

ZADACI

1. Riješiti diferencijalnu jednačinu $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$.

Rješenje: $x^2 - y^2 = Cx$.

2. Riješiti diferencijalnu jednačinu $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$.

Rješenje: $x = ce^{\sqrt{y^2+1}}$.

3. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$. **Rješenje:** $y = cxe^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$.

4. Riješiti diferencijalnu jednačinu $xyy' = \sqrt{x^4 - y^4}$.

Rješenje: $\arcsin \frac{y^2}{x^2} = \ln \left| x^2 (\sqrt{x^4 - y^4} - y^2) \right| + C$.

5. Riješiti diferencijalnu jednačinu $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.

Rješenje: $y = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln |x| + C \right)^2$.

6. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

Rješenje: $y^2 + 1 = c \cdot (1 - x^2)$.

7. Riješiti diferencijalnu jednačinu $xy(1 + xy^2)y' = 1$.

Rješenje: $x = \frac{1}{Ce^{\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2}$

8. Riješiti diferencijalnu jednačinu $2x^2yy' + y^2 = 2$.

Rješenje: $\frac{c}{2 - y^2} = e^{\frac{1}{x}}$.

9. Naći krive kod kojih je odsječak tangente u ma kojoj tački između koordinatnih osa podijeljen tom tačkom na dva jednaka dijela. Zatim naći onu krivu koja prolazi kroz tačku $M(3,2)$.

Rješenje: $xy = c$, $xy = 6$.

10. Naći jednačinu krive koja prolazi kroz tačku $A(0,2)$ ako je površina krivolinijskog trapeza ograničenog lukom krive i koordinatnim osama dva puta veća od dužine odgovarajućeg luka krive. **Rješenje:** $2 \ln \left| y + \sqrt{y^2 - 4} \right| = \pm x + \ln C$

11. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$.

Rješenje: $x = \frac{cy}{x - y}$.

12. Riješiti diferencijalnu jednačinu $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$.

Rješenje: $1 + \frac{y}{x} = e^{cx}$.

13. Riješiti diferencijalnu jednačinu $(xy + e^x)dx - xdy = 0$.

Rješenje: $y = e^x(\ln x + c)$.

14. Riješiti diferencijalnu jednačinu $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$.

Rješenje: $y = \frac{e^{-x}}{x}(x^3 + c)$.

15. Odrediti jednačinu krive koja prolazi kroz tačku $A(0,1)$ ako je površina trougla koji obrazuju apscisna osa, tangenta u proizvoljnoj tački i radijus vektor dodirne tačke, jednaka 1.

Rješenje: $x = -|y| + \frac{1}{y} \quad \vee \quad x = |y| - \frac{1}{y}$.

16. Odrediti krive kod kojih je površina trougla ograničenog tangentom, apscisnom osom i odsječkom od koordinatnog početka do tačke dodira konstantne veličine i iznosi a^2 .

Rješenje: $x = y\left(\frac{a^2}{y^2} + c\right)$.

17. Odrediti krive kod kojih je površina trapeza ograničenog koordinatnim osama, tangentom i ordinatom tačke dodira konstantna i iznosi $3a^2$.

Rješenje: $y = x^2\left(\frac{2a^2}{x^3} + c\right)$.

18. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' + y = e^x$.

Rješenje: $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$.

19. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$.

Rješenje: $y = C_1e^x + C_2e^{6x} - \frac{1}{10}x^2e^x + \frac{9}{25}xe^x$.

20. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 16y = (x^2 - 7)\sin 4x$.

Rješenje: $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{64}x\cos 4x - \frac{1}{32}x^2\sin 4x + \frac{113}{512}\sin 4x$.

21. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$.

Rješenje: $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{3}{2}x^2e^x + x + 3$.

22. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 3y' + 2y = x^2e^{3x} + xe^{3x}$.

Rješenje: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{3x}\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)$.

23. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

Rješenje: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$.

24. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$.

Rješenje: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^x + e^{2x}(-2x^2 + 2x - 3)$.

25. Riješiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

Rješenje: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x x^3$.