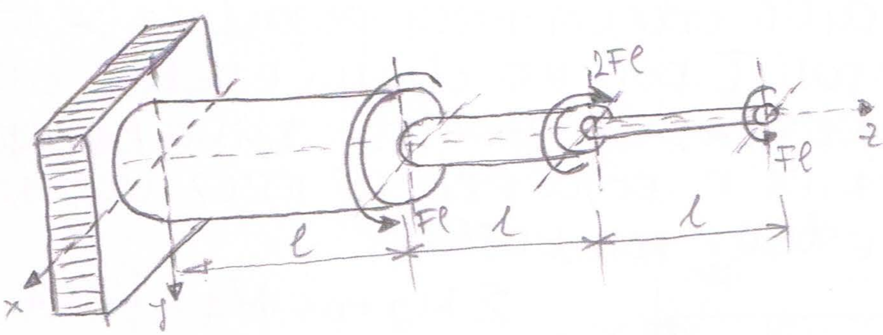
UNIVERZITET CRNE GORE
MAŠINSKI FAKULTET

OTPORNOST MATERIJALA I

PISANA PREDAVANJA

(5) KOLOKVIJUM



UVIJANJE
KOMBINOVANO NAPREZANJE: SA-
VIJANJE SA UVIJANJEM

PODGORICA, PLJEVLJA 2012 god.

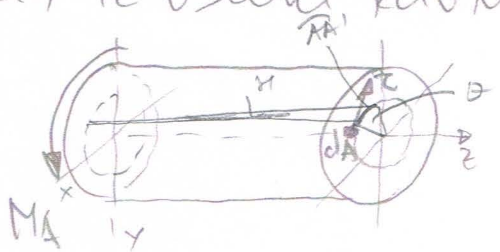
UVIJANJE GREDNOG NOSAČA KRUŽNOG I PRSTENASTOG POPREČNOG PRESJEKA

Pod uvijanjem grednog nosača podrazumijeva se takva vrsta njegovog opterećivanja kada je nosač opterećen sa spregom-momentom koji ima obrtni efekat oko uzdužne ose nosača (sl.)

U uklještenju se pojavljuje reaktivni moment koji ima suprotni obrtni efekat u odnosu na dati moment M.

Iz $\sum M_z = 0: \; M_A - M = 0 \Rightarrow M_A = M$

U proizvoljno uočenom poprečnom presjeku nosača i u proizvoljno uočenoj tački pojavljuje se tangencijalni napon τ koji ima obrtni efekat oko uzdužne ose nosača, što znači da tangira kružnicu poluprečnika r koja prolazi kroz uočenu tačku (sl.) Iz uslova ravnoteže:



$\sum M_z = 0: \; M_A - \int \tau \, dA \cdot r = 0$

Nalazimo napon τ.

Nosač opterećen na uvijanje deformiše se tako što se pojedini poprečni presjeci zaokreću u odnosu na poprečni presjek koji pripada uklještenju i koji je nepokretan (sl.).

Taj ugao zaokretanja se zove **ugao uvijanja** i označavamo ga sa θ. Uočićemo jedno proizvoljno vlakno iz unutrašnjosti. Prije deformisanja nosača to vlakno je prava linija paralelna sa osom z (sl.) Nakon deformisanja nosača to vlakno se

ZAOKREĆE ZA UGAO γ ZBOG TOGA ŠTO SE TAČKA A ZAROTIRA ZA UGAO θ JER JE SE KRAJNJI POPREČNI PRESJEK ZAOKRENUO ZA TAJ UGAO.

VAŽI: $l \cdot \gamma = r \cdot \theta = \widehat{AA'}$

Dakle, $\gamma = \frac{r \cdot \theta}{l}$. Pošto je $\gamma = \frac{\tau}{G}$, TO IZ USLOVA RAVNOTEŽE: $M_A - \int \tau dA \cdot r = 0$ DOBIJAMO $(M_A = M)$:

$$\int_A \gamma \cdot G \cdot r \cdot dA = \int_A \frac{r \cdot \theta G}{l} \cdot r dA = \frac{\theta G}{l} \int_A r^2 dA = M$$

odnosno

$$\frac{G\gamma}{r} \cdot I_0 = M$$

jer je $I_0 = \int_A r^2 dA$. Dakle,

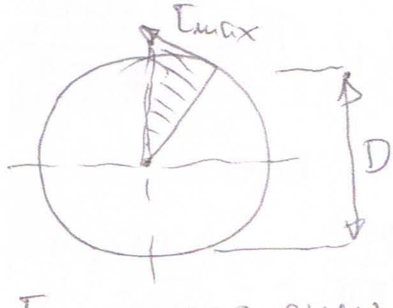
$$G \cdot \frac{\gamma}{r} = \frac{M}{I_0} \Rightarrow \frac{\tau}{r} = \frac{M}{I_0} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{M}{I_0} \cdot r} \quad (*)$$

Pošto je: $\theta = \frac{\gamma \cdot l}{r} = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{l}{r} = \frac{Mr}{I_0 G} \cdot \frac{l}{r}$ DOBIJAMO

$$\boxed{\theta = \frac{Ml}{GI_0}} \quad (**)$$

Najveći tangencijalni napon τ se pojavljuje u tačkama poprečnog presjeka koje imaju najveću vrijednost za r a to su tačke koje se nalaze na kružnici poluprečnika $r = \frac{D}{2}$. Najmanja vrijednost nangencijalnog napona je u centru kruga ($\tau = 0$ za $r = 0$).

$$\tau_{max} = \frac{M}{I_0} \cdot r_{max} = \frac{M}{I_0} \frac{D}{2}$$



Pošto je: $I_0 = \frac{\pi D^4}{32}$ to je:

$$\tau_{max} = \frac{M}{\frac{\pi D^3}{16}} = \frac{16M}{\pi D^3}$$

τ_{max} ne smije da pređe τ_{doz} Π: $\boxed{\tau_{max} = \frac{16M}{\pi D^3} \leq \tau_{doz}}$

ZADATAK: Za gredni nosač opterećen na uvijanje momentom M kao na slici:

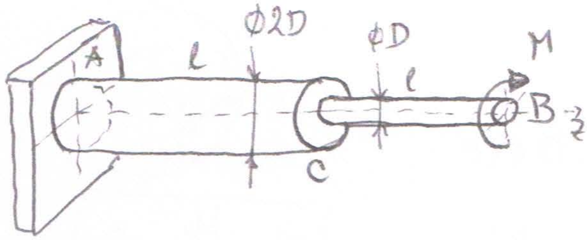
a) Odrediti reaktivni moment i nacrtati dijagram promjene momenta uvijanja.

b) Izračunati τ_{max} i dimenzionisati nosač

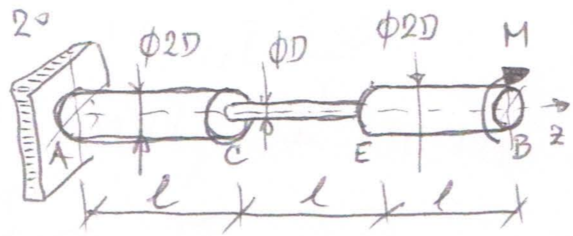
c) Odrediti ugao uvijanja presjeka B u odnosu na A tj. $\theta_{B,A}$.

Dato je: F, l, τ_{doz} i G.

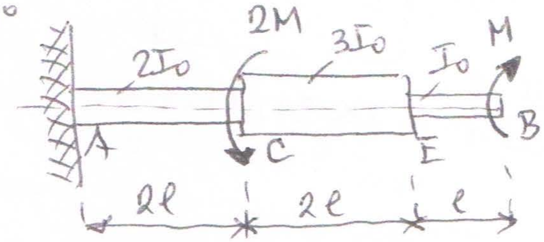
1°



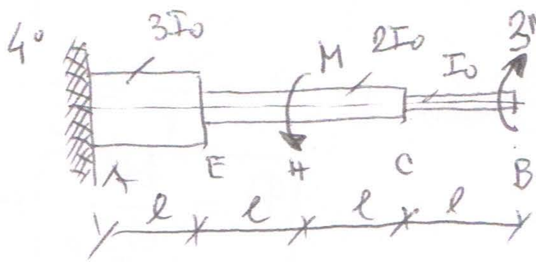
2°



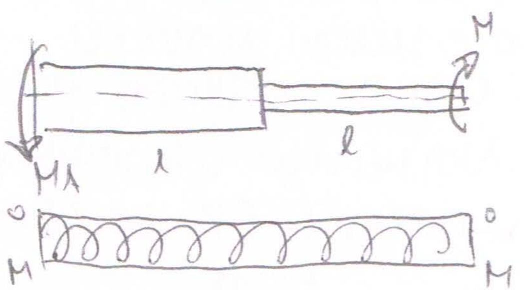
3°



4°



RJEŠENJE: **1°** Iz $\Sigma M_z = 0$ dobijamo $M_A - M = 0$ tj. $M_A = M$.



Dijagram promjene momenta uvijanja je dat na slici.

$$\tau_{max} = \frac{M}{I_0} \cdot \frac{D}{2} = \frac{M}{\frac{\pi D^4}{32}} \frac{D}{2} = \frac{16M}{\pi D^3}$$

Iz uslova

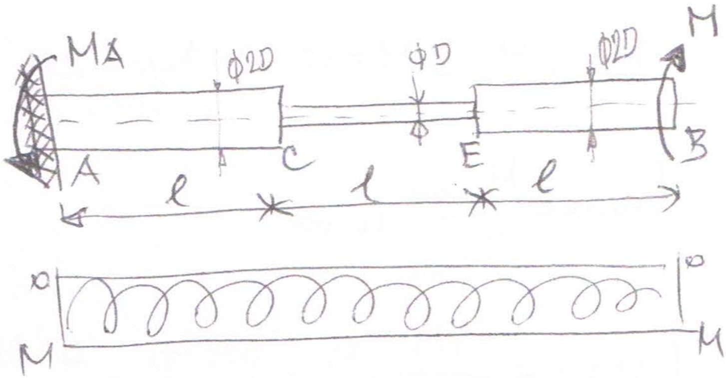
$$\tau_{max} = \frac{16M}{\pi D^3} \leq \tau_{doz} \text{ dobijamo } D \geq \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi \cdot \tau_{doz}}}$$

Ugao uvijanja $\theta_{B,A}$ dobijamo kao

$$\theta_{B,A} = \theta_{C,A} + \theta_{B,C} = \frac{M \cdot l}{\frac{\pi (2D)^4}{32} G} + \frac{M \cdot l}{\frac{\pi D^4}{32} \cdot G} = \frac{M l \, 32}{\pi D^4 G}\left(\frac{1}{16} + 1\right)$$

$\theta_{B,A}$ 34 Ml

2°



$M_A = M,$

$$\tau_{max} = \frac{M}{\frac{\pi D^4}{32}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16M}{\pi D^3}$$

Iz uslova $\tau_{max} \leq \tau_{dоз}$

ДОБИЈАМО

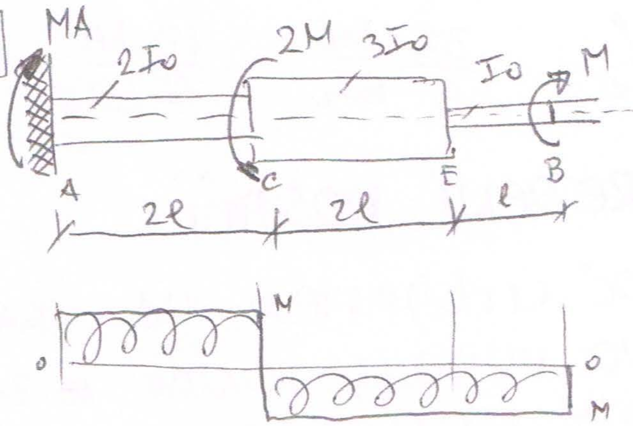
$$\frac{16M}{\pi D^3} \leq \tau_{doz} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi \tau_{doz}}}$$

Угао увијања $\theta_{B,A}$ је:

$$\theta_{B,A} = \theta_{C,A} + \theta_{E,C} + \theta_{B,E} = \frac{Ml}{G \cdot \frac{\pi (2D)^4}{32}} + \frac{M \cdot l}{G \cdot \frac{\pi D^4}{32}} + \frac{Ml}{G \cdot \frac{\pi (2D)^4}{32}}$$

$$\theta_{B,A} = \frac{32Ml}{G \cdot \pi D^4}\left(\frac{1}{16} + 1 + \frac{1}{16}\right) = \frac{36 \cdot M \cdot l}{G \cdot \pi D^4} \quad //$$

3°



$M_A - 2M + M = 0$

$\Rightarrow M_A = M$

$M_{max} = M$

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{I_{min}} \cdot r_{max}$$

$D_{EB} = D$

$I_{AC} = 2I_0 = 2I_{EB}$

$\frac{\pi D_{AC}^4}{32} = 2 \cdot \frac{\pi D^4}{32}$

$D_{AC} = \sqrt[4]{2} \cdot D$

$I_{CE} = 3I_0 = 3I_{EB}$

$\frac{\pi D_{CE}^4}{32} = 3 \frac{\pi D^4}{32}$

$D_{CE} = \sqrt[4]{3} D$

$\sqrt[4]{2} = 1{,}187$

$\sqrt[4]{3} = 1{,}315$

EB: $$\tau_{max} = \frac{M}{\frac{\pi D^4}{32}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16M}{\pi D^3} \leq \tau_{doz} \rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi \tau_{doz}}}$$

AC: $\tau_{max} = \frac{M}{2 \cdot \frac{\pi d^4}{32}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2} d}{2} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \frac{16M}{\pi D^3} = 0{,}6 \frac{16M}{\pi D^3}$

CE $\tau_{max} = \ldots = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \cdot \frac{16M}{\pi D^3} = 0{,}66 \frac{16M}{\pi D^3}$

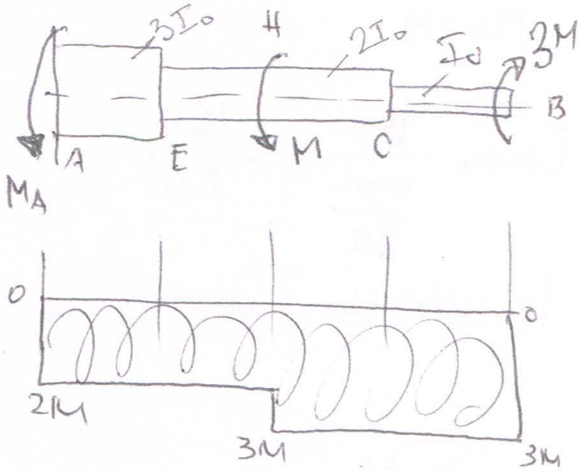
$$\theta_{B,A} = \theta_{B,A}^{(M)} + \theta_{B,A}^{(2M)}$$

$$\theta_{B,A}^{(M)} = \theta_{CA}^{(M)} + \theta_{EC}^{(M)} + \theta_{BE}^{(M)} = \frac{M\,2l}{G\,2I_0} + \frac{M \cdot 2l}{G\,3I_0} + \frac{M \cdot l}{G I_0} = \frac{Ml}{G I_0}\left(1 + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{8Ml}{3 G I_0}$$

$$\theta_{BA}^{(2M)} = \theta_{CA}^{(2M)} + \theta_{EC}^{(2M)} + \theta_{B,E}^{(2M)} = -\frac{2M \cdot 2l}{G \cdot 2I_0} + 0 + 0 = -\frac{2Ml}{G I_0}$$

Dakle $\theta_{B,A}$ = 8Ml ... 2Ml ... 2 Ml ...

4°



$$M_A + M - 3M = 0 \Rightarrow M_A = 2M$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{J_{min}} \cdot r_{max}$$

$$\tau_{max} = \frac{3M}{I_0} \cdot \frac{D}{2} = \frac{3M}{\frac{\pi D^4}{32}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{48M}{\pi D^3}$$

$$\tau_{max} \leq \tau_{doz} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{48 \cdot M}{\pi \cdot \tau_{doz}}}.$$

$$\theta_{B,A} = \theta_{B,A}^{(M)} + \theta_{B,A}^{(3M)}$$

$$\theta_{B,A}^{(M)} = \frac{M \cdot l}{G \cdot 3I_0} + \frac{M \cdot l}{2GI_0} = \frac{5}{6}\frac{Ml}{GI_0}$$

$$\theta_{B,A}^{(3M)} = -\frac{3M \cdot l}{3I_0 \cdot G} - \frac{3M \cdot l}{G \cdot 2I_0} - \frac{3Ml}{G \cdot 2I_0} - \frac{3Ml}{GI_0} = -\frac{Ml}{GI_0}\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 3\right) = -\frac{7Ml}{GI_0}$$

Dakle, $\theta_{B,A} = \frac{5}{6}\frac{Ml}{GI_0} - \frac{7Ml}{GI_0} = -\frac{38}{6}\frac{Ml}{GI_0} = -\frac{19}{2}\frac{Ml}{GI_0}$ //

STATIČKI NEODREĐENI NOSAČI

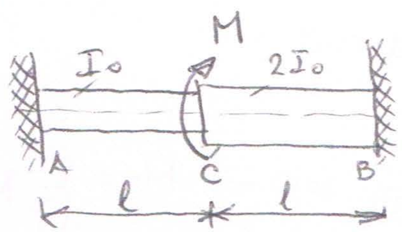
Ukoliko je gredni nosač uklješten na oba kraja i opterećen na uvijanje, onda za određivanje reaktivnih momenata u uklještenjima imamo samo jednačinu ravnoteže iz statike, i to $\Sigma M_z = 0$, gdje je z-uzdužna osa. Za određivanje dvije nepoznate na raspolaganju nam stoji samo jedna jednačina pa je sistem 1x statički neodređen. Iz činjenice da je ugao uvijanja jednog uklještenog presjeka nosača u odnosu na drugi uklješteni presjek nosača jednak nuli dobijamo

TIH REAKTIVNIH MOMENATA.

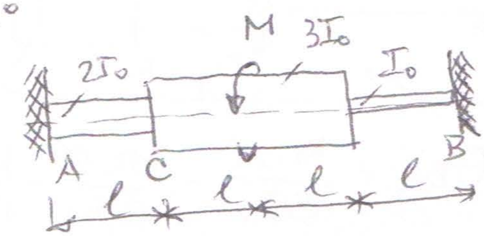
PRIMJER: ZA GREDNE NOSAČE UKLJEŠTENE NA OBA KRAJA I OPTEREĆENE KAO NA SLICI ODREDITI: a) MOMENTE U UKLJEŠTENJIMA
b) UGAO UVIJANJA $\theta_{C,A} = ?$

Dato je: M, l, G, I_0.

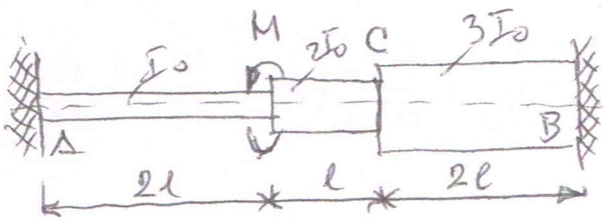
1°



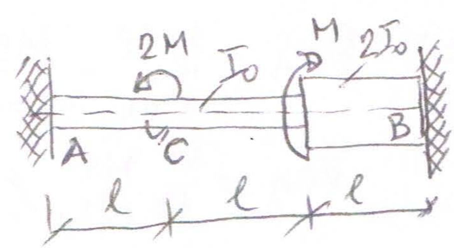
2°



3°

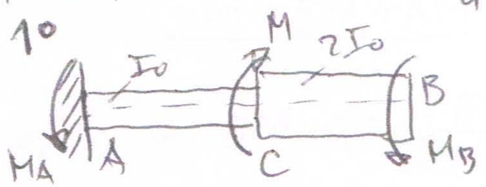


4°



RJEŠENJE:

1°



a) $M_A + M_B - M = 0$

$\theta_{B,A} = 0 = \theta_{B,A}^{(M)} + \theta_{B,A}^{(MB)}$

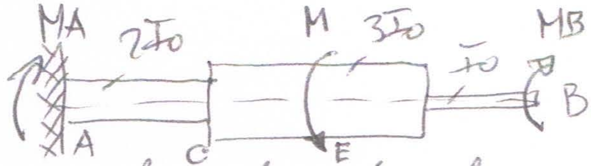
$\theta_{B,A}^{(M)} = \theta_{CA}^{(M)} + \theta_{BC}^{(M)} = \frac{M l}{G I_0} + 0 = \frac{Ml}{GI_0}$

$\theta_{B,A}^{(MB)} = \theta_{CA}^{(MB)} + \theta_{BC}^{(MB)} = -\frac{M_B l}{G I_0} - \frac{M_B l}{G \cdot 2 I_0} = -\frac{3 M_B l}{2 G I_0}$

Dakle, $\frac{Ml}{GI_0} - \frac{3}{2}\frac{M_B l}{GI_0} = 0 \Rightarrow M_B = \frac{2}{3}M$, $M_A = M - M_B = \frac{1}{3}M$.

b) $\theta_{C,A} = \theta_{CA}^{(M)} + \theta_{CA}^{(MB)} = \frac{Ml}{GI_0} - \frac{M_B \cdot l}{GI_0} = \frac{Ml}{GI_0} - \frac{2}{3}\frac{Ml}{GI_0} = \frac{1}{3}\frac{Ml}{GI_0}$

2°



a) $M_A + M_B - M = 0$

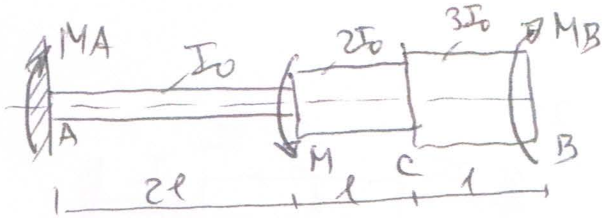
$\theta_{B,A} = 0 = \theta_{B,A}^{(M)} + \theta_{B,A}^{(MB)}$

$$\theta_{B,A} = 0 = \frac{M \cdot l}{2GI_0} + \frac{Ml}{3GI_0} - \frac{M_B \cdot l}{2GI_0} - \frac{M_B \cdot 2l}{3GI_0} - \frac{M_B l}{GI_0} = \frac{5}{6}\frac{Ml}{GI_0} - \frac{13 M_B l}{6 GI_0} = 0$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{5}{13} M \; ; \; M_A = \frac{8}{13} M \; //$$

b) $$\theta_{CA} = \frac{Ml}{2GI_0} - \frac{M_B \cdot l}{2GI_0} = \frac{Ml}{GI_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{8}{13}\right) = \frac{5}{26}\frac{Ml}{GI_0}.$$

3°



a) $M_A + M_B - M = 0$

$\theta_{BA} = 0$

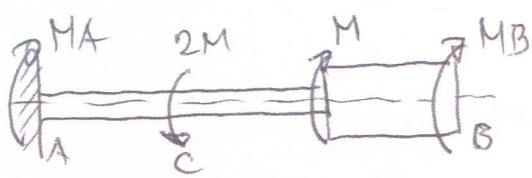
$$\theta_{BA} = \frac{M \cdot 2l}{GI_0} - \frac{M_B \cdot 2l}{GI_0} - \frac{M_B l}{G \cdot 2I_0} - \frac{M_B \cdot l}{G \cdot 3I_0} = 0 \Rightarrow M_B = \frac{12}{17} M.$$

$$M_A = M - M_B = \frac{5}{17} M$$

b) $$\theta_{CA} = \frac{M \cdot 2l}{GI_0} - \frac{M_B \cdot 2l}{GI_0} - \frac{M_B \cdot l}{G \cdot 2I_0} = \frac{Ml}{GI_0}\left(2 - 2 \cdot \frac{12}{17} - \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{17}\right)$$

$$\theta_{CA} = \frac{4}{17}\frac{Ml}{GI_0} \; //$$

4°



a) $M_A + M + M_B - 2M = 0$

$\underline{M_A + M_B = M}$

$$\theta_{BA} = 0 = \frac{2Ml}{GI_0} - \frac{M 2l}{GI_0} - \frac{M_B 2l}{GI_0} - \frac{M_B l}{G \cdot 2I_0} \Rightarrow M_B = 0 \; , \; M_A = M.$$

b) $$\theta_{CA} = \frac{2Ml}{GI_0} - \frac{Ml}{GI_0} - \frac{M_B l}{GI_0} = \frac{Ml}{GI_0} /$$

ZADACI ZA VJEŽBANJE

• Za gredne nosače opterećene kao na slici na uvijanje:

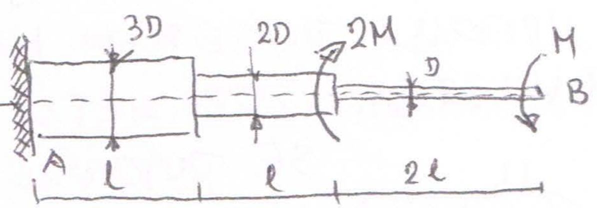
a) Odrediti reaktivni moment i nacrtati dijagram promjene momenta uvijanja

b) Izračunati τ_{max} i dimenzionisati nosač ako je poznato τ_{doz}.

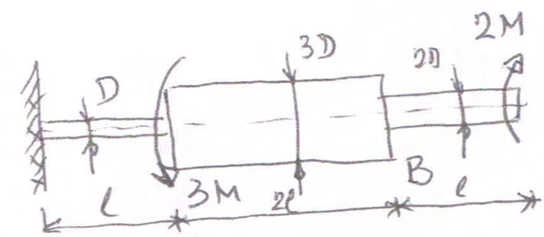
c) Odrediti ugao uvijanja presjeka B u odnosu na A.

Dato je: F, l, τ_{doz} i G.

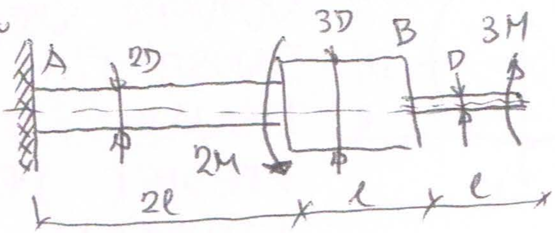
1°



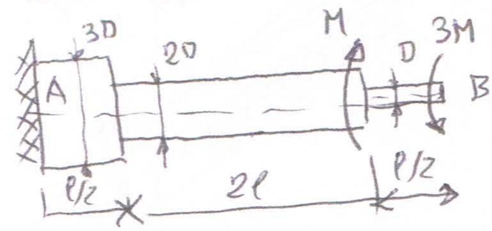
2°



3°



4°



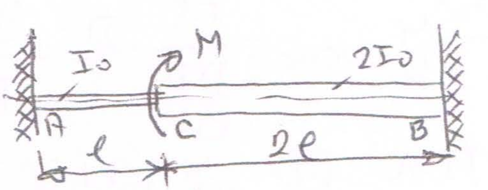
• Za gredne nosače uklještene na oba kraja i opterećene kao na slici odrediti:

a) momente u uklještenjima

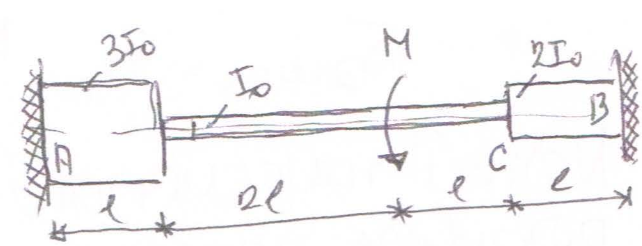
b) ugao uvijanja θ_{CA} = ?

Dato je: ~~F~~ M, l, I_o i G.

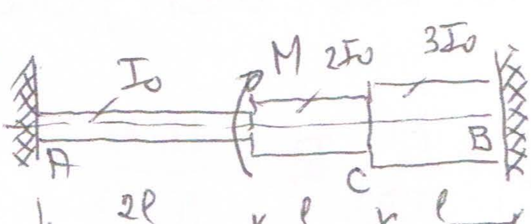
1°



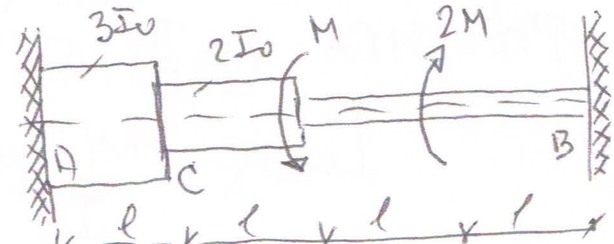
3°



2°

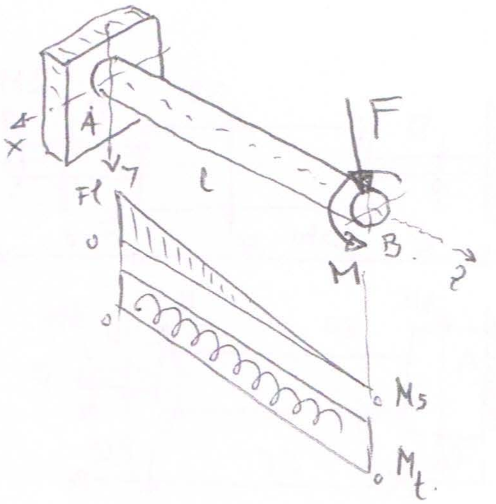


4°

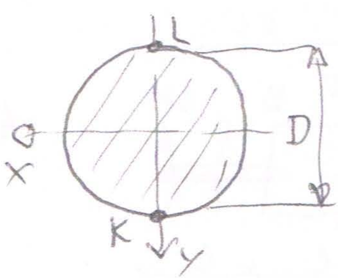


SAVIJANJE SA UVIJANJEM GREDNOG NOSAČA

Ako je gredni nosač kružnog ili prstenastog poprečnog presjeka opterećen istovremeno na savijanje silama u vertikalnoj ravni i na uvijanje, kažemo da se radi o kombinovanom naprezanju koje se zove savijanje sa uvijanjem. (slika). Od savijanja postoji dijagram momenta savijanja a od uvijanja dijagram momenta uvijanja.



U presjeku A se pojavljuju najveće vrijednosti tih momenata i taj presjek je kritičan.



U tom poprečnom presjeku najveći normalni napon σ_z od savijanja se pojavljuje u tačkama K i L koje su najviše udaljene od ose x.

$$\sigma_{z\,max} = \sigma_{z_K} = \frac{M_{s\,max}}{I_x} \cdot y_{max} = \frac{Fl}{\frac{\pi D^4}{64}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{32Fl}{\pi D^3}$$

Najveći tangencijalni napon od uvijanja se pojavljuje u tačkama poprečnog presjeka koje se nalaze na obodnoj kružnici poluprečnika $r = \frac{D}{2}$ pa je:

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{I_0} \cdot r_{max} = \frac{M}{\pi D^4} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16M}{\pi D^3}$$

Pošto su naponi $\sigma_{z\,max}$ i τ_{max} veličine istog reda postavlja se pitanje koji je od njih ili koja je njihova kombinacija mjerodavna za dimenzionisanje? Odgovor na ovo pitanje dala su eksperimentalna istraživanja koja su pokazala da je za dimenzionisanje nosača mjerodavan neki ekvivalentni ili uporedni napon σ_u koji napone $\sigma_{z\,max}$ i τ_{max} uzima u obzir na jedan od sljedeća dva načina:

$$I: \quad \sigma_{u_I} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2} \le \sigma_{doz}$$

$$II: \quad \sigma_{u_{II}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau^2} \le \sigma_{doz}$$

Pošto je:

$$\sigma_{z\,max} = \frac{M_s}{I_x} \cdot y_{max} = \frac{M_s}{\frac{\pi D^4}{64}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{32 M_s}{\pi D^3}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_0} \cdot r_{max} = \frac{M_t}{\frac{\pi D^4}{32}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16 M_t}{\pi D^3}$$

to izrazi za σ_{u_I} i $\sigma_{u_{II}}$ imaju izgled

$$\sigma_{u_I} = \frac{\sqrt{M_s^2 + M_t^2}}{\frac{\pi D^3}{32}} = \frac{1}{W_x}\sqrt{M_s^2 + M_t^2} \; ; \; W_x = \frac{\pi D^3}{32}$$

$$\sigma_{u_{II}} = \frac{1}{\frac{\pi D^3}{32}} \sqrt{M_s^2 + \frac{3}{4} M_t^2} = \frac{1}{W_x} \sqrt{M_s^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

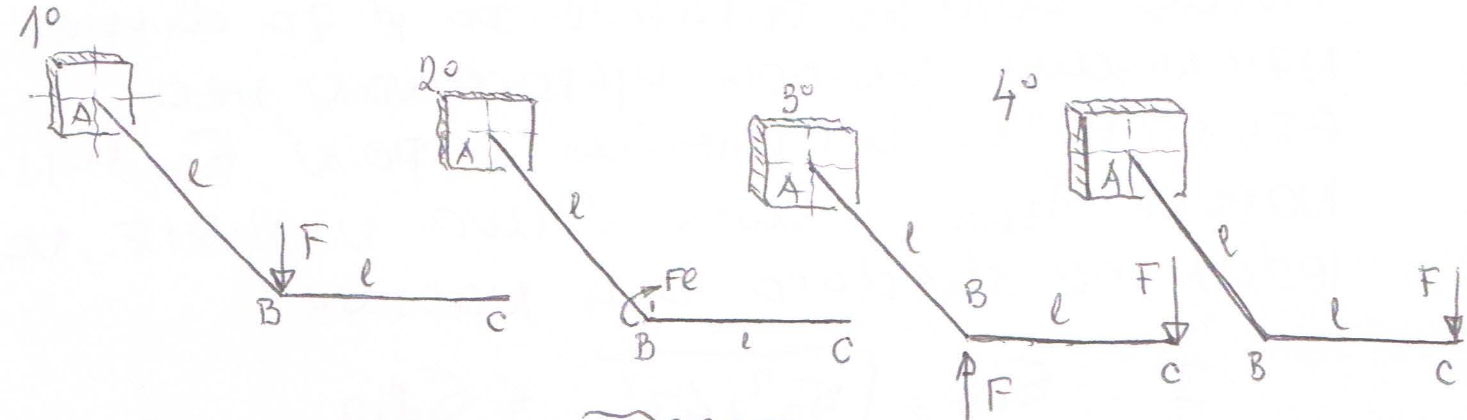
PRIMJER: ZA GREDNI NOSAČ KRUŽNOG POPREČNOG PRESJEKA:

a) IZRAČUNATI MAKSIMALNI NAPON σ_u

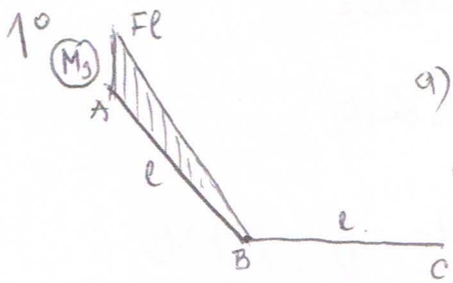
b) IZVRŠITI DIMENZIONISANJE

c) IZRAČUNATI VERTIKALNO POMJERANJE TAČKE C.

Dato je: F, l, $E=2G$, σ_{doz}, $\sigma_u=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$ i $\tau_{doz}=\frac{1}{2}\sigma_{doz}$



1°

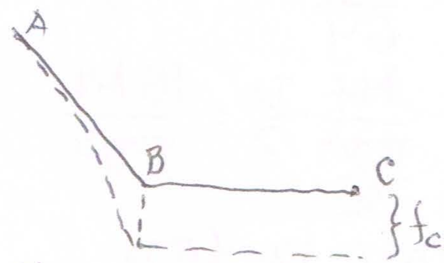


a) U PRESJEKU A SE POJAVLJUJE NAJVEĆI NORMALNI NAPON

$$\sigma_u = \sigma_{z\,max} = \frac{M_{s\,max}}{I_x}\cdot y_{max} = \frac{Fl}{\frac{\pi D^4}{64}}\cdot\frac{D}{2} = \frac{32Fl}{\pi D^3}$$ jer je $\tau_{max}=0$

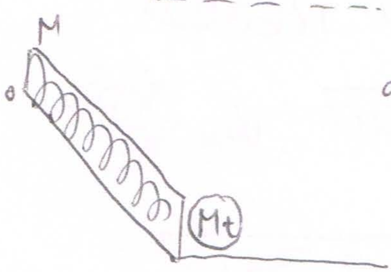
b) $\sigma_u = \sigma_{z\,max} \le \sigma_{doz} \Rightarrow \frac{32Fl}{\pi\cdot D^3} \le \sigma_{doz} \Rightarrow D \ge \sqrt[3]{\frac{32Fl}{\pi\sigma_{doz}}}$

c)



$$f_c = y^F_{B,AB} = \frac{Fl^3}{3EI_x} = \frac{Fl^3}{3\cdot E\frac{\pi D^4}{64}} = \frac{64}{3\pi}\frac{Fl^3}{ED^4}$$

2°



a) OD MOMENTA UVIJANJA $M_t=Fl$ NAJVEĆI TANGENCIJALNI NAPON JE.

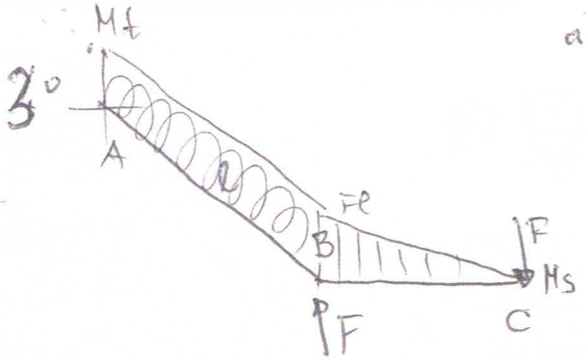
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_0}\cdot r_{max} = \frac{Fl}{\frac{\pi D^4}{32}}\cdot\frac{D}{2} = \frac{16Fl}{\pi D^3}$$ $\sigma_{z\,max}=0$, $\sigma_u=2\tau_{max}$

b) $\tau_{max} = \frac{16Fl}{\pi D^3} \le \tau_{doz} = \frac{1}{2}\sigma_{doz} \Rightarrow D \ge \sqrt[3]{\frac{32Fl}{\pi\sigma_{doz}}}$ ⟸ $\sigma_u = 2\tau_{max} \le \sigma_{doz}$

c)

$$f_c = \theta_{BA}\cdot l = \frac{M\cdot l}{GI_0}\cdot l = \frac{Fl^3}{\frac{E}{2}\cdot\frac{\pi D^4}{32}} = \frac{64Fl^3}{\pi ED^4}.$$

3°



a) U presjeku B imamo normalni napon od savijanja:

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_s}{I_x}\cdot y_{\max} = \frac{Fl}{\frac{\pi D^4}{64}}\cdot\frac{D}{2} = \frac{32Fl}{\pi D^3}$$

U presjeku A imamo tangencijalni napon od uvijanja

$$\tau_{\max} = \frac{Fl}{I_0}\cdot r_{\max} = \frac{Fl}{\frac{\pi D^4}{32}}\cdot\frac{D}{2} = \frac{16Fl}{\pi D^3}$$

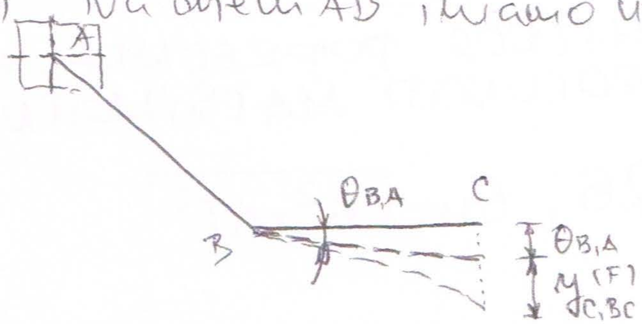
b) Dimenzionisanje vršimo iz uslova

$$\sigma_{z\max} \le \sigma_{doz} \Rightarrow D \ge \sqrt[3]{\frac{32Fl}{\pi\sigma_{doz}}}$$

ili iz uslova

$$\tau_{\max} \le \tau_{doz} = \frac{1}{2}\sigma_{doz} \Rightarrow D \ge \sqrt[3]{\frac{32Fl}{\pi\sigma_{doz}}}$$

c) Na dijelu AB imamo uvijanje a na dijelu BC imamo savijanje. Vertikalno pomjeranje tačke C je:



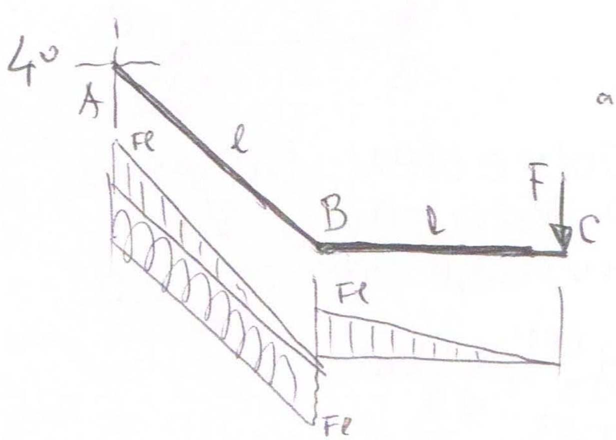
$$f_C = \theta_{BA}\cdot l + y_{C,BC}^{(F)}$$

$$f_C = \frac{Fl\cdot l}{I_0 G}\cdot l + \frac{Fl^3}{3EI_x} = \frac{4}{3}\frac{Fl^3}{EI_x}$$

jer je $EI_x = GI_0$.

$$f_C = \frac{4}{3}\frac{Fl^3}{E\cdot\frac{\pi D^4}{64}} = \frac{256}{3}\frac{Fl^3}{\pi E D^4}$$ //

4°



a) Kritičan je presjek A u kojem se pojavljuje normalni napon od savijanja i tangencijalni napon od uvijanja.

$$\sigma_{z\max} = \frac{Fl}{\frac{\pi D^4}{64}}\cdot\frac{D}{2} = \frac{32Fl}{\pi D^3}$$

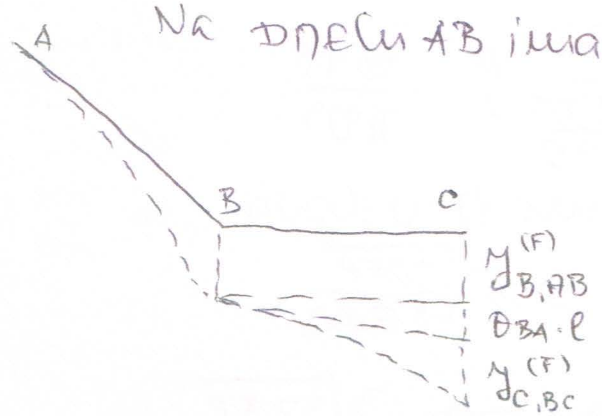
$$\tau \ldots = \frac{Fl}{\ldots}\cdot\frac{D}{\ldots} = \frac{16Fl}{\ldots}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\left(\frac{32Fl}{\pi D^3}\right)^2 + 4\left(\frac{16Fl}{\pi D^3}\right)^2} = \frac{32Fl}{\pi D^3}\cdot\sqrt{2}$$

b) Iz uslova

$$\sigma_u \le \sigma_{doz} \Rightarrow D \ge \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{2}\cdot Fl}{\pi\cdot\sigma_{doz}}}$$

c)



Na dijelu AB imamo savijanje i uvijanje a na dijelu BC samo savijanje.

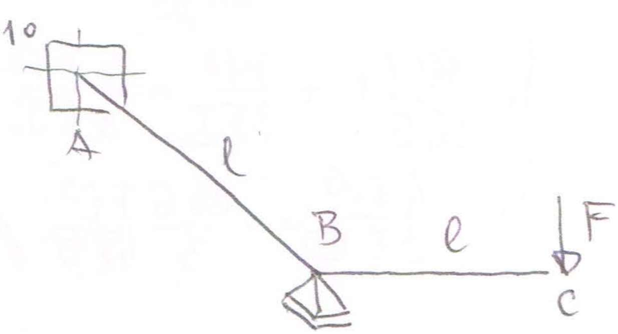
$$f_C = \frac{1}{3}\frac{Fl^3}{EI_x} + \frac{Fl\cdot l}{GI_0}\cdot l + \frac{1}{3}\frac{Fl^3}{EI_x}$$

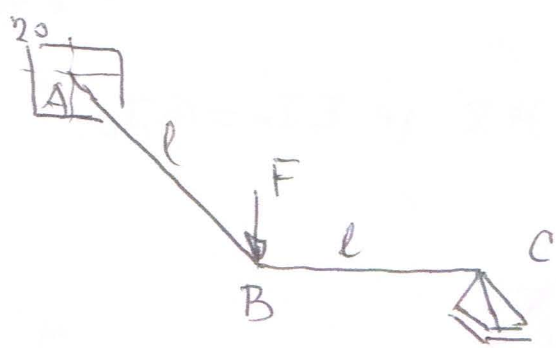
$$f_C = \frac{5}{3}\frac{Fl^3}{EI_x} = \frac{5}{3}\frac{Fl^3}{E\frac{\pi D^4}{64}} = \frac{320Fl^3}{3\pi E D^4}$$

- STATIČKI NEODREĐENI SISTEMI -

PRIMJER: Za nosače kružnog poprečnog presjeka prečnika d izračunati maksimalni napon.

Dato je: $F, l, d, E = 2G$; $\sigma_u = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

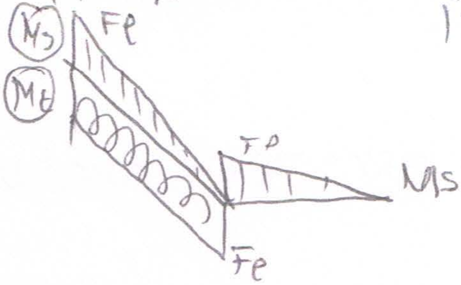




1° Sistem je statički neodređen. Umjesto oslonca B postavićemo reakciju R_B. Uslov za njeno određivanje je $y_B = 0$

$$y_B = y_B^{(F)} + y_B^{(R_B)} = \frac{Fl^3}{3EI_x} - \frac{R_B\cdot l^3}{3EI_x} = 0 \Rightarrow R_B = F$$

Dijagrami momenata imaju izgled. Kritičan je presjek A:

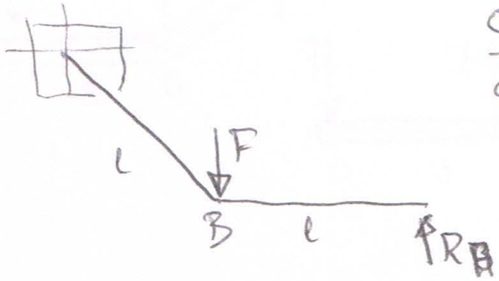


$$\sigma_{z\,max} = \frac{Fl}{\frac{\pi D^4}{64}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{32Fl}{\pi D^3}$$

$$\tau_{max} = \frac{Fl}{\frac{\pi D^4}{32}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16Fl}{\pi D^3}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{z\,max}^2 + 4\tau_{max}^2} = \dots = \frac{32Fl}{\pi D^3}$$

20.

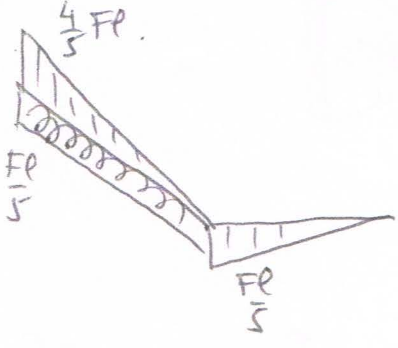


Sistem je statički neodređen. Reakciju u osloncu A određujemo iz uslova $y_A = 0$

$$y_A = y_A^{(F)} + y_A^{(R_B)} = \frac{Fl^3}{3EI_x} - \left(\frac{1}{3}\frac{R_A l^3}{EI_x} + \frac{R_A l \cdot l}{GI_o} \cdot l + \frac{1}{3}\frac{R_A l^3}{EI_x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Fl^3}{3EI_x} - \frac{5}{3}\frac{R_A l^3}{EI_x} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{F}{5}.$$

Dijagrami momenata imaju izgled



Kritičan je presjek A. Vrijedi je:

$$M_{s\,max} = \frac{4}{5}Fl \quad ; \quad M_t = \frac{Fl}{5}$$

Dakle

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{\frac{\pi D^3}{32}} \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{5}Fl\right)^2 + 4\left(\frac{1}{5}Fl\right)^2}$$

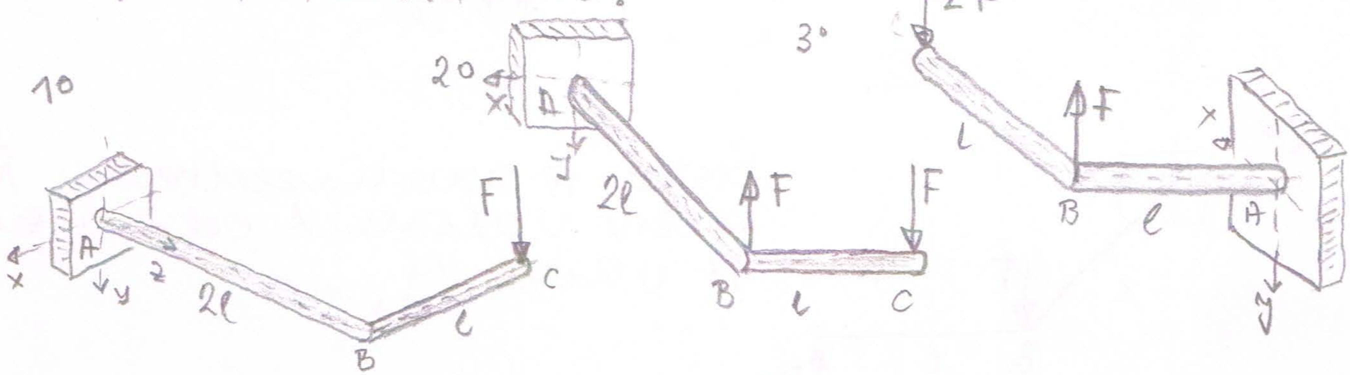
$$\sigma_u = \frac{32}{\pi D^3}\sqrt{\frac{20}{25}F^2 l^2} = \frac{32 \cdot Fl \cdot 2\sqrt{2}}{\pi D^3 \cdot 5} = \frac{64\sqrt{2} \cdot Fl}{5\pi \cdot D^3}$$

• Nosač ABC kružnog poprečnog presjeka prečnika d opterecen je kao na slici

a) Izracunati maksimalni napon

b) Odrediti vertikalno pomjeranje tacke C.

Dato je: F, l, G, d i E=2G.



• Kod nosača kružnog poprečnog presjeka prečnika d opterecenog kao na slici

a) Odrediti suvišnu staticku nepoznatu

b) Odrediti maksimalni napon.

Dato je: F, l, E=2G, d.