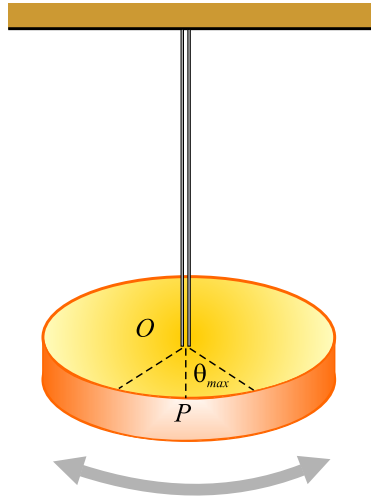
◇ Moment inercije ovakvog sistema je $I = \frac{1}{3}ML^2$. Udaljenost centra masa od tačke vešanja je $d = \frac{L}{2}$. Na osnovu toga je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

Torziono klatno

Na slici 3.10 je prikazano telo koje je okačeno žicom za fiksnu tačku. Kada se telo zavrne za mali ugao θ , usled upredanja žice o koju je ono okačeno, javlja se restiticioni (povratni) moment koji je proporcionalan uglu upredanja

$$M = -\kappa\theta. \quad (3.35)$$



Slika 3.10: Torziona klatna je kruto telo okačeno elastičnom žicom koje može da osciluje oko linije OP sa amplitudom θ_{max} .

Veličina označena sa κ je *torziona konstanta* žice. Primena drugog Njutnovog zakona za rotaciona kretanja, dobijamo

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta. \quad (3.36)$$

I u ovom slučaju se dakle dobija jednačina koja opisuje harmonijsko oscilovanje, u ovom slučaju sa ugaonom učestanošću $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ pa je period torzionog klatna

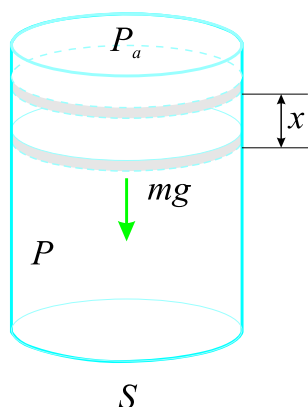
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \quad (3.37)$$

Razlika u odnosu na prethodne slučajeve je što izrazi ne važe u aproksimaciji malih uglova, sve dok smo u oblasti u kojoj su deformacije žice elastične.

3.1.3 Oscilovanje klipa u sudu sa idealnim gasom

Neka se klip mase m površine poprečnog preseka S nalazi u sudu zpremine V_0 u kome se nalazi idealan gas izolovan od okoline (slika 3.11).

Neka je u stanju ravnoteže pritisak u sudu jednak P_0 . Ovaj pritisak je zbir atmosferskog pritiska P_a i pritiska mg/S , kojim klip deluje na gas u



Slika 3.11: Oscilovanje klipa koji zatvara sud sa idealnim gasom.

sudu usled delovanja zemljine teže

$$P_0 = P_a + \frac{mg}{S}. \quad (3.38)$$

Podgnemo li na neki način klip na visinu x , zapremina suda će porasti i biti jednaka $V = V_0 + Sx$, što istovremeno dovodi do smanjenja pritiska. Pritisak gasa u ovom stanju, obzirom da je on topolotno izolovan, se može odrediti iz jednačine adijabate

$$PV^\kappa = P_0V_0^\kappa, \quad (3.39)$$

(κ je izložilac adijabate koji zavisi od broja stepena slobode molekula gasa) odakle je

$$P = \frac{P_0}{\left(1 + x\frac{S}{V_0}\right)^\kappa}. \quad (3.40)$$

Ukoliko se klip, nakon izvodjenja iz ravnoteže za malu vrednost⁶ x pusti, počće da osciluje oko svog ravnotežnog položaja. U tom slučaju prethodni izraz se može napisati u aproksimativnoj formi⁷

$$P = P_0 \left(1 - x\frac{\kappa S}{V_0}\right). \quad (3.41)$$

Na klip u principu deluju tri sile: sila atmosferskog pritiska $-P_aS$, sila pritiska gasa u sudu PS i sila zemljine teže $-mg$ (predzanci navedenih sila

⁶Veličina x treba da bude mala u poredjenju sa visinom suda V_0/S .

⁷Za male vrednosti x , važi približan izraz $(1+x)^b \approx 1+bx$

odgovaraju smeru x ose na gore, odnosno suprotno od smera delovanja sile zemljine teže), tako da je ukupna sila koja deluje na njega

$$F = -P_a S + PS - mg.$$

Prema (3.38) i (3.41) prethodni izraz prelazi u

$$F = -S \left(P_o - \frac{mg}{S} \right) + SP_0 \left(1 - x \frac{\kappa S}{V_0} \right) - mg = -x \frac{\kappa P_0 S^2}{V_0} \quad (3.42)$$

odakle se vidi da se za male otklone x kretanje klipa svodi na linearno harmonijsko oscilovanje sa ugaonom frekvencom

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa P_0 S^2}{m V_0}}. \quad (3.43)$$

3.1.4 Veza sa uniformnim kretanjem po kružnici

Razni aspekti harmonijskog oscilovanja se mogu bolje razumeti i objasniti ako se proanalizira analogija izmedju njega i uniformnog kretanja po kružnici. Slika 3.12 predstavlja šemu uređaja koji može da demonstrira ovu vezu. Lopta je zakačena za jedan kružni providni ram poluprečnika A , unutar koga može da vrši uniformno kretanje, pri čemu je odozgo osvetljenja tako da prilikom kretanja baca senku na ekran. Očigledno je da će ovom prilikom, ukoliko se lopta kreće uniformno po kružnici-ramu, njena senka da vrši harmonijsko oscilovanje na ekranu.

Razmotrimo kretanje čestice koja se nalazi u tački P , koja može da se kreće po kružnoj putanji (slika 3.13), pri čemu duž OP gradi ugao φ sa x osom u $t = 0$.

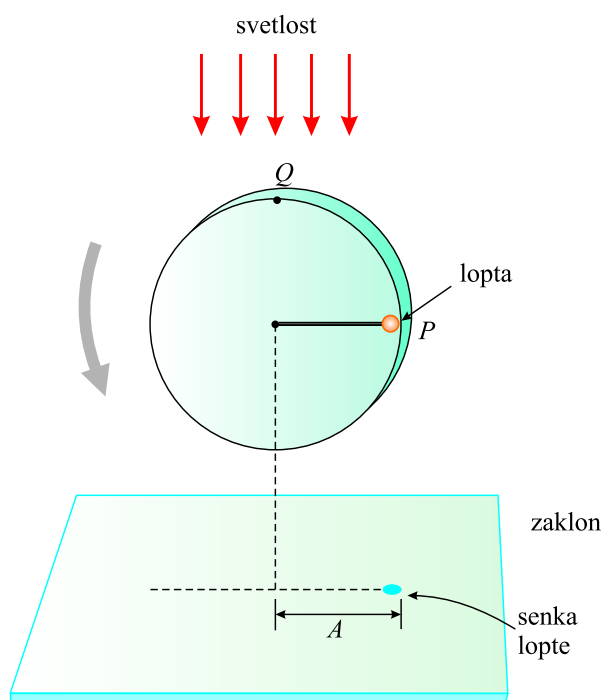
Ukoliko se čestica kreće konstantnom ugaonom brzinom ω po kružnici, u nekom trenutku vremena $t > 0$, duž OP gradi sa x osom ugao θ koji je jednak $\theta = \omega t + \varphi$. Prilikom kretanja čestice P po kružnici poluprečnika A , njena projekcija na x osu, Q , se kreće napred-nazad po x osi izmedju graničnih vrednosti $\pm A$.

Lako je primetiti da P i Q imaju uvek istu vrednost x koordinate. Iz trougla OPQ , se za x dobija

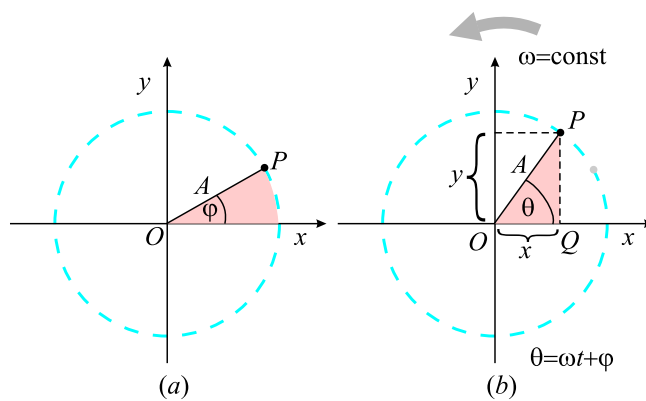
$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.44)$$

Ovaj izraz pokazuje da se projekcija tačke P na x osu, odnosno tačka Q , kreće kao harmonijski oscilator.⁸

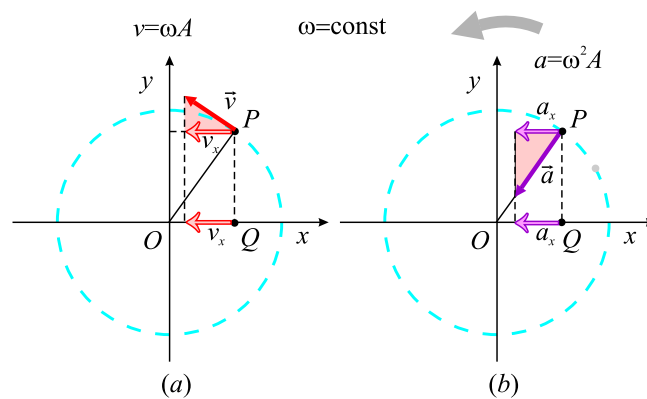
⁸Jasno je da je, umesto posmatranja projekcije tačke na x osu, moguće posmatrati njenu projekciju na y osu. Zaključak bi bio analogan, tako da može da se kaže da **uniformno kružno kretanje može da se smatra kombinacijom dva lierna harmonijska kretanja**, pri čemu je jedno duž x ose a drugo duž y ose, koja se u fazi razlikuju za 90° .



Slika 3.12: Eksperiment za pokazivanje veze izmedju uniformnog kretanja po kružnici i harmonijskog oscilovanja.



Slika 3.13: Uniformno kretanje tačke P po kružnici i oscilatorno kretanje tačke Q .



Slika 3.14: x komponente brzine i ubrzanja tačke P i tačke Q su jednake.

Ova geometrijska analogija pokazuje da je vreme potrebno za jedan obrt tačke P po kružnici jednak periodu oscilovanja T linearnog harmonijskog oscilovanja izmedju $x = \pm A$. Pri tome je ugaona brzina ω jednaka ugaonoj frekvenciji ω linearnog harmonijskog oscilovanja duž x ose. Početna faza φ linearnog harmonijskog oscilovanja odgovara početnom uglu koji je gradila duž OP sa x osom. Poluprečnik kružne putanje jednak je amplitudi oscilovanja.

Kako je relacija koja povezuje linearnu, ugaonu brzinu i poluprečnik putanje $v = r\omega$, čestica koja se kreće po kružnici poluprečnika A , ima brzinu $v = A\omega$. Sa slike 3.14 (a), se vidi da je x komponenta brzine $-\omega A \sin(\omega t + \varphi)$.

Ubrzanje tačke P pri kružnom kretanju, je radijalno i ima intenzitet $v^2/A = \omega^2 A$. Sa slike 3.14 (b) se može videti da je x komponenta ubrzanja $-\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$. Ovo je istovremeno i ubrzanje projektovane tačke Q duž x ose.

3.2 Prigušene oscilacije

Oscilatorno kretanje koje je razmatrano do sada se odvija u idealnim sistemima, bez trenja, i jednom kada bi bilo uspostavljeno u sistemu, odvijalo bi se večno. U realnim sistemima, čije se kretanje ne odvija u vakuumu, već u vazduhu ili nekoj drugoj sredini, potrebno je uzeti u obzir dejstvo okoline na kretanje tela. Sila kojom sredina deluje na telo u kretanju zavisi od osobina sredine (gustine, viskoznosti, ...), od oblika tela koje se kreće i njegove brzine. Na primer, ljudski organizam je naviknut na kretanje kroz vazduha, i otpor vazduha kretanje koji je mali, uopšte ne osećamo ukoliko

nema dodatnog kretanja vazduha, odnosno vetra. Za razliku od kretanja kroz vazduh, prilikom kretanja kroz vodu jako se oseća otpor sredine. Iskusniji plivači osetiće čak i razliku prilikom plivanja u slatkovodnoj i morskoj vodi. Vožnja na motociklu ilil u otvorenim kolima, pokazaće da se otpor sredine povećava sa porastom brzine. Oblik tela koje se kreće je takodje jako bitan, i o njemu se vodi naročito računa prilikom konstrukcije automobila, brzih vozova, šatlova, i slično, kakko bi se smanjio otpor sredine a time smanjila potrošnja goriva i pregrevanja tela⁹ koja se kreću.

Na osnovu ove analize, jasno je da će se realnije opisivanje oscilovanja ostvariti kada osim restitucione sile uzmemo u obzir i silu otpora sredine. Posledica njenog postojanja je da se oscilovanje usporava sa vremenom jer se ukupna mehanička energija sistema troši na savladavanje otpora sredine. Usled toga će se energija smanjivati sa vremenom a oscilacije priguštivati pa se ovaj (realan) tip oscilovanja naziva **prigušeno** oscilovanje.

Radi jednostavnosti analize, a i zbog činjenice da su brzine kretanja oscilujućih tela relativno male, pretpostavićemo da je sila otpora sredine linearno proporcionalne brzini

$$\vec{F} = -b\vec{v}, \quad (3.45)$$

gde je b koeficijent proporcionalnosti izmedju sile otpora sredine i brzine kretanje tela¹⁰. Jednačina (realnog) oscilatora, koji se kreće duž x ose je u skladu sa tim

$$ma_x = -kx - bv, \quad (3.46)$$

odnosno

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}. \quad (3.47)$$

U zavisnosti od vrednosti koeficijenta b , ova jednačina ima različita rešenja o kojima će biti više reči kasnij. U slučaju kada je sila trenja mala u poredjenju sa maksimalnom restitucionom, rešenje jednačine kretanje je

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.48)$$

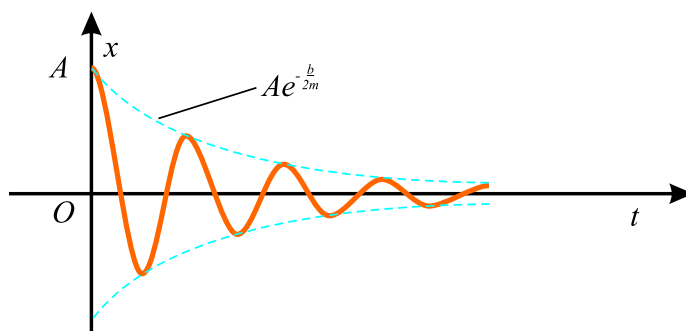
gde je ugaona frekvencija oscilovanja

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \quad (3.49)$$

⁹Ovaj efekat je jako bitan pri veoma velikim brzinama.

¹⁰Ovaj koeficijent zavisi od osobina sredine i od dimenzija i oblika tela koje se kreće kroz nju.

Veličina $b/2m$ se naziva koeficijent prigušenja i obično označava sa β . Zamena formule (3.48) u izraz (3.47) pokazuje da ona zaista predstavlja rešenje diferencijalne jednačine (3.47).



Slika 3.15: (a) Zavisnost elongacije od vremena kod oscilovanja sa (malim) prigušenjem.

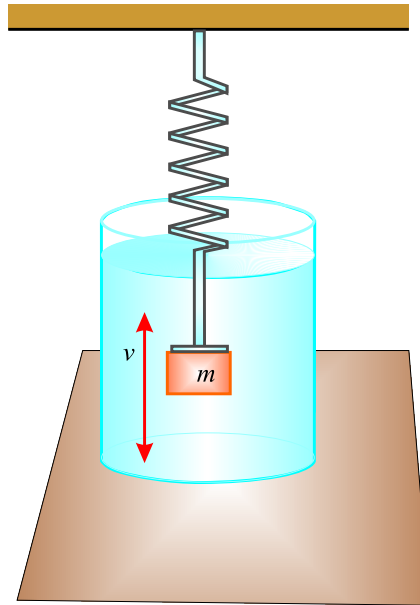
Na slici (3.15) je prikazana zavisnost elongacije od vremena za telo koje osciluje u prisustvu sile trenja koja izaziva postepeno gašenje oscilacija. Slika 3.16 prikazuje jedan takav sistem, telo mase m prikačeno za elastičnu oprugu, koja osciluje potopljena u viskozni fluid. Može da se uoči da, kada je sila trenja mnogo manja od restitutionone sile, se oscilatoran karakter kretanja očuvava, ali pri tome amplituda tih (prigušenih) oscilacija opada sa vremenom, sve dok se proces oscilovanja potpuno ne priguši. Svaki sistem koji se kreće na ovaj način se naziva **prigušeni oscilator**. Isprekidana linija na slici (3.15), koja definiše *obvojnici* oscilatorne krive, predstavlja uticaj eksponencijalnog faktora u jednačini (3.48), koji govori o tome da zapravo amplituda, prilikom ovog kretanja, sa vremenom opada eksponencijalno.

Ugaona frekvencija prigušenog oscilovanja, obično se zapisuje u obliku

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \quad (3.50)$$

gde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, predstavlja ugaonu frekvenciju u odsustvu sile koja prigušuje oscilovanje (neprigušeno oscilovanje) i naziva se **prirodna frekvencija** sistema. Ukoliko je maksimalna vrednost sile koja prigušuje oscilovanje takva da je $F_{max} = bv_{max} < kA$, kretanje sistema se naziva **kvazi-periodičnim**.¹¹

¹¹Kretanje kod prigušenih oscilacija, sa malim prigušenjem, se naziva kvazi-periodičnim jer nije ispunjen uslov periodičnosti elongacije $x(t+T) = x(t)$ pošto se amplituda oscilovanja, kao što smo videli, smanjuje sa vremenom. Međutim, kod ovakvog kretanja postoji



Slika 3.16: (a) Prigušeno oscilovanje.

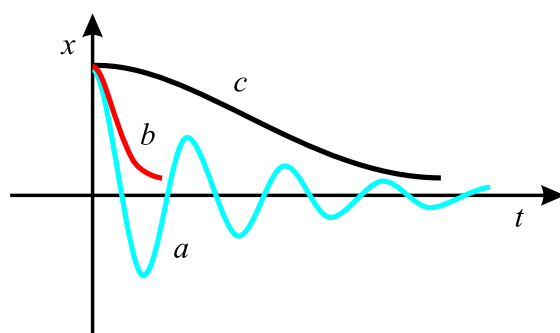
Jasno je da što je intenzitet sile bliži vrednosti kA , to se amplituda oscilacija brže smanjuje (kriva a na slici 3.17). Kada koeficijent prigušenja β dostigne takozvanu kritičnu vrednost takvu da je $b_c/2m = \omega_0$, sistem uopšte ne vrši oscilatorno kretanje, već je **kritično prigušen**, i nije periodično¹². U tom slučaju, ako se telo izvede iz ravnotežnog položaja i pusti, vraća se u ravnotežni položaj i ostaje tamo (kriva b na slici 3.17). I treći slučaj se dešava ukoliko je sredina izuzetno viskozna, tako da je maksimalna vrednost sile koja izaziva prigušenje veća od amplitude restitucione sile, $bv_{max} > kA$ i $b/2m > \omega_0$, kretanje sistema je **aperiodično**. I u ovom slučaju nema oscilovanja, sistem koji je izveden iz ravnoteže, vraća se u ravnotežni položaj, a vreme potrebno za povratak je utoliko veće ukoliko je veće prigušenje (kriva c na slici 3.17).¹³

U bilo kom slučaju, kada postoji prigušenje, energija oscilatora je na

periodičnost faze oscilovanja $\Phi = \omega t + \varphi$, odnosno važi $\Phi(t + T) = \Phi(t)$, pa se period kretanja ipak može definisati. Kao što smo videli, kvazi-periodično kretanje je predstavljeno kao proizvod jedne neperiodične ($Ae^{-\beta t}$) i jedne periodične ($\cos(\omega t + \varphi)$) funkcije vremena.

¹²Ovaj tip kretanja se naziva kritično aperiodičnim.

¹³Kao što se vidi sa slike na kojoj su predstavljena ova tri tipa kretanja sa prigušenjem, gubitak energije je najbrži kod kritičnog aperiodičnog kretanja.



Slika 3.17: Grafik elongacije u zavisnosti od vremena kod prigušenog oscilovanja sa različitim vrednostima koeficijenta prigušenja.

kraju jednaka nuli a izgubljena mehanička energija prelazi u unutrašnju energiju sredine.

Rešavanje jednačine koja opisuje prigušeno oscilovanje

Jednačina kretanja (3.47) se može zapisati u obliku

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.51)$$

gde je x elongacija, $\beta = \frac{b}{2m}$ koeficijent prigušenja, a ω_0 ugaona frekvencija slobodnih, odnosno neprigušenih oscilacija (pri $\beta = 0$, kada nema gubitka energije).

Ukoliko se elongacija x zapiše u vidu proizvoda dva faktora $x(t) = e^{-\beta t} z(t)$, da bi videli kakav efekat ova smena ima na polaznu jednačinu moramo naći prvi, odnosno drugi izvod i zameniti u izraz (3.51). Kako su traženi izvodi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt} (e^{-\beta t} z(t)) = z \frac{d}{dt} e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \frac{d}{dt} z = e^{-\beta t} (\dot{z} - \beta z) \\ \ddot{x} &= \frac{d}{dt} (e^{-\beta t} (\dot{z} - \beta z)) = e^{-\beta t} (\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z), \end{aligned}$$

dobija se

$$e^{-\beta t} [\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z + 2\beta(\dot{z} - \beta z) + \omega_0^2 z] = 0. \quad (3.52)$$

Dobijena jednačina je proizvod faktora $e^{-\beta t}$ i faktora koji je izdvojen uglastom zagradom. Kako relacija mora da bude jednaka nuli u svakom momentu vremena,¹⁴ odatle sledi da je izraz u uglastoj zagradi mora da uvek bude

¹⁴Prvi faktor, $e^{-\beta t}$, je jednak nuli samo za $t \rightarrow \infty$.

jednak nuli. Kao što je lako primetiti ovaj izraz nakon sredjivanja može da se zapiše u obliku

$$\ddot{z} + [\omega_0^2 - \beta^2]z = 0. \quad (3.53)$$

Ukoliko je $\beta < \omega_0$ može da se uvede nova veličina $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, tako da prethodna jednačina postaje

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad (3.54)$$

a to je, kao što je poznato, jednačina linearnih harmonijskih oscilacija, čije opšte rešenje je oblika $z = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, tako da je, obzirom na uvedenu smenu, opšte rešenje jednačine prigušenih oscilacija, oblika

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.55)$$

pri čemu je $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

3.2.1 Koeficijent prigušenja i period prigušenih oscilacija

U mnogim sistemima je koeficijent prigušenja mali u poredjenju sa frekvencijom sopstvenih oscilacija ω_0 , $\beta \ll \omega_0$. U tim slučajevima kretanje sistema može da se razmatra kao skoro harmonijsko oscilovanje frekvence ω i sa amplitudom koja se menja po zakonu $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ (slika). Koeficijent prigušenja β na taj način određuje brzinu smanjenja amplitude oscilacija.

Period prigušenih oscilacija je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (3.56)$$

Neka se prvi najveći otklon tela A_1 dostiže u momentu vremena t_1 . Sledeći najveći otkloni A_2, A_3, \dots , obrazuju geometrijsku progresiju:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 e^{-\beta t_1}, \\ A_2 &= A_0 e^{-\beta(t_1+T)}, \\ A_3 &= A_0 e^{-\beta(t_1+2T)}, \dots \end{aligned} \quad (3.57)$$

Odnos dveju amplituda koje odgovaraju momentima vremena koji se razlikuju za jedan period je

$$\frac{A(t_1)}{A(t_1 + T)} = e^{\beta T}. \quad (3.58)$$

Veličina $e^{\beta T}$, koja definiše taj odnos, naziva se *dekrement prigušenja* a njen logarima *logaritamski dekrement prigušenja*

$$\lambda = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_1 + T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (3.59)$$

Vreme za koje se amplituda smanji e puta se naziva vreme relaksacije i ono je jednako $\tau = 1/\beta$. Broj oscilacija sistema za to vreme je

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda},$$

pa je znači, logaritamski dekrement prigušenja jednak recipročnoj vrednosti broja oscilacija, koje se izvrše za vreme relaksacije $\tau = 1/\beta$.

3.2.2 Faktor dobrote

Često se za opsivanje oscilatornih sistema koristi i veličina koja se naziva *faktor dobrote* koja se definiše kao

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \quad (3.60)$$

koja je proporcionalna broju oscilacija N_e koje se izvrše za vreme relaksacije τ .

Kako je ukupna energija oscilatora proporcionalna amplitudi, pri oscilovanju sa malim prigušenjem važi

$$E = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (3.61)$$

odnosno, njegova energija opada sa vremenom, pri čemu je E_0 ukupna energija oscilatora u početnom momentu vremena. Gubitak energije oscilatora za vreme od jednog perioda T je

$$-\Delta E = E 2\beta T$$

odakle je

$$\frac{E}{-\Delta E} = \frac{Q}{2\pi}$$

3.3 Prinudne oscilacije

Gubitak energije oscilatora, izazvan oscilovanjem u sredini koja prigušuje kretanje, se može nadoknaditi primenom spoljašnje sile koja bi vršila pozitivan rad na sistemu. Energija može biti dodati sistemu u bilo kom momentu

vremena, delovanjem sile koja deluje u smeru kretanja oscilatora. Na primer, dete na ljuljaški će se stalno kretati ukoliko ga pravovremeno poguramo. Amplituda kretanja će, pri ovakvom načinu kretanja, ostati konstantnom, ukoliko pri svakom ciklusu kretanja u sistem ubacimo energiju jednaku onoj koju je sistem izgubio usled prigušenja. Kretanje ovakve vrste se naziva **prinudno oscilovanje**.

Kao što je jasno iz ovog razmatranja, prinudna sila koja deluje na oscilator koji osciluje prigušeno, da bi održala oscilacije mora da bude takodje periodična, odnosno oblika $F = F_m \cos \omega t$, gde je ω frekvencija periodične spoljašnje sile a F_m njena amplituda. Jednačina kretanja sada postaje

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega t. \quad (3.62)$$

Nakon dovoljno dugo vremena, energija koju prilikom ciklusa-jedne pune oscilacije, u sistem ubaci prinudna sila postane jednaka energiji koja se izgubi, sistem počne da osciluje sa konstantnom amplitudom. U tom slučaju rešenje ove jednačine je oblika

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.63)$$

Rešavanje jednačine koja opisuje prinudno oscilovanje

Jednačina (3.62) može da se zapiše u obliku

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t, \quad (3.64)$$

gde je $f = F_m/m$. Kao što je lako videti, leva strana ove jednačine je ista kao i leva strana jednačine (3.51), a razlika je u tome što, za razliku od jednačine koja opisuje prigušeno oscilovanje, ovde na desnoj strani nemamo nulu nego neko funkciju vremena. U tom smislu se ova jednačina naziva nehomogenom diferencijalnom jednačinom. Kada ne bi bilo prinudne sile i sile trenja, odnosno otpora sredine, ova diferencijalna jednačina bi opisivala slobodno oscilovanje ugaonom frekvencom ω_0 .

Interesantno je proveriti pod kojim uslovima je (3.63) rešenje diferencijalne jednačine prinudnog oscilovanja. U tu svrhu treba ovo, pretpostavljeno, rešenje zameniti u jednačinu i proveriti uslove koji mora da važe da bi je ono zadovoljavalo. Zapravo, reč je o uslovima na konstante A i φ koji će time biti namentnuti.

Iz izraza (3.63), se za prvi, odnosno drugi izvod po vremenu dobija

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.65)$$

što nakon zamene u (3.64) daje

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - 2\beta A\omega \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t + \varphi) = f \cos \omega t.$$

Koristeći pravila za razlaganje trigonometrijskih funkcija zbira uglova, ovaj izraza može da se zapiše kao

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)(\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) - 2\beta A(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = f \cos \omega t.$$

Da bi ova jednačina bila zadovoljena, moraju koeficijenti (izrazi) koji stoje uz $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ sa obe strane jednačine da budu jednaki, što dovodi do toga da mora da važe sledeći uslovi

$$\begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - 2\beta A\omega \sin \varphi &= f \\ A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta A\omega \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Iz druge jednačine se dobija

$$\tan \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.67)$$

a dizanje na kvadrati i sabiranje obeju jednačina daje

$$A^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = f^2,$$

odakle je amplituda uspostavljenih prinudnih oscilacija

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (3.68)$$

3.3.1 Amplituda prinudnih oscilacija

Ukoliko se rešenje (3.63), zameni u jednačinu kretanja (3.62), za amplitudu prinudnih oscilacija se dobija

$$A = \frac{F_m/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}. \quad (3.69)$$

U ovoj jednačini je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, ugaona frekvencija neprigušenih oscilacija ($b = 0$).

3.3.2 Rezonancija

Amplituda oscilacija kod prinudnog oscilovanja, je proporcionalna amplitudi prinudne sile. Interesantno je primetiti da ako menjamo frekvencu prinudne sile ω pri konstantnoj frekvenci ω_0 spostvenih oscilacija, menja se i amplituda prinudnih oscilacija. Za neku vrednost frekvence prinudne sile ona će imati maksimum koji može da se odredi na osnovu analize zavisnosti amplitude od frekvence date jednačinom (3.69). Ustvari, amplituda će imati maksimalnu vrednost kada imenilac tog izraza bude minimalan, a on će biti minimalan kada mu je izvod po frekvenci prinudne sile (koja je jedina promenljiva koja utiče na njegovu promenu) jednak nuli, odnosno kada je

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2)2\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Ovaj izraz može biti jednak nuli u dva slučaja. Prvi odgovara situaciji kada je $\omega = 0$, što bi odgovaralo situaciji da je prinudna sila konstantna, a znamo da to nije, već se periodično menja, a drugi da je

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

Ova frekvencija prinudne sile se naziva rezonantnom, a pojava da amplituda dobija maksimalnu vrednost se naziva rezonancijom. Rezonantna frekvencija ω_{rez} je prema tome

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

a rezonantna amplituda je

$$A_{rez} = \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Oдавde se vidi da, kada je otpor sredine jednak nuli, tj. $\beta = 0$, rezonantna amplituda postaje jednaka amplitudi slobodnih oscilacija $\omega_{rez} = \omega_0$ a amplituda u tom slučaju teži beskonačnosti.

3.4 Slaganje oscilacija

Kako je u prirodi prava retkost da na telo deluje samo jedna sila, interesantno je razmotriti kretanje oscilatora pod dejstvom dve sile od kojih svaka za sebe može da izazove oscilatorno kretanje. Rezultujuće kretanje je u tom slučaju takodje periodično. Ovakva slučaj je recimo ukoliko pomoću opruge obesimo teg o tavanicu vagona u kretanju. Teg će oscilovati oko svoje tačke vešanja

koja pak sa svoje strana osciluje na oprugama samog vagona pa će on na taj način vršiti kretanje koje se sastoji iz dva oscilovanja duži iste prave.

Elongacije ova dva kretanja su

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (3.70)$$

a ukupna elongacija je zbir

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (3.71)$$

Rezultujuće kretanje je takodje oscilatorno, što znaci da bi trebalo da ima oblik (3.4), a da bi se odredilo kolike su mu amplituda, frekvencija i početna faza, treba ustvari videti pod kojim uslovima se prethodna jednačina za ukupnu elongaciju svodi na ovaj izraz. To u opstem slučaju nije lak posao pa ćemo ga uraditi za neke specijalne slučajeve koji se relativno lako rešavaju.

3.4.1 Slaganje oscilacija istog pravca i istih frekvencija

Ima smisla razmotriti prvo rezultat slaganja dva oscilovanja istog perioda koje se vrše sa nekom razlikom faza i imaju različite amplitude. U tom slučaju je rezultujuća elongacija

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (3.72)$$

Ukoliko se primene pravila za razvoj trigonometrijskih funkcija od zbira uglova, dobija se

$$x = A_1[\cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1] + A_2[\cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2], \quad (3.73)$$

odnosno, nakon izdvajanja sabiraka koji sadrže vreme kao promenljivu

$$x = [A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2] \cos \omega t - [A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2] \sin \omega t. \quad (3.74)$$

Da bi ovaj izraz mogao da se svede na izraz koji opisuje harmonijsko oscilovanje (3.4), faktori koji se nalaze u uglastim zagradama treba da se zapišu u obliku

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A \cos \varphi, \quad (3.75)$$

$$A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = A \sin \varphi, \quad (3.76)$$

tako da je sada elongacija rezultujućeg oscilovanja

$$x = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.77)$$

gde je A amplituda rezultujuće oscilacije, ω njena frekvencija, a φ njena početna faza. Frekvencija rezultujuće oscilacije se poklapa sa frekvencijama pojedinih oscilacija čijim slaganjem je nastala, dok amplitudu i početnu fazu treba odrediti iz jednačina (3.75) i (3.76) kojima su definisane. Tako se kvadriranjem i sabiranjem tih dveju jednačina za amplitudu dobija

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (3.78)$$

dok njihovo deljenje daje izraz za početnu fazu ukupne oscilacije

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (3.79)$$

3.4.2 Slaganje oscilacija bliskih frekvencija (udari)

Interesantan je slučaj slaganja harmonijskih oscilacija istog pravca i frekvencija koje nisu iste ali se malo razlikuju. Videćemo da se rezultujuće kretanje može razmatrati kao harmonijsko kretanje sa pulsirajućom amplitudom koje se naziva *udari* ili *izbijanja*.

Označimo frekvenciju jednog oscilovanja sa ω , a drugog sa $\omega + \Delta\omega$ pi čemu je $\Delta\omega \ll \omega$. Pretpostavimo da su amplitude iste¹⁵ i da su jednake A . Takođe možemo da pretpostavimo da su početne faze obeju oscilacija jednake nuli.¹⁶ Jednačine oscilovanja u tom slučaju postaju

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t, \quad (3.80)$$

a njihov zbir je

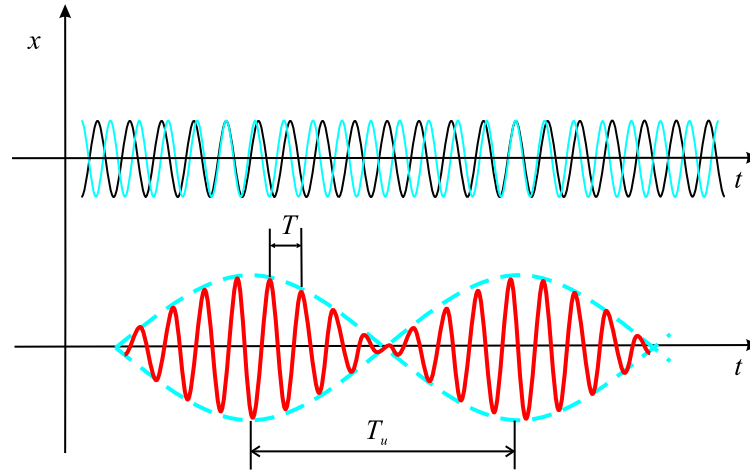
$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2}\right) \cos \omega t, \quad (3.81)$$

pri čemu je u drugom faktoru zanemaren član $\Delta\omega/2$ u poredjenju sa ω .

Grafik ove funkcije je predstavljen na slici 3.18. Kao rezultat superponiranja dva oscilovanja bliskih frekvencija dobija se kretanje čija elongacija (3.81) je proizvod dva faktora koja zavise od vremena. Prvi, odnosno, faktor koji se nalazi u zagradi se menja sa vremenom sporije od drugog faktora.

¹⁵Ova i druge pretpostavke ne utiču na opštost zaključaka ali znatno uprošćavaju analizu problema.

¹⁶Naime, kako se kretanja odvijaju nejednakim ugaonim brzinama, fazna razlika oscilovanja se menja sa vremenom, pa možemo za početni trenutak da uzmemo upravo onaj kada su one jednake, što znači da će početne faze u tom trenutku biti jednake nuli. Iz ovoga vidimo da, uzimanje da su početne faze jednake nuli, znači ustvari pogodan odabir nultog vremenskog trenutka.



Slika 3.18: Udari.

Zbog činjenice da je $\Delta\omega \ll \omega$, za vreme dok množitelj $\cos \omega t$ izvrši nekoliko punih oscilacija, množitelj koji se nalazi u zagradi, se veoma malo promeni. Na osnovu ovoga možemo, oscilovanje definisano jednačinom (3.81) da razmatramo kao harmonijsko oscilovanje frekvence ω čija amplituda se menja po periodičnom zakonu. Kako je amplituda pozitivna veličina, u ovom slučaju je predstavljena izrazom

$$A(t) = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \right|. \quad (3.82)$$

Ova funkcija je periodična funkcija, a kako se radi o apsolutnoj vrednosti kosinusne funkcije, period promene vrednosti amplitude je određen izrazom

$$\frac{\Delta\omega}{2} T_u = \pi,$$

odakle je traženi period

$$T_u = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (3.83)$$

Frekvencija promene amplitude je, prema tome,

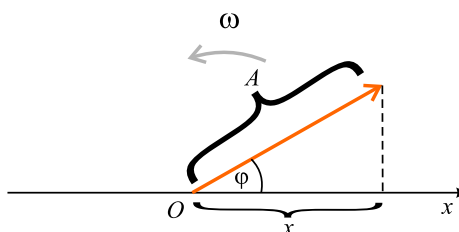
$$\nu_u = \frac{1}{T_u} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \Delta\nu, \quad (3.84)$$

odnosno, ona je jednaka razlici frekvencija $\nu_2 - \nu_1$ posmatranih oscilovanja.

3.4.3 Vektorski dijagram

Slaganje oscilacija, kada je reč o oscilacijama istog pravca, postaje elegantnije i očiglednije ako se oscilacije predstave grafički u obliku vektora u ravni, odnosno vektorskim dijagramom.

Kao što je već napomenuto u 3.1.4, harmonijsko oscilovanje može da se zada uz pomoć vektora koji uniformno rotira (slika 3.19) i čija je dužina jednaka amplitudi oscilovanja. Projekcija ovog vektora na x osu vrši harmonijsko oscilovanje amplitude jednake dužini vektora, ugaone frekvence jednake ugaonoj brzini rotiranja vektora i početne faze jednake uglu koji je vektor obrazovao sa ovom osom u početnom momentu vremena.



Slika 3.19: Vektorski dijagram.

Da vidimo sada kako izgleda superponiranje dva harmonijska oscilovanja istog pravca i iste učestanosti. Ukupna elongacija tela je zbir elongacija

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (3.85)$$

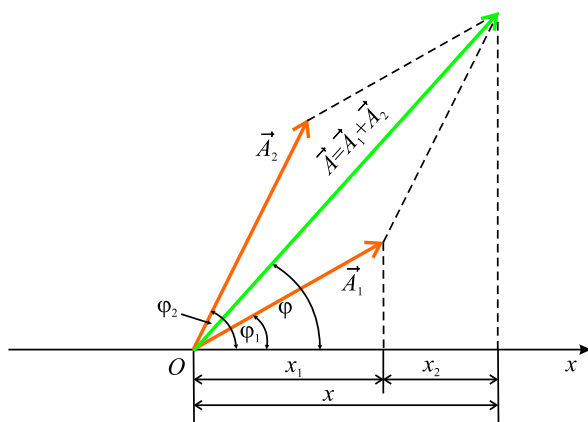
Oba oscilovanja ćemo, u skladu sa osnovnom idejom, predstaviti pomoću dva vektora \vec{A}_1 i \vec{A}_2 (slika 3.20). Vektor \vec{A} je zbir ova dva vektora a, kao što je lako videti sa slike, njegova projekcija na x osu je jednaka zbiru projekcija vektora \vec{A}_1 i \vec{A}_2

$$x = x_1 + x_2. \quad (3.86)$$

U skladu sa tim, rezultujući vektor \vec{A} predstavlja rezultujuće oscilovanje. On rotira istom ugaonom brzinom kao i vektori \vec{A}_1 i \vec{A}_2 , tako da će rezultujuće oscilovanje biti harmonijsko sa frekvencom ω , amplitudom A i početnom fazom φ . Iz konstrukcije slike se vidi (primena kosinusne teoreme ili primenom pravila za skalarni proizvod vektora $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ sa samim sobom¹⁷) da je

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3.87)$$

¹⁷Iz $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \cdot \vec{A}_2 + 2\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2$, imajući u vidu da je ugao između vektora \vec{A}_1 i \vec{A}_2 jednak $\varphi_2 - \varphi_1$ se dobija tražena relacija.



Slika 3.20: Vektorski dijagram za slaganje dveju oscilacija.

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (3.88)$$

Može da se kaže da predstavljanje harmonijskih oscilacija preko uniformno rotirajućih vektora omogućuje da se sabiranje više oscilacija svede na sabiranje odgovarajućih vektora. Ovaj način sabiranja oscilacija je prostiji i očigledniji od direktnog sabiranja elongacija x_1 i x_2 tokom koga je, kao što smo ti videli u prethodnom poglavlju, neophodno vršiti određene trigonometrijske transformacije.

Proanalizirajmo sada izraz (3.87) za amplitudu rezultujućeg oscilovanja. Ukoliko je razlika faza posmatranih dveju oscilacija $\varphi_2 - \varphi_1$ jednaka nuli, amplituda rezultujućeg oscilovanja je jednaka zbiru amplituda A_1 i A_2 . Ukoliko je razlika faza jednaka $+\pi$ ili $-\pi$ (oscilacije se nalaze u protivfazi) amplituda rezultujućeg oscilovanja je jednaka $|A_1 - A_2|$. Ukoliko frekvencije oscilovanja nisu jednake, vektori \vec{A}_1 i \vec{A}_2 rotiraju nejednakim ugaonim brzinama. U tom slučaju rezultujući vektor \vec{A} pulsira po intenzitetu i rotira nenuniformno. U skladu sa tim, rezultujuće kretanje nije prosto harmonijsko oscilovanje, već neki složeni oscilatorni proces.

3.4.4 Slaganja medjusobno normalnih oscilacija

Posmatrajmo rezultat slaganja dva oscilovanja koja se vrše u medjusobno normalnim pravcima. To znači da materijalna tačka učestvuje istovremeno u dva medjusobno normalna oscilovanja i pretpostavimo, da bi lakše izvršili analizu, da je reč o oscilovanjima istih frekvencija, odnosno perioda. Ukoliko

se ta dva kretanja vrše po x i po y pravcu, jednačine oscilovanja će biti

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \quad y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \quad (3.89)$$

gde su sa A_x , A_y , φ_x i φ_y , označene odgovarajuće amplitude i početne faze. Trajektorija materijalne tačke, budući da je funkcija koja povezuje x i y koordinatu, se dobija iz prethodnih dveju jednačina, eliminacijom vremena iz njih. Ona će predstavljati jednačinu krive linije u xOy ravni, a da je dobili zgodno je prethodne jednačine zapisati u obliku

$$\frac{x}{A_x} = \cos \omega t \cos \varphi_x - \sin \omega t \sin \varphi_x, \quad (3.90)$$

$$\frac{y}{A_y} = \cos \omega t \cos \varphi_y - \sin \omega t \sin \varphi_y. \quad (3.91)$$

Množeći jednačinu (3.90) sa $\cos \varphi_y$, a (3.91) sa $\cos \varphi_x$ i uzimajući njihovu razliku, dobija se

$$\frac{x}{A_x} \cos \varphi_y - \frac{y}{A_y} \cos \varphi_x = \sin \omega t \sin(\varphi_y - \varphi_x). \quad (3.92)$$

Množeći sada (3.90) sa $\sin \varphi_y$ a (3.91) sa $\sin \varphi_x$ i opet uzimajući njihovu razliku, dobijamo

$$\frac{x}{A_x} \sin \varphi_y - \frac{y}{A_y} \sin \varphi_x = \cos \omega t \sin(\varphi_y - \varphi_x). \quad (3.93)$$

Dižući na kvadrat i sabirajući poslednje dve jednačine, dobijamo jednačinu u kojoj nema eksplicitne vremenske zavisnosti, odnosno jednačinu trajektorije

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - 2 \frac{xy}{A_x A_y} \cos(\varphi_y - \varphi_x) = \sin^2(\varphi_y - \varphi_x). \quad (3.94)$$

Ova jednačina, u opštem slučaju predstavlja jednačinu elipse, čije osobine su određene vrednošću razlike početnih faza posmatranih međusobno normalnih oscilacija.

Razlika početnih faza jednaka nuli

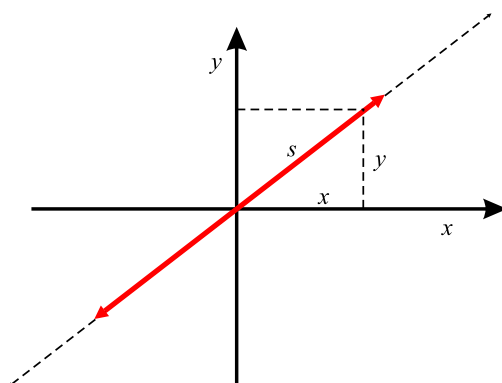
U ovom slučaju, obzirom na vrednosti kosinusne i sinusne funkcije za vrednost argumenta od nula radijana, jednačina trajektorije (3.94) je

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - 2 \frac{xy}{A_x A_y} = 0 \quad (3.95)$$

što se može zapisati kao kvadrat razlike x/A_x i y/A_y , ili kao

$$y = \frac{A_y}{A_x}x. \quad (3.96)$$

Odavde se vidi, da je trajektorija u tom slučaju prava linija (slika 3.21) koja prolazi kroz koordinatni početak i zaklapa sa x osom ugao čiji je tangens jednak odnosu amplituda A_y/A_x .



Slika 3.21: Rezultat slaganja dve normalne oscilacije istih faza.

Da bi videli kakav je karakter kretanja materijalna tačke dužove prave linije, potrebno je videti kako se sa vremenom menja njen položaj na putanji. On je određen odsečkom s za koji, obzirom da su početne faze oba oscilovanja iste, žaži

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_x^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + A_y^2 \cos^2(\omega t + \varphi)} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.97)$$

odakle se vidi da je reč o harmonijskom oscilatornom kretanju sa amplitudom

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}.$$

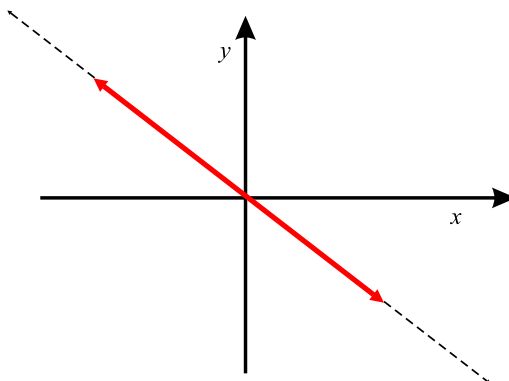
Razlika početnih faza jednaka π

U ovom slučaju, obzirom da je $\varphi_y - \varphi_x = \pi$, jednačina trajektorije je

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} + 2\frac{xy}{A_x A_y} = 0, \quad (3.98)$$

što znači da je opet reč o pravoj liniji ali sa jednačinom

$$y = -\frac{A_y}{A_x}x. \quad (3.99)$$



Slika 3.22: Rezultat slaganja dve normalne oscilacije suprotnih faza.

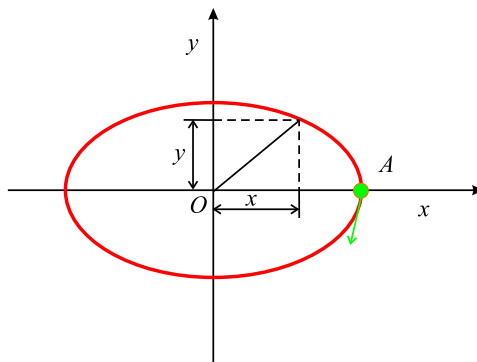
Amplituda rezultujućeg oscilovanja je ista kao i u prethodnom slučaju.

Razlika početnih faza $\pi/2$ ili $3\pi/2$

Ako je fazna razlika $\varphi_y - \varphi_x$ jednaka $\pi/2$ ili $3\pi/2$, jednačina trajektorije ima oblik

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1, \quad (3.100)$$

što predstavlja jednačinu elipse, čije se ose poklapaju sa koordinatnim osama (3.23). Ukoliko je fazna razlika $\pi/2$, tačka se po elipsi kreće u smeru kretanja



Slika 3.23: Eliptično kretanja kao rezultat slaganja dva međusobno normalna harmonijska oscilatorna kretanja.

kazaljke na časovniku. To se može pokazati ako se jednačine oscilacija (3.89)

napišu u sledećem obliku

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi), \quad y = A_y \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -A_y \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.101)$$

U trenutku vremena kada je argument oba izraza jednak nuli ($\omega t + \varphi = 0$), telo koje osciluje se nalazi u tački A (slika 3.23). U sledećem trenutku argument poraste, pa je x koordinata pozitivna a y negativna, što znači da se tačka pomerila nadole, u smeru kretanja kazaljke na časovniku. Ako je pak, fazna razlika $3\pi/2$, analognim rasudjivanjem se može pokazati da se tačka po elipsi kreće u suprotnom smeru od kazaljke na časovniku.

Takodje se može zaključiti da, uvek kada se promeni znak fazne razlike, kretanje po elipsi menja svoj smer. Osim toga, kada su amplitude oscilacija koje se sabiraju jednake, elipsa postaje kružnica.

Prema tome, dva uzajamno normalna harmonijska oscilovanja

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

mogu da se predstave u obliku

$$x = A \cos \omega t, \quad y = -A \sin \omega t,$$

a kao rezultujuće oscilovanje daju ravnomerno kretanje po kružnici poluprečnika A i sa ugaonom brzinom ω , koje se vrši smeru kretanja kazaljke na satu. Važi naravno i obrnuto, ravnomerno kretanje po kružnici poluprečnika A u smeru kazaljke na časovniku, ugaonom brzinom ω , može da se razloži na dva međusobno normalna harmonijska oscilovanja predstavljena prethodnim izrazima.

Takodje i dva međusobno normalna harmonijska oscilovanja

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = A \sin \omega t$$

daje rezultujuće kretanje po kružnici poluprečnika A sa ugaonom brzinom ω koje se vrši u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na časovniku.

3.4.5 Modulacija

Složeno oscilovanje prilikom koga se amplituda sporo menja (u poredjenju sa periodom oscilacija) naziva se modulirano oscilovanje¹⁸. Modulirano oscilovanje nije harmonijsko oscilatorno kretanje, ali može da se razloži na niz

¹⁸Tačnije rečeno ovo je slučaj amplitudne modulacije (AM). Osim nje postoji i frekventna (FM) i fazna modulacija (PM)

harmonijskih kretanja. Uzmimo za primer oscilovanje

$$x = A \cos \omega_0 t$$

čija se amplituda menja npr. po zakonu

$$A = A_1 + A_2 \cos \omega t,$$

gde su A_1 i A_2 kontante pri čemu je $A_2 < A_1$ i $\omega \ll \omega_0$. To znači da se amplituda A menja u toku vremena između vrednosti $A_1 + A_2$ (kada je $\omega t = 0$) i $A_1 - A_2$ (kada je $\omega t = \pi$). Ukoliko zamenimo navedenu vrednost amplitude u izraza za elongaciju dobija se

$$x = (A_1 + A_2 \cos \omega t) \cos \omega_0 t = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \cos \omega t \cos \omega_0 t,$$

odnosno

$$x = A_1 \cos \omega_0 t + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_0 + \omega)t + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_0 - \omega)t. \quad (3.102)$$

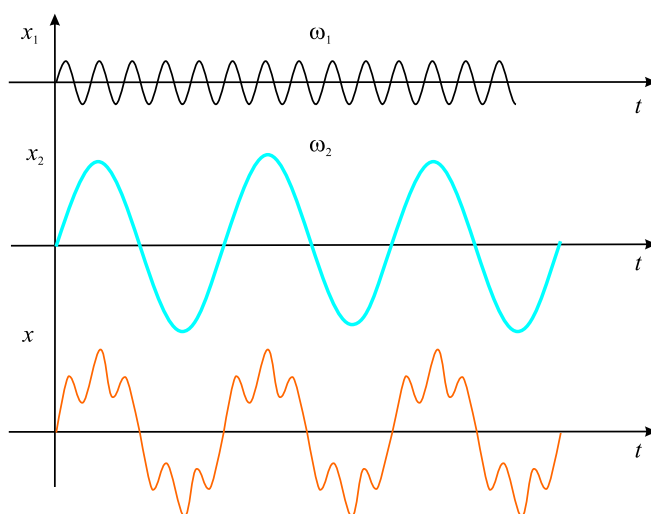
Ovo znači da posmatrano (modulisano) kretanje, iako nije harmonijsko, može da se prikaže kao zbir tri harmonijska oscilatorna kretanja sa frekvencijama ω_0 , $\omega_0 + \omega$ i $\omega_0 - \omega$ i sa amplitudama A_1 , $A_2/2$ i $A_2/2$.

3.4.6 Razlaganje oscilacija. Spektar

U prethodnim poglavljima je pokazano da se, pri slaganju dva harmonijska oscilovanja koja se vrše duž iste prave i imaju iste frekvencije, kao rezultat dobija takodje harmonijsko kretanje **iste frekvencije**. Ukoliko se slažu dva oscilovanja različitih frekvencija, rezultujuće oscilovanje ima složeniji karakter (slika 3.24). Na ovoj slici, u gornjem redu je prikazano harmonijsko oscilovanje frekvencije ω_1 i određene amplitude A_1 . U srednjem redu je prikazano drugo, takodje harmonijsko, oscilovanje čija je frekvencija ω_2 određen broj puta manja od frekvencije ω_1 a čija je amplituda A_2 određen broj puta veća od amplitude A_1 . U donjem redu je prikazano oscilovanje koje nastaje superpozicijom prva dva; elongacija x tačke koja vrši to složeno oscilovanje je u svakom trenutku jednaka zbiru elongacija prvog i drugog oscilovanje

$$x = x_1 + x_2.$$

Interesantno je postaviti pitanje da li može da se reši obrnut zadatak, odnosno da li je moguće dato složeno oscilovanje, u opštem slučaju razložiti na harmonijska. U navedenom slučaju je to moguće jer je složeno oscilovanje ustvari zbir dva predstavljena harmonijska oscilovanja prikazana na prva dva reda slike.



Slika 3.24: Slaganje dva harmonijska oscilatorna kretanja frekvencija ω_1 i ω_2 .

Kao što smo do sada videli rezultat slaganja dva harmonijska oscilovanja zavisi od odnosa njihovih frekvencija, amplituda i početnih faza. Ukoliko imamo više od dva harmonijska oscilovanja, rezultujuće oscilovanje poprima još složeniji karakter. Ovo usložnjavanje rezultujućeg oscilovanja, ukazuje na to da je oscilovanje vrlo složenog oblika verovatno moguće prikazati kao zbir većeg broja harmonijskih oscilovanja različitih amplituda i frekvencija.

U višim kursevima matematike se pokazuje da svaka periodična funkcija $x = F(\omega t)$, perioda 2π , može da se predstavi u obliku beskonačnog zbira trigonometrijskih funkcija

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots \\ + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (3.103)$$

koji se naziva Furijeov red, pri čemu se koeficijenti A_0, A_1, A_2, \dots i B_0, B_1, B_2, \dots za dati oblik funkcije $F(\omega t)$ izračunavaju preko određenih formula koje nećemo ovde navoditi, već ćemo na ovom mestu proanalizirati posebno interesantne slučajeve.

Prvi od njih se odnosi na situaciju kada je funkcija $F(\omega t)$ parna, tj. kada za nju važi

$$F(-\omega t) = F(\omega t).$$

Obzirom na oblik funkcije (3.103), to je moguće jedino ukoliko su koeficijenti uz sinusne sabirke jednaki nuli, tj. $B_1 = B_2 = B_3 = \dots = 0$, i u tom slučaju

razvoj funkcije u red izgleda ovako

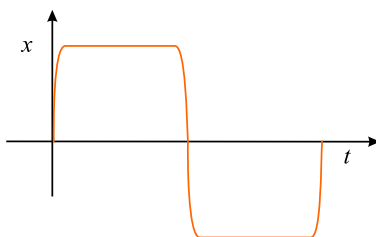
$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (3.104)$$

Za neparnu funkciju, odnosno funkciju koja menja znak prilikom promene znaka argumenta, tj. $F(-\omega t) = -F(\omega t)$, koeficijent A_0 kao i svi koeficijenti uz kosinuse (A_1, A_2, \dots) moraju da budu jednaki nuli, pa je razvoj (3.103) sada

$$x = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (3.105)$$

Na osnovu prethodne analize se može zaključiti da svako **periodično** oscilovanje, u principu može da se razloži na sumu harmonijskih oscilovanja čije su frekvencije $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$

Na osnovu ovde izloženog, relativno je lako pokazati kako može, da se jedna pravougaona oscilacija (slika 3.25) da se razloži na harmonijske oscilacije odgovarajućih frekvencija.



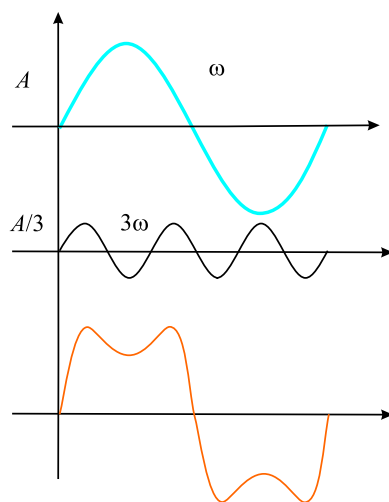
Slika 3.25: Rezultat slaganja dve harmonijske oscilacije čije frekvencije stoje u odnosu 1:3 a amplitude u odnosu 1:1/3.

U tu svrhu pogledajmo kako izgleda rezultujuće oscilovanje dobijeno slaganjem, za početak dve harmonijske oscilacije frekvenci ω i 3ω čije su amplitude A i $A/3$ (slika 3.26).

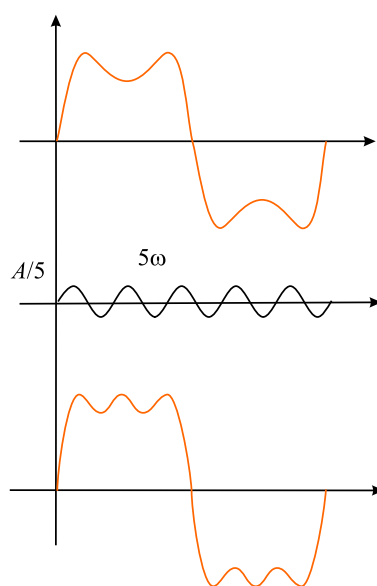
Dodajemo sada na ovo još jednu harmonijsku oscilaciju čija je frekvencija 5ω a amplituda $A/5$. Rezultat slaganja je prikazan na slici 3.27.

Ovakav postupak treba nastaviti i dalje, dodavanjem novih harmonijskih oscilacija sve veće i veće frekvencije, pri čemu je lako zaključiti da će rezultat slaganja biti oscilacija koja će sve više i više da podseća na pravougaonu oscilaciju. Na osnovu ovoga se može zaključiti da se jedna takva oscilacija može prikazati kao sledeći beskonačan zbir

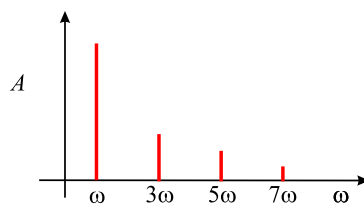
$$x = A \sin \omega t + \frac{A}{3} \sin 3\omega t + \frac{A}{5} \sin 5\omega t + \frac{A}{7} \sin 7\omega t + \dots \quad (3.106)$$



Slika 3.26: Rezultat slaganja dve harmonijske oscilacije čije frekvencije stoje u odnosu 1:3 a amplitude u odnosu 1:1/3.



Slika 3.27: Rezultat slaganja tri harmonijske oscilacije čije frekvencije stoje u odnosu 1:3:5 a amplitude u odnosu 1:1/3:1/5, dobijen dodavanjem treće na rezultat slaganja prve dve oscilacije.



Slika 3.28: Rezultat harmonijske analize složenog pravougaonog kretanja.

Postupak razlaganja složene periodične funkcije na prosta harmonijska oscilovanja se naziva **harmonijska analiza**, a oscilacije dobijene razlaganjem čine harmonijski spektar složene oscilacije sa različitim amplitudama i frekvencijama.

Rezultati harmonijske analize se prikazuju tako što se na apscisnu osu nanose vrednosti frekvencija a na ordinatu amplituda oscilacija. Dobijeni *spektar* složenog periodičnog kretanja se sastoji od odvojenih linija.

3.5 Primeri i zadaci

1. Odrediti period oscilovanja tega mase 2,5 kg, obešenog o oprugu ako se ona, pod dejstvom sile 30 N istegne za 9 cm.

◇ Koeficijent elastičnosti opruge se dobija kao odnos sile od 3 N i istežanja od 9 cm koje ona izaziva

$$k = \frac{30N}{0,09m} = \frac{1}{3}10^3 \frac{N}{m}.$$

Koristeći ovaj rezultat, period ovog oscilatora je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2,5kg \cdot 3m}{10^3N}} = 0,54s.$$

2. Matematičko klatno osciluje po zakonu $x = x_0 \sin \omega t$. Odrediti odnos kinetičke i potencijalne energije u sledećim vremenskim trenucima: $t_1 = \frac{T}{12}$, $t_2 = \frac{T}{8}$ i $t_3 = \frac{T}{6}$.

◇ Argument sinusne funkcije koja opisuje elongaciju oscilovanja je $\omega t = \frac{2\pi}{T}t$ a za tražene momente vremena ima vrednosti, redom: $\omega t_1 = \frac{\pi}{6}$, $\omega t_2 = \frac{\pi}{4}$ i $\omega t_3 = \frac{\pi}{3}$.

Odnos kinetičke i potencijalne energije oscilovanja, u opštem slučaju je

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{mv^2}{2}}{\frac{kx^2}{2}} = \frac{v^2}{\omega^2 x^2} = \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t},$$

a za tražene momente vremena se dobija da je, redom: 3, 1 i $\frac{1}{3}$.

3. Odrediti odnos perioda oscilovanja matematičkog klatna koje se kreće u zemljinom gravitacionom polju vertikalno naviše sa ubrzanjem $a = 1\text{m/s}^2$, i matematičkog klatna iste dužine koje se kreće naniže po intenzitetu jednakim ubrzanjem.

◊ Period matematičkog klatna $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ se modifikuje u $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$, odnosno $T'' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$, u zavisnosti od toga da li se klatno, kao celina, kreće naviše ili naniže. Odnos ova dva perioda je

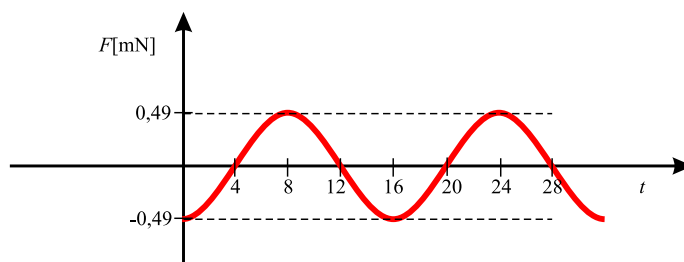
$$\frac{T''}{T'} = \sqrt{\frac{g+a}{g-a}} = 1,11.$$

4. Materijalna tačka mase $m = 32\text{ g}$ se kreće po zakonu

$$x = x_0 \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

gde je $x_0 = 0,1\text{ m}$, $T = 16\text{ s}$. Odrediti: maksimalnu vrednost sile pod čijim dejstvom se odvija ovo kretanje, vrednost sile u $t = 0$ kao i grafik zavisnosti sile od vremena.

◊ Maksimalna vrednost sile je $F_m = ma_m$ i iznosi $F_m = m\frac{4\pi^2}{T^2}x_0 = 0,49\text{ mN}$, dok ona u početnom trenutku ima vrednost $F(0) = -kx_0 = -m\omega_0^2 x_0 = -m\frac{4\pi^2}{T^2}x_0 = -0,49\text{ mN}$.



Slika 3.29:

5. Štap dužine $L = 1,5$ m može da osciluje oko horizontalne ose koja prolazi kroz jedan njegov kraj. Gustina štapa raste linearno počev od neke vrednosti $\rho_0 = 2$ g/cm³ koju ima na kraju o koji je okačen, do vrednosti $\rho_0 + cL$, koju ima na suprotnom kraju ($c = 0,5$ g/cm⁴). Koliki je priod oscilovanja štapa?

◊ Štap se pri ovom kretanju ponaša kao fizičko klatno čiji je period oscilovanja $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$, gde je I moment inercije štapa a d je udaljenost centra mase štapa od tačke vešanja.

Moment inercije štapa dobijamo integracijom izraza dmr^2 , koji predstavlja moment inercije delića štapa dužine dr i mase dm po dužini štapa. Masa jednog takvog delića je $dm = \rho dV$, dok je gustina, prema uslovima zadatka $\rho = \rho_0 + cr$. Zapremina posmatranog delića štapa može da se zapiše kao $dV = Sdr$, gde je S površina poprečnog preseka štapa. Na osnovu ovoga je moment inercije

$$I = \int_0^L (\rho_0 + cr)r^2 S dr = \rho_0 S \int_0^L r^2 dr + cS \int_0^L r^3 dr = SL^3 \left(\frac{\rho_0}{3} + \frac{cL}{4} \right).$$

Položaj centra mase štapa, $r_{CM} = \frac{\int r dm}{m}$, je

$$r_{CM} = \frac{1}{m} \int_0^L r(\rho_0 + cr) S dr = \frac{\rho_0 S}{m} \int_0^L r dr + \frac{cS}{m} \int_0^L r^2 dr = \frac{SL^2}{m} \left(\frac{\rho_0}{2} + \frac{cL}{3} \right).$$

Kako je on određen u odnosu na tačku vešanja, ovaj izraz istovremeno predstavlja veličinu d u izrazu za period fizičkog klatna. Na osnovu ovako dobijenih podataka, period je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L(4\rho_0 + 3cL)}{2g(3\rho_0 + 2cL)}} = 2s.$$

6. O dve opruge okačeni su tegovi masa m_1 i m_2 , pri čemu je $m_1 > m_2$ a izduženje opruga je jednako i iznosi l . Koji teg ia veći period oscilovanja a koji, pri jednakim amplitudama, ima veću energiju. Mase opruga zanemariti.

◊

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ovde je k koeficijent elastičnosti koji je određen silom koja izaziva izduženje opruge za jedničnu dužinu, $k = \frac{Q}{l}$, pa je

$$k_1 = \frac{m_1 g}{l}, \text{ i } k_2 = \frac{m_2 g}{l}$$

Na osnovu ovoga su period jednaki i iznose

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Energije oscilovanja su

$$E_i = \frac{1}{2}k_i A^2 = \frac{m_i g}{2l} A^2,$$

pa će veću energiju imati teg veće mase.

7. Materijalna tačka osciluje po zakonu $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, gde je $A = 2$ cm. Odrediti početnu fazu φ_0 , ako je $x(0) = -\sqrt{3}$ cm i $\dot{x}(0) < 0$.

◇ Iz jednačine oscilovanja je

$$x(0) = A \cos \varphi_0,$$

odakle je $\cos \varphi_0 = x(0)/A = -\sqrt{3}/2$, odnosno $\varphi_0 = \pi \pm \pi/6$. Da bi odrediti koju od ove dve vrednosti da uzmemo za početnu fazu potreban nam je još jedan podatak a on je dat sa $\dot{x}(0) < 0$. Iz izraza za brzinu

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi),$$

odakle je $\dot{x}(0) = -\omega A \sin \varphi_0$. Početna brzina je negativna pri negativnim vrednostima sinusa, odnosno za uglove između 0 i π , pa je početna faza $\varphi_0 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

8. Materijalna tačka mase $m = 5$ g vrši harmonijske oscilacije sa frekvencijom $\nu = 0,5$ Hz. Amplituda oscilovanja je $A = 3$ cm. Odrediti: brzinu tačke u momentu vremena t_0 , kada je eleongacija $x = 1,5$ cm, maksimalnu silu F_{max} koja deluje na tačku i ukupnu energiju oscilovanja tačke.

◇ Iz jednačine oscilovanja je

$$x = A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

se za brzinu dobija

$$v = \dot{x} = -2\pi\nu A \sin(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Ako iz ova dva izraza eliminišemo vreme dobija se

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(2\pi\nu A)^2} = 1,$$

pa je

$$v(t) = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 8,2 \text{ cm/s.}$$

Sila se može dobiti kao proizvod mase i ubrzanja koje je

$$a = \dot{v} = -(2\pi\nu)^2 A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

pa je sila

$$F = -m(2\pi\nu)^2 A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Maksimalna vrednost sile je, prema tome,

$$F_{max} = mA(2\pi\nu)^2 = 1,5 \text{ mN.}$$

Ukupna energija je

$$E = \frac{kA^2}{2} = 2m\pi^2\nu^2 A^2 = 22 \mu\text{J.}$$

9. Dva matematička klatna, jednakih masa ali različitih dužina, osciluju jednakim ugaonim amplitudama α . Koje od ova dva klatna ima veću energiju?

◇ Ukupna energija oscilovanja materijalne tačke je jednaka zbiru kinetičke i potencijalne a takodje je jednaka maksimalnoj kinetičkoj (tada je potencijalna nula) ili maksimalnoj potencijalnoj (kada je kinetička jednaka nuli). U ovom slučaju je zgodno uporediti maksimalne potencijalne energije koje su određene maksimalnim otklonom. U ovim slučajevima tegovi su, u odnosu na njihov ravnotežni položaj, podignuti na visinu

$$h = l(1 - \cos \alpha)$$

gde je l dužina klatna. Kako su kod oba klatna ugaone amplitude jednake, na veću visinu se podiže klatno veće dužine. Drugim rečima, veću energiju ima klatno veće dužine.

10. Dve oscilacije istog pravca su zadate jednačinama $x_1 = A_1 \cos \omega(t + \tau_1)$ i $x_2 = A_2 \cos \omega(t + \tau_2)$, gde je $A_1 = 1 \text{ cm}$, $A_2 = 2 \text{ cm}$, $\tau_1 = 1/6 \text{ s}$, $\tau_2 = 1/2 \text{ s}$, $\omega = \pi \text{ 1/s}$. Odrediti amplitudu i početnu fazu rezultujuće oscilacije.

◇ Zgodno je prvo zapisati ove oscilacije u uobičajenom obliku

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi_i), \quad i = 1, 2$$

gde su početne faze $\varphi_i = \omega\tau_i$, odnosno $\varphi_1 = \pi/6$ i $\varphi_2 = \pi/2$.

Amplituda rezultujuće oscilacije je

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{7} = 2,65 \text{ cm},$$

dok je njena početna faza

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Zamena vrednosti daje

$$\tan \varphi = \frac{\sin \pi/6 + 2 \sin \pi/2}{\cos \pi/6 + 2 \cos \pi/2} = \frac{1/2 + 2}{\sqrt{3}/2} = \frac{5}{\sqrt{3}},$$

odakle je $\varphi = 0,394\pi \text{ rad} = 70,9^\circ$. Pošto oscilacije koje se sabiraju imaju jednake frekvencije, rezultujuća oscilacija će imati istu frekvenciju i biće zadata izrazom $x = A \cos(\omega t + \varphi)$.

11. Materijalna tačka istovremeno učestvuje u dva uzajamno normalna harmonijska oscilovanja, čije su jednačine

$$x = A_1 \cos \omega t, \quad y = A_2 \cos \frac{\omega t}{2},$$

gde je $A_1 = 1 \text{ cm}$, $A_2 = 2 \text{ cm}$, $\omega = \pi \text{ 1/s}$. Nacrtati jednačinu trajektorije tačke i prikazati smer njenog kretanja.

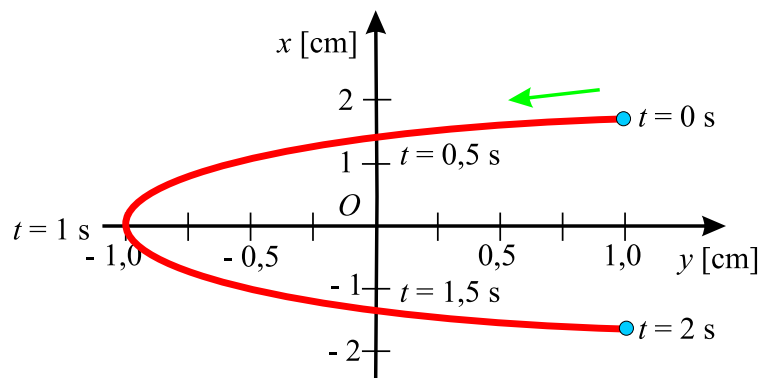
◊ Da bi našli jednačinu trajektorije, treba iz jednačina oscilacija eliminisati vreme t . Koristeći trigonometrijsku formulu $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, za $\alpha = \omega t/2$, se dobija

$$x = \frac{2A_1}{A_2^2} y^2 - A_1.$$

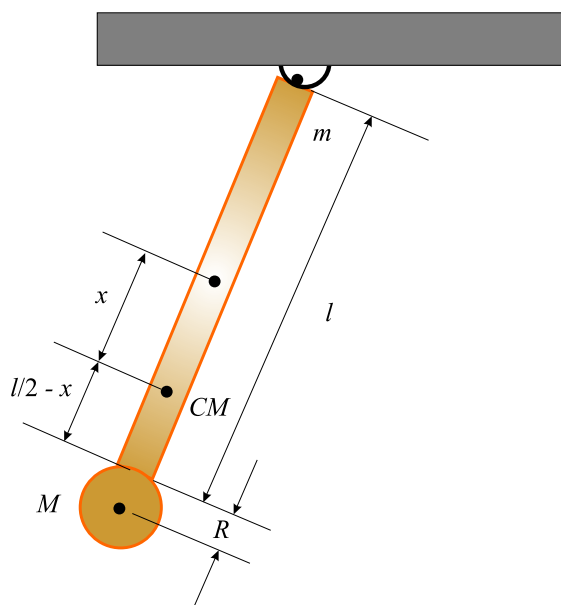
12. Štap dužine $l = 50 \text{ cm}$ i mase $m = 270 \text{ g}$ ima na jednom svom kraju pričvršćen disk poluprečnika $R = 10 \text{ cm}$ i mase $M = 500 \text{ g}$. Odrediti moment inercije ovako formiranog matematičkog klatna, rastojanje od centra masa do tačke vešanja i period malih oscilacija klatna.

◊ Period oscilovanja fizičkog klatna je određen jednačinom

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m_u g d}}$$



Slika 3.30:



Slika 3.31:

gde je m_u ukupna masa klatna ($m_u = m + M = 0,77$ kg), I moment inercije u odnosu na osu oko koje osciluje a d rastojanje centra mase štapa do tačke vešanja (u kojoj se nalazi osa oscilovanja).

Moment inercije klatna je jednak zbiru momenata inercije štapa I_1 i diska I_2 . Moment inercije diska u odnosu na osu koja je normalna na njega i prolazi kroz jedan njegov kraj je $I_1 = ml^2/3$. Moment inercije diska u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar je $I_0 = MR^2/2$, a u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku vešanja udaljenu $l + R$ od njegovog centra, se dobija na osnovu Štajnerove teoreme $I_2 = I_0 + M(l + R)^2 = M(l^2 + 2lR + 3R^2/2)$. Ukupan moment inercije klatna je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{ml^2}{3} + M \left(l^2 + 2lR + \frac{3}{2}R^2 \right) = 0,205 \text{ kgm}^2.$$

Centar mase klatna se nalazi izmedju centra mase diska i štapa, recimo na nekom rastojanju x od centra mase štapa. Ovo rastojanje se može naći iz jednakosti odgovarajućih momenata (sila) koja daje $xm = (l/2 + R - x)M$, odnosno

$$x = \frac{M}{m + M} \left(\frac{l}{2} + R \right) = 0,227 \text{ m.}$$

Rastojanje d od tačke vešanja do centra mase je prema tome $d = l/2 + x = 0,477$ m.

Na osnovu ovoga je period malih oscilacija klatna

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0,205}{0,77 \cdot 9,8 \cdot 0,477}} = 1,5 \text{ s.}$$

13. Na vasijskom brodu, u uslovima bestežinskog stanja, za merenje mase tela se može iskoristi apratura čiji princip rada se sastoji u sledećem. Prvo se izmeri frekvencija oscilovanja tega poznate mase m_0 okačenog o oprugu, a zatim se toj masi doda ona koju želimo da izmerimo i ponovo odredi frekvencija oscilacija. Pokazati kako se, na osnovu poznavanja ovih dveju frekvencija, može odrediti nepoznata masa.

◊ Ako sa m označimo nepoznatu masu, frekvencije ω_0 i ω kojima sistem osciluje u prvom, odnosno drugom slučaju će sa masama biti povezane relacijama

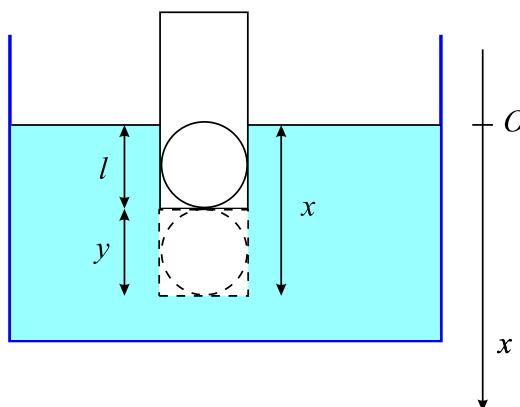
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m}}$$

gde je k koeficijent elastičnosti opruge sistema. Iz ova dva izraza se za traženu masu dobija

$$m = m_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right).$$

14. Teg koji se nalazi u šupljem cilindru površine poprečnog preseka S , pri potapanju cilindra u tečnost gustine ρ zadržava ga u uspravnom položaju. Cilindar sa ovim tegom je prilikom postavljanja u tečnost utonuo do neke dubine. Nakon toga je pritisnut naniže i pušten da osciluje u odnosu na položaj ravnoteže. Masa cilindra sa tegom je m . Zanemarijući viskoznost tečnosti, odrediti period T oscilovanja posmatranog sistema kao i ravnotežnu dubinu na koju je potonuo.

◊ U ovom slučaju ulogu restitucione sile igra sila potiska. Usmerimo x osu vertikalno naniže, izabraši za koordinatni početak njen presek sa površinom tečnosti. Neka je x koordinata donjnjeg dela cilindra. Sila



Slika 3.32:

potiska je $F_p = -Sx\rho g$. Na cilindar osim toga deluje sila teže $Q = mg$, pa je jednačina kretanja

$$m\ddot{x} = mg - Sx\rho g.$$

U položaju ravnoteže ($x = l$), sila teže i sila potiska su uravnotežene pa je $mg = Sl\rho g$, odakle je dubina na koju je utonuo cilindar sa tegom

$$l = \frac{m}{S\rho}.$$

Ako sa y označimo odklon cilindra od njegovog ravnotežnog položaja, koordinatu donjeg dela cilindra možemo da zapišemo kao $x = l + y$, pa će jednačina kretanja sada biti

$$m\ddot{y} = -S\rho g y,$$

odnosno

$$\ddot{y} + \frac{S\rho g}{m}y = 0,$$

odakle se vidi daje "koeficijent elastičnost" ovog sistema $k = S\rho g$, što znači da je odgovarajuća ugaona frekvencija $\omega_0 = \sqrt{S\rho g/m}$. Na osnovu ovoga je period oscilovanja sistema

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}},$$

ili preko ravnotežne dubine l

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

15. Mala metalna lopta mase m , okačena o neistegljivu nit dužine l , osciluje iznad beskonačne, ravnomerno naelektrisane horizontalne ploče naelektrisane pozitivno (površinska gustina naelektrisanja σ). Odrediti period oscilovanja klatna ukoliko se na njemu nalazi količina naelektrisanja $-Q$.

◇ Harmonijsko oscilovanje ovog klatna se odvija u homogenom gravitacionom i električnom polju. Obe sile su istog smera, a sila električnog polja je $F_e = QE$, gde je električno polje ploče $E = \sigma/2\epsilon_0$. Drugi Njutnov zakon sada ima oblika

$$ma = mg + \frac{Q\sigma}{2\epsilon_0} = m\left(g + \frac{Q\sigma}{2m\epsilon_0}\right),$$

što znači da će period oscilovanja klatna biti

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\epsilon_0 ml}{2\epsilon_0 mg + \sigma Q}}.$$

16. J. J. Tomson je 1906. godine postavio model atoma koji se popularno naziva "puding sa šljivama" prema kome su negativni elektroni uronjeni u prostor pozitivnog naelektrisanja, čija masa predstavlja veći deo mase atoma.

Atom vodonika je, prema ovom modelu, lopta poluprečnika $R = 10^{-10}$ m, naelektrisanja $Q = +e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C i sa jednim elektronom unutar nje, neelektrisanja $-e$ i mase $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, koji se u normalnom stanju nalazi u centru pozitivno naelektrisane lopte. Pretpostavimo da je elektron na neki način pomeren na neko malo rastojanje r_0 od centra pozitivne lopte. Ukoliko se nakon toga prepusti sebi on će početi da osciluje oko ravnotežnog položaja sa amplitudom r_0 . Kolika je frekvencija ovog oscilovanja?

◇ Polazeći od izraza za jačinu električnog polja unutar naelektrisane lopte

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

za silu koja deluje na elektron (restituciona sila) prilikom otklona od ravnotežnog položaja dobijamo

$$F = -eE = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r.$$

Jednačina kretanja je dakle

$$m\ddot{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

i opisuje harmonijsko oscilovanje čija je frekvencija

$$\omega_0 = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ Hz.}$$

Ovoj frekvenciji odgovara sledeća talasna dužina

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 120 \text{ nm,}$$

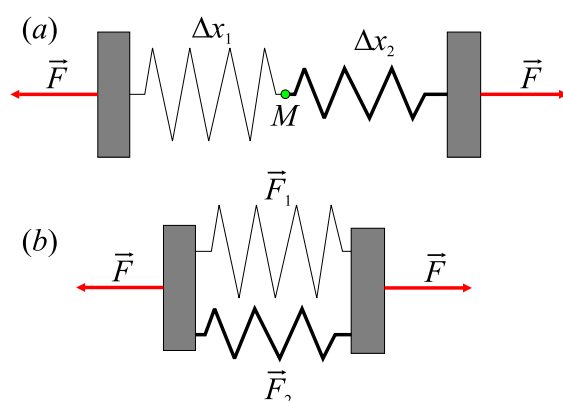
koja se skoro poklapa sa talasnom dužinom elektromagnetnog zračenja koje se dobija kada elektron vodonikovog atoma predje sa prvog pobudjenog na osnovno stanje (prva linija Lajmanove serije). Ovaj rezultat pokazuje da Tomsonov model nije potpuno besmislen jer kao što vidimo, daje neke tačne rezultate bitne za vodonikov atom.

17. Koliki je efektivni koeficijent elastičnosti k opruga sastavljenih od dve druge opruge, koeficijenata elastičnosti k_1 i k_2 , ukoliko su spojene redno, a koliki ako su spojene paralelno?

◇ Ako razvlačimo dve redno spojene opruge, u svakoj od njih se javlja sila istog intenziteta i jednaka sili F kojom delujemo na opruge da bi

ih rastegli (slika 3.33 (a)), tako da se tačka M , u kojoj su opruge spojene, nalazi u ravnoteži. To znači da su istezanja opruga $\Delta x_1 = F/k_1$, $\Delta x_2 = F/k_2$ (F je intenzitet restitucione sile a ne njena komponenta duž pravca istezanja pa zato ne pišemo znak $-$ u izrazu). Ukupno istezanje kombinovane opruge je $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = F(1/k_1 + 1/k_2)$. Ekvivalentni koeficijent elastičnosti spojenih opruga se dobija iz relacije

$$\frac{1}{k} = \frac{\Delta x}{F} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \text{ odnosno } k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$



Slika 3.33:

Pri razvlačenju paralelno povezanih opruga, jednaka su im istezanja Δx , tako da su sile koje se javljaju u oprugama $F_1 = k_1 \Delta x$ i $F_2 = k_2 \Delta x$. Suma tih dveju sila je jednaka sili koja rasteže opruge (slika 3.33 (b)) i iznosi $F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \Delta x$, tako da je ekvivalentan koeficijent elastičnosti ovih dveju opruga

$$k = \frac{F}{\Delta x} = k_1 + k_2.$$

18. Logaritamski dekrement prigušenja matematičkog klatna ima vrednost $\lambda = 0,02$. Odrediti koliko puta se smanji njegova amplituda nakon 100 punih oscilacija.

◇ Amplituda klatna u $t = 0$ s je A_0 a u nekom docnijem momentu vremena se može naći iz relacije

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}.$$

Nakon 100 punih oscilacija, odnosno nakon vremena $t = 100T$ (T je period oscilovanja), amplituda oscilovanja je

$$A_{100} = A_0 e^{-100\lambda},$$

odakle je

$$\frac{A_0}{A_{100}} = \frac{1}{e^{-100\lambda}} = e^{100\lambda} \approx 7,4.$$

19. Odrediti logaritamski dekrement prigušenja oscilacija matematičkog klatna dužine $l = 50$ cm, ako ono za 8 minuta oscilovanja izgubi 99% svoje energije.

◊ Ukupna energija oscilatora je proporcionalna kvadratu amplitude, pa kako se ona kod prigušenih oscilacija menja sa vremenom, i energija se menja. Ukoliko sa E_0 označimo energiju koju je imao oscilator u početnom momentu vremena, a energiju njegovog oscilovanja nakon 8 minuta sa E_t , onda je njihova veza

$$E_0 - E_t = 0,99E_0, \quad E_t = 0,01E_0 = \frac{E_0}{100}.$$

Obizrom na pomenutu vezu energije i amplitude, odnos odgovarajućih amplitude je

$$\frac{A_t}{A_0} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}.$$

Sa druge strane ove dve amplitude su povezane na sledeći način

$$A_t = A_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$$

pa je dekrement prigušenja

$$\lambda = \frac{T}{t} \ln 10.$$

Kako je reč o slabom prigušenju, period oscilovanja može da se izrazi preko uobičajene formule za period oscilovanja klatna

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

pa je traženi dekrement

$$\lambda \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\ln 10}{t} = 0,0068.$$

20. Telo mase $m = 400$ g obešeno je o oprugu. Ukoliko na nju, u vertikalnom pravcu, deluje sila od 40 N ona se pri tom istegne za 1 cm. Logaritamski dekrement prigušenja tela koje osciluje je $\lambda = 1,57$. Smatrajući da je reč o slabom prigušenju, odrediti period oscilovanja pri kome nastupa rezonanca i rezonantnu amplitudu, ako je amplituda prinudne sile jednaka $F = 200$ N.

◊ Za malo prigušenje je $\omega \approx \omega_0$ pa je logaritamski dekrement $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \beta \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \beta$, pa izraza za rezonantnu frekvencu postaje

$$\omega_{rez} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2} \approx 0,94\omega_0,$$

odakle je

$$T_{rez} = \frac{1}{0,94} T_0 = 1,07 T_0,$$

gde je T_{rez} period pri kome se javlja rezonanca, a T_0 je period sopstavnog oscilovanja tela na opruzi. Iz datih podataka se dobija

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,63 \text{ s},$$

pa se dakle rezonanca javlja pri periodu

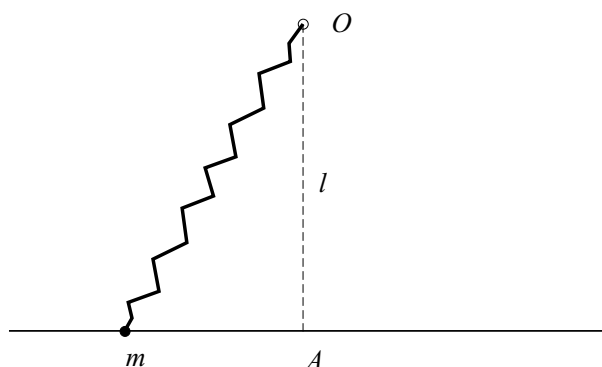
$$T_{rez} = 1,07 \cdot 0,63 \text{ s} \approx 0,67 \text{ s}.$$

Tražena rezonantna amplituda je

$$A_{rez} = \frac{F/m}{\omega_0^2 \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2}} \approx 10 \text{ cm}.$$

21. Tačkasto telo mase m može da se kreće po horizontalnoj pravoj bez trenja pod dejstvom opruge za koju je zakačeno, čiji je kraj pričvršćen u nepokretnoj tački O na rastojanju l od prave (slika). Opruga je krutosti k i dužine l_0 u neistegnutom stanju. Odrediti frekvenciju malih oscilacija ukoliko za 1) $l > l_0$, 2) $l < l_0$ i 3) $l = l_0$. Pri kakvim pomerajim se oscilacije mogu smatrati malim?

◊ Kada je $l > l_0$ izgleda logično da je položaj ravnoteže zapravo vertikalni položaj opruge u kome je ona rastegnuta za $l - l_0$, pri čemu se materijalna tačka nalazi u tački A . Ukoliko se materijalna tačka



Slika 3.34:

pomeri sa ovog mesta na malo rastojanje x , njena kinetička energija je $E_k = m\dot{x}^2/2$, dok je potencijalna

$$U = \frac{1}{2}k \left(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0 \right)^2 \quad (3.107)$$

Ukoliko nismo sigurni da li je $x = 0$ zaista položaj ravnoteže, potrebno je rešiti jednačinu $dU/dx = 0$, odnosno odrediti vrednosti promenljive x za koje je potencijalna energija minimalna. Traženi izvod je

$$\frac{dU}{dx} = kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + l^2}} \right). \quad (3.108)$$

Gornja jednačina je jednaka nuli za $x = 0$ i za $x^2 = l_0^2 - l^2$, odakle vidimo da je drugo rešenje u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom da je $l > l_0$. Karakter položaja ravnoteže se ispituje malim pomeranjem tela iz njega. Ukoliko nas zanima kako se u tom slučaju menja potencijalna energija, razvićemo izraz (3.107) za male vrednosti x oko tačke A

$$U = \frac{1}{2}k \left(l^2 + x^2 - \frac{l_0 x^2}{l} - 2ll_0 + \frac{l_0 x^4}{4l^3} + \dots + l_0^2 \right). \quad (3.109)$$

Pri ovome je iskorišćena formula za Tejlorov razvoj funkcije $f(x)$ oko tačke x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)|_{x=x_0}}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x)|_{x=x_0}}{2!} (x - x_0)^2 + \dots$$

Ako se ograničimo na mala pomeranja iz ravnotežnog položaja (to znači da treba zanemariti članove višeg reda od x^2), energija će biti

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)x^2 + \text{const.}$$

odakle sledi da će frekvencija oscilacija, u ovom slučaju, biti

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)}$$

Primetimo da, prema ovom izrazu, $\omega \rightarrow 0$ kada $l \rightarrow l_0$.

Kada je $l < l_0$, opruga je u vertikalnom stanju zapravo sabijena pa je reč o položaju labilne ravnoteže. U skladu sa time, kretanje oko tog položaja neće biti oscilatorno. Položaj(i) stabilne ravnoteže će odgovarati situaciji u kojoj je opruga neistegnuta, jer ukoliko se iz takvog stanja izvede opruga, u njoj će se javiti sila koja će telo mase m stalno vraćati u ravnotežni položaj, odnosno ono će se kretati oscilatorno. Deluje logično da će položaju stabilne ravnoteže u ovom slučaju odgovarati tačka koja je od tačke A udaljena za $x_0 = \pm\sqrt{l_0^2 - l^2}$. Postoje zapravo dve takve tačke, jedna sa leve a druga sa desne strane tačke A što je i istaknuto predznakom \pm . Do ovakvog zaključka se može doći i analizom izraza (3.107) za potencijalnu energiju, odnosno nalaženjem vrednosti x za koje ona ima minimum. Prisetimo se da je na osnovu izraza (3.108), osim $x = 0$ postojao i položaj ravnoteže za $x^2 = l_0^2 - l^2$ koji u prethodnom slučaju ($l > l_0$) nije imao smisla. Vrednost potencijalne energije u ovoj tački je jednaka nuli što se lako proverava a interesantno je zapitati se šta se dešava u tački $x = 0$ u kojoj ona takodje ima ekstremum. Jednostavno se pokazuje da je vrednost potencijalne energije u njoj jednaka $\frac{1}{2}k(l - l_0)^2$, odnosno da je reč o lokalnom maksimumu ove funkcije koja, u skladu sa gornjom analizom ima dva minimuma.

Da bi se odredila frekvencija oscilovanja tačke mase m oko njih, potrebno je razviti potencijalnu energiju oko ovih tačaka i zanemariti popravke višeg reda od $(x - x_0)^2$. Dobija se

$$U = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right)(x - x_0)^2.$$

Frekvencija oscilovanje je, u ovom slučaju,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right)}.$$

I u ovom slučaju je $\omega \rightarrow 0$ kada $l \rightarrow l_0$.

Razmotrimo sada situaciju u kojoj je $l = l_0$, odnosno kada opruga u vertikalnom stanju nije ni istegnuta ni sabijena. Njenim pomicanje levo ili desno od tačke A , javlja se povratna sila pa se iz toga može zaključiti da je reč o položaju stabilne ravnoteže. Potencijalnu energiju je potrebno razviti oko tačke $x = 0$ a rezultat (za $l = l_0$), na osnovu relacije (3.109) pokazuje da član uz x^2 postaje jednak nuli, pa je neophodno zadržati, kao prvi nenulti, član koji sadrži x^4 . To pokazuje da ove oscilacije nisu harmonijske.

Veoma je interesantno skicirati grafike potencijalne energije u sva tri slučaja i izvršiti njihovu analizu.

22. Molekuli u kojima su naelektrisanja sferno simetrično raspoređena, usled toga, ne interaguju međusobno električnim silama. Ukoliko se malo poremeti raspodela naelektrisanja unutar molekula, on dobija dipolni moment a time i mogućnost da interaguje sa susednim molekulima. Pojava dipolnog momenta u jednom molekulu izaziva u okolnom prostoru polje i indukuje dipolni moment u susednim molekulima.

Dva takva električna dipola nalaze na međusobnom rastojanju r , i imaju jednake mase i jednaka naelektrisanja raspoređena duž jednog pravca. Neka su trenutna rastojanja naelektrisanja u dipolima x_1 i x_2 .

a) Odrediti tačnu formulu koja opisuje energiju njihove interakcije a zatim i oblik u koji prelazi za slučaj $x_1, x_2 \ll r$. Odrediti sile kojima odgovara ovakav izraz za energiju.

b) Napisati jednačine kretanja čestica dipola i naći zavisnost elongacija od vremena

a) Kako je interakcija Kulonova i ima sabirke koji se odnose na odbijanje istoimenih i privlačenje raznoimenih naelektrisanja, potencijalna energija je

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{e^2}{r-x_1} - \frac{e^2}{r+x_2} + \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{r-x_1+x_2} \right)$$

$$U_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2$$

Obzirom na znak u izrazu vidimo da ova potencijalna energija interakcije odgovara privlačenju izmedju molekula.

$$F_{12} = -\frac{dU_{12}}{dx_1} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^3} x_2 = k' x_2, \quad k' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^3}.$$

$$F_{21} = -\frac{dU_{12}}{dx_2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^3} x_1 = k' x_1$$

b) Ako bi između molekula bilo veoma veliko rastojanje oni ne bi interagovali međusobno a poremećaj rastojanja naelektrisanja unutar njih bi samo izazvao oscilovanje u oba molekula koje bi se, obzirom na njihovu identičnost, odvijalo jednakom frekvencijom $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, gde je k konstanta restitucione sile. Jenačine kretanja bi bile

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1, \quad m\ddot{x}_2 = -kx_2,$$

medjutim pošto između dipola postoji interakcija, potrebno je dodati i nju u izraze, pa oni postaju

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'x_2, \quad m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k'x_1$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{k'}{m} x_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{k'}{m} x_1 = 0$$

Ako spregnuto osciluju malim elongacijama, i frekvencija mora da im bude ista

$$x_1 = A \cos \omega t, \quad x_2 = B \cos \omega t$$

Zamena u diferencijalne jednačine daje

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A - \frac{k'}{m}B = 0, \quad -\frac{k'}{m}A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0$$

Da bi sistem imao rešenje, obzirom da su jednačine homogene, mora da važi

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{k'^2}{m^2} = 0$$

odakle slede dve vrednosti za frekvencije

$$\omega_+ = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k'}{m}}, \quad \omega_- = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{k'}{m}}$$

Za prvu vrednost se za konstante dobija

$$A = B,$$

dok je za drugu

$$A = -B = \cos \pi B$$

pa su rešenja za elongacije

$$\omega = \omega_+, \quad x_1 = A \cos \omega_+ t, \quad x_2 = A \cos \omega_+ t$$

$$\omega = \omega_-, \quad x_1 = A \cos \omega_- t, \quad x_2 = A \cos(\omega_+ t + \pi)$$