
IDENTIFIKACIJA PROCESA

BRANKO D. KOVAČEVIĆ
GORAN S. KVAŠČEV

*Univerzitet u Beogradu
Elektrotehnički fakultet*

Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet
Akademska misao
Beograd 2018.

Dr Branko D. Kovačević

Dr Goran S. Kvašček

IDENTIFIKACIJA PROCESA

Recenzenti

Prof. dr Željko Đurović

Redovni profesor, Univerzitet u Beogradu

Prof. dr Milorad Božić

Redovni profesor, Univerzitet u Banja Luci

Odlukom Nastavno-naučnog veća Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu
ova knjiga je odobrena kao udžbenik na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

Izdavači

Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet, Beograd

Akadska misao, Beograd

Štampa

Akadska misao, Beograd

Tiraž

200 primeraka

ISBN 978-86-7225-062-6 (Elektrotehnički fakultet)

ISBN 978-86-7466-722-4 (Akadska misao)

Sadržaj

Predgovor	v
1 Modeliranje	1
1.1 Definicija i zadaci modeliranja sistema	1
1.2 pristupi izgradnji modela sistema	3
1.2.1 Deduktivni pristup	3
1.2.2 Induktivni pristup	5
2 Black-box reprezentacije modela sistema	19
2.1 Diskretni signali i sistemi	21
2.1.1 Impulsni odziv i funkcija prenosa linearnog diskretnog vremenski invarijantnog sistema	23
2.2 Poremećaji	27
2.2.1 Statističke i stohastičke karakteristične veličine za karakterizaciju poremećaja	28
2.3 Parametarska reprezentacija black-box modela sistema u vremenskom domenu	41
2.3.1 FIR model (model sa konačnim impulsnim odzivom)	42
2.3.2 ARX model (Auto-regresioni model sa spoljašnjim ulazom)	43
2.3.3 ARMAX model (Autoregresioni model pomičnih sredina sa spoljašnjom pobudom)	45
2.3.4 OE model (Model greške izlaza)	47

2.3.5	BJ model (Box-Jenkinsov model)	49
2.4	Opšta nelinearna reprezentacija black-box modela	52
2.5	Nelinearna identifikacija sistema	52
2.5.1	Nelinearna identifikacija sistema u vremenskom domenu: metod korelacione analize	53
2.5.2	Nelinearna identifikacija sistema u frekvencijskom domenu	56
2.6	Nelinearna prezentacija "black-box" modela sistema u frekvencijskom domenu	62
2.6.1	Frekvencijska karakteristika (funkcija ili lik) sistema	62
2.6.2	Spektar snage signala	63
2.6.3	Transformacija spektra signala	68
2.6.4	Primeri izračunavanja stohastičkih pokazatelja slučajnih signala	72
3	Nelinearna identifikacija sistema na bazi Fourierove analize: empirijska procena funkcije prenosa sistema	79
3.1	ETFE procena funkcije prenosa	81
3.1.1	Osobine ETFE procene	83
3.1.2	Usrednjavanje (interpolacija ili glačanje) ETFE procene	92
3.2	Uslov perzistentne eksitacije	95
3.2.1	Definicija perzistentne eksitacije	96
4	Parametarska identifikacija	99
4.1	Modeli predikcije: jednokoračna predikcija unapred	101
4.1.1	Model predikcije za standardni parametarski model	101
4.1.2	Model predikcije za FIR reprezentaciju sistema	104
4.1.3	Model predikcije za ARX reprezentacije modela sistema	105
4.1.4	Model predikcije za ARMAX reprezentaciju modela sistema	106
4.1.5	Model predikcije za OE strukturu modela sistema	107
4.1.6	Model predikcije za BJ strukturu modela sistema	109
4.2	Parametarska identifikacija sistema: Metod najmanjih kvadrata	112
4.2.1	Linearni metod najmanjih kvadrata: LLS metod	113
4.2.2	Linearni metod težinskih (ponderisanih) najmanjih kvadrata: WLS metod	122
4.2.3	Pseudo-linearni metod najmanjih kvadrata: PLLS metod	123

4.3	Primer identifikacije parametara ARX modela prvog reda	135
4.4	Primer identifikacije parametara ARX/ARMAX/OE modela prvog, drugog i trećeg reda u prisustvu mernog šuma	143
4.4.1	Eksperiment bez mernog šuma	143
4.4.2	Promenljiv šum merenja	143
4.4.3	Promenljiva perioda odabiranja	145
4.4.4	Primena <i>MATLAB systemIdentification toolbox</i> -a	148
5	Analiza algoritma najmanjih kvadrata: konvergencija i konzistencija procena parametara	153
5.1	Linearni algoritam najmanjih kvadrata (LLS)	153
5.2	Pseudo-linearni metod najmanjih kvadrata (PLLS)	161
5.2.1	Aproksimativna identifikacija	163
5.2.2	Filtriranje grešaka predikcije	167
6	Rekurzivni metod najmanjih kvadrata	169
6.1	Dijagram toka RLLS algoritma	175
6.2	Primer rekurzivna identifikacija ARX modela prvog i drugog reda	179
6.2.1	Rekurzivno skupljanje podataka	179
6.2.2	Faktor zaboravljanja	179
	Literatura	187

Predgovor

Ovaj tekst je napisan u najvećem delu u formi udžbenika i, mada sadrži i delove koji proističu iz sopstvenih istraživanja autora, daje uvodna razmatranja o naučnim disciplinama, kao što su modeliranje, identifikacija, simulacija sistema i tehnike optimizacije. Ove naučne oblasti imaju dominantnu ulogu u mnogobrojnim inženjerskim strukama, kao što su elektrotehnika, mašinstvo, hemijsko inženjerstvo, ekologija, robotika i mehatronika, biomedicinske tehnike, aeronautika i fizika. Bilo koji student tehnike mora u današnje vreme da poseduje adekvatno znanje o generalnoj analizi i alatima za sintezu matematičkih modela prirodnih fenomena ili veštački izazvanih pojava, kao i njihovoj simulaciji na računaru. U naučno-tehnološkoj literaturi su retke knjige koje na jedinstven način tretiraju sve ove različite oblasti, dok postoji veliki broj publikacija koje detaljno razmatraju samo pojedinačne oblasti, ne ulazeći u njihovu interakciju sa drugim srodnim oblastima. Neke od značajnih knjiga, počevši od 70-tih godina prošlog veka kada su se pojavile prve publikacije na ovu temu, navedene su u literaturi koja je data na kraju ove knjige.

Polazeći od ove konstatacije, autori su u poslednjih dvadeset godina razvili materijal za jedno-semestralni kurs na redovnim studijama elektrotehnike u trajanju od petnaest nedelja, sa fondom od tri časa predavanja i dva časa laboratorijskih vežbi, u kome se na jedinstven i sistematičan način razmatraju pomenute oblasti modeliranja, identifikacije, simulacije i optimizacije, pri čemu je posebna pažnja posvećena njihovoj međusobnoj interakciji. Imajući u vidu generalnu prirodu i široku primenjivost oblasti modeliranja, identifikacije, simulacije i optimizacije, udžbenik je pisan tako da ne zahteva veliko predznanje od studenata. Pretpostavlja se da čitalac poseduje izvesno poznavanje oblasti matematičkog modeliranja dinamičkih sistema u obliku diferencijalnih ili diferencnih jednačina određenog reda, sistema diferencijalnih ili diferencnih jednačina prvog reda u prostoru varijabli stanja, kao i frekvencijskom odzivu linearnog dinamičkog sistema. Ove oblasti izučavaju se tokom prve dve godine studija skoro na svim tehničkim fakultetima, tako da udžbenik može korisno poslužiti ne samo studentima elektrotehnike, kojima je primarno namenjen, već i studentima drugih tehničkih fakulteta, kao i inženjerima različitih usmerenja koji se u svojoj praksi susreću sa modeliranjem dinamičkih sistema, njihovom identifikacijom i simulacijom na računaru.

U knjizi su razmatrana dva osnovna pristupa sintezi matematičkih modela: deduktivni i in-

duktivni prilaz. Razvijanje matematičkog modela na bazi deduktivnog pristupa podrazumeva prethodno poznavanje fizičkog ponašanja posmatranog sistema, koje se ogleda u poznavanju fizičkih ili hemijskih zakona kojima se na idealizovan način opisuju dinamičke veze između promenljivih i parametara u sistemu. Dinamičke veze između varijabli obično su date u obliku diferencijalnih jednačina, u kojima figuriše određeni broj parametara. Ukoliko se vrednosti ovih parametara mogu odrediti na osnovu razmatranja fizičkih gabarita, ovakvi modeli se nazivaju "modeli bele kutije" (eng. *white box*). Prilikom primene ovakvog pristupa, važno je imati u vidu činjenicu da isti sistem može biti prikazan različitim matematičkim modelima, pošto je sistem pojava koja se menja u prostoru i vremenu i kao takva može se posmatrati sa različitih aspekata. Izabrani aspekt posmatrana neke pojave određen je namenom projektovanog modela, tako da je dobijeni model subjektivna predstava projektanta o razmatranom realnom fenomenu. Druga važna činjenica u postupku modeliranja je kauzalnost, odnosno uzročno-posledična zavisnost, pošto su fizičko-hemijski zakoni kojima je opisana posmatrana realna pojava (sistem) formulisani u obliku matematičkih relacija između varijabli i parametara, ne vodeći pri tome računa o uzročno-posledičnim vezama između varijabli, a koje se nazivaju kauzalnost. S obzirom da realnost ne vodi računa o kauzalnosti, projektantu je ostavljeno u zadatak da uvede uzročno-posledične efekte, tako da je kauzalnost matematičkog modela rukotvorina modelara.

Obične diferencijalne jednačine (eng. *Ordinary Differential Equations*) predstavljaju uobičajeno sredstvo da se matematički opiše ponašanje dinamičkih sistema i izvede kauzalan matematički model. Međutim, izvođenje diferencijalnih jednačina na osnovu fizičkog opisa posmatrane realne pojave nije uvek jednostavan zadatak. Stoga je prirodniji način da se matematički model formuliše kroz skup diferencijalnih i algebarskih relacija između varijabli koje opisuju fizičko ponašanje analiziranog sistema (eng. *Differential-Algebraic Equations*, ili skraćeno DAE). Izgradnja ovakvih nekauzalnih ili akauzalnih matematičkih modela delimično je razmatrano i u ovoj publikaciji. Alternativni prilaz sintezi akauzalnih modela zasnovan je na bond grafovima, koji predstavljaju unificirani pristup sintezi modela sistema kao mreže međusobno povezanih fizičkih komponenti. Međusobna interakcija između komponenti definisana je kao razmena energije, što omogućava da se izdvoje i naznače značajne varijable u modelu, koje reprezentuju prikupljanje i protok energije. Ovakav pristup pruža veće mogućnosti u izgradnji matematičkih modela sistema, ali je zbog ograničenog fonda časova studijskog programa izostavljan iz ovog materijala. U inženjerskoj praksi postoje i problemi koji zahtevaju drugačiji pristup matematičkom modeliranju realnih fenomena koji su zasnovani na primeni diferencijalnih jednačina, događajima vezanim za varijable stanja sistema ili vremenski diskretnim događajima. Ovakvi pristupi modeliranju, kao i složeniji opisi realnih sistema koji se baziraju na kombinaciji navedenih pristupa, takođe su razmatrani u knjizi.

Ukoliko ne postoje apriorna znanja o fizičkom ponašanju posmatranog sistema, ili je ovakvo predznanje nedovoljno, model sistema može se izgraditi na osnovu prikupljenih merenja na sistemu. Postupak prikupljanja mernih podataka sa sistema naziva se indukcija, a ovakav pristup izgradnje matematičkog modela sistema naziva se induktivnim, a dobijeni model naziva se "model crne kutije" (eng. *black box*). U ovom tekstu razmatrani su opšti linearni neparametarski modeli tipa crne kutije u vremenskom i frekvencijskom domenu, kao i statističke i stohastičke karakteristične veličine za karakterizaciju slučajnih nekontrolabilnih poremećaja na izlazu linearnog sistema kojim je približno opisano fizičko funkcionisanje realnog dinamičkog sistema. Uspešno praćenje izložene materije podrazumeva da čitalac poseduje predznanje iz matematičke teorije verovatnoće,

slučajnih varijabli i stohastičkih signala. Ovakvi kursevi se uobičajeno predaju na drugoj godini studijskog programa većine tehničkih fakulteta.

U nastavku je pokazano da se prikupljena merenja na sistemu mogu upotrebiti za sintezu linearnih parametarskih modela koji približno opisuju ponašanje realnog dinamičkog sistema. Pored opšteg parametarskog modela razmatrani su i njegovi specijalni slučajevi kao što su linearni sistem sa konačnim impulsnim odzivom (eng. *Finite Impulse Response* ili skraćeno FIR), auto-regresioni model sa eksternim ulazom (eng. *Auto-Regressive with eXogenous input* model ili skraćeno ARX); auto-regresioni model sa pomičnim sredinama i egzogenom pobudom (eng. *Auto-Regression with Moving Average and eXogenous input* ili skraćeno ARMAX), model tipa greške jednačine (eng. *Output Error* model ili skraćeno OE) i *Box-Jenkins-ov* model (skraćeno BJ).

U okviru identifikacije neparametarskih modela crne kutije detaljno su razmatrane sledeće metode:

1. korelacioni metod za procenu (estimaciju) odbiraka impulsnog odziva, koji traje neograničeno vreme, neparametarskog modela crne kutije u vremenskom domenu. Na taj način, odbirci impulsnog odziva linearnog sistema kojim se aproksimira ponašanje linearnog dinamičkog sistema predstavljaju nepoznate parametre koji se estimiraju na osnovu merenja, a pošto impulsni odziv traje neograničeno, broj parametara je neograničen, te se model naziva neparametarskim;
2. eksperimentalno snimljen frekvencijski odziv za empirijsku identifikaciju neparametarskih modela u frekvencijskom domenu, gde nepoznate parametre predstavljaju odbirci amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike linearnog stabilnog sistema kojim je aproksimirano ponašanje realnog dinamičkog sistema u frekvencijskom domenu. Naime, amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika je kompleksna funkcija realne kontinualne fizičke varijable, koja predstavlja učestanost, tako da je broj njenih odbiraka u frekvencijskom domenu neograničen. Pošto su navedeni odbirci u frekvencijskom domenu nepoznati parametri koje treba estimirati na osnovu eksperimentalnih merenja, a broj ovih parametara je neograničen, model se naziva neparametarskim. U praksi se, naravno, estimira konačan broj parametara na konačnom skupu mernih učestanosti u frekvencijskom području od interesa za rad sistema;
3. korelacione metode za neparametarsku identifikaciju modela crne kutije u frekvencijskom domenu. Metod se primenjuje za određivanje odbiraka amplitudno-fazno frekvencijske karakteristike na učestanostima od interesa, a njegovim ponavljanjem za više učestanosti može se približno estimirati amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika sistema na konačnom skupu učestanosti u frekvencijskom području od interesa;
4. empirijski metod za procenu amplitudno-fazne frekvencijske karakteristike na skupu učestanosti od interesa (eng. *Empirical Transfer Function Estimation method* ili skraćeno ETFE metod) primenom diskretne Furijeove transformacije na ulazno-izlazna merenja na sistemu. Kvalitet ovakve procene analizira se na osnovu pojma tačnosti ili nepomenosti (eng. *unbiased estimate*), koji označava da je srednja vrednost (očekivanje) procene jednaka nepoznatoj, tačnoj veličini koja se estimira, kao i pojma preciznosti, koji podrazumeva da je nepomenena procena konzistentna, u smislu da se varijansa ovakve procene smanjuje sa porastom dužine

mernog uzorka na kome se bazira procena, te asimptotski teži nuli kada dužina mernog uzorka neograničeno raste.

Alternativa amplitudno-faznoj frekvencijskoj karakteristici, koja predstavlja karakteristiku kompleksnog pojačanja sistema na različitim učestanostima, kao neparametarski model tipa crne kutije u frekvencijskom domenu je spektralna gustina snage, ili energetski spektar sistema. U materijalu je definisan pojam kvazistacionarnosti, kao generalizacija pojma široke stacionarnosti kod slučajnih signala, kojim su na unificiran način, putem generalisanog matematičkog očekivanja tretirani deterministički i stohastički signali, a spektralna gustina snage definisana je, na klasičan način, kao Furijeova transformacija auto-kovarijacione funkcije kvazi-stacionarnog signala. U nastavku je razmatrana transformacija spektra prilikom prenosa (filtracije) kvazi-stacionarnog signala kroz linearni vremensko-invarijantni diskretan i stabilan sistem. Međutim, sa izuzetkom periodograma, nisu posebno razmatrane metode za estimaciju spektralne gustine snage.

U okviru problematike estimacije (procene) parametara u usvojenoj parametarskoj strukturi modela crne kutije definisan je metod greške predikcije (eng. *Prediction Error* ili skraćeno PE metod), koji omogućava da se problem estimacije parametara postavi kao optimizacioni problem, čijim se rešavanjem dolazi do optimalnih vrednosti nepoznatih parametara u modelu, kojima se na najbolji mogući način u datoj situaciji postiže slaganje sa realnim merenjima na sistemu. Za rešavanje postavljenog srednje-kvadratnog kriterijuma kvaliteta (eng. *Mean-Square Error* ili MSE kriterijum) ili indeksa performanse, čijom se minimizacijom dolazi do optimalne procene parametara modela, korišćen je metod najmanjih kvadrata (eng. *Least Squares* ili skraćeno LS metod). Ukoliko se usvoji FIR ili ARX struktura parametarskog modela crne kutije do optimalnog rešenja dolazi se u jednom koraku, a takva estimaciona procedura naziva se linearni metod najmanjih kvadrata. Za sve ostale parametarske reprezentacije modela crne kutije, kao što su ARMAX, OE ili BJ strukture modela, minimizacija MSE kriterijuma zahteva primenu više-koračnih numeričkih postupaka, kao što je na primer Njutn-Raphsson-ov iterativni numerički algoritam, a metod najmanjih kvadrata ovakvog tipa naziva se pseudo-linearnim. Razmatrane varijante linearnog i pseudo-linearnog metoda najmanjih kvadrata kojim se u jednom ili više koraka minimizira optimalni MSE kriterijum pripada klasi nerekurzivnih ili paketnih (eng. *batch* ili *off-line processing*) algoritama, pošto odjednom obrađuje ceo paket prikupljenih mernih podataka, nezavisno od rada samog sistema na kome su prikupljena merenja.

U knjizi su razmatrane i rekurzivne verzije ovih algoritama, koje su jednostavnije u računarskom smislu i omogućavaju da se proces estimacije parametara modela vrši u realnom vremenu, u toku rada sistema na kome se vrše merenja (eng. *recursive, on-line* ili *real-time* algoritmi).

Na kraju teoretskih razmatranja u ovom materijalu diskutovana je i aproksimativna identifikacija s obzirom da je realnost suviše složena da bi se potpuno tačno ili egzaktno opisala bilo kojim matematičkim modelom.

Tokom celog materijala korišćena je simulacija, kao važno numeričko sredstvo za sagledavanje praktičnih dometa izloženih teorijskih rezultata. Simulacija je korišćena za numeričko generisanje odziva u vremenu razmatranih matematičkih modela, kao i planiranje eksperimenata, odnosno za analizu uticaja izbora strukture i reda modela, tipa pobudnog signala, vrednosti periode diskretizacije (odabiranja) kod diskretnih merenja, efekata prefiltriranja mernih signala kao i drugih

praktičnih aspekata na kvalitet postupka identifikacije parametara modela u uslovima bliskim realnosti. Simulacija predstavlja prvi korak u postupku validacije modela, koji treba da odgovori na pitanje da li postavljeni matematički model zaista dobro opisuje fizičko ponašanje realnog dinamičkog sistema, što se sagledava kroz poređenje odziva modela dobijenog simulacijom sa realnim merenjima na sistemu.

Odlukom Nastavno-naučnog Veća Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu ova knjiga je odobrena za zvaničan udžbenik iz predmeta "Modeliranje i identifikacija procesa", a nastava iz pomenutog predmeta izvodi se na trećoj godini studijskog programa na Odseku za signale i sisteme. Autori posebnu zahvalnost duguju kolegama sa Katedre za signale i sisteme na inspirativnim diskusijama tokom niza godina, a koje su poslužile kao osnova za uvođenje pomenutog predmeta u nastavni plan, kao i izradu ovog materijala. Veliku zahvalnost autori duguju i recenzentima, dr Željku Đuroviću, red. Profesoru Univerziteta u Beogradu i dr Miloradu Božiću, red. Profesoru Univerziteta u Banjoj Luci, čije su korisne sugestije znatno doprinele poboljšanju kvaliteta udžbenika i njegovom dovođenju do završne forme.

U Beogradu, Autori Dana 25.04.2017.

Modeliranje

1.1 Definicija i zadaci modeliranja sistema

Modeliranje je postupak dobijanja matematičkog opisa neke pojave koja se odvija u realnom svetu, kao što su na primer fizički, hemijski ili elektrotehnički procesi. Sa jedne strane, ovaj opis mora biti relativno jednostavan, a sa druge strane i dovoljno tačan, da bi odgovorio svojoj nameni koja je definisana od strane kreatora modela. Primena modeliranja nije ograničena samo na tehničke procese (fizičke, hemijske, mehaničke, električne, itd.), već se ono koristi u različitim oblastima, kao što su ekonomija, biologija, sociologija, itd.

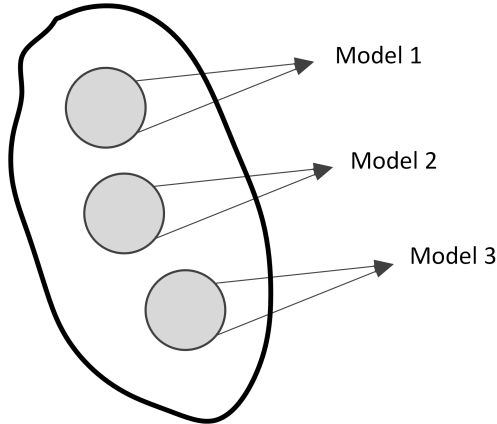
Postoji praktično neograničen broj modela koji opisuju različite aspekte jedne realne pojave. Na primer, jedna električna komponenta, kao što je otpornik, može da se proučava sa različitih stanovišta:

1. Kao električni element kojim je definisana linearna zavisnost između napona u na njegovim krajevima i struji kroz otpornik, tj. gde je $R [\Omega]$ otpornost izražena u omima.
2. Kao termički element čija se temperatura $T [^{\circ}\text{K}]$ menja po zakonu

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C} [Ri^2 - k(T - T_0)]$$

gde je $C [\text{J}/^{\circ}\text{K}]$ toplotni kapacitet, a $k [\text{W}^{\circ}/\text{K}]$ toplotna provodnost okoline čija je temperatura $T_0 [^{\circ}\text{K}]$.

3. Kao translatorno mehaničko telo, mase $m [\text{kg}]$ na koga deluje sila gravitacije $F_g = mg$



Slika 1.1: Različiti pogledi na realnu pojavu rezultuju u njene različite modele

4. Kao rotaciono mehaničko telo, odgovarajućeg momenta inercije J [kgm^2], kod koga je veza između obrtnog momenta M [Nm] i ugaonog ubrzanja α [rad/s^2] data sa relacijom $M = J\alpha$.

Svi ti različiti pogledi na realnu pojavu rezultuju različitim modelima.

Suština postupka modeliranja je da se izaberu samo one osobine posmatranog procesa koje predstavljaju potrebne i dovoljne karakteristike da se proces opiše dovoljno tačno sa stanovišta namene modela. Zadatak modeliranja je da osvetli glavne osobine i fenomene realnog procesa i da ih prevede na neki apstraktan jezik, kao što je jezik matematike. Na taj način, modeliranje predstavlja integralan deo nauke i tehnologije, koji obuhvata skoro sve oblasti ljudskog delovanja, počevši od filozofija i teologija, pa preko sociologija, psihologija, ekologija i ekonomija, konačno i do same tehnike (građevine, hemije, fizike, mašinstva, elektrotehnike, itd.).

Pojam modeliranja je neraskidivo povezan sa pojmom procesa ili sistema.

Sistem je skup stavki ili osobina koje predstavljaju zaokruženi deo realnog fenomena koji se proučava. Sistem je subjektivan pojam sa ograničenjima koja uključuju one osobine koje su najvažnije sa stanovišta modelara, a isključuje osobine od manjeg značaja za opis posmatranog realnog procesa. Model predstavlja sredstvo za opisivanje najbitnijih karakteristika sistema koji se proučava. Model mora posedovati prikaz objekata unutar sistema, tzv. komponenti sistema, kao i prikaz aktivnosti pod kojima će ti objekti međusobno delovati. Dakle, model reflektuje razumevanje realnog procesa, njegovih komponenti i njihove interakcije od strane samog modelara.

Važnu stavku prilikom formiranja modela predstavlja izbor ograničenja kojima je omeđen sistem. Ova ograničenja određuju koji će deo realnog procesa biti proglašen za sistem koji se proučava. Delovi realnog procesa koji nisu pridruženi sistemu, kao izolovanom delu realnosti, nazivaju se okolinom sistema. Ukoliko su granice sistema suviše široke može se dogoditi da je takav model sistema praktično nemoguće analizirati, pošto su mnoge važne osobine prekrivene

nevažnim detaljima. Sa druge strane, ukoliko su izabrane granice sistema suviše uske, sve relevantne karakteristike realnog procesa neće biti obuhvaćene njegovim modelom, što će rezultovati u neadekvatnu analizu sistema na bazi takvog modela.

Generalno, postoje dva načina primene modela sistema. Prvi od njih sastoji se u izvođenju eksperimenta u otvorenoj povratnoj sprezi. Kod ovakvog pristupa model se koristi za predviđanje budućih vrednosti relevantnih promenljivih u sistemu. Na primer, model se može koristiti za izradu vremenske prognoze ili za predviđanje budućih vrednosti nekih ekonomskih pokazatelja, kao što su nezaposlenost, profitna stopa i sl. Zadatak predikcije zahteva adekvatan opis odgovarajućih zakona kojima su podvrgnute relevantne promenljive u modelu, tako da male greške modeliranja mogu prouzrokovati velike greške u rezultatu analize koja je izvršena na bazi takvog netačnog modela.

Drugi pristup sastoji se u primeni modela u zatvorenoj povratnoj sprezi i ovakav pristup se obično koristi za projektovanje sistema upravljanja. Ukoliko je model deo sistema upravljanja u zatvorenoj povratnoj sprezi, takav sistem će redukovati dejstvo poremećaja, koji dolazi iz spoljašnje sredine, kao i same greške modeliranja. Na taj način, manje tačan model može se koristiti u ovoj drugoj primeni. Drugim rečima, zahtevana tačnost modeliranja zavisi od načina primene samog modela, odnosno da li se koristi u eksperimentu u otvorenoj povratnoj sprezi ili u okviru povratne petlje kod sistema upravljanja.

1.2 Pristupi izgradnji modela sistema

Postoji više načina da se izgradi model sistema, od kojih su najznačajniji sledeći pristupi:

1. Deduktivni pristup (polazi od opšteg ka posebnom).
2. Induktivni pristup (za razliku od prethodnog, polazi od posebnog da bi se došlo do opšteg).
3. Bond graf (dijagram veza komponenti sistema).

1.2.1 Deduktivni pristup

Ovaj pristup pretpostavlja primenu opštih iskustava koja su stečena prilikom modeliranja različitih specifičnih procesa. Uz to, pristup koristi i prethodno znanje o razmatranom procesu, koje se zasniva na poznavanju fizičkih zakona koji definišu matematičke relacije između relevantnih varijabli u idealizovanom modelu procesa sa idealizovanim fizičkim komponentama. Na primer, u idealizovanim fizičkim komponentama telo odgovarajuće mase se tretira kao tačkasto, uz zanemarivanje njegovih dimenzija, protoci su laminarni, koncentracije su homogeno raspodeljene u rezervoaru, mešavine su idealne i sl. Fizički zakoni se obično izražavaju u obliku algebarskih i/ili diferencijalnih jednačina.

U opštem slučaju, algebarske relacije definišu ponašanje procesa u ustaljenom (ravnotežnom) stanju ili tzv. statičko ponašanje procesa. Statički modeli se koriste da se odredi radna tačka

ili ravnotežno stanje procesa, na osnovu koje se dobija uvid u nominalne vrednosti relevantnih promenljivih, kao što su, na primer, pritisak, protok, temperatura ili profit. U industriji se statički modeli nazivaju “flow sheets”.

Dinamičko ponašanje procesa opisuje se diferencijalnim jednačinama. Ove jednačine su zasnovane na osnovnim fizičkim zakonima, kao što su zakon o održanju energije, mase, momenta i sl. Na primer, zakon o održanju mase izražava se u formi diferencijalne jednačine

$$\frac{dm}{dt} = \phi_{m,u} - \phi_{m,i}$$

gde je m [kg] masa, a ϕ_m [kg/s] protok mase na ulazu (u) i izlazu (i), respektivno. Slično, zakon o održanju energije izražava se kao

$$\frac{dQ}{dt} = \phi_u - \phi_i$$

gde je Q [J] količina energije, a ϕ [W] protok energije na ulazu (u) i izlazu (i), respektivno. Takođe, u mehanici se kretanje tela opisuje Njutnovim zakonom. Na primer, ako je pozicija tela mase m [kg] označena sa x [m] telo se kreće translatorno pod dejstvom aktivne sile F_a [N] uz prisustvo sile trenja F_t [N], tada je na osnovu Njutnovog zakona

$$ma = F_a - F_t, \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ [m/s}^2\text{]}, \quad F_{tr} = k_{tr}v \text{ [N]}, \quad v = \frac{dx}{dt} \text{ [m/s]}$$

odakle sledi diferencijalna jednačina

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k_{tr} \frac{dx}{dt} = F_a.$$

Na sličan način, rotacija tela momenta inercije J [kgm²], pod dejstvom aktivnog momenta M_a [Nm] i u prisustvu pasivnog momenta trenja M_t [Nm] i torzije M_e [Nm], opisana je Njutnovim zakonom

$$J\alpha = M_a - M_t - M_e$$

gde je $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ [rad/s²] ugaono ubrzanje, θ [rad] ugaona pozicija tela, a moment trenja $M_t = k_t\omega$ [Nm], gde je ugaona brzina $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ [rad/s], dok je momenat torzije $M_e = k_e\theta$ [Nm].

Apriorno (prethodno) znanje može da se koristi i da se bliže odredi struktura modela sistema, pošto pored relacije koja povezuje ulazne i izlazne varijable sistema i sama struktura modela predstavlja stavku od interesa. Na primer, ako je na osnovu prethodnog znanja ustanovljeno da sistem ima dve vremenske konstante, tada će to znanje biti iskorišćeno da se iz svih mogućih struktura modela drugog reda izabere ona kojoj odgovaraju dve realne vremenske konstante, odnosno dva realna pola, umesto da se za model usvoji opšta funkcija prenosa drugog reda koja može imati i konjugovano kompleksne polove.

Navedeni pristupi obično dovode do kvalitativnog modela. Ponekada je, međutim, moguće da se procene adekvatno i vrednosti parametara u ovakvom modelu, obično koristeći prethodno znanje o fizičkim dimenzijama procesa.

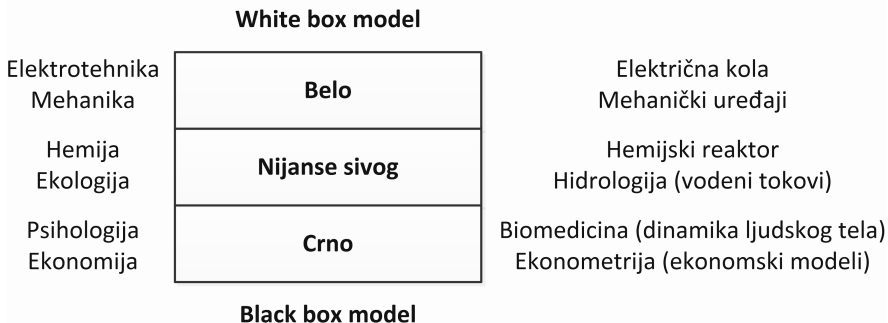
1.2.2 Induktivni pristup

U opštem slučaju se ne raspolaže sa dovoljno apriornog znanja da bi se parametri u usvojenoj strukturi modela procenili adekvatno. U takvim situacijama koriste se tehnike parametarske identifikacije sistema, koje koriste merenja ulaza i izlaza sistema da bi estimirale (procenile) vrednosti parametara u modelu. Postupak identifikacije zasniva se i na nekim dodatnim pretpostavkama, kao što su, na primer, klasa linearnih modela, selekcija ulazno/izlaznih varijabli, red modela i sl. Sam postupak pribavljanja informacija o sistemu naziva se indukcija. U navedenom slučaju postavlja se prirodno i pitanje izbora kriterijuma za poređenje različitih modela u uslovima kada su merenja na procesu prisutna.

“Beli, sivi i crni” modeli

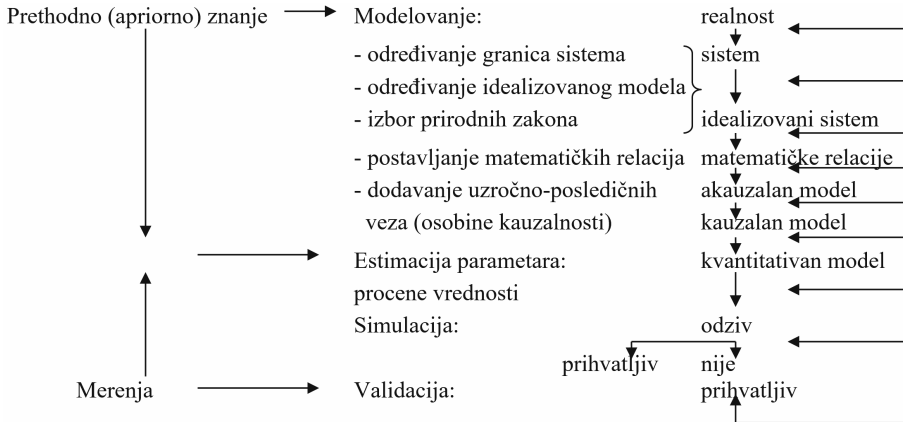
Ponekad je moguće da se model sistema izvede samo na osnovu deduktivnog pristupa, koristeći odgovarajuće fizičke zakone i procenjene vrednosti parametara, na bazi fizičkih gabarita. Takav model naziva se “beli” model ili “*white-box*” model. Primer takvih modela su električna i elektronska kola, a osnovni fizički zakoni koji se koriste prilikom modeliranja su Kirhofovi zakoni.

U nekim slučajevima ne postoji adekvatno apriorno znanje o realnom procesu, te model mora da se postavi na osnovu raspoložive merne informacije o ulazu i izlazu sistema, ne posedujući adekvatnu informaciju o internoj strukturi i internim relacijama u sistemu. Tako izveden model naziva se “crni model” ili “*black-box*” model. Između ova dva granična slučaja nalazi se model u formi sive kutije ili “*gray-box*” model, koji je u sebe uključio svu moguću raspoloživu apriornu informaciju o realnom procesu. Ovakva informacija zavisi uglavnom od polja primene modela i obično je veća u slučaju naučno-tehničkih procesa, nego u slučaju društvenih procesa.



Slika 1.2: Tipovi modela u različitim oblastima: beli (*white-box*), sivi (*gray-box*) i crni (*black-box*) modeli

U opštem slučaju, izgradnja adekvatnog kvantitativnog modela sastoji se iz nekoliko faza: modeliranja, parametarske identifikacije, simulacije i validacije modela. Koraci (faze) u izgradnji modela prikazani su na slici 1.3.



Slika 1.3: Interaktivni postupak za dobijanje adekvatnog modela sistema

U bilo kojoj fazi opisanog postupka moguće je da se vrati jedan ili više koraka unazad, ukoliko rezultat ne zadovoljava postavljene zahteve. Poslednji korak validacije modela vrši se isključivo na osnovu realnih merenja na sistemu.

Uzročno-posledične relacije (osobina kauzalnosti) Same matematičke relacije definišu međusobno uticaj nekoliko varijabli u sistemu. Na primer, Ohmov zakon definiše vezu između napona i struje na otporniku

$$\frac{u}{i} = R$$

i može se izraziti u obliku $u = Ri$, ili $i = u/R$. Obe relacije su sa matematičkog i fizičkog stanovišta iste, ali se razlikuju sa stanovišta uzroka i posledice, odnosno selekcije ulazne i izlazne varijable. Prva relacija tvrdi da će struja i (ulaz) prouzrokovati na krajevima otpornika napon u (izlaz), dok druga relacija tvrdi da će napon u (ulaz) rezultovati u struji i (izlaz) kroz otpornik. Selekcija ulazno-izlaznih varijabli naziva se postupkom uvođenja kauzalnosti (uzročno-posledičnih veza) u model. Kauzalnost nije fizički pojam i uvedena je veštačkim putem da bi se omogućila odgovarajuća istraživanja i izveo postupak simulacije. Gotovo svi simulacioni paketi rade sa kauzalnim modelima. Kauzalni modeli koriste obične diferencijalne jednačine (*eng. ordinary differential equations*, ili skraćeno ODE) kao matematičke relacije, dok akauzalni modeli, koji iskazuju samo relacije između varijabli bez uvođenja uzročno-posledičnih veza (odnosno proglašavanje ulazno-izlaznih promenljivih) koriste diferencijalno-algebarske jednačine (*eng. Differential Algebraic Equations*). Neki noviji simulacioni programi koriste akauzalne modele.

Grafička reprezentacija modela Ovakav pristup koristi se u cilju vizuelizacije veza koje postoje između varijabli u modelu. Postoji više ovakvih prikaza, od kojih su neki zavisni od samog realnog

procesa i njegovih komponenti, dok su drugi opšti i imaju univerzalnu primenu. Navedeni pristupi, polazeći od posebnog ka univerzalnom, prikazani su na dijagramu 1.4.

- Crteži (autorova impresija o sistemu)
- Kola (vezana su za specifičnu primenu i zahtevaju standardni prikaz komponenti sistema)
- Dijagrami: imaju opšti karakter i mogu biti dvojadi:
 1. Konsekutivni (sa redosledom izvođenja; primer su dijagram toka ili flow chart u programiranju ili PERT plan u organizacionim naukama)
 2. Simultani (sa jednovremenim izvođenjem) koji mogu biti:
 - (a) kauzalni (primer su blok dijagrami i bond grafovi)
 - (b) akauzalni (primer su bond grafovi)

Slika 1.4: Grafičke reprezentacije modela sistema

Dijagrami nisu vezani za specifičnu aplikaciju i predstavljaju prilično apstraktan način prikazivanja dinamike sistema. Za prikaz tehničkih sistema koriste se simultani dijagrami i to obično blok dijagrami. Kod blok dijagrama jednovremeno se uvode relacije između varijabli i definišu uzročno-posledične veze između njih (osobine kauzalnosti). Za razliku od blok dijagrama, bond graf dozvoljava dvokoračnu proceduru, gde se u prvom koraku definišu samo veze između varijabli, pa se tek u drugom koraku naknadno uvode uzročno-posledične veze između varijabli.

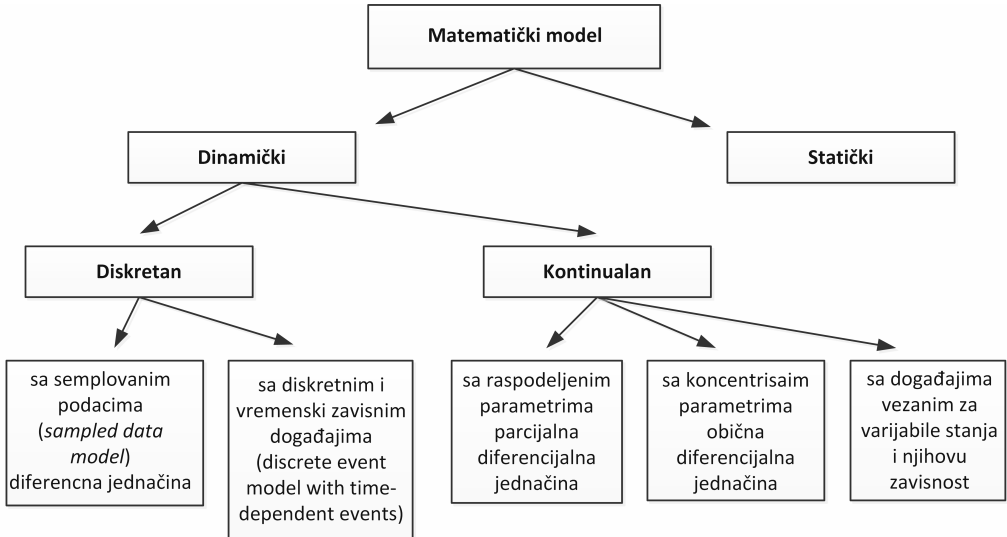
Matematički modeli

Generalno se razlikuju tri različita tipa modela koji se mogu koristiti za opisivanje dinamičkog ponašanja realnog procesa:

1. **Skalirani (proporcionalno umanjeni) model:** predstavlja proporcionalno umanjenu fizičku maketu realnog procesa, koja se koristi za ekonomično ispitivanje osobina realnog procesa (cena eksperimentisanja na ovakvom modelu je značajno niža nego na realnom procesu). Ovakav model se koristi kada ne postoji dovoljno tačan matematički model ili ukoliko izračunavanja u okviru postavljenog matematičkog modela traju neprihvatljivo dugo. Primeri ovakvog modela su aerodinamički tuneli, rezervoari za ispitivanje vodenih tokova i sl.
2. **Matematički model:** dinamičko ponašanje sistema je u opštem slučaju opisano skupom nelinearnih diferencijalnih jednačina, o čemu će kasnije biti više reči i oni su dominantni u tehnici.
3. **Opisni (verbalni) modeli:** koriste se kada su relacije koje opisuju ponašanje sistema suviše kompleksne ili nedovoljno poznate da bi se prikazale u matematičkom obliku, i ako postoji izvesno znanje o kvalitativnim vezama između tih varijabli. Ovakvi modeli se obično koriste u sociologiji i psihologiji.

Matematički modeli mogu se dalje podeliti u sledeće kategorije:

- statički
- dinamički, koji mogu biti kontinualni i diskretni. Moguća klasifikacija (tipovi) matematičkih modela prikazani su na slici 1.5.

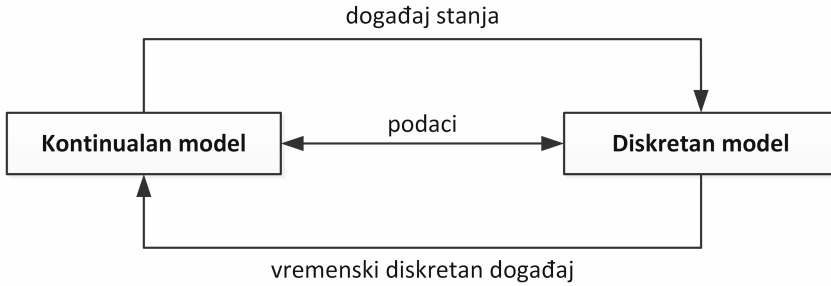


Slika 1.5: Tipovi matematičkih modela

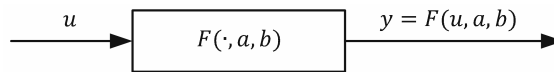
Različiti tipovi matematičkog modela mogu da se kombinuju u okviru složenog modela realnog procesa, kao što je prikazano na slici 1.6

Događaj stanja je događaj vezan za kontinualni model i nastaje kada kontinualna varijabla stanja pređe neki prag (na primer, kada struja i prođe kroz nulu ili kada pozicija x dostigne graničnu vrednost). Detekcija događaja stanja može aktivirati neki prekidač u kontinualnom modelu ili startovati (trigerovati) neki vremenski mehanizam (brojač) u diskretnom modelu.

Vremenski događaj se generiše na osnovu vremenskog procesa unutar modela sa diskretnim događajima, a može aktivirati prekidač ili proizvesti neku drugu aktivnost unutar kontinualnog modela.



Slika 1.6: Primer složenog modela u kome postoji interkonekcija između kontinualnog i diskretnog modela



Slika 1.7: Statički modeli

Statički matematički modeli opisuju nelinearnu algebarsku zavisnost između ulazne i izlazne varijable, kao što je prikazano na slici 1.7 za skalarne varijable.

Ovakav model je linearan ukoliko postoji linearna zavisnost između ulaza u i izlaza y . Medjutim, linearnost se može definisati i u odnosu na parametre (a, b) koji opisuju funkciju $F(\cdot)$ između ulaza i izlaza. Mogući tipovi statičkih modela prikazani su sledećom tabelom

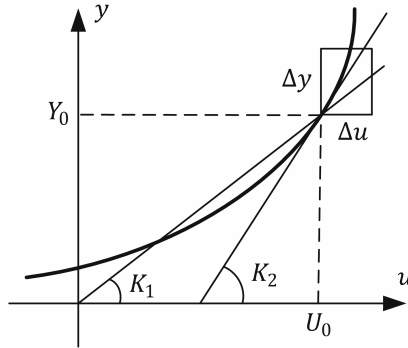
$y = F(u)$	$y = F(a, b)$	Primer
linearan	linearan	$y = (a + b)u$
nelinearan	linearan	$y = au + bu^3$
linearan	nelinearan	$y = au/b$
nelinearan	nelinearan	$y = au/(bu + 1)$

Tabela 1.1: Tipovi statičkih modela

Kao što je prikazano, ovakav model može biti linearan ili nelinearan i u odnosu na ulaz i u odnosu na parametre, respektivno.

Realni procesi su generalno nelinearni, tako da adekvatan model procesa obično sadrži nelinearnosti. Sa druge strane, matematički aparat je dobro razrađen za linearne modele. Ovaj problem se može praktično rešiti uvođenjem pojma radne tačke. Naime, nelinearan model se u okolini izabrane radne tačke može linearizovati, čime se dobija linearizovani model koji se dalje može koristiti za analizu i projektovanje primenom teorije linearnih matematičkih sistema. Naravno, tako dobijeni rezultati će važiti samo u okolini razmatrane radne tačke, a svaka radna tačka imaće svoj linearizovani model, tako da se sa promenom radne tačke prelazi na njoj odgovarajući linearizovani

model. Postupak linearizacije ilustrovan je na slici 1.8



Slika 1.8: Postupak linearizacije nelinearne funkcije $y = F(u)$

Neka (U_0, Y_0) definiše izabranu radnu tačku. Ako sa Δu i Δy označimo varijacije signala u i y oko radne tačke, tj.

$$u = U_0 + \Delta u \quad y = Y_0 + \Delta y$$

Sada se mogu definisati pojačanja

$$K_1 = \frac{Y_0}{U_0} \quad K_2 = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

pri čemu u ravnotežnom stanju, kada se sistem nalazi u radnoj tački, važi pojačanje K_1 , tj.

$$Y_0 = K_1 U_0$$

dok u bliskoj okolini oko radne tačke važi linearizovano pojačanje K_2 , koje opisuje linearizovani model, tj.

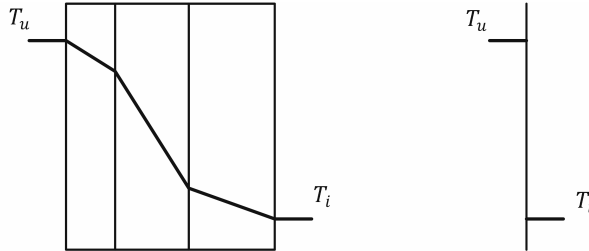
$$\Delta y = K_2 \Delta u$$

Dakle, linearizovani model predstavlja model sistema za male signale (predstavljaju odstupanja od radne tačke) i može se koristiti za lokalnu analizu stabilnosti sistema oko date radne tačke. Za odgovarajuće proračune u ravnotežnom (ustaljenom ili stacionarnom) stanju koristiće se statičko pojačanje K_1 . Prilikom sprovođenja analize za male signale, Δu i Δy , može se pretpostaviti da varijable U_0 i Y_0 imaju nultu vrednost (odgovora translaciji koordinatnog sistema u tačku (U_0, Y_0)).

Kontinualni modeli sa distribuiranim parametrima

Fizički sistemi su kontinualni i opisuju se sa kontinualnim modelima sa distribuiranim ili koncentrisanim parametrima. Model sa distribuiranim parametrima prikazan je u formi parcijalne

diferencijalne jednačine. Kod takvih modela i prostorne koordinate (pozicija) x i vreme t predstavljaju nezavisne promenljive u modelu. Primer takvog sistema je transfer toplote kroz zid. Ovakav termički proces može se opisati izračunavanjem temperaturnog gradijenta za sve različite materijale unutar zida, kako je prikazano na slici 1.9.



Slika 1.9: Konverzija sa sistema sa raspedeljenim parametrima na sistem sa koncentrisanim parametrima

Na primer, za $F(x, t) = 0$, odgovarajuća parcijalna diferencijalna jednačina je $F_x(x, t) \dot{x} + F_t(x, t) = 0$, odakle sledi

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a \frac{\partial F}{\partial x}$$

Ako se zavisnost od pozicije x zanemari (model sa koncentrisanim parametrima, pošto su sve aktivnosti svedene samo na jednu poziciju), navedena parcijalna diferencijalna jednačina svodi se na običnu diferencijalnu jednačinu. Ovakva aproksimacija odgovara koncentrisanju različitih materijala u zidu u jedan homogen materijal sa idealnim karakteristikama (koncentrisana masa koja nema debljinu i predstavlja homogenu površinu). Umesto jedne pozicije x , može se definisati i veći broj pozicija x_k , pri čemu se za svako x_k dobija model sa koncentrisanim parametrima (opisan običnom diferencijalnom jednačinom) koji ne zavisi od pozicije. Ovakav postupak selekcije konačnog broja ćelija ili podmodela naziva se *Metod konačnih elemenata* (eng. *Finite Element Method* ili skraćeno FEM). Svaka ćelija ima svoj sopstveni skup varijabli i običnih diferencijalnih jednačina, tako da dimenzija modela raste linearno sa brojem ćelija. Veći broj ćelija rezultuje u tačniji model, ali je vreme izvršavanja ovakvog modela značajno veće. Međutim, ovakvo uprošćenje je značajno, pošto je numeričko rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina kompleksno i vremenski zahtevno.

Model sa koncentrisanim parametrima

Ovakav model opisan je sa običnim diferencijalnim jednačinama (ODE). Obična diferencijalna jednačina je formulisana kao eksplicitna diferencijalna jednačina, kod koje je svaki izvod definisan sa desnom stranom jednačine, tj.

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t), u(t)) \quad \text{ODE model}$$

Dakle, vrednost $dx(t)$ može se za svako t izračunati eksplicitno. Sa druge strane, diferencijalno-algebarska jednačina (DAE) je formulisana kao implicitna diferencijalna jednačina

$$F_1(\dot{x}(t), x(t), u(t)) = 0 \quad \text{DAE model}$$

ili kao singularna diferencijalna jednačina

$$E \frac{dx}{dt} = F_2(x(t), u(t))$$

gde je E singularna matrica (inverzija E^{-1} ne postoji) tako da se poslednja relacija ne može napisati u formi ODE. Takođe, prisustvo algebarske jednačine između varijabli za koje su definisani eksplicitno izvodi čini takvu jednačinu implicitnom ili DAE modelom. Na primer,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x(t), y(t), t) \\ G(x(t), y(t), t) &= 0 \end{aligned}$$

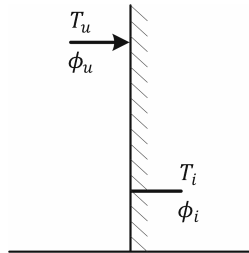
je DAE, pošto dy/dt nije definisano eksplicitno. Diferenciranjem algebarske jednačine dobija se

$$G_x(x(t), y(t), t) \frac{dx}{dt} + G_y(x(t), y(t), t) \frac{dy}{dt} + G_t(x(t), y(t), t) = 0$$

pa ukoliko $G_y(\cdot)$ nije singularna matrica može se izvod dy/dt izraziti eksplicitno i data jednačina se svodi na ODE, a za odgovarajući DAE se kaže da ima indeks 1. Ako je $G_y(\cdot)$ singularna matrica, DAE jednačine treba da se preurede i odgovarajuća algebarska jednačina ponovo diferencira. Broj primenjenih diferenciranja definiše indeks DAE.

Za razliku od ODE (predstavlja DAE sa indeksom 0), koje se relativno lako rešavaju numerički, DAE jednačine unose dodatne numeričke probleme.

Primer Transfer toplote kroz zid



Slika 1.10: Proces transfera toplote kroz zid

Ovaj fizički proces može se idealizovano opisati na osnovu zakona o održanju energije. Ako sa ϕ_u i ϕ_i označimo energetske fluks na ulaznoj i izlaznoj strani zida, tada je gradijent energije

$$\frac{dQ}{dt} = \phi_u - \phi_i$$

Sa druge strane, energija Q i temperatura T_u vezane su linearnom vezom

$$Q = CT_u$$

gde je C energetska kapacitet ambijenta, odakle se diferenciranjem dobija

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dT_u}{dt} = \phi_u - \phi_i$$

Pošto je, takođe, ϕ_i srazmerno sa temperaturnom razlikom u zidu, tj.

$$\phi_i = k(T_u - T_i)$$

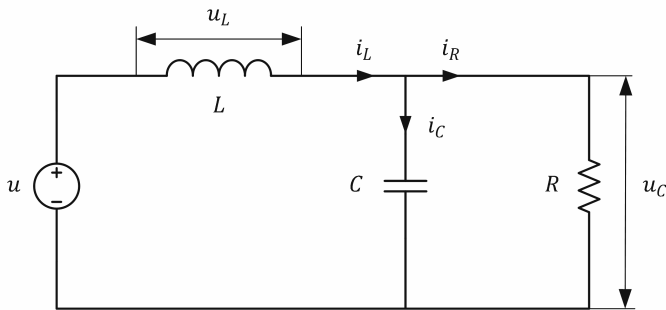
gde je k energetska provodnost zida, dalje se dobija

$$\frac{dT_u}{dt} = \frac{1}{C} [\phi_u - kT_u + kT_i]$$

što predstavlja linearnu diferencijalnu jednačinu po varijabli T_u .

Primer Električno kolo

Model se izvodi deduktivnom metodom, ukoliko su poznate komponente kola. Odgovarajući fizički zakoni koji opisuju funkcionisanje kola su Kirhofovi zakoni i oni zajedno sa numeričkim vrednostima parametara definišu “white-box” model. Dijagram električnog kola definiše granice realnog sistema. Komponente povezane provodnicima definišu granice (oblik) sistema, koji je idealizovan pošto su paraziti efekti u komponentama i provodnicima zanemareni.



Slika 1.11: Električno kolo

Kirhofovi zakoni rezultuju u sledeće matematičke izraze:

$$u = u_L + u_R$$

$$i_L = i_R + i_C$$

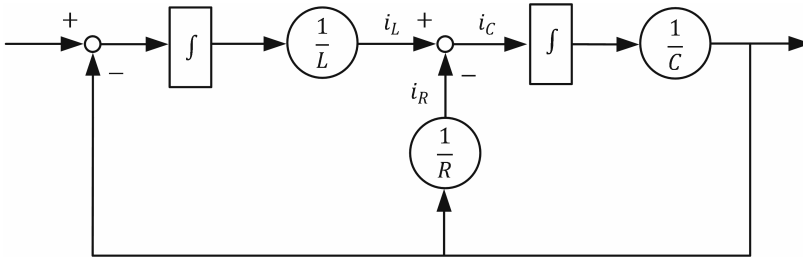
$$i_R = \frac{u_c}{R}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$$

$$i_c + C \frac{du_c}{dt} \Rightarrow u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau$$

Za zadato u_i parametre kola R , L i C potrebno je na osnovu zadatih pet jednačina izračunati pet varijabli u_L , u_c , i_L , i_c i i_R , pretpostavljajući da su vrednosti varijabli i_L i u_c u početnom trenutku $t = 0$ poznate (predstavljaju početne uslove u sistemu).

Ukoliko se umesto diferencijatora koriste integratori i uvede kauzalnost dobijeni model se može prikazati u vidu blok dijagrama, prikazanog na slici 1.12 (model je pogodniji za simulaciju ako koristi integratore).



Slika 1.12: Blok dijagram zadatog kola

Prilikom uvođenja uzročno posledične veze naponi komponenti su proglašeni za ulazne varijable a odgovarajuće struje za izlazne varijable.

Ako se struje kroz kalemове i naponi na kondenzatorima usvoje za varijable stanja, tj. $x_1 = i_L$ i $x_2 = u_c$, tada se navedeni sistem jednačina može napisati u formi jednačina stanja

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{L} u_L = \frac{1}{L} (u - x_2) = -\frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{C} i_c = \frac{1}{C} (i_L - i_R) = \frac{1}{C} \left(x_1 - \frac{x_2}{R} \right) = \frac{1}{C} x_1 - \frac{R}{C} x_2$$

koje se mogu napisati u vektorskoj formi

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

odnosno

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad x(0)$$

Konačno, ako se sa uobeleži ulaz sistema a sa u_c njegov izlaz, tada je

$$y = u_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Cx$$

a funkcija prenosa sistema

$$G(x) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{R}{RLCs^2 + Ls + R}$$

Ovakav model dobijen je čisto deduktivnim putem, bez korišćenja merenja na sistemu.

Modeli sa događajima stanja

Modeli sa događajima stanja su kontinualni modeli koji mogu generisati neku diskretnu akciju u trenutku kada neka kontinualna varijabla stanja pređe neki definisani prag.

Na primer, ako se u sistemu za grejanje kao grejno telo (izvršni organ) koristi gasni ventil koji ima samo dva položaja (otvoreno i zatvoreno; takva regulacija se naziva *on-off* regulacija) i ako se ventil uključuje kada sobna temperatura padne ispod nekog nivoa, a isključuje kada sobna temperatura pređe neki drugi prag, takva *on-off* regulacija je u potpunosti određena sa vrednošću sobne temperature koja se meri termostatom. Trenutak uključjenja gasnog ventila (njegovog prelaska iz jednog u drugo stanje) nije sinhronisan ni sa jednim drugim procesom.

Drugi primer su energetske konvertori, koji konvertuju veliku količinu energije iz nekog izvora, sa minimalnim gubicima, na električni motor. Mali gubici se postižu korišćenjem prekidačkih kola (elektronskih prekidača), kao što su tiristori i tranzistori snage. Ove poluprovodničke komponente se mogu kontrolisati i računar (mikroprocesor) može izračunati u kojim vremenskim trenucima tiristor treba da se aktivira (upali). Ove tačke u vremenu zavise od vrednosti odgovarajućih napona i struja i tiristor se gasi (zakoči) kada struja ili napon padnu ispod određene vrednosti. Položaj ovih tačaka na vremenskoj osi zavisi od stvarnih vrednosti signala u modelu.

Sa druge strane, diferencijalne jednačine sa konstantnim parametrima, koje opisuju kontinualni model sa koncentrisanim parametrima, obično se rešavaju numerički i rešenje se dobija u određenom broju ekvidistantnih diskretnih vremenskih trenutaka, čije se rastojanje naziva integracioni interval. Problem može nastati ukoliko se prekidački trenuci u modelu ne poklapaju sa trenucima u kojima se vrši numerička integracija. Ukoliko je period prekidanja u modelu znatno veći od integracionog intervala, učiniće se male greške ukoliko se trenuci aktiviranja prekidačke logike izjednače sa odgovarajućim trenucima integracije, odnosno ukoliko se trenuci prekidanja podese prema trenucima numeričke integracije. Ukoliko to nije slučaj, neophodno je da se trenuci integracije podese prema trenucima aktiviranja prekidačke logike. Prvi tip simulacije vrši se automatski, ali postojeći simulacioni paketi ne vode računa o drugom tipu sinhronizacije i potrebno je učiniti dodatan napor kako bi se ove sinhronizacije obezbedile.

Primer Kontrola nivoa x [m] tečnosti u rezervoaru čija je površina A [m²].

Ako je ϕ_i [m³/s] protok tečnosti iz rezervoara, a ϕ_u [m³/s] dotok tečnosti u rezervoar, tada se veličina ϕ_u može kontrolisati jednostavnom *on-off* akcijom. Ako nivo tečnosti x [m] postane veći od nekog praga x_{\max} dotok tečnosti u rezervoar će se zaustaviti zatvaranjem ventila. Nakon 3 s nastaviće se dotok tečnosti sa maksimalnim fluksom ϕ_{\max} , što je postignuto otvaranjem ventila. Ovakav model je opisan diferencijalnom jednačinom

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\phi_u(t) - \phi_i(t)}{A}$$

$\phi_u(t) = V\phi_{\max}$; parametar $V = 0$ ako je ventila zatvoren i $V = 1$ kada je ventil otvoren, dopunjenom sa događajem varijable stanja x , koja se sastoji u detekciji vrednosti $x = x_{\max}$ i diskretnim događanjem koji uzima u obzir trenutak zatvaranja ventila i njegovog otvaranja nakon 3 s. Znači, kontinualni model je dopunjen sa dva procesa:

- Proces 1: događaj stanja koji detektuje $x = x_{\max}$ i zatvara ventil
- Proces 2: diskretan događaj, aktiviran procesom 1, a koji dalje aktivira vremenski proces koji traje 3 s, nakon čega otvara ventil.

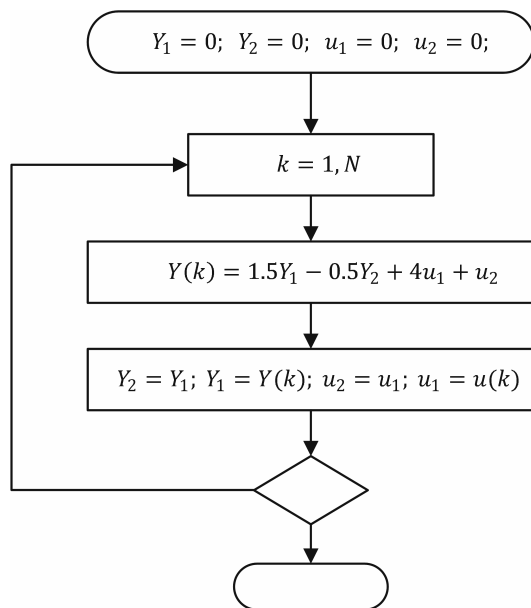
Modeli diskretnih događaja : nemaju fiksni period ponavljanja, tj. imaju aperiodično odabiranje, a sve varijable zadržavaju svoje vrednosti između dva događaja. U trenutku pojave diskretnog događaja varijable mogu menjati svoje vrednosti. Događaj može biti prouzrokovan nekim spoljašnjim događajem, na primer događajem stanja, ili izazvan na osnovu neke vremenske tabele, koja se javlja kao rezultat internih aktivnosti. Primeri ovakvih modela su redovi čekanja (poruke na serveru, vozila na rampi, ljudi na šalterima, itd.). U ovakvim modelima varijable predstavljaju vremenske procese, kao što je na primer trenutak dospeća u red, a stanje varijable označava vremenski trenutak u kome varijabla postaje aktivna, a ne predstavlja fizičku veličinu, što je slučaj kod događaja stanja.

Modeli sa semplovanim podacima : primenjuju se kada se računar koristi kao sredstvo za kontrolu procesa. Računar odabira (sempluje) podatke upotrebom A/D konvertora, a kontroliše proces na bazi upotrebe D/A konvertora. Semplovanje podataka se vrši sa fiksnom periodom odabiranja (semplovanja).

Ovakav tip modela opisan je diferencnom jednačinom, koja se lako rešava upotrebom odgovarajućeg programskog jezika i računara. Na primer, dijagram toka programa za rešavanje diferencne jednačine

$$y(k) - 1.5y(k-1) + 0.5y(k-2) = 4u(k-1) + u(k-2)$$

dat je na slici 1.13:



Slika 1.13: Dijagram toka programa kojim se rešava zadata diferencna jednačina

Black-box reprezentacije modela sistema

Kao što je navedeno u prethodnom poglavlju, jedan mogući pristup modelovanju sistema za-
sniva se na poznavanju fizike samog procesa (sistema) koji se modeluje. Naime, polazeći od fizičkih
zakona (*Newton*-ovi zakoni, *Kirchhoff*-ovi zakoni, zakoni o održanju energije, mase, momenta itd.)
i pretpostavke da su komponente sistema idealne dolazi se do modela sistema, kojim je opisano
ponašanje sistema. Ovakav pristup zahteva potpuno poznavanje fizičkog procesa i stoga se ovako
izvedeni model naziva u žargonu “white-box” model (ili reprezentacija modela u vidu “bele kutije”).

Iako je ovakav pristup prirodan, postoje izvesne situacije gde njegova primena nije moguća:

1. Proces je suviše kompleksan da bi mogao da se opiše idealizovanim fizičkim zakonima ili
se ne raspoláže sa adekvatnim znanjem o fizici procesa. U takvoj situaciji može se usvojiti
opšta struktura modela u kojoj su nepoznate numeričke vrednosti odgovarajućih parametara
(kaže se da je model poznat sa tačnošću do nepoznatih vrednosti parametara u modelu),
te se ove vrednosti moraju naknadno proceniti (estimirati) na osnovu raspoloživih merenja
ulazno-izlaznih varijabli procesa, uz korišćenje pogodne estimacione procedure (algoritma).
Ovako dobijeni model naziva se “black-box” model, s obzirom da apriorno znanje o fizici
procesa nije uključeno u postupak modeliranja.
2. Moguće je koristiti izvesne idealizovane fizičke zakone da bi se opisalo ponašanje procesa,
ali su pri tome numeričke vrednosti odgovarajućih fizičkih parametara i dalje nepoznate (na
primer, nisu poznate inercija ili koeficijent trenja u mehaničkom sistemu ili kapacitivnost
u električnom sistemu). U ovakvoj situaciji poznat je fizički model procesa ali sa tačnošću
do nepoznatih numeričkih vrednosti odgovarajućih fizičkih parametara, koje se moraju pro-
računati na neki drugi način. Ovako dobijeni model predstavlja kombinaciju “white-box”

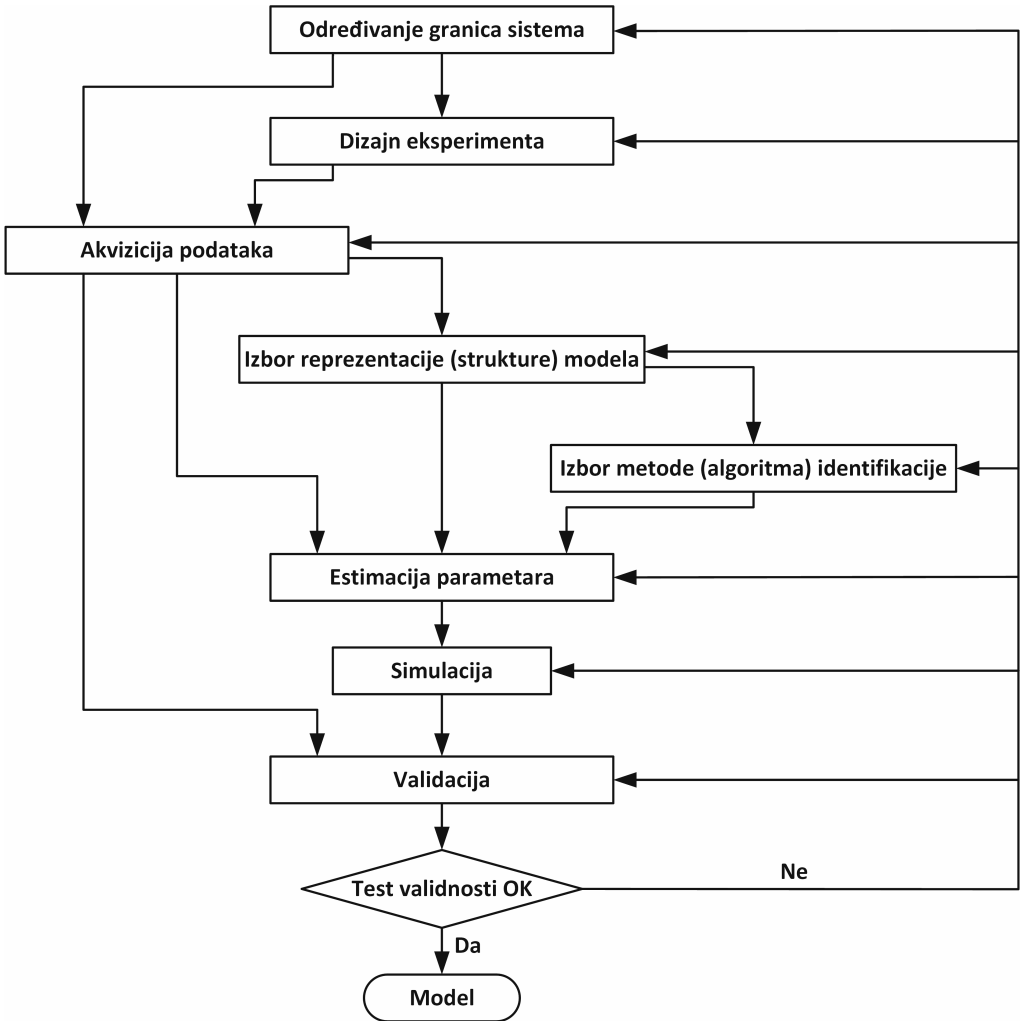
modeliranja sa postupkom estimacije parametara, te se naziva “gray-box” model. U opštem slučaju, bilo kakva kombinacija “black-box” modeliranja sa apriornim znanjem o fizici procesa naziva se “gray-box” modeliranje.

U ovom poglavlju biće razmatrano “black-box” modeliranje. Kod ovakvog pristupa ne postoji raspoloživa apriorna informacija o fizici procesa (ne postoje ili nisu poznati idealizovani fizički zakoni koji se mogu uključiti u postupak modeliranja sistema), te se izgradnja modela mora bazirati na raspoloživim merenjima ulaza i izlaza procesa (sistema).

Postupak “black-box” modeliranja sastoji se iz više koraka (aktivnosti), koji su prikazani na slici 2.1.

- Kao što je navedeno u prethodnom poglavlju, prvi korak u postupku “black-box” modeliranja predstavlja određivanje granica kojima je definisan sistem, kao izolovani i idealizovani deo nekog realnog (fizičkog) procesa. Granice sistema određuju koje će se osobine realnog procesa uzeti u obzir prilikom definisanja sistema, kao i koje će osobine realnog procesa biti zanemarene i pridružene okolini sistema.
- Drugi korak je planiranje i dizajn eksperimenta, u kome se donosi odluka koji će signali da se mere i sa kojom učestanošću odabiranja, ukoliko se merenja vrše u diskretnim trenucima vremena, kao i u kome se vrši selekcija ulaznih (pobudnih) signala.
- Treći korak je akvizicija podataka, koji se sastoji u prikupljanju mernih podataka o ulazu i izlazu sistema, koji su neophodni za proceduru identifikacije (estimacije nepoznatih parametara u usvojenoj strukturi modela).
- Četvrti korak je izbor reprezentacije ili struktura modela sistema. Mogu se koristiti različite reprezentacije (strukture) modela sistema, a izbor odgovarajuće strukture zavisi od namene modela. U ovom poglavlju će biti prikazane neke od mogućih struktura “black-box” modela sistema.
- Peti korak je simulacija, koja ima za cilj da se izvrši analiza ponašanja sistema u različitim uslovima rada (predstavlja neki vid validacije modela u odnosu na test podatke).
- Šesti korak je validacija, koja ima za cilj da odgovori da li model dovoljno tačno opisuje ponašanje realnog procesa, sa aspekta namene modela.

Najčešće korišćena reprezentacija (struktura) “black-box” modela je tzv. linearan vremenski-invarijantan diskretan model (sistem). Ovakvi modeli su tipični za ekonomiju i računarske nauke, ali se primenjuju i u elektrotehnici, a nastaju kao rezultat diskretizacije (semplovanja) odgovarajućih linearnih vremenski-invarijantnih kontinualnih modela. Pošto se u postupku modeliranja ne koristi apriorno znanje o fizičkim osobinama procesa, kod ovakvih “black-box” modela ne postoji direktna veza između parametara u modelu i fizičkih osobina samog procesa koji se modeluje. Inače, reprezentacija sistema u vidu diskretnog sistema predstavlja parametarski model u vremenskom području. U opštem slučaju reprezentacija modela sistema može biti parametarska (sa konačnim brojem parametara) ili neparametarska (sa beskonačnim brojem parametara), dok sam model može biti prikazan u vremenskom, frekvencijskom i kompleksnom domenu.



Slika 2.1: Koraci (aktivnosti) u “black-box” modeliranju

2.1 Diskretni signali i sistemi

Diskretni sistemi obrađuju i prenose vremenski-diskretne signale. Pod signalom se podrazu-
meva sredstvo (medij) kojim se prenosi neka informacija, kao skup činjenica o nekoj realnoj (fi-

zičkoj) pojavi (na primer, napon, struja, elektromagnetski talas, itd.). Signali mogu biti diskretni i kontinualni, a svaki od njih može biti deterministički ili stohastički.

Diskretna signal je skup realnih brojeva, tzv. odbiraka, na primer $\{u(k), k = 1, 2, \dots, N\}$, koji mogu nastati smplovanjem vremenski kontinualnog signala $u(t)$, u ekvidistantnim trenucima odabiranja $t_k = kT_s$, gde je k celobrojna promenljiva (indeks diskretnog trenutka), a T_s je perioda odabiranja (smplovanja). Ovakav signal je deterministički ukoliko je vrednost odbirka u potpunosti poznata, na osnovu nekog matematičkog izraza ili tabelarnog prikaza. Dakle, buduće vrednosti determinističkog signala mogu se predvideti na osnovu poznavanja njegovih karakteristika i prethodnih vrednosti. Sa druge strane, egzaktne vrednosti stohastičkog signala se ne može predvideti, već se ta vrednost može bliže opisati na osnovu statističkih pokazatelja, kao što su na primer srednja (očekivana) vrednost i varijansa. Pored navedenog, signali mogu biti merljivi i nemerljivi, a diskretna signal se meri samo u ekvidistantnim diskretnim trenucima vremena $t_k = kT_s$, gde je T_s perioda smplovanja (diskretizacije, odabiranja ili uzorkovanja). Na taj način, kontinualni signal $u(t)$, gde je nezavisno promenljiva t realna promenljiva ($t \in R$) koja predstavlja vreme, a realna matematička funkcija $u(t)$ predstavlja signal, reprezentovan je skupom (sekvencom) odbiraka $\{u(kT_s), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, odnosno $k \in Z$ gde je Z skup celih brojeva. Uobičajeno je da se zbog jednostavnosti pisanja usvoji $T_s = 1$, pa tada diskretna niz $\{u(k), k \in Z\}$ označava diskretna signal.

Perioda odabiranja (smplovanja) T_s je povezana sa osnovnom (kružnom) učestanošću odabiranja ω_s relacijom

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

ili ukoliko se usvoji $T_s = 1$ (normalizovana perioda odabiranja) osnovna (kružna) učestanost odabiranja je

$$\omega_s = 2\pi$$

Takođe, za prostoperiodičan diskretna signal učestanosti ω_0

$$u(k) = \cos(\omega_0 k), \quad \forall k \in Z$$

biće ispunjeno za bilo koje celobrojno $n \in Z$

$$\cos((\omega_0 + n\omega_s)k) = \cos(\omega_0 k + nk\omega_s) = \cos(\omega_0 k + 2\pi nk) = \cos(\omega_0 k)$$

Dakle, jedino kružne učestanosti iz osnovnog opsega $(-\frac{1}{2}\omega_s, \frac{1}{2}\omega_s)$ mogu da se razlikuju, dok se učestanosti izvan ovog opsega mogu preslikati nazad u taj opseg i ovaj efekat se u anglosaksonskoj literaturi naziva "aliasing". Da bi se izbegao aliasing efekat, učestanost odabiranja mora da zadovolji uslov (*Shannon-ova teorema*)

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max}$$

gde je ω_{\max} maksimalna kružna frekvencija u frekvencijskoj karakteristici (liku ili spektru) signala.

Ukoliko se koristi konačan broj učestanosti $N \in Z$ u frekvencijskoj karakteristici signala,

$$\omega_r = \frac{2\pi r}{NT_s} = \frac{\omega_s r}{N}, \quad r \in \left\{ -\frac{N}{2}, \frac{N}{2} \right\}$$

tada i kružna učestanost ω nije kontinualna, već diskretna varijabla ω_r . Sa porastom broja od-biraka učestanosti N ($N \rightarrow \infty$), kružna učestanost ω_r postaje kontinualna promenljiva u opsegu, koji se naziva i *Nyquist*-ovo područje.

U zaključku se može istaći da se vrednosti signala mere u diskretnim trenucima $t_k = kT_s$, pri čemu učestanost odabiranja T_s mora da zadovolji *Shanono*-vu teoremu kako ne bi došlo do preklapanja frekvencijskih komponenti iz viših opsega sa frekvencijskim komponentama iz osnovnog (*Nyquist*-ovog) područja, tzv. aliasing efekat. Sve diskretne učestanosti ω_r u signalu, koje se koriste za analizu, leže u normalizovanom *Nyquist*-ovom opsegu $(-\pi, +\pi)$ i nalaze se na ekvidistantnom rastojanju $\frac{\omega_s}{N} = \frac{2\pi}{T_s N}$.

2.1.1 Impulsni odziv i funkcija prenosa linearnog diskretnog vremenski invarijantnog sistema

Pod sistemom se podrazumeva skup relacija između promenljivih i signala, koji predstavlja pogodnu idealizaciju realnog fenomena (realna pojava se još naziva i proces ili postrojenje, a odgovarajući termin na engleskom jeziku je "process" ili "plant"). Prilikom izrade modela procesa neophodno je da se uvedu dodatne pretpostavke o procesu, kao što su granice procesa (odnose se na karakteristike procesa koje su uključene u sistem) i izbor ulazno-izlaznih varijabli i poremećaja.

Sistem je **diskretan** ukoliko su ulazno-izlazne promenljive sistema diskretni signali. Diskretan sistem transformiše (preslikava) ulazni diskretan niz brojeva u izlazni diskretan niz brojeva.

Sistem je **linearan** ukoliko linearna kombinacija diskretnih ulaznih signala generiše odziv (izlaz) koji predstavlja linearnu kombinaciju izlaza koji se dobijaju za pojedinačne ulaze. Dakle, ako diskretan ulaz $\{u_1(k)\}$ generiše na izlazu sistema diskretan odziv $\{y_1(k)\}$, a diskretan ulaz $\{u_2(k)\}$ ima za posledicu izlaz sistema $\{y_2(k)\}$, tada ulaz $u(k) = c_1 u_1(k) + c_2 u_2(k)$, gde su c_1 i c_2 realne konstante, generiše kao izlazni signal diskretnog sistema $y(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)$.

Sistem je **vremenski-invarijantan** ukoliko se njegove osobine ne menjaju sa vremenom. Dakle, ako diskretan ulaz $\{u_1(k)\}$ generiše kao izlaz sistema diskretan signal $\{y_1(k)\}$, tada će pomereni ulaz $\{u(k)\} = \{u_1(k - k_0)\}$, $\forall k, k_0 \in Z$, dati na izlazu sistema odziv $\{y(k)\} = \{y_1(k - k_0)\}$. Ova osobina naziva se i invarijantnost u odnosu na vremenski šift (pomerač).

Važna osobina sistema, pored linearnosti i vremenske-invarijantnosti, je i **kauzalnost**. Sistem je **kauzalan** (odgovarajući engleski termin je *causal* ili *proper*) ukoliko izlaz u nekom vremenskom trenutku zavisi samo od ulaza do tog trenutka vremena, uključujući i sam posmatrani vremenski trenutak, a ne i od vrednosti ulaza u budućim trenucima vremena. Ukoliko se posmatrani vremenski trenutak isključi iz ove formulacije, kaže se da je sistem striktno kauzalan (*strictly causal*).

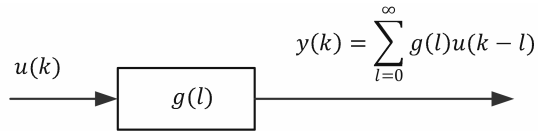
Takođe, sistemi se mogu klasifikovati kao monovarijabilni, odnosno sistemi sa jednim ulazom i jednim izlazom (označavaju se kao SISO sistemi, a skraćenica potiče od engleskog termina *single input - single output*) i multivarijabilni, odnosno sistemi sa više ulaza i izlaza (označavaju se kao MIMO, od engleskog termina *multi-input multi-output*).

Možda najpoznatije reprezentacije *white box* modela predstavljaju impulsni odziv i funkcija prenosa sistema.

Impulsni odziv predstavlja neparametarsku reprezentaciju modela u vremenskom domenu. Impulsni odziv linearnog vremenski-invarijantnog diskretnog sistema (eng. *Linear Time-Invariant Discrete-Time System* ili skraćeno LTI vremenski diskretan sistem) je beskonačna sekvenca realnih brojeva $g(k)$, $k \in Z$, pri čemu je $g(k) = 0$ za $k < 0$ za kauzalne sisteme, koja se dobija kao odziv (izlaz) sistema na jedinični diskretan impuls $\delta(k)$, koji je definisan sa $\delta(k) = 1$ za $k = 0$ i $\delta(k) = 0$ za $k \neq 0$, $k \in Z$. Tada je izlaz (odziv) $y(k)$ ovakvog modela sistema na ulazni kauzalan diskretan signal $u(k)$, $k \in Z$ i $k > 0$ ($u(k) = 0$ za $k < 0$ na osnovu osobine kauzalnosti) definisan diskretnom konvolucijom između ulaza i impulsnog odziva, tj.

$$y(k) = g(k) * u(k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) u(k-\ell) = \sum_{\ell=0}^k g(\ell) u(k-\ell)$$

Uočimo da je u konvolucionoj sumi donja granica $\ell = 0$ (osobina kauzalnosti) kao i da izlaz $y(k)$ zavisi samo od ulaza do trenutka k , uključujući i sam trenutak k ($u(k-\ell) = 0$ za $k-\ell < 0$, tj. $\ell > k$, pošto je kauzalan signal), tako da je sistem kauzalan. Za striktno kauzalan sistem donja granica u konvolucionoj sumi je $\ell = 1$, tako da će izlaz u trenutku k , $y(k)$, zavisiti samo od ulazne sekvence $\{u(k-1), u(k-2), \dots, u(0)\}$, a ne i od samog $u(k)$. Drugim rečima, kod striktno kauzalnog sistema je $g(0) = 0$. Šematski prikaz "white-box" reprezentacije modela u vidu impulsnog odziva dat je na sledećoj slici



Slika 2.2: Karakterizacija linearnog, diskretnog, vremenski-invarijantnog, kauzalnog modela sistema na osnovu impulsnog odziva

Primetimo da se navedena konvoluciona suma (2.1.1) koja definiše odziv LTI vremenski diskretnog sistema može dokazati relativno jednostavno na sledeći način. Ako sa $L(\cdot)$ označimo linearnu transformaciju koju sistem vrši nad ulaznim signalom da bi generisao odziv (izlazni) signal, tada je odziv $y(k)$ na pobudu $u(k)$ definisan sa

$$y(k) = L(u(k)), \quad \forall k \in Z.$$

Posebno, za impulsnu pobudu $u(k) = \delta(k)$ dobija se impulsni odziv

$$g(k) = L(\delta(k)), \quad \forall k \in Z.$$

Sa druge strane, proizvoljna diskretna i kauzalna pobuda $u(k)$ se predstavlja u vidu konvolucije jedinične impulsne sekvence $\delta(k)$ i same pobudne sekvence $u(k)$, tj.

$$u(k) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i) \delta(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} u(k-i) \delta(i)$$

pošto je $\delta(k-i) = 1$ za $k = i$ i $\delta(k-i) = 0$ za $k \neq i$. Tada je odziv sistema na zadatu pobudu

$$y(k) = L(u(k)) = L\left(\sum_{i=0}^{\infty} u(k)\delta(i)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} u(k-i)g(i)$$

što predstavlja traženu relaciju. Prilikom dobijanja poslednje relacije odbirci pobude $u(k-i)$ tretirani su kao poznate konstante koje se mogu izvući van linearnog operatora sistema, dok je sama linearna operacija nad impulsnom pobudom rezultovala u impulsni odziv sistema.

Ako se definiše operator prednjačenja q (eng. *forward shift operator*)

$$qu(k) = u(k+1)$$

i operator kašnjenja z^{-1} (eng. *backward shift operator*)

$$z^{-1}u(k) = u(k-1)$$

konvoluciona suma se može napisati kao

$$y(k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) [z^{-\ell}u(k)] = \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) z^{-\ell} \right] u(k)$$

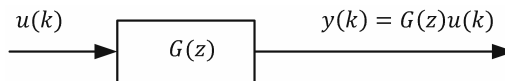
Definišući dalje funkciju prenosa sa

$$G(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) z^{-\ell}$$

konvoluciona suma se može zapisati u polinomijalnoj formi

$$y(k) = G(z)u(k)$$

Poslednja relacija (2.1.1) je šematski prikazana na slici 2.3.



Slika 2.3: Karakterizacija linearnog, diskretnog, vremenski-invarijantnog kauzalnog modela sistema na osnovu funkcije prenosa

Primetimo da se u teoriji sistema funkcija prenosa definiše kao Z -transformacija impulsnog odziva $g(\ell)$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$

$$G(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) z^{-\ell}$$

gde je z kompleksna promenljiva. Kada se radi u vremenskom domenu sa diferencnim jednačinama (diskretna konvolucija predstavlja vid diferencne jednačine) uobičajeno je da koristi operator pomeraja u vremenu q umesto kompleksne varijable z . Iako ovakva notacija može da izazove malu zabunu, ona je pogodnija za korišćenje u vremenskom domenu i znatno olakšava analizu.

Pored već navedenih osobina (linearnost, vremenska-invarijantnost i kauzalnost) važno je uvesti i pojam **stabilnosti**. Iako postoji više tipova stabilnosti, u ovom materijalu ćemo koristiti samo pojam stabilnosti **ograničen-ulaz ograničen-izlaz** (eng. *bounded-input bounded-output* ili skraćeno BIBO), koja označava da će ograničen ulazni signal generisati na izlazu sistema takođe ograničen signal. Prilikom analize stabilnosti sistema uobičajeno je da se koristi definicija funkcije prenosa u kompleksnom Z domenu i da se uvede pojam nula i polova funkcije prenosa $G(z)$. Nule sistema su vrednosti β_i kompleksne varijable z za koje je $G(\beta_i) = 0$, dok su polovi sistema vrednosti α_i kompleksne varijable z za koje je $G(\alpha_i) = \infty$ (nule i polovi nazivaju se zajedničkim imenom kritične učestanosti). Posebno, ukoliko je $G(z)$ realna racionalna funkcija, tj. količnik dva polinoma kompleksne varijable z sa fiksnim realnim parametrima, na primer $G(z) = B(z)/A(z)$, tada su koreni (rešenja) jednačine $B(z) = 0$ nule sistema, dok su koreni (rešenja) jednačine $A(z) = 0$ polovi sistema (nule polinoma u brojiocu funkcije $G(z)$ su nule sistema, dok su nule polinomi u imeniocu funkcije $G(z)$ polovi sistema).

Kada se analizira BIBO stabilnost sledeći iskazi su ekvivalentni:

1. Sistem je BIBO stabilan.

$$2. \sum_{\ell=0}^{\infty} |g(\ell)| < \infty$$

$$3. \lim_{\ell \rightarrow \infty} g(\ell) = 0 \text{ i } |g(\ell)| < \infty$$

4. $G(z)$ ima polove α_i koji svi leže unutar oblasti ograničene jediničnim krugom $|z| = 1$, odnosno $|\alpha_i| < 1$.

U engleskoj literaturi se koristi termin *monic* da označi funkciju prenosa $G(z)$ čiji je slobodan član $g(0) = 1$, odnosno *monic*-funkcija prenosa

$$G(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) z^{-\ell}, \quad g(0) = 1$$

Navedeni iskazi lako se dokazuju nalaženjem apsolutne vrednosti leve i desne strane relacije koja definiše odziv sistema kao konvolucionu sumu pobude i impulsnog odziva, tj.

$$|y(k)| = \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) u(k-\ell) \right| \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} |g(\ell)| |u(k-\ell)|$$

pa ukoliko je pobuda ograničena to je $|u(k - \ell)| \leq C_u < \infty$ gde je C_u nenegativna konačna konstanta, odakle sledi

$$|y(k)| \leq C_u \sum_{\ell=0}^{\infty} |g(\ell)|$$

pa da bi izlaz (odziv) bio konačan, odnosno

$$|y(k)| \leq C_y < \infty$$

mora biti ispunjeno

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} |g(\ell)| < \infty$$

što predstavlja iskaz broj 2. Da bi impulsni odziv predstavljao apsolutno konvergentan niz dalje mora da važi $g(\ell) \rightarrow 0$ kada $\ell \rightarrow \infty$ i $|g(\ell)| < \infty$ za $\forall \ell \in Z$, što odgovara iskazu broj 3. Sa druge strane, funkcija prenosa sistema u z -kompleksnom domenu data je sa

$$G(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) z^{-\ell}$$

i ovaj izraz će konvergirati u prstenu $R_d |z| \leq \infty$, gde je R_d poluprečnik kruga sa centrom u koordinatnom početku i koji prolazi kroz najudaljeniji pol funkcije prenosa od koordinatnog početka. Pošto je za $z = 1$ $G(\ell) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell)$ a na osnovu uslova BIBO stabilnosti $G(\ell) < \infty$, to se najudaljeniji pol mora nalaziti unutar jediničnog kruga $|z| = 1$ da bi sistem bio BIBO stabilan.

U zaključku se može navesti da impulsni odziv i funkcija prenosa predstavljaju dve neparame-tarske reprezentacije (strukture) modela sistema u vremenskom području. Ovakva reprezentacija ima beskonačno parametara, pošto impulsni odziv $\{g(\ell)\}$ ima beskonačno odbiraka, odnosno njegovo trajanje je beskonačno, pa se ovakav odziv na engleskom jeziku naziva *Infinite Impulse Response* i označava sa IIR. Obe ove reprezentacije definišu relaciju između ulaznog i izlaznog signala u vremenskom domenu. Ukoliko je ulazni signal deterministički i izlazni signal biće deterministički. Međutim, navedena reprezentacija nije mnogo realna i zahteva dodatnu nadogradnju na osnovu uvođenja signala poremećaja. Naime, kod prethodne reprezentacije ulaz je deterministički signal, koji će na izlazu sistema generisati takođe deterministički signal. Međutim, na realne sisteme po pravilu deluju i poremećaji, koji su obično stohastičke prirode i nemerljivi, tako da su van kontrole dizajnera, iako deluju na kompletan odziv (izlaz) sistema.

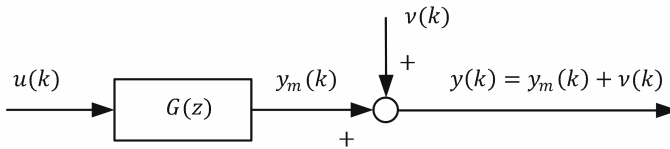
2.2 Poremećaji

Signali poremećaja su po pravilu prisutni u realnom sistemu, pri čemu tačka u kojoj deluju na sistem obično nije poznata, a karakteristike im se takođe menjaju sa vremenom i uslovima rada. Uz navedeno, ovakvi signali su obično i nemerljivi, te se tretiraju kao stohastički signali, koji se mogu svrstati u dve klase:

Šum merenja potiče od senzora (mernog uređaja) kojim se meri neki signal i koji nije idealan. Naime, svaki elektronski uređaj karakterišu temperaturno zavisni šum i drift, tako da će se u postupku akvizicije podataka uvek pojaviti slučajne greške, koje su posledica ovih fenomena.

Neupravljivi (nekontrolabilni) ulazi Na realan sistem pored kontrolnih (kontrolabilnih ili upravljivih) ulaza deluju i ulazi koji nisu kontrolabilni i predstavljaju poremećaje procesa. Na primer, pri navigaciji brodom kontrolabilni ulaz je zadati pravac krme, ali će na pravac broda uticati i vodene struje, koje su generalno nepredvidive i predstavljaju slučajne poremećaje.

Kada se poremećaji uključe u reprezentaciju modela sistema, uobičajeno je da se razmatra njihovo ekvivalentno dejstvo na sam izlaz. Tako se dejstvo svih poremećaja koji deluju na sistem svodi na jedan ekvivalentan stohastički signal $v(k)$, koji se superponira na deterministički izlaz $y_m(k)$ koji je generisan kontrolnim ulaznim signalom $u(k)$ i takav poremećaj $v(k)$ naziva se aditivni šum izlaza. Blok šema sistema sa aditivnim šumom izlaza predstavljena je na slici 2.4.



Slika 2.4: Sistem sa poremećajem svedenim na izlaz

Ovakav model je u mnogim situacijama realan, s obzirom da se i poremećaji na ulazu mogu svesti na izlaz, pošto će takvi poremećaji propagirati kroz sistem i na izlazu izazvati odgovarajući odziv. Za opis poremećaja se koriste statistički i stohastički pokazatelji.

2.2.1 Statističke i stohastičke karakteristične veličine za karakterizaciju poremećaja

Poremećaji su slučajni (stohastički) signali, tako da se njihove vrednosti ne mogu predvideti, odnosno vrednosti signala su slučajne i ne mogu se egzaktno odrediti čak i kada su poznate prethodne vrednosti signala. Stoga se ovakvi signali opisuju na osnovu odgovarajućih statističkih i stohastičkih pokazatelja (karakterističnih veličina).

Statističke karakteristike (pokazatelj) signala vezani su za distribuciju (raspodelu) amplitude signala, kao slučajne veličine, odnosno vode računa o tome koliko se često neka vrednost amplitude pojavljuje u sekvenci (vremenskoj seriji), ne vodeći pri tome računa u kome redosledu (vremenu) se ove vrednosti signala pojavljuju. Dakle, statističke karakteristike vezane su za prostornu raspodelu amplitude signala (prostornu korelaciju), ne vodeći računa o korelaciji (zavisnosti) amplituda u vremenu.

Stohastičke karakteristike (pokazatelji) signala vezane su za dinamiku signala, odnosno promenu slučajne amplitude u vremenu i daju odgovor na pitanje da li postoji korelacija (zavisnost)

između trenutne amplitude signala i amplitude signala u nekom drugom trenutku. Dakle, stohastičke karakteristike (pokazatelji) vezani su za vremensku korelaciju, odnosno opisuju dinamiku signala u vremenu ili raspodelu frekvencija u frekvencijskom liku (spektru) signala.

Kao što je poznato iz teorije slučajnih procesa, stohastički signal (slučajni proces) sastoji se iz ansambla (familije) funkcija vremena, koje se nazivaju realizacije. Međutim, u praksi se obično raspolaže sa jednom realizacijom slučajnog signala, dobijenom na osnovu merenja (na primer, ako je signal izmeren, šum merenja predstavlja samo jednu realizaciju slučajnog signala). Stoga je važno da se u praksi koriste slučajni procesi koji su u potpunosti opisani sa samo jednom svojom realizacijom, koja se naziva i vremenska serija (niz). Sa praktičnog aspekta je takođe važno da karakteristike procesa ne zavise od samog vremenskog trenutka u kome je izvršeno merenje amplitude signala. Stohastički procesi kod kojih osobine ne zavise od apsolutne vrednosti vremena nazivaju se široko ili slabo stacionarni procesi (eng. *weakly stationary*), dok stohastički procesi čije se osobine mogu sagledati na osnovu samo jedne realizacije nazivaju se široko ili slabo ergodični (eng. *weakly ergodic*). Prilikom modeliranja sistema obično se pretpostavlja da su poremećaji široko stacionarni ili široko ergodični slučajni procesi, pri čemu široko ergodični procesi jesu istovremeno i širokostacionarni, dok obrnuto ne važi.

Dva najvažnija statistička pokazatelja su srednja vrednost (očekivana vrednost ili matematičko očekivanje) i varijansa.

Definicija srednje vrednosti

Srednja vrednost (eng. *mean value*) ili necentrirani statistički momenat prvog reda diskretnog slučajnog signala $\{v(k)\}$ definisana je sa

$$m_v = \bar{v} = E\{v(k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v(k)$$

gde je $E\{\cdot\}$ operator matematičkog očekivanja, odnosno

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

U navedenom izrazu $f(x)$ predstavlja funkciju gustine verovatnoće (f.g.v.) slučaja varijable $x = v(k)$. Primetimo da kod širokostacionarnog slučajnog niza funkcije gustine verovatnoće $f(x, k) = f(x)$ za $\forall k \in Z$, odnosno funkcija gustine verovatnoće ne zavisi od vremena, tako da srednja vrednost takođe ne zavisi od vremena, tj. predstavlja konstantu. Matematičko očekivanje $E\{\cdot\}$ je linearan operator, što znači da za bilo koje dve slučajne promenljive $v(k)$ i $\omega(k)$ (predstavljaju odbirke diskretnih slučajnih signala) i proizvoljne realne konstante c_1 i c_2 važi

$$E\{c_1 v(k) + c_2 \omega(k)\} = c_1 E\{v(k)\} + c_2 E\{\omega(k)\} = c_1 \bar{v} + c_2 \bar{\omega}$$

Definicija varijanse

Varijansa ili centrirani statistički momenat drugog reda diskretnog slučajnog procesa $\{v(k)\}$ definisana je sa

$$\sigma_v^2 = E \left\{ [v(k) - \bar{v}]^2 \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [v(k) - \bar{v}]^2$$

gde je

$$E \left\{ [v(k) - \bar{v}]^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} [v - \bar{v}]^2 f(v) dv$$

$$f(v, k) = f(v) \quad \text{za} \quad \forall k \in Z.$$

U praksi se odgovarajuća matematička očekivanja, odnosno statistički pokazatelji moraju izračunati na osnovu uzorka konačne dužine N (vremenske serije). Procena srednje vrednosti na osnovu uzorka (jedne realizacije) signala $\{v(k)\}$ konačne dužine N data je sa

$$\bar{v}(N) = \hat{m}_v(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v(k)$$

Ako se na dati izraz primeni operator matematičkog očekivanja, koji je linearan operator, dobija se

$$E \{ \hat{m}_v(k) \} = E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v(k) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E \{ v(k) \} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N m_v = m_v$$

Dobijeni rezultat pokazuje da je srednja vrednost procene, kao slučajne veličine, jednaka samoj determinističkoj veličini koja se procenjuje, te se takva procena naziva nepomerenom (eng. *unbiased estimate*). Sa druge strane, varijansa ove procene definisana je izrazom

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{m_v}^2(N) &= E \left\{ [\hat{m}_v(N) - m_v]^2 \right\} = E \left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v(k) - m_v \right]^2 \right\} = E \left\{ \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [v(k) - m_v] \right\}^2 \right\} \\ &= E \left\{ \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N [v(k) - m_v]^2 \right\} + E \left\{ \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [v(k) - m_v] [v(j) - m_v] \right\} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N E \left\{ [v(k) - m_v]^2 \right\} + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N E \{ [v(k) - m_v] [v(j) - m_v] \} \end{aligned}$$

Pošto je na osnovu definicionog izraza za varijansu varijable $v(k)$

$$\sigma_v^2 = E \{ [v(k) - m_v]^2 \}$$

i ako se pretpostavi da su centrirane slučajne varijable $v(k) - m_v$ i $v(j) - m_v$ međusobno nekorelisane, tada je na osnovu definicije nekorelisanosti

$$E \{ [v(k) - m_v] [v(j) - m_v] \} = 0, \quad k \neq j$$

odakle sledi

$$\hat{\sigma}_{m_v}^2(N) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \sigma_v^2 = \frac{\sigma_v^2}{N}$$

Dakle, kada dužina uzorka N neograničeno raste ($N \rightarrow \infty$) varijanse nepomerene procene $\hat{m}_v(N)$ težiće nuli, tj.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_{m_v}^2(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_v^2}{N} = 0$$

i takva nepomerena procena je konzistentna.

Na sličan način procena varijanse na uzorku konačne dužine

$$\hat{\sigma}_v^2(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [v(k) - \hat{m}_v(N)]^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[v(k) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v(i) \right]^2 =$$

je pomerena, što se može dokazati ako se na poslednji izraz primeni linearni operator matematičkog očekivanja $E \{ \cdot \}$, tj.

$$\begin{aligned} E \{ \sigma_v^2(N) \} &= E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[v(k) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v(i) \right]^2 \right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E \left\{ \left[v(k) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v(i) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N E \left\{ \left[Nv(k) - \sum_{i=1}^N v(i) \right]^2 \right\} = \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N E \left\{ \left[(N-1)v(k) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N v(i) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N E \left\{ \left[\begin{array}{c} (N-1)v(k) - (N-1)m_v - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N v(i) + (N-1)m_v \end{array} \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N E \left\{ \left[\begin{array}{c} (N-1)(v(k) - m_v) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N (v(i) - m_v) \end{array} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N E \left\{ \left[(N-1)^2 (v(k) - m_v)^2 \right] + \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N E \left\{ \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N (v(i) - m_v) \right]^2 \right\} \right\} - \\
&\quad - \frac{2}{N^3} E \left\{ (N-1) (v(k) - m_v) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N (v(i) - m_v) \right\} \\
&= \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N (N-1)^2 E \left\{ \left[(v(k) - m_v)^2 \right] + \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N E \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N (v(i) - m_v)^2 \right\} \right\} + \\
&\quad + \frac{2}{N^3} \sum_{k=1}^N E \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (v(i) - m_v) (v(j) - m_v) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(N-1)}{N^3} E \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N (v(k) - m_v) (v(i) - m_v) \right\} \right\}
\end{aligned}$$

Pošto je na osnovu pretpostavke o nekorelisanosti slučajnog procesa $\{v(k)\}$

$$E \{(v(i) - m_v)(v(j) - m_v)\} = 0 \text{ za } \forall i \neq j \in Z$$

a na osnovu definicionog izraza za varijansu ovog slučajnog procesa

$$\sigma_v^2 = E \{(v(k) - m_v)^2\}$$

dalje sledi

$$\begin{aligned}
E \{\hat{\sigma}_v^2(N)\} &= \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N (N-1)^2 \sigma_v^2 + \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N E \{(v(i) - m_v)^2\} \\
&= \frac{N(N-1)^2}{N^3} \sigma_v^2 + \frac{N(N-1)}{N^3} \sigma_v^2 = \frac{1}{N^2} \left[(N-1)^2 + (N-1) \right] \sigma_v^2
\end{aligned}$$

odnosno

$$E \{ \hat{\sigma}_v^2(N) \} = \frac{N-1}{N} \sigma_v^2$$

Dakle, u opštem slučaju je $E \{ \hat{\sigma}_v^2(N) \} \neq \sigma_v^2$, te je ovakva procena pomerena (procena je nepomerena jedino za $N \rightarrow \infty$, tj. u asimptotskom slučaju). Dakle, da bi se dobila nepomerena procena varijanse, usvojenu procenu je potrebno pomnožiti sa faktorom $N/(N-1)$, odnosno nepomerena procena varijanse na uzorku konačne dužine N ima oblik

$$\hat{\sigma}_v^2(N) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left[v(k) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v(i) \right]^2$$

Ovakva procena zadovoljava uslov $E \{ \hat{\sigma}_v^2(N) \} = \sigma_v^2$, a može se pokazati da je ova procena i konzistentna, odnosno da varijansa procene teži nuli kada dužina uzorka N neograničeno raste ($N \rightarrow \infty$). Zaista, varijansa procene definisana je izrazom

$$\text{var} \hat{\sigma}_v^2(N) = E \left\{ [\hat{\sigma}_v^2(N) - \sigma_v^2]^2 \right\}$$

gde je σ_v^2 tačna vrednost varijanse, koja se estimira, pa ako se pretpostavi radi jednostavnosti pisanja da je srednja vrednost slučajnog procesa $v(k)$ jednaka nuli, tj. $m_v = 0$, tada je sama nepomerena procena varijanse

$$\hat{\sigma}_v^2(N) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N v^2(k)$$

pa varijansa procene postaje

$$\begin{aligned} \text{var} \hat{\sigma}_v^2(N) &= E \left\{ (\hat{\sigma}_v^2(N) - \sigma_v^2)^2 \right\} = E \left\{ \left[\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N v^2(k) - \sigma_v^2 \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(N-1)^2} E \left\{ \left[\sum_{k=1}^N v^2(k) \right]^2 \right\} - \frac{2\sigma_v^2}{N-1} E \left\{ \sum_{k=1}^N v^2(k) \right\} + \sigma_v^4 \\ &= \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N E \{ v^2(k) v^2(j) \} - \frac{2\sigma_v^2}{N-1} \sum_{k=1}^N E \{ v^2(k) \} + \sigma_v^4 \\ &= \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ k \neq j}}^N E \{ v^2(k) v^2(j) \} + \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{k=1}^N E \{ v^4(k) \} - \frac{2\sigma_v^2}{N-1} \sum_{k=1}^N E \{ v^2(k) \} + \sigma_v^4 \end{aligned}$$

Imajući u vidu dobro poznat rezultat iz teorije gausovskih slučajnih varijabli koja tvrdi da je za nekorelisane slučajne varijable $v(i)$ i $v(j)$ ispunjeno

$$E \{ v^2(i) v^2(j) \} = \begin{cases} E \{ v^2(i) \} E \{ v^2(j) \} = \sigma_v^4, & i \neq j \\ E \{ v^4(i) \} = 3\sigma_v^4, & i = j \end{cases}$$

dalje se dobija (kod gausovski raspodeljene slučajne varijable parni momenat reda $2n$ može se izračunati na osnovu varijanse σ^2 po formuli $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \sigma^2$, a u našem slučaju $n = 2$)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_v^2(N) &= \frac{1}{(N-1)^2} N(N-1) \sigma_v^4 + \frac{1}{(N-1)^2} N 3 \sigma_v^4 - \frac{2\sigma_v^2}{N-1} N \sigma_v^2 + \sigma_v^4 \\ &= \frac{1}{(N-1)^2} [N(N-1) \sigma_v^4 + 3N \sigma_v^4] - \frac{2N}{N-1} \sigma_v^4 + \sigma_v^4 \\ &= \frac{1}{(N-1)^2} [N^2 \sigma_v^4 + 2N \sigma_v^4] - \frac{2N \sigma_v^2 - (N-1) \sigma_v^4}{N-1} \\ &= \frac{(N+2) N \sigma_v^4}{(N-1)^2} - \frac{\sigma_v^4 (N+1)}{(N-1)} = \frac{(N+2) N \sigma_v^4 - \sigma_v^4 (N^2-1)}{(N-1)^2} = \frac{\sigma_v^4 (2N+1)}{(N-1)^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Dakle, pošto varijansa nepomerene procene teži nuli sa porastom dužine mernog uzorka, ovakva nepomerena procena je i konzistentna.

Dva važna stohastička pokazatelja slučajnog procesa su autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija.

Definicija autokovarijacione funkcije

Autokovarijaciona funkcija diskretnog široko stacionarnog slučajnog procesa $\{v(k)\}$ definisana je izrazom

$$R_v(\tau) = E\{[v(k) - m_v][v(k-\tau) - m_v]\}, \quad \tau \in Z$$

gde je parametar τ celobrojna promenljiva, koji se naziva i kašnjenje.

Autokovarijaciona funkcija je simetrična funkcija parametra τ

$$R_v(-\tau) = R_v(\tau)$$

pri čemu je

$$R_v(0) = \sigma_v^2$$

Ova funkcija takođe zadovoljava uslov

$$|R_v(\tau)| \leq R_v(0), \quad \forall \tau \in Z.$$

Definicija autokorelacione funkcije

Autokorelaciona funkcija diskretnog široko-stacionarnog slučajnog procesa definisana je izrazom

$$X_v(\tau) = E\{v(k) v^T(k-\tau)\}, \quad \tau \in Z$$

Slično kao autokovarijaciona funkcija i ova funkcija je simetrična, tj.

$$X(-\tau) = X(\tau)$$

Na osnovu kovarijacione funkcije često se u literaturi definiše i koeficijent korelacije, koji u osnovi predstavlja normalizovanu kovarijacionu funkciju čije vrednosti pripadaju intervalu $(-1, +1)$

$$\rho_v(\tau) = \frac{E\{(v(k)v(k-\tau))\}}{E\{v(k)v(k)\}}$$

Primitimo da se kovarijaciona funkcija svodi na koeficijent korelacije ukoliko se koriste normalizovani (skalirani) i centrirani signali pri njenoj definiciji, odnosno

$$\tilde{v}(k) = \frac{v(k) - m_v}{\sqrt{\sigma_v^2}} = \frac{v(k) - m_v}{\sigma_v}$$

pri čemu se veličina σ_v naziva standardnom devijacijom.

Pošto je $E\{\tilde{v}(k)\} = m_{\tilde{v}} = 0$, tada je

$$R_{\tilde{v}}(\tau) = X_{\tilde{v}}(\tau) = \rho_{\tilde{v}}(\tau) = E\{\tilde{v}(k)\tilde{v}(k-\tau)\} = E\{\tilde{v}(k)\tilde{v}(k-\tau)\}$$

pošto je

$$\sigma_{\tilde{v}}^2 = E\{\tilde{v}^2(k)\} = E\{[v(k) - m_v]^2\} = 1$$

Na osnovu definicionih izraza, veza između autokovarijacione i autokorelacione funkcije data je izrazom

$$\begin{aligned} R_{\tilde{v}}(\tau) &= E\{(v(k) - m_v)(v(k-\tau) - m_v)\} \\ &= E\{v(k)v(k-\tau)\} - E\{v(k)\}m_v - m_vE\{v(k-\tau)\} + m_v^2 \\ &= X_v(\tau) - m_v^2 - m_v^2 + m_v^2 = X_v(\tau) - m_v^2 \end{aligned}$$

Dakle, ukoliko je srednja vrednost signala $m_v = 0$, tada se ove dve funkcije poklapaju, tj. $R_v(\tau) = X_v(\tau)$.

Slično se mogu definisati i kros-kovarijaciona i kros-korelaciona funkcija dva diskretna širokostatacionarna slučajna procesa $\{v(k)\}$ i $\{\omega(k)\}$ na osnovu izraza

$$R_{v\omega}(\tau) = E\{[v(k) - m_v][\omega(k-\tau) - m_\omega]\}, \quad \forall \tau \in Z$$

$$X_{v\omega}(\tau) = E\{v(k)\omega(k-\tau)\}, \quad \tau \in Z$$

Na sličan način kao u prethodno razmatranom slučaju, lako se pokazuje da je veza između ovih funkcija definisana izrazom

$$R_{v\omega}(\tau) = X_{v\omega}(\tau) - m_v m_\omega$$

Uočava se da ukoliko jedan od posmatranih signala ima nultu srednju vrednost, ove dve funkcije predstavljaju istu funkciju. Takođe važe relacije

$$\begin{aligned} R_{v\omega}(-\tau) &\neq R_{v\omega}(\tau); & R_{v\omega}(-\tau) &= R_{v\omega}(\tau) \\ X_{v\omega}(-\tau) &\neq X_{v\omega}(\tau); & X_{v\omega}(-\tau) &= X_{v\omega}(\tau) \end{aligned}$$

pošto je za široko stacionarne slučajne procese ispunjeno

$$E\{v(k)\omega(k+\tau)\} = E\{\omega(k+\tau)v(k)\} = E\{\omega(k)v(k)\} = E\{\omega(k)v(k-\tau)\}$$

Slično kao statistički pokazatelji i stohastički pokazatelji se mogu proceniti (estimirati) na osnovu uzorka signala konačne dužine. Na primer, procene auto-kovarijacione funkcije može se generisati na osnovu izraza

$$\hat{R}_N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [v(k) - \hat{m}_v][v(k-\tau) - \hat{m}_v]; \hat{m}_v = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v(k); \quad \forall \tau \in Z$$

dok je odgovarajuća procena auto-korelacione funkcije

$$\hat{X}_N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v(k)v(k-\tau); \quad \forall \tau \in Z$$

Umesto ovakve procene može se koristiti i alternativni izraz koji usrednjava sve moguće proizvode parova odbiraka koji se nalazi na rastojanju $\tau \in Z$ na sledeći način

$$\begin{aligned} \hat{X}_N(\tau) &= \frac{v(0)v(|\tau|) + v(1)v(|\tau|+1) + \dots + v(N-1-|\tau|)v(N-1)}{N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-|\tau|-1} v(i)v(i+|\tau|); \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N-1 \end{aligned}$$

Primitimo da će za veliko τ postojati svega nekoliko proizvoda parova, dok za $\tau \geq N$ neće na raspolaganju ostati ni jedan par uzoraka čije je rastojanje jednako datom τ , tako da je

$$\hat{X}_N(\tau) = 0, \quad \tau \geq N$$

Ovako estimirana auto-korelaciona funkcija ispunjava uslov parnosti, koji važi i za originalnu funkciju $X(\tau)$

$$\hat{X}_N(-\tau) = \hat{X}_N(\tau)$$

Može se pokazati da je srednja vrednost ove procene

$$E\{X_N(\tau)\} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1-|\tau|} E\{v(j)v(j+|\tau|)\} = \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) X(\tau)$$

gde je $X(\tau)$ stvarna autokorelaciona funkcija koja se estimira. Dakle, pošto je $E\{X_N(\tau)\} \neq X(\tau)$ definisana procena je u opštem slučaju pomenjena. Međutim, ova procena je asimptotski nepomenjena, pošto $|\tau|/N \rightarrow 0$ kada $N \rightarrow \infty$. Slično kao kod procene varijanse, da bi dobili nepomerenu procenu data procena se mora pomnožiti sa faktorom $N/(N - |\tau|)$, odnosno odgovarajuću sumu treba podeliti sa $(N - |\tau|)$ umesto sa N . U primeni je ipak uobičajeno da se koristi izraz za pomenutu procenu, o čemu će više biti reči u poglavlju posvećenom estimaciji spektra signala (spektralnoj analizi).

Varijansa nepomerene procene definisana je izrazom

$$\text{var } \hat{X}_N(\tau) = E \left\{ \left[\hat{X}_N(\tau) - E \left\{ \hat{X}_N(\tau) \right\} \right]^2 \right\} = E \left\{ \left[\hat{X}_N(\tau - X(\tau)) \right]^2 \right\}$$

gde je

$$\hat{X}_N(\tau) - X(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1-|\tau|} [v(j)v(j+|\tau|) - X(\tau)]$$

odakle sledi

$$\text{var } \hat{X}_N(\tau) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1-|\tau|} \sum_{i=0}^{N-1-|\tau|} E \{ [v(j)v(j+|\tau|) - X(\tau)] [v(i)v(i+|\tau|) - X(\tau)] \}$$

Izračunavanje ovog izraza zahteva poznavanje četvrtog momenta

$$E \{ v(j)v(j+|\tau|)v(i)v(i+|\tau|) \} = m_{ij}(\tau)$$

Dakle, dalje izračunavanje zahteva dodatnu pretpostavku o četvrtom momentu razmatranog slučajnog procesa. Ako se uvede dodatna pretpostavka da je razmatrani slučajni proces normalan (gausovski), može se pokazati da je

$$\text{var } \hat{X}_N^v(\tau) \approx \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1-|\tau|} \left[1 - \frac{\tau+r}{N} \right] [X^2(r) + X(r+\tau)X(r-\tau)]$$

Pošto u većini slučajeva $X(r)$ iščezava sa porastom sumiranja r , izraz u velikim (vitičastim zgradama) težiće u ovakvim slučajevima nuli sa porastom indeksa. Sa druge strane, za veliko N gornja granica sume biće prikazano ∞ , a izraz u srednjim zgradama biće približno jednak 1 za one vrednosti r za koje izraz u velikim zgradama nije blizak nuli. Na taj način, suma će težiti ka konačnoj vrednosti, koja je jednaka zbiru nenultih članova u velikoj zgradi. Dakle, za veliko N jedina zavisnost procesa $\hat{X}_N(\tau)$ od dužine uzorka N biće preko faktora ispred sume $1/N$, tako da je izvedeni izraz za varijansu procene srazmeran sa $1/N$, to će težiti nuli kada N neograničeno raste, tj. ovakva procena je konzistentna. Drugim rečima, uslov $N \gg |\tau|$ obezbeđuje odgovarajuću tačnost ovakve procene, kada je približno ispunjen i uslov nepomenosti.

Slično se može definisati i procena kros-korelacione funkcije

$$\hat{X}_N^{v\omega}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-\tau-1} v(i)\omega(i+\tau) & \tau = 0, 1, \dots, N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{i=|\tau|}^{N-1} v(i)\omega(i+\tau) & \tau = -1, -2, \dots, -N+1 \\ 0 & |\tau| \geq N \end{cases}$$

U ovakvom definicionom izrazu postoji samo po N odbiraka za svaki od razmatranih široko-stacionarnih diskretnih slučajnih procesa $\{v(k)\}$ i $\{\omega(k)\}$. Analogno sa procenom auto-korelacione funkcije, ova procena će biti utoliko verodostojnija ukoliko je dužina mernog uzorka N znatno veće od usvojenog kašnjenja τ . U opštem slučaju važi $\hat{X}_{v\omega}(-\tau) \neq \hat{X}_{v\omega}(\tau)$ a srednja vrednost i varijansa procene mogu se analizirati na identičan način kao u slučaju autokorelacione funkcije.

Do sada uvedene definicije i izvršene analize bazirale su se na pretpostavci o osobini široke (slabe) stacionarnosti ili široke (slabe) ergodičnosti razmatranog slučajnog procesa. Na ovom mestu definisaćemo nešto strožije ove dve osobine slučajnog procesa.

Definicija široke (slabe) stacionarnosti

Diskretni slučajni proces $\{v(k)\}$ je široko (**slabo**) **stacionaran** ukoliko ispunjava sledeća tri zahteva:

1. Srednja snaga signala ograničena je sa gornje strane konačnom veličinom $E\{v^2(k)\} < \infty$.
2. Srednja vrednost signala je vremenski-invarijanta $m_v(k) = E\{v(k)\} = m_v = c$ gde je c realna konstanta.
3. Autokorelaciona funkcija slučajnog procesa $X_v(\tau) = E\{v(k)v(k-\tau)\}$ zavisi samo od kašnjenja τ , a ne i od apsolutne vrednosti vremenskih trenutaka k , $k-\tau$ u kojima se traži srednja vrednost proizvoda odbiraka signala.

Primetimo da pretpostavke 1 i 2 označavaju i da je varijansa slučajnog procesa $\sigma_v^2 = E\{v^2(k)\} - m_v^2$ konačna konstantna, tj. ne zavisi od vremenskog trenutka k i ima konačnu vrednost.

Slučajni proces je **široko ergodičan** ukoliko ispunjava tri sledeća uslova:

1. Diskretni signal $\{v(k)\}$ je široko stacionaran.
2. Srednja vrednost, odnosno usrednjavanje po ansamblu realizacija na osnovu matematičkog očekivanja $E\{\cdot\}$ jednaka je usrednjavanju odbiraka po vremenu (aritmetičkoj sredini vrednosti odbiraka)

$$m_v = E\{v(k)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v(k)$$

3. Autokorelaciona funkcija dobijena usrednjavanjem po ansamblu realizacija (primenom matematičkog očekivanja) jednaka je proceni autokorelacione funkcije dobijene na osnovu usrednjavanja proizvoda odbiraka po vremenu

$$X_v(\tau) = E\{v(k)v(k-\tau)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N v(i)v(i-|\tau|); \tau \in Z$$

Važan stohastički pokazatelj predstavlja i **kovarijaciona matrica**, koja u osnovi predstavlja generalizaciju pojma varijanse na slučaj vektorskih (multiidmenzionalnih) slučajnih varijabli.

Definicija kovarijacione matrice

Kovarijaciona matrica $R_v^N(k)$ diskretnog široko stacionarnog slučajnog signala $\{v(k)\}$ definisano je kao matematičko očekivanje proizvoda vektora kolone, koji se sastoji od N prethodnih odbiraka signala, i odgovarajućeg vektora vrste, tj.

$$R_v^N(k) = E \left\{ \begin{bmatrix} v(k) - m_v \\ v(k-1) - m_v \\ \vdots \\ v(k-N+1) - m_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) - m_v \\ v(k-1) - m_v \\ \vdots \\ v(k-N+1) - m_v \end{bmatrix}^T \right\} = E \{v_N(k) v_N^T(k)\}$$

gde je $m_v = E\{v(k)\}$, a $v_N(k)$ N -dimenzioni vektor kolona koji sadrži tekući odbirak signala.

Ova matrica je simetrična, pošto je $(R_v^N(k))^T = R_v^N(k)$ kao posledica činjenice da je

$$E\{[v(k) - m_v][v(k-\tau) - m_v]\} = E\{[v(k-\tau) - m_v][v(k) - m_v]\}.$$

Kovarijaciona matrica se može izraziti preko kovarijacione funkcije $R_v(\tau)$ na sledeći način

$$R_v^N(k) = \begin{bmatrix} R_v(0) & R_v(1) & \cdots & R_v(N-1) \\ R_v(-1) & R_v(0) & \cdots & R_v(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_v(1-N) & R_v(2-N) & \cdots & R_v(0) \end{bmatrix}$$

Diskretni beli šum

Slučajni proces sa proizvoljnim korelacionim svojstvima može se generisati popuštanjem specifičnog slučajnog procesa, tzv. „belog šuma“, kroz linearan vremenski-invarijantan kauzalan diskretni sistem. Beli šum je široko stacionaran slučajni proces koji je opisan samo na osnovu prvog i drugog statističkog momenta. Specijalan slučaj belog šuma je beli slučajni proces sa nultom srednjom vrednošću, koji je definisan sa

$$m_e = E\{e(k)\} = 0 \quad \text{za} \quad \forall k \in Z$$

$$X_e(k, \ell) = X_e(k - \ell) = E\{e(k)e(\ell)\} = \begin{cases} \sigma_e^2 & \text{za } k = \ell \in Z \\ 0 & \text{za } k \neq \ell; k, \ell \in Z \end{cases}$$

Ako se posmatra distribucija frekvencija u frekvencijskom liku (spektru) ovakvog signala sve frekvencije biće ravnopravno zastupljene, odnosno spektralna gustina snage takvog signala biće ista na svim frekvencijama, slično kao kod bele svetlosti u optici (videti poglavlje posvećeno spektralnoj analizi).

Uvedena definicija ništa ne govori o zakonu raspodele verovatnoće slučajne amplitude $e(k)$ u diskretnom trenutku k . U praksi se obično uvodi dodatna pretpostavka da je $e(k)$ normalno (gausovski) raspodeljene slučajne varijable i takav diskretan signal se zove beli gausovski (normalan) slučajni proces (beli gausovski šum). Normalna raspodela nulte srednje vrednosti $m_e = 0$ i varijanse σ_e^2 , označava se kao $N(0, \sigma_e^2)$. Kao što je istaknuto u prethodnom poglavlju, autokorelaciona funkcija belog šuma može se proceniti na osnovu jedne realizacije slučajnog procesa, tj. vremenske serije $\{e(k), k = 0, 1, \dots, N\}$ kao

$$\hat{R}_N^e(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-|\tau|-1} e(i)e(i+|\tau|);$$

pri čemu je srednja vrednost ove procene

$$E\{\hat{R}_N^e(\tau)\} = \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) R_e(\tau) \approx R_e(\tau) \quad \text{za } \tau \ll N$$

gde je $R_e(\tau)$ teorijska autokorelaciona funkcija belog šuma, dok je varijansa procene

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{R}_N^e(\tau) &\approx \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1-|\tau|} \left(1 - \frac{\tau+r}{N}\right) [R_e^2(r) + R_e(\tau+r)R_e(r-\tau)] \\ &\approx \frac{2}{N} \left(1 - \frac{\tau}{N}\right) R_e^2(0) \approx \frac{2}{N} R_e^2(0) \quad \text{za } \tau \ll N \end{aligned}$$

Da bi se procenilo da li procene $\hat{R}_N^e(1), \hat{R}_N^e(2), \dots$ zaista odgovaraju autokorelacionoj funkciji belog šuma potrebno je da ove vrednosti budu istog reda veličine ili manje od empirijske standardne devijacije $\sqrt{\text{var } \hat{R}_N^e(\tau)} \approx R_e(0)/\sqrt{N/2} = \sigma_e^2/\sqrt{N/2}$. U protivnom, zaključuje se da vrednosti $\hat{R}_N^e(1), \hat{R}_N^e(2), \dots$, znatno odstupaju od teorijske nulte vrednosti autokorelacione funkcije $R_e(\tau) = 0$ za $\tau > 0$, te takva procena autokorelacione funkcije ne potiče od belog šuma.

Korelisani (obojeni) šum

Kao što je prethodno istaknuto, poremećaj $\{v(k)\}$ se obično generiše propuštanjem belog šuma $\{e(k)\}$ kroz linearan sistem, tj.

$$v(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) e(k-i)$$

ili ekvivalentno koristeći koncept funkcije prenosa

$$v(k) = H(z) e(k)$$

gde je $h(\ell)$ impulsni odziv linearnog diskretnog vremenski-invarijantnog kauzalnog sistema na čiji se ulaz dovodi beli šum, a čiji je izlaz slučajni poremećaj $v(k)$, a $H(z)$ je funkcija prenosa ovog sistema. Pošto se poremećaj $\{v(k)\}$ dobija filtriranjem belog šuma $\{e(k)\}$, on se naziva i obojeni (korelisani) šum, po analogiji sa obojenom svetlošću.

2.3 Parametarska reprezentacija black-box modela sistema u vremenskom domenu

Korišćenje modela sistema, bilo da se radi o simulaciji sistema, u cilju analize njegovih osobina, ili predikciji, u cilju predviđanja osobina sistema u budućnosti, ili sintezi, odnosno projektovanju sistema koji ima unapred zadata svojstva, znatno je jednostavnije ukoliko je broj parametara u modelu konačan, pri čemu je poželjno da se broj parametara što je moguće smanji. Sa tog aspekta parametarski modeli su poželjniji za rad u poređenju sa neparametarskim modelima.

Najčešće korišćene parametarske reprezentacije modela sistema su sledeće:

1. Model sa konačnim impulsnim odzivom (eng. *Finite Impulse Response Model*), koji se označava kao FIR model.
2. Autoregresioni model sa spoljašnjom pobudom (eng. *Auto-Regressive with eXogenous input model*), koji se skraćeno označava sa ARX.
3. Autoregresioni model sa pomičnim sredinama i spoljašnjom pobudom (eng. *Auto-regressive Moving Average with eXogenous input model*), ili skraćeno ARMAX model.
4. Model greške jednačine (eng. *Output Error Model*) ili skraćeno OE model.
5. *Box-Jenkins*-ov model, koji se po inicijalima autora označava kao BJ.

Svi navedeni modeli predstavljaju specijalan slučaj sledeće opšte forme reprezentacije (strukture) modela u vremenskom području:

$$A(z) y(k) = \frac{B(z)}{F(z)} u(k) + \frac{C(z)}{D(z)} e(k)$$

gde su $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ i $F(z)$ polinoma po promenljivoj q , koja predstavlja operator jediničnog prednjačenja, dok je z^{-1} operator jediničnog kašnjenja, tj.

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} = 1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}$$

$$\begin{aligned}
 B(z) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} = \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i} \\
 C(z) &= 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c} = 1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} \\
 D(z) &= 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d} = 1 + \sum_{i=1}^{n_d} d_i z^{-i} \\
 F(z) &= 1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots + f_{n_f} z^{-n_f} = 1 + \sum_{i=1}^{n_f} f_i z^{-i}
 \end{aligned}$$

U navedenoj opštoj strukturi modela navedeni diskretni signali $\{y(k)\}$, $\{u(k)\}$ i $\{e(k)\}$ predstavljaju izlaz, ulaz i poremećaj, respektivno. Dakle, struktura (reprezentacija) modela je u potpunosti definisana izborom navedenih polinoma, odnosno njihovog reda i brojnih vrednosti odgovarajućih parametara. Drugim rečima, prikazana opšta struktura (reprezentacija) modela je poznata sa tačnošću do nepoznatih parametara u navedenim polinomima koji definišu ovu strukturu. Zavisno od namene modela, ponekad je uobičajeno da se izvesni od polinoma u opštoj strukturi modela fiksiraju na jedinicu (predstavlja polinom nultog reda). Na primer, FIR i ARX strukture rezultuju u linearne jednačine u odgovarajućim algoritmima za identifikaciju sistema, tj. estimaciji parametara modela na bazi merenja ulazno-izlaznih signala, što je vrlo povoljno sa računskog stanovišta.

2.3.1 FIR model (model sa konačnim impulsnim odzivom)

Kao što je prethodno navedeno, model sa beskonačnim impulsnim odzivom (eng. *Infinite Impulse Response model*) ili skraćeno IIR model definisan je sa diferentnom (diferencnom) jednačinom

$$y(k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) u(k-\ell) + e(k)$$

gde su $g(\ell)$ odbirci impulsnog odziva, a nizovi $y(k)$, $u(k)$ i $e(k)$ predstavljaju izlaz, ulaz i poremećaj, respektivno. Odgovarajuća funkcija prenosa sistema je

$$G(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) z^{-\ell}$$

gde je z^{-1} operator jediničnog kašnjenja. Ukoliko je $G(z)$ stabilna funkcija prenosa tada impulsni odziv iščezava sa vremenom, odnosno nakon završetka prelaznog režima izlaz sistema (impulsni odziv) u ravnotežnom stanju biće jednak nuli (u ravnotežnom stanju izlaz, tj. impulsni odziv $g(k)$, sistema prati ulaz (impulsni signal $\delta(k)$, koji je jednak nuli za svaki diskretan trenutak k , sem za $k = 0$). Dakle, za stabilan sistem postoji pozitivna i konačna konstanta M , za koju je ispunjeno

$$g(\ell) = 0 \quad \text{za} \quad \ell > M; \quad 0 < M < \infty.$$

Drugim rečima, potrebno je uzeti u razmatranje samo prvih M odbiraka impulsnog odziva, što rezultuje u FIR model

$$y(k) = \sum_{\ell=1}^M g(\ell) u(k-\ell) + e(k).$$

Ovakav model predstavlja specijalan slučaj opšte strukture u kojoj je

$$A(z) = C(z) = D(z) = F(z) = 1$$

dok je red n_b polinoma $B(z)$ jednak M , tj. $n_b = M$. Dakle, FIR model se može prikazati i u obliku

$$y(k) = B(z) u(k) + e(k)$$

gde je

$$B(z) = \sum_{i=1}^M b_i z^{-i}$$

pri čemu parametri b_i imaju značenje odbiraka impulsnog odziva, tj.

$$b_i = g(i); \quad i = 1, \dots, M; \quad g(0) = b_0 = 0.$$

Primetimo, takođe, da su poremećaji u FIR modelu opisani belim stohastičkim procesom, tj. predstavljaju beli šum. Drugim rečima, u modelu korelisanog poremećaja ili obojenog šuma

$$v(k) = H(z) e(k), \quad H(z) = 1$$

gde je $e(k)$ beli šum, funkcija prenosa $H(z) = 1$.

2.3.2 ARX model (Auto-regresioni model sa spoljašnjim ulazom)

Ovaj model predstavlja specijalni oblik opšte strukture u kojoj je

$$C(z) = D(z) = F(z) = 1,$$

pri čemu su $A(z)$ i $B(z)$ proizvoljni polinomi, tj.

$$A(z) y(k) = B(z) u(k) + e(k)$$

Pošto šum $e(k)$ direktno učestvuje u formulisanju ove jednačine, ovakav model se zove i model greške jednačine (eng. *Equation Error model* ili skraćeno EE model). U navedenom EE modelu greške jednačine $e(k)$ je slučajne prirode i modelovana je kao beli šum. Član $A(z) y(k)$ predstavlja AR deo modela, koji iskazuje činjenicu da izlaz u trenutku k , $y(k)$, ne zavisi od prethodnih vrednosti izlaza, koje su definisane polinomom $A(z)$, dok signal $u(k)$ predstavlja spoljašnji ulaz ili pobudu. Zaista, polinomijalna jednačina se može prikazati u formi diferentne jednačine

$$\left[1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i} \right] y(k) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i} u(k) + e(k)$$

odakle sledi

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i} y(k) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i} u(k) + e(k)$$

ili imajući u vidu značenje operatora kašnjenja z^{-1} ,

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) + e(k).$$

Uvodeći vektor kolonu ulazno-izlaznih podataka (regresioni vektor)

$$X^T(k-1) = \{-y(k-1) - y(k-2) \cdots - y(k-n_a) \quad u(i-1) \quad u(i-2) \cdots u(k-n_b)\}$$

i vektor kolonu parametara

$$\theta^T = \{-a_1 - a_2 \cdots - a_{n_a} \quad b_1 \quad b_2 \cdots b_{n_b}\}$$

model se može prikazati u formi linearne regresije

$$y(k) = X^T(k-1)\theta + e(k)$$

Alternativno se izlaz modela $y(k)$ može prikazati u polinomijalnom obliku

$$y(k) = \frac{B(z)}{A(z)}u(k) + \frac{1}{A(z)}e(k)$$

odnosno

$$y(k) = G(z)u(k) + H(z)e(k)$$

gde su odgovarajuće funkcije prenosa

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad H(z) = \frac{1}{A(z)}$$

Primetimo da je korelisani poremećaj na izlazu modela

$$v(k) = H(z)e(k) = \frac{1}{A(z)}e(k)$$

modelovan autoregresionim modelom.

Dijagram toka procedure za generisanje izlaza sistema na osnovu date diferencne jednačine definisan je sa sledećim koracima:

Korak 1 Inicijalizacija: $y_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n_a$; $u_2 = 0$, $i = 1, 2, \dots, n_b$; učitavanje parametara a_i , $i = 1, 2, \dots, n_a$ i b_i , $i = 1, 2, \dots, n_b$ i dužine trajanja simulacije N_s .

Korak 2 Startovati brojač vremena $k = 1$.

Korak 3 Izračunavanje determinističkog odziva na osnovu zakašnjenih ulaza i izlaza

$$y_m = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i y_i + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u_i$$

Korak 4 Generisanje realizacije e belog šuma unete srednje vrednosti $m_e = 0$ i zadate varijanse σ_e^2 pozivom odgovarajućeg generatora pseudoslučajnih brojeva; obično se poziva normalan (gausovski) generator koji realizuje slučajne brojeve x po standardnom normalnom (gausovom) zakonu raspodele verovatnoće $N(0, 1)$, koga karakteriše srednja vrednost $m_x = 0$ i jedinična varijansa $\sigma_x^2 = 1$, tj. $x \sim N(0, 1)$. Dalje se $e \sim N(0, \sigma_e^2)$ dobija kao

$$e = \sigma_e x; \quad x \sim N(0, 1)$$

Korak 5 Generisanje kompletnog izlaza u tekućem trenutku

$$y(k) = y_m + e$$

Korak 6 Reinicijalizacija vrednosti komponenti $y_i, i = 1, 2, \dots, n_a$ i $u_i, i = 1, 2, \dots, n_b$ (primetimo da je regresioni vektor $X^T(k) = \{-y_1 - y_2 \dots - y_{n_a} u_1 u_2 \dots u_{n_b}\}$)

$$y_{i+1} = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_a - 1; \quad y_1 = y(k)$$

$u_{i+1} = u_i, i = 1, 2, \dots, n_b - 1$; generisati $u(k)$ i dodeliti tu vrednost $u_1, u_1 = u(k)$.

Korak 7 Inkrementirati brojač vremena $k = k + 1$.

Korak 8 Testirati da li je isteklo vreme trajanja simulacije N_s , tj. testirati da li je $k \leq N_s$, ako jeste vratiti se na korak 3, ako nije zaustaviti simulaciju čiji je izlaz sekvenca odziva $\{y(1) y(2) \dots y(N_s)\}$ na dodatnu sekvencu pobude $\{u(1) u(2) \dots u(N_s)\}$.

$$A(z) v(k) = e(k)$$

odnosno generisan je propuštanjem belog šuma $e(k)$ kroz funkciju prenosa $H(z) = 1/A(z)$, koja se u literaturi naziva i inverzna funkcija prenosa ili inverzni filter.

2.3.3 ARMAX model (Autoregresioni model pomičnih sredina sa spoljašnjom pobudom)

Ovaj model predstavlja specijalan slučaj opšte strukture u kojoj je

$$D(z) = F(z) = 1,$$

pri čemu su $A(z)$, $B(z)$ i $C(z)$ proizvoljno izabrani polinomi, tj.

$$A(z) y(k) = B(z) u(k) + C(z) e(k)$$

ili ekvivalentno

$$y(k) = \frac{B(z)}{A(z)}u(k) + \frac{C(z)}{A(z)}e(k)$$

odnosno

$$y(k) = G(z)u(k) + H(z)e(k) = G(z)u(k) + v(k) = y_m(k) + v(k)$$

gde su odgovarajuće funkcije prenosa

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}; \quad H(z) = \frac{C(z)}{A(z)}.$$

ARMAX model spada u klasu modela tipa greške jednačine (EE modeli), kod kojih je greška jednačine modelovana procesom pomičnih sredina $C(z)e(k)$ (eng. *Moving Average* ili skraćeno MA-proces). Dakle poremećaj

$$v(k) = H(z)e(k) = \frac{C(z)}{A(z)}e(k)$$

je modelovan kao korelisani ili obojeni šum koji je dobijen propuštanjem belog šuma $e(k)$ kroz ARMA sistem (filtar), tj. generisan je ARMA-procesom

$$A(z)v(k) = C(z)e(k)$$

gde prvi član $A(z)v(k)$ predstavlja AR deo, a drugi član $C(z)e(k)$ MA deo opisanog ARMA-procesa. Poslednja relacija može se napisati i u obliku diferentne jednačine

$$v(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i v(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i e(k-i) + e(k)$$

Poslednji izraz je dobijen tako što su polinomi $A(z)$ i $C(z)$ zamenjeni odgovarajućim izrazima, uz tumačenje z^{-1} operatora jediničnog kašnjenja.

Na sličan način, izlaz procesa $y_m(k)$ generisan je ARX modelom

$$y_m(k) = G(z)u(k) = \frac{B(z)}{A(z)}u(k)$$

odnosno polinomijalnom relacijom

$$A(z)y_m(n) = B(z)u(k)$$

odakle sledi diferentne jednačine za generisanje izlaza

$$y_m(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y_m(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i)$$

Primetimo na kraju da se kompletan izlaz

$$y(k) = y_m(k) + v(k) = G(z)u(k) + H(z)e(k) = \frac{B(z)}{A(z)}u(k) + \frac{C(z)}{A(z)}e(k)$$

može prikazati u polinomijalnoj ARMAX formi

$$A(z)y(k) = B(z)u(k) + C(z)e(k)$$

Kojoj odgovara diferencna jednačina

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i e(k-i) + e(k)$$

ili alternativna jednačina linearne regresije

$$y(k) = X^T(k-1)\theta + e(k)$$

gde je regresioni vektor

$$X^T(k-1) = \{-y(k-1) - y(k-2) \cdots - y(k-n_a) \ u(k-1) \ u(k-2) \cdots \\ \cdots \ u(k-n_b) \ e(k-1) \ e(k-2) \cdots \ e(k-n_c)\}$$

a vektor parametara

$$\theta^T = \{a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{n_a} \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n_b} \ c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{n_c}\}$$

Problem nastaje što su u regresionom vektoru merljivi samo ulazno-izlazni podaci $\{u(i), y(i)\}$, dok beli šum $\{e(i)\}$ nije merljiv signal. Stoga je neophodno da se odbirci belog šuma u regresionom vektoru zamene nekom njihovom procenom, o čemu će više biti reči u poglavlju posvećenom parametarskoj identifikaciji sistema.

2.3.4 OE model (Model greške izlaza)

Ovaj model predstavlja specijalan slučaj opšte strukture modela u kojoj je

$$A(z) = C(z) = D(z) = 1,$$

a $B(z)$ i $F(z)$ predstavljaju proizvoljne polinome. Dakle, ova struktura ima formu

$$y(k) = \frac{B(z)}{F(z)}u(k) + e(k)$$

ili ako se uvede pomoćni deterministički signal

$$\omega(k) = \frac{B(z)}{F(z)}u(k)$$

data se struktura može zapisati kao

$$F(z)\omega(k) = B(z)u(k)$$

$$y(k) = \omega(k) + e(k) = y_m(k) + e(k)$$

Dobijeni izraz ukazuje na motiv da se ovakav model nazove model greške izlaza, pošto član $e(k)$ u drugoj relaciji ima smisao greške koja se superponira na izlaz $\omega(k) = y_m(k)$ odgovarajućeg determinističkog sistema u cilju formiranja izlaza $y(k)$. OE model može se zapisati i u obliku

$$y(k) = G(z)u(k) + H(z)e(k)$$

gde su odgovarajuće funkcije prenosa

$$G(z) = \frac{B(z)}{F(z)}; \quad H(z) = 1$$

Uočava se da funkcija prenosa procesa (sistema) $G(z)$ i funkcija prenosa poremećaja $H(z)$ nemaju zajedničke parametre, te se kaže da su model procesa i model poremećaja nezavisno parametrizovani.

Polinomijalna relacija kojom je generisan izlaz $\omega(k) = y_m(k)$ determinističkog dela sistema

$$F(z)\omega(k) = B(z)u(k)$$

može se zapisati u formi diferencne jednačine

$$\omega(k) = -\sum_{i=1}^{n_f} f_i \omega(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i)$$

pa se kompletan izlaz može prikazati kao

$$y(k) = \omega(k) + e(k) = -\sum_{i=1}^{n_f} f_i \omega(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) + e(k)$$

Navedenoj diferencnoj jednačini odgovara jednačina linearne regresije

$$y(k) = X^T(k-1)\theta + e(k)$$

gde je regresioni vektor

$$X^T(k-1) = \{-w(k-1) - w(k-2) \cdots - w(k-n_f) \quad u(k-1) \quad u(k-2) \cdots u(k-n_b)\}$$

a vektor parametara je definisan kao

$$\theta^T = \{-f_1 - f_2 \cdots - f_{n_f} \quad b_1 \quad b_2 \cdots b_{n_b}\}$$

Uočava se da se, za razliku od ARX modela koji je EE tipa, kod ovog OE modela u regresionom vektoru pojavljuju zakašnjeni odbirci izlaza ω determinističkog dela sistema, a ne kao kod EE modela zakašnjeni odbirci kompletnog izlaza y . To predstavlja osnovnu razliku između OE i EE tipova modela.

2.3.5 BJ model (Box-Jenkinsov model)

Ovaj model predstavlja specijalan slučaj opšte strukture modela u kojoj je

$$A(z) = 1,$$

tako da model ima oblik

$$y(k) = \frac{B(z)}{F(z)}u(k) + \frac{C(z)}{D(z)}e(k)$$

ili alternativno

$$y(k) = G(z)u(k) + H(z)e(k) = G(z)u(k) + v(k)$$

gde su odgovarajuće funkcije prenosa

$$G(z) = \frac{B(z)}{F(z)}, \quad H(z) = \frac{C(z)}{D(z)}e(k)$$

Uočava se da se poremećaj

$$v(k) = H(z)e(k) = \frac{C(z)}{D(z)}e(k)$$

dobija propuštanjem belog šuma $e(k)$ kroz odgovarajuću funkciju prenosa $H(z) = C(z)/D(z)$, odnosno da je generisan ARMA-procesom

$$D(z)v(k) = C(z)e(k)$$

gde član $D(z)v(k)$ predstavlja AR-proces, a član $C(z)e(k)$ opisuje MA-proces u navedenom ARMA-procesu. Ovakva ARMA struktura može se zapisati u obliku diferentne jednačine

$$v(k) = -\sum_{i=1}^{n_d} d_i v(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i e(k-i) + e(k)$$

Poslednji izraz je dobijen zamenom odgovarajućih izraza za polinome $D(z)$ i $C(z)$ i korišćenjem definicionog izraza za operator kašnjenja, tj. $z^{-i}x(k) = x(k-i)$. Primitimo, takođe, da funkcija prenosa procesa (sistema) $G(z)$ i funkcija prenosa aditivnog poremećaja $v(k)$ na izlazu sistema $y(k)$ nemaju zajedničkih parametara, tako da su ove funkcije prenosa nezavisno parametrizovane.

Uvodeći oznaku za izlaz determinističkog dela procesa

$$\omega(k) = y_m(k) = G(z)u(k) = \frac{B(z)}{F(z)}u(k)$$

ovaj izlaz se može generisati na osnovu polinomijalne jednačine

$$F(z)\omega(k) = B(k)u(k)$$

odnosno odgovarajuće diferentne jednačine

$$\omega(k) = -\sum_{i=1}^{n_f} f_i \omega(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i)$$

Imajući u vidu da je poremećaj generisan ARMA procesom

$$v(k) = - \sum_{i=1}^{n_d} d_i v(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i e(k-i) + e(k)$$

Kompletan ulaz definisan je diferentnom jednačinom

$$\begin{aligned} y(k) &= \omega(k) + v(k) \\ &= - \sum_{i=1}^{n_f} f_i \omega(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^{n_d} d_i v(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i e(k-i) + e(k) \end{aligned}$$

kojoj odgovara jednačina linearne regresije

$$y(k) = X^T(k-1)\theta + e(k)$$

gde je regresioni vektor

$$\begin{aligned} X^T(k-1) &= \{-\omega(k-1) \cdots -\omega(k-n_f) \ u(k-1) \cdots u(k-n_b) - v(k-1) \cdots \\ &\quad \cdots - v(k-n_d) \ e(k-1) \cdots e(k-n_c)\} \end{aligned}$$

a vektor parametara

$$\theta^T = \{-f_1 \cdots -f_{n_f} \ b_1 \cdots b_{n_b} \ -d_1 \cdots -d_{n_d} \ c_1 \cdots c_{n_c}\}$$

Primitimo da je i ovo model OE tipa, pošto se u regresionom vektoru pojavljuju zakašnjeni odbirci izlaza ω determinističkog dela sistema, a ne zakašnjeni odbirci kompletnog ulaza y , što je slučaj sa modelima EE tipa. Takođe, u regresionom vektoru su poznati samo deterministički izlaz ω (računa se na osnovu navedene diferencne jednačine), izmereni ulaz u , dok se poremećaj v može proceniti na osnovu merenja izlaza y i izračunatog determinističkog izlaza ω ($y(k) = \omega(k) + v(k)$), pri čemu je beli šum e nemerljivi signal, te se njegovi odbirci moraju na neki način proceniti. O ovom problemu biće više reči u poglavlju posvećenom parametarskoj identifikaciji.

Postupak svodenja opšte strukture (reprezentacije) modela na specifičan oblik, na osnovu pogodnog izbora odgovarajućih polinoma koji definišu opštu strukturu modela, definisan je u tabeli 2.1. U tabeli 2.1 oznaka "1" označava da je odgovarajući polinom fiksiran na jedinicu (polinom nultog reda čiji je slobodan član jednak 1), dok simbol "✓" označava potpuno slobodan izbor odgovarajućeg polinoma.

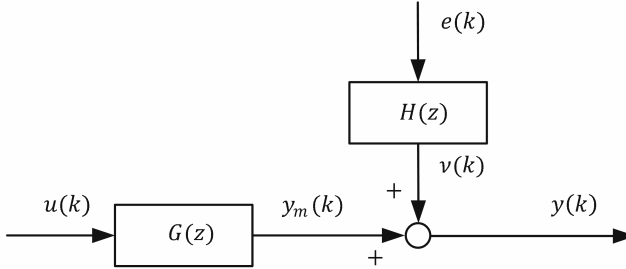
Osnovna razlika između različitih struktura nalazi se u načinu na koji je modelovan aditivni poremećaj (šum) na izlazu sistema. Pri tome, AR i ARMAX strukture pripadaju klasi struktura tipa greške jednačine, tzv. EE strukture, dok OE i BJ strukture pripadaju klasi struktura tipa greške izlaza, tzv. OE strukture. Kod struktura tipa EE model procesa (sistem) i model poremećaja (šuma) sadrže zajedničke parametre, te se ne mogu nezavisno parametrizovati, dok kod strukture OE tipa ova dva modela nemaju zajedničkih parametara, te se mogu nezavisno parametrizovati.

Struktura	Polinom	A	B	C	D	F
OPŠTA		✓	✓	✓	✓	✓
FIR		1	✓	1	1	1
ARX		✓	✓	1	1	1
ARMAX		✓	✓	✓	1	1
OE		1	✓	1	1	✓
BJ		1	✓	✓	✓	✓

Tabela 2.1: Različite strukture (reprezentacije) modela procesa, na osnovu izbora odgovarajućih polinoma u opštoj strukturi modela

2.4 Opšta neparametarska reprezentacija black-box modela

Model sistema, koji obuhvata i kontrolni signal $u(k)$ i poremećaj $v(k)$, prikazan je blok dijagramom prikazanom na slici 2.5



Slika 2.5: Model sistema sa poremećajem čije je dejstvo svedeno na izlaz sistema

Prikazani model je opšti “black-box” model i predstavlja neparametarsku reprezentaciju u vremenskom domenu. Izlaz modela dat je relacijom

$$y(k) = y_m(k) + v(k) = G(z)u(k) + H(z)e(k)$$

U ovakvom modelu obično se podrazumevaju sledeće tvrdnje:

1. Funkcija prenosa $G(z)$ je striktno kauzalna, tj. $g(\ell) = 0$ za $\ell \leq 0$.
2. Funkcija prenosa $H(z)$ je kauzalni monic-funkcija, tj. $h(\ell) = 0$ za $\ell < 0$ i $h(0) = 1$.
3. Razmatrani sistemi koji generišu izlaz procesa $y_m(k)$ i ekvivalentni poremećaj na izlazu $v(k)$ su linearni i vremenski-invarijantni, a modelovani su funkcijama prenosa $G(z)$ i $H(z)$, respektivno.
4. Svi slučajni procesi su generisani kao široko (slabo) ergodični slučajni procesi.

2.5 Neparametarska identifikacija sistema

Osnovne neparametarske reprezentacije (strukture) modela sistema predstavljaju: impulsni odziv, funkcija prenosa, frekvencijski lik (karakteristika) i spektar snage.

Sve ove reprezentacije sadrže vrlo veliki broj parametara, teorijski beskonačan, te se otuda nazivaju neparametarske reprezentacije. Nakon usvajanja strukture (reprezentacije) modela primenjuje se neka od metoda za identifikaciju sistema, čiji je osnovni zadatak da proceni (estimira)

brojne vrednosti velikog broja parametara usvojene strukture modela na bazi raspoloživih merenja ulaznog i izlaznog signala sistema. Metod neparametarske identifikacije može se formulirati u vremenskom domenu ili u frekvencijskom domenu. Metod neparametarske identifikacije u vremenskom domenu zasniva se na korelacionoj analizi, dok se u frekvencijskom domenu uobičajeno koristi jedna od tri sledeće metode identifikacije, koje su zasnovane na analizi frekvencijskog odziva, korelacionoj analizi i Fourierovoj analizi, respektivno. Za uspešno izvršenje zadatka identifikacije posebno je važan izbor ulaznog (pobudnog) signala, koji mora biti dovoljno “bogat (eng. *rich enough*)”, kako bi adekvatno pobudio sistem, tako da se informacije o svim nepoznatim parametrima koje treba proceniti sadržati u odzivu (izlazu) sistema. Pojam “bogatstva” pobudnog signala formalno se iskazuje preko stepena perzistencije eksitacije (eng. *persistence of excitation*), o čemu će biti više reči u nastavku ovog poglavlja.

2.5.1 Neparametarska identifikacija sistema u vremenskom domenu: metod korelacione analize

Procena odbiraka impulsnog odziva sistema može se generisati na bazi korelacione analize. Osnovna ideja zasniva se na potiskivanju šuma putem korelacije raspoloživih mernih podataka sa odgovarajućim signalima.

Reprezentacija (struktura) linearnog diskretnog vremenskog invarijantnog kauzalnog modela sistema preko impulsnog odziva data je sa

$$y(k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell)u(k-\ell) + \nu(k)$$

gde su $\{u(k)\}$, $\{y(k)\}$ i $\{\nu(k)\}$ diskretni ulazni signal, diskretni izlazni signal i poremećaj, respektivno, dok niz $\{g(k)\}$ označava odbirke impulsnog odziva sistema. Uobičajeno se pretpostavlja da je ulaz $\{u(k)\}$ široko (slabo) stacionaran slučajni proces, nulte srednje vrednosti, koji je nekoreliisan sa diskretnim slučajnim procesom $\{\nu(k)\}$, nulte srednje vrednosti, odnosno srednje vrednosti ulaznog signala i poremećaja zadovoljavaju uslove

$$\bar{u} = m_u = \overline{E}\{u(k)\} = 0, \quad \bar{\nu} = m_\nu = \overline{E}\{\nu(k)\} = 0$$

dok je kros-korelaciona funkcija između ulaznog signala i poremećaja data sa

$$R_{u\nu}(\tau) = \overline{E}\{u(k)\nu(k-\tau)\} = 0, \quad \text{za } \forall k, \tau \in \mathbb{Z}$$

gde je \mathbb{Z} skup celih brojeva. U navedenim izrazima simbol $\overline{E}\{\cdot\}$ označava generalisano matema-

tičko očekivanje. Tada je kros-korelaciona funkcija između izlaza i pobude definisana sa

$$\begin{aligned}
 R_{yu}(\tau) &= \overline{E} \{y(k)u(k-\tau)\} = \overline{E} \left\{ \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell)u(k-\ell) + \nu(k) \right] u(k-\tau) \right\} \\
 &= \overline{E} \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell)u(k-\ell)u(k-\tau) + \nu(k)u(k-\tau) \right\} \\
 &= \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) \overline{E} \{u(k-\ell)u(k-\tau)\} + \overline{E} \{\nu(k)u(k-\tau)\} \\
 &= \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) R_u((k-\ell) - (k-\tau)) + R_{\nu u}(k - (k-\tau))
 \end{aligned}$$

odnosno, pošto je $R_{u\nu} = 0$,

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) R_u(\tau - k) \quad \text{za } \forall \tau \in \mathbb{Z}$$

Dobijeni izraz za različite vrednosti $\tau \in [1, \infty)$ definiše sistem od beskonačno jednačina (pošto je po pretpostavci sistem striktno kauzalan to je $g(0) = 0$). Međutim, ukoliko je razmatrani sistem stabilan, tada će impulsni odziv sistema iščezavati sa vremenom, odnosno uvek će postojati neka pozitivna konstanta M takva da je

$$|g(\ell)| = 0 \quad \text{za } \ell > M.$$

Tada se dobijena jednačina svodi na

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) R_u(\tau - \ell)$$

a njoj za $\tau \in [1, M]$ odgovara linearan sistem od M jednačina po nepoznatim parametrima $g(1)$, $g(2)$, \dots , $g(M)$ (sistem je striktno kauzalan pa je $g(0) = 0$)

$$\begin{aligned}
 R_{yu}(1) &= g(1)R_u(0) + g(2)R_u(-1) + \dots + g(M)R_u(1-M) \\
 R_{yu}(2) &= g(1)R_u(1) + g(2)R_u(0) + \dots + g(M)R_u(2-M) \\
 &\vdots \\
 R_{yu}(M) &= g(1)R_u(M-1) + g(2)R_u(M-2) + \dots + g(M)R_u(0)
 \end{aligned}$$

Navedeni sistem jednačina može se zapisati u obliku linearne vektorske jednačine

$$\begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(-1) & \dots & R_u(1-M) \\ R_u(1) & R_u(0) & \dots & R_u(2-M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(M-1) & R_u(M-2) & \dots & R_u(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(1) \\ g(2) \\ \vdots \\ g(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{yu}(1) \\ R_{yu}(2) \\ \vdots \\ R_{yu}(M) \end{bmatrix}$$

Imajući u vidu da je autokorelaciona matrica ulaza definisana na bazi n odbiraka sa

$$R_u^n(k) = \overline{E} = \left\{ \begin{bmatrix} u(k) - \bar{u} \\ u(k-1) - \bar{u} \\ \vdots \\ u(k-n+1) - \bar{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) - \bar{u} \\ u(k-1) - \bar{u} \\ \vdots \\ u(k-n+1) - \bar{u} \end{bmatrix}^T \right\} = \overline{E} \{U_n(k)U_n^T(k)\}$$

gde je n -dimenzioni vektor kolona, koji sadrži tekući odbirak pobude u trenutku k i $(n-1)$ prethodnih odbiraka pobudnog signala u diskretnim trenucima $(k-1), \dots, (k-n+1)$ odakle sledi

$$R_u^n(k) = \begin{bmatrix} \overline{E} \{(u(k) - \bar{u})^2\} & \overline{E} \{(u(k) - \bar{u})(u(k-1) - \bar{u})\} & \dots & \overline{E} \{(u(k) - \bar{u})(u(k-n+1) - \bar{u})\} \\ \overline{E} \{(u(k-1) - \bar{u})(u(k) - \bar{u})\} & \overline{E} \{(u(k-1) - \bar{u})^2\} & \dots & \overline{E} \{(u(k-1) - \bar{u})(u(k-n+1) - \bar{u})\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{E} \{(u(k-n+1) - \bar{u})(u(k) - \bar{u})\} & \overline{E} \{(u(k-n+1) - \bar{u})(u(k-1) - \bar{u})\} & \dots & \overline{E} \{(u(k-n+1) - \bar{u})^2\} \end{bmatrix}$$

Ako se dalje uvede oznaka za M -dimenzioni vektor nepoznatih parametara θ

$$\theta_M^T = [g(1) \ g(2) \ \dots \ g(M)]$$

i kros-korelacionu matricu izlaza u tekućem trenutku k i zakašnjenog vektora ulaznih signala $U_n(k-1)$ koji sadrži $(n-1)$ odbiraka ulaza u prethodnim trenucima, $(k-1), (k-2), \dots, (k-n)$,

$$\begin{aligned} R_{yu}^n(k) &= \\ &= \overline{E} \left\{ (y(k) - \bar{y}) [u(k-1) - \bar{u} \ u(k-2) - \bar{u} \ \dots \ u(k-n) - \bar{u}]^T \right\} = \overline{E} \{y(k)U_n(k-1)\} \\ &= [\overline{E} \{(y(k) - \bar{y})(u(k-1) - \bar{u})\} \ \overline{E} \{(y(k) - \bar{y})(u(k-2) - \bar{u})\} \ \dots \ \overline{E} \{(y(k) - \bar{y})(u(k-n) - \bar{u})\}]^T \\ &= [R_{yu}(1) \ R_{yu}(2) \ \dots \ R_{yu}(n)]^T \end{aligned}$$

dobijeni sistem linearnih jednačina može se napisati u formi vektorske jednačine

$$R_u^M(k)\theta_M = R_{yu}^M(k)$$

Procena (ocena, estimacija) nepoznatog vektora parametara θ , koji sadrži tražene vrednosti odbiraka impulsnog odziva, dobija se rešavanjem ovog linearnog sistema jednačina po nepoznatim elementima vektora parametara θ , odakle se dobija

$$\hat{\theta}_M = \begin{bmatrix} \hat{g}(1) \\ \hat{g}(2) \\ \vdots \\ \hat{g}(M) \end{bmatrix} = [R_u^M(k)]^{-1} R_{yu}^M(k)$$

gde simbol “ $\hat{\ }$ ” označava procenu (estimiranu vrednost). Ovde je pretpostavljeno da odgovarajuća inverzna matrica postoji, kao i da su poznati odbirci autokorelacione funkcije ulaza $R_u(0), R_u(\pm 1)$,

$\dots, R_u(\pm(M-1))$ (podsetimo se da je $R_u(-\tau) = R_u(\tau)$ za $\forall \tau \in \mathbb{Z}$) i kros-korelacione funkcije izlaza i ulaza $R_{yu}(1), R_{yu}(2), \dots, R_{yu}(M)$. Ako autokorelaciona i kros korelaciona funkcija nisu poznate, one se moraju proceniti nekim od prethodno razmatranih algoritama, kod kojih je egzaktno matematičko očekivanje zamenjeno konačnom sumom (videti prethodno poglavlje). Uslov egzistencije inverzije autokorelacione matrice ulaza vezan je za uslov perzistentne eksitacije ovog signala, o čemu će biti naknadno više reči. Drugim rečima, jedino ukoliko je pobuda signal perzistentne eksitacije postojaće inverzija navedene matrice. Uz navedeno, korelaciona analiza se koristi i za određivanje kašnjenja u odzivu sistema, o čemu će kasnije takođe biti više reči. Alternativno se impulsni odziv sistema može odrediti i primenom metoda najmanjih kvadrata, koji predstavlja algoritam parametarske identifikacije, a biće detaljno razmatran u narednom poglavlju.

Posebno ukoliko je pobuda $u(k)$ beli šum nulte srednje vrednosti $\bar{u} = 0$, tada je

$$R_u(\tau) = \sigma_u^2 \Delta(\tau); \quad \sigma_u^2 = R_u(0)$$

gde je Kronekerov diskretni delta impuls definisan kao $\Delta(0) = 1$ i $\Delta(\tau) = 0$ za $\tau \in \mathbb{Z}$ i $\tau \neq 0$. U navedenom slučaju autokorelaciona matrica ulaza svodi se na dijagonalnu matricu, čiji je element na glavnoj dijagonali $R_u(0) = \sigma_u^2$, tako da je

$$R_u^M(k) = \sigma_u^2 I; \quad [R_u^M(k)]^{-1} = \frac{1}{\sigma_u^2} I_M$$

gde je I_M jedinična matrica dimenzije $M \times M$, a σ_u^2 varijansa pobudnog signala, odakle se za procene odbiraka impulsnog odziva dobija

$$\hat{g}(\ell) = \frac{R_{yu}(\ell)}{\sigma_u^2}; \quad \ell = 1, 2, \dots, M$$

2.5.2 Neparametarska identifikacija sistema u frekvencijskom domenu

Kao što je već navedeno, postoji nekoliko pristupa neparametarskoj identifikaciji sistema u frekvencijskom domenu, od kojih su najrasprostranjenija sledeća tri: metod identifikacije na bazi analize frekvencijskog odziva sistema, metod identifikacije na osnovu analize frekvencijskog odziva uz primenu korelacione analize i metod identifikacije zasnovan na diskretnoj Fourierovoj analizi frekvencijskog odziva i empirijskoj proceni funkcije prenosa.

Metod neparametarske identifikacije sistema u frekvencijskom domenu na osnovu analize frekvencijskog odziva sistema

Metod analize frekvencijskog odziva, odnosno odziva sistema na prosto-periodičnu (sinusnu ili kosinusnu) pobudu, predstavlja računski najjednostavniji metod za procenu frekvencijske karakteristike (lika ili funkcije) sistema. Metod je motivisan činjenicom da frekvencijska karakteristika $G(e^{j\omega})$ ukazuje šta se dešava u ravnotežnom stanju, koje nastupa nakon iščezavanja prelaznog procesa, sa prostoperiodičnim (sinusnim ili kosinusnim) signalom odgovarajuće kružne učestanosti,

ω , kada se propusti kroz linearan diskretan vremenski invarijantan stabilan sistem, čija je funkcija prenosa $G(z)$. Naime, izlazni signal ili odziv sistema na takvu pobudu biće takođe prostoperiodičan (sinusni ili kosinusni) signal iste kružne učestanosti, ω , ali različite amplitude (amplituda ulaznog signala biće pomnožena sa $|G(e^{j\omega})|$ i faznog stava (fazni stav izlaznog signala biće pome- ren u odnosu na fazni stav ulaznog signala za $\arg G(e^{j\omega})$). Dakle, ako se prostoperiodičan ulazni signal

$$u(k) = A \cos(\omega k)$$

propusti kroz pomenuti sistem, odziv sistema na ovakvu pobudu biće

$$y(k) = A |G(e^{j\omega})| \cos(\omega k + \arg G(e^{j\omega})) + \nu(k) + y_{pp}(k)$$

gde je frekvencijska karakteristika (amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika) sistema

$$G(e^{j\omega}) = |G(e^{j\omega})| e^{j \arg G(e^{j\omega})}$$

Takođe, apsolutna vrednost (moduo) $|G(e^{j\omega})|$ amplitudsku frekvencijsku karakteristiku, dok $\arg G(e^{j\omega})$ definiše faznu frekvencijsku karakteristiku. Član $\nu(k)$ predstavlja ekvivalentan šum na izlazu sistema, a $y_{pp}(k)$ komponenta odziva sistema u prelaznom režimu (nastaje neposredno nakon dovođenja pobude i traje dok sistem ne uđe u ravnotežno stanje, tj. uvek postoji indeks vremena $k_0 > 0$, takav da je $y_{pp}(k) = 0$ za $k > k_0$). Osnovna ideja ovog metoda identifikacije sastoji se u pobuđivanju sistema prostoperiodičnim signalom zadate kružne učestanosti, ω , i merenju amplitude i faznog stava izlaznog signala u ravnotežnom stanju. U ovakvom postupku je zanemaren uticaj nemerljivog poremećaja $\nu(k)$, pošto on po pretpostavci ima nultu srednju vrednost, tj. $\bar{\nu} = 0$. Dakle, ako je odziv u stacionarnom (ravnotežnom) stanju, na prostoperiodičnu pobudu

$$u(k) = A \cos(\omega k)$$

dat sa

$$y(k) = B \cos(\omega k + \varphi)$$

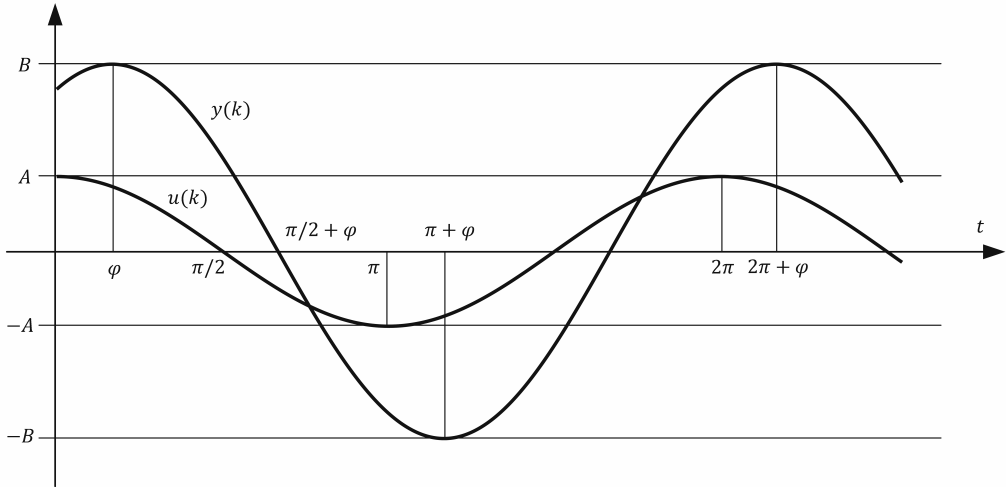
tada je

$$|G(e^{j\omega})| = \frac{B}{A}; \quad \arg G(e^{j\omega}) = (\omega k + \varphi) - (\omega k) = \varphi$$

pošto je fazni stav prosto-periodičnog izlaza $(\omega k + \varphi)$, a fazni stav prosto-periodične pobude (ωk) .

Grafički postupak za određivanje amplitude i faznog pomeraja izlaznog signala, u poređenju sa pobudnim signalom, prikazan je na slici 2.6

Menjajući kružnu učestanost pobude, ω , tj. uzimajući nekoliko različitih vrednosti za ω , ($\omega = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$) i snimajući izlaz sistema, može se odrediti frekvencijska karakteristika u nekoliko tačaka (u našem slučaju n) u frekvencijskom području od interesa (u ovom frekvencijskom području se nalazi frekvencijski sadržaj korisnog pobudnog signala koji se prenosi i obrađuje datim sistemom). Međutim, prikazani grafički postupak određivanja amplitude i faznog pomeraja nije pogodan u praksi, zbog prisustva šuma. U opštem slučaju traženi parametri (B i φ) se mogu odrediti na bazi "fitovanja" mernih podataka. Naime, u ovakvom postupku se pretpostavlja da je talasni oblik izlaznog signala prostoperiodična funkcija poznate kružne učestanosti,



Slika 2.6: Prosto-periodični test pobudni signal $u(t) = A \cos(\omega t)$ i odziv sistema $y(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$, ($\omega = 1 \text{ rad/sec}$)

tj. $y(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$, pa se nepoznati parametri određuju na bazi poznatih merenja $y(t_k)$, $t_k = kT_s$, $k \in \mathbb{Z}$, izlaznog signala u diskretnim trenucima vremena, primenjujući neku tehniku nelinearne optimizacije. O optimizacionim metodama biće više reči u nastavku ovog teksta. Takođe, eksperiment zahteva da se primeni nekoliko pobudnih signala različitih kružnih učestanosti, kao i da se merenje izlaza vrši u ravnotežnom (stacionarnom ili ustaljenom) stanju, pošto prisustvo komponente odziva prelaznog režima može imati značajan uticaj na rezultat estimacije parametara. Dakle, postupak je vremenski zahtevan, pošto zahteva da se sačeka da iščezne prelazni režim u sistemu za svaku od selektovanih pobuda (frekvencija) dođe u ravnotežno stanje. Sa druge strane, u izvesnim industrijskim sistemima nije dozvoljeno da se primenjuje prosto-periodični ulazni signal. Bez obzira na rečeno, ovaj metod je popularan u praksi, pre svega zbog računске jednostavnosti, a obično se primenjuje kada se zahteva da se frekvencijski lik (karakteristika) estimira u svega nekoliko tačaka (kružnih učestanosti).

Korelacioni metod neparametarske identifikacije sistema u frekvencijskom domenu

Metod neparametarske identifikacije koji se zasniva na analizi frekvencijskog odziva je vrlo osetljiv na prisustvo aditivnog šuma na izlazu sistema. U vremenskom domenu je uticaj šuma redukovao primenom korelacione metode za neparametarsku identifikaciju sistema. Isti efekat se primenom korelacione metode može postići i u frekvencijskom domenu. Naime, pošto je izlazni signal prosto-periodičan i poznata je njegova kružna učestanost (identična je sa kružnom učestanošću pobude), to će se korelacijom ovog izlaza sa prosto-periodičnim signalom iste kružne učestanosti

eliminirati uticaj šuma na izlazni signal. Postupak se sastoji u sledećem.

Korelacija izlaznog signala (odziva)

$$y(k) = A |G(e^{j\omega})| \cos(\omega k + \varphi) + \nu(k)$$

koji je dobijen kada je pobuda (eksitacija ili ulaz) takođe prosto-periodičan signal iste kružne učestanosti

$$u(k) = A \cos(\omega k)$$

dok je funkcija prenosa sistema $G(q)$, odnosno frekvencijska karakteristika

$$G(e^{j\omega}) = |G(e^{j\omega})| e^{j\varphi}; \quad \varphi = \arg G(e^{j\omega}),$$

sa kosinusnim signalom iste kružne učestanosti, $\cos(\omega k)$, definisana je sa

$$I_c(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \cos(\omega k)$$

odnosno nakon zamene izraza za $y(k)$ dobija se relacija

$$I_c(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A |G(e^{j\omega})| \cos(\omega k + \varphi) \cos(\omega k) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \nu(k) \cos(\omega k)$$

Koristeći standardne trigonometrijske (adicione) formule

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

dobija se

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

Usvajajući dalje $\alpha = \omega k + \varphi$ i $\beta = \omega k$ definisani korelacioni izraz postaje

$$\begin{aligned} I_c(\omega) &= A |G(e^{j\omega})| \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\cos(\varphi) + \cos(2\omega k + \varphi)] + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \nu(k) \cos(\omega k) \\ &= \frac{A}{2} |G(e^{j\omega})| \cos \varphi \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1 + \frac{A}{2} |G(e^{j\omega})| \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos(2\omega k + \varphi) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \nu(k) \cos(\omega k) \end{aligned}$$

odnosno

$$I_c(\omega) = \frac{A}{2} |G(e^{j\omega})| \cos \varphi + \frac{A}{2} |G(e^{j\omega})| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos(2\omega k + \varphi) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \nu(k) \cos(\omega k)$$

Pošto je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos(2\omega k + \varphi) = 0$$

i pošto, ukoliko šum $\nu(k)$ ne sadrži determinističku periodičnu komponentu iste kružne učestanosti ω , takođe važi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \nu(k) \cos(\omega k) = 0$$

zaključuje se da je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_c(\omega) = \frac{A}{2} |G(e^{j\omega})| \cos(\varphi)$$

Na sličan način se može definisati i korelacija izlaznog signala $y(k)$ sa determinističkim sinusnim signalom iste kružne učestanosti

$$I_s(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \sin(\omega k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A |G(e^{j\omega})| \cos(\omega k + \varphi) \sin(\omega k) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \nu(k) \sin(\omega k)$$

Koristeći standardne trigonometrijske izraze

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

dobija se

$$\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

Usvajajući $\alpha = \omega k + \varphi$ i $\beta = \omega k$ u izrazu za definisanu korelacionu funkciju dobija se

$$\begin{aligned} I_s(\omega) &= A |G(e^{j\omega})| \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin(2\omega k + \varphi) - A |G(e^{j\omega})| \sin(\varphi) \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N N \nu(k) \sin(\omega k) \\ &= -\frac{A}{2} |G(e^{j\omega})| \sin(\varphi) + \frac{A}{2} |G(e^{j\omega})| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin(2\omega k + \varphi) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N N \nu(k) \sin(\omega k) \end{aligned}$$

Pošto je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N N \nu(k) \sin(2\omega k + \varphi) = 0$$

i ukoliko šum $\nu(k)$ ne sadrži deterministički periodični signal iste kružne učestanosti ω takođe važi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N N \nu(k) \sin(\omega k) = 0$$

tako da se zaključuje

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_s(\omega) = -\frac{A}{2} |G(e^{j\omega})| \sin(\varphi)$$

Na osnovu izvedenih asimptotskih izraza $n \rightarrow \infty$ za korelacione funkcije $I_c(\omega)$ i $I_s(\omega)$ zaključuje se da je

$$I_c^2(\omega) + I_s^2(\omega) = \frac{A^2}{4} |G(e^{j\omega})|^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))$$

$$\frac{I_s(\omega)}{I_c(\omega)} = -\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\operatorname{tg}(\varphi)$$

Imajući u vidu da je $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$, dalje se za procene apsolutne vrednosti $|G(e^{j\omega})|$ i ugla (argumenta) $\arg G(e^{j\omega})$ frekvencijskog lika $G(e^{j\omega})$ dobija

$$\left| \hat{G}(e^{j\omega}) \right| = \frac{\sqrt{I_c^2(\omega) + I_s^2(\omega)}}{A/2} \quad \hat{\varphi} = \arg \hat{G}(e^{j\omega}) = -\arctg \frac{I_s(\omega)}{I_c(\omega)}$$

gde simbol “ $\hat{}$ ” označava estimiranu vrednost (procenu). Glavna prednost ove metode je što se lako mogu dobiti Bodeovi dijagrami u opsegu kružnih učestanosti od interesa. Pošto je korelacionim postupkom redukovana uticaja šuma na izlazu sistema, dobijeni rezultati biće bolji nego u slučaju metode identifikacije samo na bazi analize frekvencijskog odziva. Međutim, svi nedostaci koji karakterišu poslednju metodu važe i za ovu metodu. Naime, mnogi industrijski postupci ne dozvoljavaju da se primene prosto-periodične pobude u normalnom režimu rada; takođe, mora se sačekati da sistem dostigne ravnotežno (ustaljeno ili stacionarno) stanje da bi se izmerile vrednosti izlaznog signala $y(k)$, $k = 1, \dots, N$ a eksperiment treba ponoviti za nekoliko vrednosti kružne učestanosti ω pobudnog signala; stoga je i ovaj postupak vremenski zahtevan.

2.6 Neparametarska prezentacija “black-box” modela sistema u frekvencijskom domenu

2.6.1 Frekvencijska karakteristika (funkcija ili lik) sistema

Ekvivalent funkcije prenosa sistema $G(q)$ u frekvencijskom domenu predstavlja frekvencijska funkcija (lik ili karakteristika) sistema. Ona se dobija zamenom varijable q u funkciji prenosa kompleksnom varijablom $e^{j\omega}$, gde je j imaginarna jedinica ($j^2 = -1$). Koncept frekvencijske funkcije može se objasniti na sledeći način. Pretpostavimo da je sistem $G(q)$ pobuđen prostoperiodičnim signalom

$$u(k) = \cos(k\omega_o), \quad -\pi < \omega_o < \pi$$

Uobičajeno je da se ovakav signal označi kao realan deo odgovarajućeg kompleksnog broja, tj.

$$u(k) = \Re \{ e^{j\omega_o k} \}$$

gde $\Re \{ \cdot \}$ označava realan deo kompleksnog broja unutar vitičastih zagrada. Tada je odziv sistema definisan konvolucijom impulsnog odziva $\{g(k)\}$ i zadate pobude, tj.

$$\begin{aligned} y(k) &= g(k) * u(k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) u(k-\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) \Re \{ e^{j\omega_o(k-\ell)} \} = \Re \left\{ e^{j\omega_o k} \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) e^{-j\omega_o \ell} \right\} \\ &= \Re \{ e^{j\omega_o k} G(j\omega_o) \} \end{aligned}$$

Ako se kompleksni broj $G(j\omega_o)$ zapiše u polarnom (trigonometrijskom) obliku

$$G(j\omega_o) = |G(j\omega_o)| e^{j \arg G(j\omega_o)}$$

konačno se dobija

$$y(k) = |G(j\omega_o)| \Re \left\{ e^{j(\omega_o k + \arg G(j\omega_o))} \right\} = |G(j\omega_o)| \cos(\omega_o k + \arg G(j\omega_o))$$

Izvršena analiza podrazumeva da je periodična pobuda primenjena dovoljno dugo tako da je prelazni režim u sistemu iščezao i da se sistem nalazi u ravnotežnom (ustaljenom ili stacionarnom) stanju. Ovo će se uvek desiti ukoliko je sistem stabilan. Ako to nije slučaj, pored komponente odziva u ravnotežnom stanju, koja je definisana prikazanom relacijom, mora se u kompletnom odzivu dodati i komponenta odziva koja karakteriše prelazni proces (režim).

Izvedeni izraz pokazuje da će odziv u ravnotežnom stanju linearnog vremenski invarijantnog diskretnog i stabilnog sistema na prostoperiodičnu pobudu kružne učestanosti ω_o biti takođe prostoperiodičan signal iste kružne učestanosti, ali je amplituda pobudnog signala pomnožena sa faktorom $|G(j\omega_o)|$, a fazni stav ovog signala je promenjen za faktor $\arg G(j\omega_o)$ [rad]. Dakle, kompleksni broj $G(j\omega_o)$, koji predstavlja vrednost funkcije prenosa $G(q)$ kada se za varijablu q

usvoji $e^{j\omega_0}$, tj. $q = e^{j\omega_0}$, daje kompletnu informaciju o tome šta se dešava sa sistemom kada se pobudi prostoperiodičnim signalom odgovarajuće kružne učestanosti ω_0 .

Pošto je $|e^{j\omega}| = \sqrt{\cos^2(j\omega) + \sin^2(j\omega)} = 1$, to $e^{j\omega}$ za definiše jedinični krug u kompleksnoj ravni. Na taj način, vrednosti

$$G(e^{j\omega}) \quad \text{za} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

nazivaju se frekvencijska funkcija ili amplitudno-fazna frekvencijska karakteristika (lik) sistema, pri čemu se moduo navedenog kompleksnog broja

$$|G(e^{j\omega})| \quad \text{za} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

naziva amplitudnom frekvencijskom karakteristikom, dok se argument (ugao) ovog kompleksnog broja

$$\arg G(e^{j\omega}), -\pi \leq \omega \leq \pi$$

naziva faznom frekvencijskom karakteristikom. Kriva $G(e^{j\omega})$ za $-\pi \leq \omega \leq \pi$ u kompleksnoj " $|G(e^{j\omega})|^2$ -ravni naziva se Niquistov dijagram, dok se funkcije $|G(e^{j\omega})|$ i $\arg G(e^{j\omega})$ za vrednosti nezavisnog argumenta $-\pi \leq \omega \leq \pi$ nazivaju Bodeovim dijagramima.

2.6.2 Spektar snage signala

Široko stacionaran slučajni proces kompletno je opisan u vremenskom domenu statističkim i stohastičkim pokazateljima, odnosno srednjom vrednošću (statistički pokazatelj) i kovarijacionom funkcijom (stohastički pokazatelj). Ekvivalentan opis sistema u frekvencijskom domenu je spektar snage (eng. *power spectrum* slučajnog (stohastičkog) signala). Spektar snage široko stacionarnog slučajnog signala (procesa) se definiše kao Fourierova transformacija njegove autokovarijacione funkcije i daje informacije o raspodeli energije signala na različitim frekvencijama. Pre same formalne definicije spektra, razmotrimo neke dodatne činjenice.

Kao što je prethodno istaknuto, kovarijaciona funkcija je definisana samo za slučajne (stohastičke) signale. Da bi se u razmatranje uvela i kategorija determinističkih signala, definiše se operator generalisanog matematičkog očekivanja

$$\bar{E}\{\cdot\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E\{\cdot\}$$

U slučaju stohastičkih signala generalisano matematičko očekivanje $\bar{E}\{\cdot\}$ se svodi na klasično matematičko očekivanje $E\{\cdot\}$, pošto sumiranje nema efekta, odnosno veličine $E\{\cdot\}$ se može izvući van sume, nakon čega se dobija

$$\bar{E}\{s(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E\{s(k)\} = E\{s(k)\} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1 = E\{s(k)\} = m_s = \text{const.}$$

Sa druge strane, u slučaju determinističkih signala klasičan operator matematičkog očekivanja nema efekta, pošto je matematičko očekivanje determinističkog signala jednako samom signalu, te se generalisano matematičko očekivanje svodi na aritmetički zbir odbiraka ovog signala, odnosno na vremensko usrednjavanje

$$\bar{E}\{s(n)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E\{s(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s(k) = m_s = \text{const.}$$

Uvođenjem operatora generalisanog matematičkog očekivanja i stohastički i deterministički signali mogu se tretirati na isti način, odnosno iste definicije i osobine mogu se primeniti na obe vrste signala. Na primer, pretpostavka o širokoj (slaboj) stacionarnosti i ergodičnosti slučajnog signala može se na sličan način definisati i za slučaj determinističkih signala. Imajući ovo u vidu, dalje ćemo pretpostaviti da su svi razmatrani signali, bilo da su stohastički ili deterministički, kvazi-stacionarni u smislu sledeće definicije.

Definicija osobine kvazi-stacionarnosti signala

Signal, bilo da je deterministički ili stohastički, naziva se kvazistacionarnim ukoliko su ispunjene sledeće tvrdnje:

1. Generalisano matematičko očekivanje $\bar{E}\{s(t)\} = \bar{s}(t)$ je ograničeno za svako celobrojno t , tj. $\forall t \in Z$.
2. Kovarijaciona funkcija $\bar{E}\{[s(t) - \bar{s}(t)][s(r) - \bar{s}(r)]\} = R_s(t, r)$ je ograničena za sve celobrojne vrednosti argumenata t i r , tj. $\forall t, r \in Z$, pri čemu je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N R_s(t, t - \tau) = R_s(\tau) \quad \text{za } \forall t, \tau \in Z.$$

Navedena definicija, u osnovi, podrazumeva da srednja vrednost i energija signala imaju konačne vrednosti. Polazeći od jedinstvene definicije autokovarijacione funkcije, za stohastičke i determinističke signale, sada se na jedinstven način za obe vrste signala može definisati i njihov spektar snage, koji se često naziva i spektralna gustina snage.

Definicija spektra snage signala

Spektar snage $S_v(\omega)$ vremenski diskretnog signala $\{v(k)\}$ je Fourierova transformacija njegove auto-kovarijacione funkcije $R_v(\tau)$, odnosno

$$S_v(\omega) = \sum_{t=1}^N R_v(\tau) e^{-j\tau\omega}$$

gde je auto-kovarijaciona funkcija $R_v(\tau)$ definisana na osnovu generalisanog matematičkog očekivanja kao

$$R_v(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N R_v(t, t - \tau); \quad R_v(t, r) = \overline{E} \{ [v(t) - \bar{v}(t)] [v(r) - \bar{v}(r)] \}$$

pri čemu je $\bar{v}(t) = \overline{E} \{v(t)\}$, a $\overline{E} \{ \cdot \}$ označava operator generalisanog matematičkog očekivanja, podrazumevajući da navedena beskonačna suma postoji.

Kros (među) – spektar snage diskretnih signala $\{v(k)\}$ i $\{w(k)\}$, $S_{vw}(\omega)$, predstavlja Fourierovu transformaciju njihove kros-kovarijacione funkcije, $R_{vw}(\tau)$, odnosno

$$S_{vw}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{vw}(\tau) e^{-j\tau\omega}$$

gde je kros-kovarijaciona funkcija definisana sa

$$R_{vw}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N R_{vw}(t, t - \tau)$$

pri čemu je

$$R_{vw}(t, r) = \overline{E} \{ [v(t) - \bar{v}(t)] [w(r) - \bar{w}(r)] \}; \quad \bar{s}(t) = \overline{E} \{s(t)\}$$

pretpostavljajući egzistenciji navedene beskonačne sume.

Auto-spektar snage

$$S_v(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_v(\tau) \cos(\omega\tau) - j \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_v(\tau) \sin(\omega\tau)$$

je realna i parna funkcija ($S_v(-\omega) = S_v(\omega)$) realnog argumenta ω , pošto je $R_v(\tau)$ parna funkcija pa je imaginarni deo navedenog izraza jednak nuli, dok je kros-spektar snage $S_{vw}(\omega)$ u opštem slučaju kompleksna funkcija realnog vremena ω , pa se njegov realni deo $\Re \{S_{vw}(\omega)\}$ naziva kospetkar (eng. *cospectrum*) a imaginarni deo $\Im \{S_{vw}(\omega)\}$ kvadraturni spektar (eng. *quadrature spectrum*).

Pošto je na osnovu definicije inverzne Fourierove transformacije

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_v(\omega) e^{j\pi\omega} d\omega,$$

zaključuje se da je

$$R_v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_v(\omega) d\omega$$

pri čemu je $R_v(0) = \sigma_v^2$.

Primer (spektar prostoperiodičnog signala) Posmatrajmo prostoperiodičan deterministički signal

$$u(k) = A \cos(\omega_o k), \quad -\pi \leq \omega_o \leq \pi$$

Spektar snage signala definisan je izrazom

$$S_u(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_u(\tau) e^{-j\tau\omega}, \quad \tau \in Z$$

gde je auto-kovarijaciona funkcija ovog determinističkog signala

$$R_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k) u(k-\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A^2 \cos(\omega_o k) \cos[\omega_o(k-\tau)]$$

Na osnovu poznatih adicionih formula dalje sledi

$$\cos(\omega_o k) \cos[\omega_o(k-\tau)] = \frac{1}{2} [\cos(2\omega_o k - \omega_o \tau) + \cos(\omega_o \tau)]$$

pa se može pisati

$$R_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{A^2}{2} \cos(2\omega_o k - \omega_o \tau) + \frac{A^2}{2} \cos(\omega_o \tau) \right]$$

Koristeći dobro poznat rezultat da je

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos(\omega k + \varphi) = 0 \quad \text{za} \quad \forall \omega, \varphi$$

konačno se dobija

$$R_u(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_o \tau)$$

Tada je spektar snage signala

$$S_u(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_u(\tau) e^{-j\tau\omega} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} \cos(\omega_o \tau) e^{-j\tau\omega}$$

Na osnovu Eulerovog obrasca

$$\cos(\omega_o \tau) = \frac{e^{j\omega_o \tau} + e^{-j\omega_o \tau}}{2}$$

dalje sledi

$$S_u(\omega) = \frac{A^2}{4} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \left[e^{-j(\omega-\omega_o)\tau} + e^{-j(\omega+\omega_o)\tau} \right]$$

Pošto je na osnovu Fourierove analize takođe poznato da jedinična konstanta $2\pi\delta(\omega)$ predstavlja,ju Fourierov transformacioni par, to je

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} 1e^{-j\omega\tau} = 2\pi\delta(\omega)$$

tako da se konačno dobija

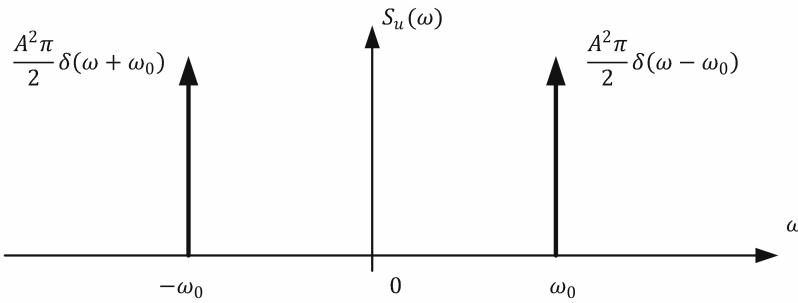
$$S_u(\omega) = \frac{A^2\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

gde je Diracova impulsna funkcija $\delta(\omega)$ u frekvencijskom domenu definisana sa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1 \quad \text{za} \quad \forall \omega \in R;$$

$$\delta(0) = \infty \quad \text{i} \quad \delta(\omega) = 0 \quad \text{za} \quad \omega \neq 0.$$

Primenom inverzne Fourierove transformacije na dobijeni izraz za spektar snage dobiće se polazni prostoperiodični signal $u(k)$, što potvrđuje ispravnost dobijenog rezultata. Spektar signala grafički je prikazan na slici 2.7



Slika 2.7: Spektralna karakteristika snage prostoperiodičnog kosinusnog signala

Primer (spektar diskretnog belog šuma) Posmatrajmo diskretan beli slučajni proces $\{e(k)\}$, nulte srednje vrednosti $\bar{e}(k) = 0$ i varijanse $\bar{E}\{e^2(k)\} = \sigma_e^2$. Kovarijaciona funkcija ovog signala data je sa

$$R_e(\tau) = \bar{E}\{[e(t)e(t-\tau)]\} = \sigma_e^2\Delta(\tau)$$

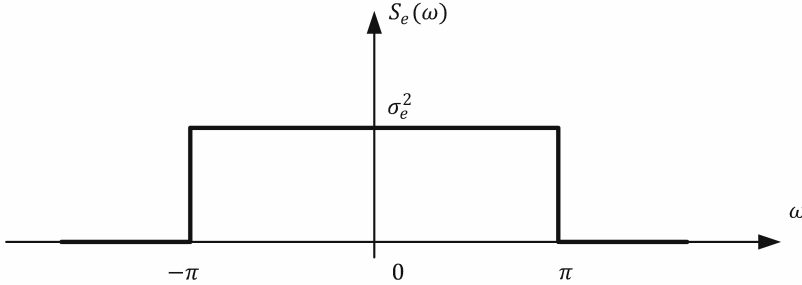
gde je jedinični Kroneckerov delta impuls $\Delta(\tau)$ definisan sa:

$$\Delta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \text{ i } \tau \in Z \end{cases}$$

Tada je spektar snage ovog signala definisan izrazom

$$S_e(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_e(\tau) e^{-j\tau\omega} = \sigma_e^2, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Spektar snage diskretnog belog šuma prikazan je na slici 2.8.



Slika 2.8: Spektar snage belog šuma

Primitimo da zbog periodičnosti kompleksne eksponencijalne funkcije $e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau)$ sa osnovnom periodom 2π i spektralna karakteristika snage $S_e(\omega)$ predstavlja periodičnu matematičku funkciju argumenta ω sa periodom 2π , ali osnovni fizički spektar snage diskretnog signala $\{e(k)\}$ je ograničen samo na osnovni opseg učestanosti $(-\pi, +\pi)$, koji se naziva i Niquistovo područje.

2.6.3 Transformacija spektra signala

Osnovni zadatak analize sistema sastoji se u određivanju izlaznog signala (odziva) na zadati ulazni signal (pobudu ili eksitaciju). Ovakva analiza se vrši u vremenskom domenu a njen ekvivalent u frekvencijskom domenu predstavlja zadatak određivanja spektra snage izlaznog signala za poznati spektar snage signala na ulazu sistema.

Izlazni signal generalnog "black box" modela sistema definisan je relacijama

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q)e(k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} q(\ell)u(k-\ell) + \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell)e(k-\ell)$$

gde su $y(k)$, $u(k)$ i $e(k)$ signali izlaza, ulaza i poremećaja, respektivno. Dakle, sistem u suštini ima dve pobude, koristan ulazni signal $u(k)$ i parazitnu eksitaciju $e(k)$. Pretpostavimo, dalje, da ovi pobudni signali imaju nulte srednje vrednosti i da su nekorelisani međusobno, odnosno da je

$$\bar{u} = \bar{e} = 0, \quad R_{ue}(\tau) = 0 \quad \text{za} \quad \forall \tau \in Z.$$

Tada je auto-kovarijaciona funkcija izlaza

$$\begin{aligned}
 R_y(\tau) &= \bar{E} \{y(k)y(k-\tau)\} \\
 &= \bar{E} \left\{ \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell)u(k-\ell) + \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell)e(k-\ell) \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} g(m)u(k-\tau-m) + \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e(k-\tau-m) \right] \right\} \\
 &= \bar{E} \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell)u(k-\ell) \sum_{m=1}^{\infty} g(m)u(k-\tau-m) \right\} \\
 &\quad + \bar{E} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell)e(k-\ell) \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e(k-\tau-m) \right\} \\
 &\quad + \bar{E} \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell)u(k-\ell) \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e(k-\tau-m) \right\} \\
 &\quad + \bar{E} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell)e(k-\ell) \sum_{m=1}^{\infty} g(m)u(k-\tau-m) \right\} \\
 &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g(\ell)g(m) \bar{E} \{u(k-\ell)u(k-\tau-m)\} \\
 &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(\ell)h(m) \bar{E} \{e(k-\ell)e(k-\tau-m)\} \\
 &\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g(\ell)h(m) \bar{E} \{u(k-\ell)e(k-\tau-m)\} \\
 &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h(\ell)g(m) \bar{E} \{e(k-\ell)u(k-\tau-m)\} \\
 &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g(\ell)g(m) R_u \{(k-\ell) - (k-\tau-m)\} \\
 &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(\ell)h(m) R_e [(k-\ell) - (k-\tau-m)] \\
 &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g(\ell)h(m) R_{ue} \{(k-\ell) - (k-\tau-m)\} \\
 &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(\ell)g(m) R_{eu} [(k-\ell) - (k-\tau-m)]
 \end{aligned}$$

Prilikom izvođenja poslednjeg izraza iskorišćena je činjenica da je $\overline{E}\{\cdot\}$ linearan operator, koji može da zameni redosled sa operacijom sumiranja, kao i da je model procesa (sistema) $G(q)$ striktno kauzalan, odnosno da je odabir impulsnog odziva $g(0) = 0$. Imajući dalje u vidu da je na osnovu pretpostavke o nekorelisanosti korisne i parazitne pobude kros-korelacione funkcije ovih signala

$$R_{eu}(\tau) = 0, \quad R_{ue}(\tau) = 0 \quad \text{za} \quad \forall \tau \in Z$$

konačno se dobija

$$R_y(\tau) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g(\ell)g(m)R_u(\tau+m-\ell) + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(\ell)h(m)\Re(\tau+m-\ell)$$

Spektar snage izlaznog signala definisan je izrazom

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\tau\omega} \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g(\ell)g(m)R_u(\tau+m-\ell) e^{-j\tau\omega} \\ &\quad + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(\ell)h(m)R_e(\tau+m-\ell) e^{-j\tau\omega} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\tau=0}^{\infty} g(\ell)g(m)R_u(\tau+m-\ell) e^{-j\tau\omega} e^{-j\ell\omega} e^{-jm\omega} e^{-jm\omega} \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h(\ell)h(m)R_e(\tau+m-\ell) e^{-j\tau\omega} e^{-j\ell\omega} e^{-jm\omega} e^{-jm\omega} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\ell) e^{-j\ell\omega} g(m) e^{jm\omega} R_u(\tau+m-\ell) e^{-j(\tau+m-\ell)\omega} \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\ell) e^{-j\ell\omega} h(m) e^{jm\omega} R_e(\tau+m-\ell) e^{-j(\tau+m-\ell)\omega} \end{aligned}$$

Uvodeći smenu $j = \tau + m - \ell$, pri čemu je j celobrojna promenljiva iz intervala $(-\infty, \infty)$, konačno se može pisati

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) e^{-j\ell\omega} \sum_{m=1}^{\infty} g(m) e^{jm\omega} \sum_{j=-\infty}^{\infty} R_u(j) e^{-jj\omega} \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell) e^{-j\ell\omega} \sum_{m=0}^{\infty} h(m) e^{jm\omega} \sum_{j=-\infty}^{\infty} R_e(j) e^{-jj\omega} \end{aligned}$$

odnosno

$$S_y(m) = G(e^{j\omega}) G(e^{-j\omega}) S_u(\omega) + H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) S_e(\omega)$$

Pošto je

$$G(e^{j\omega}) G(e^{-j\omega}) = G(e^{j\omega}) G * (e^{j\omega}) = |G(e^{j\omega})|^2$$

gde simbol “*” označava konjugovano-kompleksnu vrednost odgovarajućeg kompleksnog broja, a “|·|” označava apsolutnu vrednost odgovarajućeg kompleksnog broja, takođe se može pisati

$$S_y(\omega) = |G(e^{j\omega})|^2 S_u(\omega) + |H(e^{j\omega})|^2 S_e(\omega)$$

Dakle, pod uslovom da su ulazni signal i signal poremećaja (parazitna pobuda) međusobno nekorelisani, spektar snage izlaznog signala jednak je linearnoj kombinaciji (težinskoj sumi) spektara snaga korisne i parazitne pobude, pri čemu koeficijenti linearne kombinacije (težinski koeficijenti) definišu pojačanja sistema po snazi u odnosu na odgovarajući pobudni signal, bilo da predstavlja korisnu ili parazitnu pobudu.

Na sličan način se može izvesti kros-spektralna karakteristika snage između signala izlaza i signala ulaza. Naime, pošto je kros-korelaciona funkcija ovih signala

$$R_{yu}(\tau) = \bar{E} \{y(k) u(k - \tau)\}$$

gde je $\bar{E} \{ \cdot \}$ operator generalisanog matematičkog očekivanja, a izlazni signal je definisan sa

$$y(k) = G(q) u(k) + H(q) e(k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) u(k - \ell) + \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell) e(k - \ell)$$

dalje se može pisati

$$\begin{aligned} R_{yu}(\tau) &= \bar{E} \left\{ \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) u(k - \ell) u(k - \tau) \right\} + \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell) e(k - \ell) u(k - \tau) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) \bar{E} \{u(k - \ell) u(k - \tau)\} + \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell) \bar{E} \{e(k - \ell) u(k - \tau)\} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) R_u(\tau - \ell) + \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell) R_{eu}(\tau - \ell) \end{aligned}$$

Imajući u vidu da su $\{e(k)\}$ i $\{u(k)\}$ međusobno nekorelisani vremenski diskretni signali, to je $R_{eu}(\tau) = 0$ za $\forall \tau \in Z$, pa je

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g(\ell) R_u(\tau - \ell) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) R_u(\tau - \ell)$$

pošto je $g(0) = 0$.

Dalje je kros-spektar ovih signala definisan sa

$$\begin{aligned} S_{yu}(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{yu}(\tau) e^{-j\tau\omega} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) R_u(\tau-\ell) e^{-j\tau\omega} e^{j\ell\omega} e^{-j\ell\omega} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\ell) e^{-j\ell\omega} R_u(\tau-\ell) e^{-j\omega(\tau-\ell)} \end{aligned}$$

Uvodeći smenu $j = \tau - \ell$, celobrojna promenljiva j pripada skupu $(-\infty, \infty)$, te se može pisati

$$S_{yu}(\omega) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) e^{-j\ell\omega} \sum_{j=-\infty}^{\infty} R_u(j) e^{-ij\omega}$$

odnosno

$$S_{yu}(\omega) = G(e^{j\omega}) S_u(\omega)$$

2.6.4 Primeri izračunavanja stohastičkih pokazatelja slučajnih signala

U ovom poglavlju biće prikazan postupak izračunavanja statističkih i stohastičkih pokazatelja slučajnih procesa koji predstavljaju ulazne i izlazne signale sistema čiji je model prikazan u obliku neke od razmatranih “black box” struktura (reprezentacija) modela sistema.

Izračunavanje srednje vrednosti, kovarijacione funkcije i kros-kovarijacione funkcije MA procesa

Posmatrajmo MA-proces drugog reda kojim je generisan diskretan slučajni signal $\{v(k)\}$

$$v(k) = c_0 e(k) + c_1 e(k-1) + c_2 e(k-2) = \sum_{i=0}^2 c_i e(k-i)$$

Primetimo da je usvojena struktura u suštini FIR reprezentacija modela, gde koeficijenti $c_i = g(i)$, $i = 0, 1, 2$ predstavljaju odbirke impulsnog odziva, čije je trajanje konačno i iznosi $M = 2$ periode odabiranja (trajanja signala izraženo preko broja odbiraka je $L = M + 1$). Signal $\{e(k)\}$ je ulazni i signal $\{v(k)\}$ izlazni signal modela, pri čemu je pretpostavljeno da je $\{e(k)\}$ beli diskretan šum, nulte srednje vrednosti, tj. $\bar{e}(k) = 0$, i varijanse $\sigma_e^2 = E\{e^2(k)\}$. Tada se srednja vrednost, koja predstavlja statistički pokazatelj, i auto-kovarijaciona i kros-kovarijaciona funkcija, koje predstavljaju stohastički pokazatelj, mogu izračunati na sledeći način.

Srednja vrednost Srednja vrednost se može odrediti primenom operatora matematičkog očekivanja $E\{\cdot\}$ na zadatu diferentnu jednačinu kojom je opisan model sistema, tj.

$$E\{v(k)\} = c_0 E\{e(k)\} + c_1 E\{e(k-1)\} + c_2 E\{e(k-2)\}$$

ili pošto je $\{e(k)\}$ široko stacionaran slučajni signal nulte srednje vrednosti, to je

$$E\{e(k)\} = E\{e(k-1)\} = E\{e(k-2)\} = \bar{e} = 0$$

odakle se dobija

$$E\{v(k)\} = \bar{v} = 0.$$

Auto-kovarijaciona i kros-kovarijaciona funkcija Ovi stohastički pokazatelji mogu se izračunati množenjem obe strane zadate diferentne jednačine, kojom je modelovan sistem sa veličinama $e(k-\tau)$ i $v(k-\tau)$, respektivno i primenom operatora matematičkog očekivanja $E\{\cdot\}$ na tako modifikovanu polaznu diferentnu jednačinu. Primetimo da je ovde generalisano matematičko očekivanje $\bar{E}\{\cdot\}$ jednako matematičkom očekivanju $E\{\cdot\}$, pošto se radi o slučajnim signalima. Na taj način se dobija

$$e(k-\tau)v(k) = c_0e(k-\tau)e(k) + c_1(k-\tau)e(k-1) + c_2e(k-\tau)e(k-2)$$

odakle sledi

$$E\{e(k-\tau)v(k)\} = c_0E\{e(k-\tau)e(k)\} + c_1E\{e(k-\tau)e(k-1)\} + c_2E\{e(k-\tau)e(k-2)\}$$

Pošto je na osnovu definicionih izraza za auto i kros kovarijacione funkcije široko stacionarnih slučajnih signala

$$E\{e(t)v(r)\} = R_{ev}(t-r), \quad E\{e(t)e(r)\} = R_e(t-r), \quad \forall t, r \in Z$$

pri čemu je $R_e(\cdot)$ parna funkcija, tj. $R_e(-\tau) = R_e(\tau)$, dalje se može pisati

$$R_{ev}(-\tau) = c_0R_e(\tau) + c_1R_e(\tau-1) + c_2R_e(\tau-2)$$

Na sličan način se dobija

$$v(k)v(k-\tau) = c_0E\{e(k)v(k-\tau)\} + c_1E\{e(k-1)v(k-\tau)\} + c_2E\{e(k-2)v(k-\tau)\}$$

odakle sledi

$$E\{v(k)v(k-\tau)\} = c_0E\{e(k)v(k-\tau)\} + c_1E\{e(k-1)v(k-\tau)\} + c_2E\{e(k-2)v(k-\tau)\}$$

odnosno

$$R_v(\tau) = c_0R_{ev}(\tau) + c_1R_{ev}(\tau-1) + c_2R_{ev}(\tau-2)$$

Uzimajući tri različite vrednosti za argument $\tau = 0, 1, 2$, dobijaju se sistemi jednačina

$$\tau = 0 : \quad R_{ev}(0) = c_0R_e(0) + c_1R_e(1) + c_2R_e(2)$$

$$\tau = 1 : \quad R_{ev}(-1) = c_0R_e(1) + c_1R_e(0) + c_2R_e(1)$$

$$\tau = 2 : \quad R_{ev}(-2) = c_0R_e(2) + c_1R_e(1) + c_2R_e(0)$$

odnosno

$$\begin{aligned}\tau = 0 : \quad & R_v(0) = c_0 R_{ev}(0) + c_1 R_{ev}(-1) + c_2 R_{ev}(-2) \\ \tau = 1 : \quad & R_v(1) = c_0 R_{ev}(1) + c_1 R_{ev}(0) + c_2 R_{ev}(-1) \\ \tau = 2 : \quad & R_{ev}(2) = c_0 R_{ev}(2) + c_1 R_{ev}(1) + c_2 R_{ev}(0)\end{aligned}$$

Dalje se mogu doneti sledeći zaključci:

1. Pošto je $\{e(k)\}$ diskretan beli šum, nulte srednje vrednosti, to je autokorelaciona funkcija (istovremeno predstavlja i autokovarijacionu funkciju) $R_e(\tau) = \sigma_e^2 \Delta(\tau)$, gde je $\Delta(\tau) = 1$ za $\tau = 0$ i $\Delta(\tau) = 0$ za celobrojno $\tau \neq 0$.
2. Pošto je $R_{ev}(-\tau) = c_0 R_e(\tau) + c_1 R_e(\tau - 1) + c_2 R_e(\tau - 2)$, a $R_{ev}(\tau) = 0$ za $\tau \neq 0$ i $R_e(0) = \sigma_e^2$, to je $R_{ev}(-\tau) \neq 0$ samo za $\tau = 0, 1, 2$, odnosno $R_{ev}(-\tau) = 0$ za $\tau < -2$.
3. Pošto je na osnovu zadate diferentne jednačine $v(k) - c_0 e(k) + c_1 e(k - 1) + c_2 e(k - 2)$, to trenutna vrednost izlaza $v(k)$ zavisi samo od trenutne vrednosti ulaza $e(k)$, a ne i od budućih vrednosti pobude $e(k + i)$, $i > 0$, pa je kros-kovarijaciona funkcija $R_{ev}(\tau) = E\{e(k)v(k - \tau)\}$, odnosno $R_{ev}(\tau) = E\{e(k + \tau)v(k)\}$, jednaka nuli za $\tau > 0$.
4. Pošto je auto-kovarijaciona funkcija $R_v(\tau) = c_0 R_{ev}(\tau) + c_1 R_{ev}(\tau - 1) + c_2 R_{ev}(\tau - 2)$, a $R_{ev}(\tau) = 0$ za $\tau > 0$, zaključuje se da je $R_v(\tau) = 0$ za $\tau > 2$; sa druge strane, na osnovu osobine parnosti $R_v(-\tau) = R_v(\tau)$ zaključuje se i da je $R_v(\tau) = 0$ za $\tau < -2$.

Polazeći od izvedenih zaključaka i postavljenih sistema jednačina, konačno se dobijaju za kros-kovarijacionu funkciju sledeće relacije

$$\begin{aligned}R_{ev}(0) &= c_0 \sigma_e^2 \\ R_{ev}(-1) &= c_1 \sigma_e^2 \\ R_{ev}(-2) &= c_2 \sigma_e^2 \\ R_{ev}(\tau) &= 0 \quad \text{za } \tau \neq -2, -1, 0, \quad \text{tj. } \tau < -2 \text{ i } \tau > 0.\end{aligned}$$

Slično se za auto-korelacionu funkciju dobijaju izrazi (prilikom izvođenja su korišćene prethodno izvedene relacije za kros-kovarijacionu funkciju)

$$\begin{aligned}R_v(0) &= (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) \sigma_e^2 \\ R_v(1) &= R_v(-1) = (c_0 c_1 + c_1 c_2) \sigma_e^2 \\ R_v(2) &= R_v(-2) = c_2 c_0 \sigma_e^2 \\ R_v(\tau) &= 0 \quad \text{za } \tau \neq \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad \text{tj. } \tau < -2 \text{ i } \tau > 2.\end{aligned}$$

Izvedeni izrazi za kros i auto kovarijacione funkcije takođe pokazuju da se parametri FIR strukture mogu odrediti deljenjem kros-kovarijacione funkcije R_{ev} sa varijansom ulaza σ_e^2 , tj. $c_0 = R_{ev}(0)/\sigma_e^2$, $c_1 = R_{ev}(-1)/\sigma_e^2$ i $c_2 = R_{ev}(-2)/\sigma_e^2$. Dobijeni rezultat se može generalisati na sledeći način: ako je ulazni signal diskretan beli šum, onda se deljenjem kros-kovarijacione funkcije između ulaznog i izlaznog signala sa varijansom ulaznog signala dobijaju odgovarajući odbirci impulsnog odziva.

Izračunavanje srednje vrednosti, kovarijacione funkcije i kros-kovarijacione funkcije AR-procesa

Posmatrajmo *black-box* reprezentaciju modela sistema u obliku AR-procesa drugog reda

$$v(k) + a_1 v(k-1) + a_2 v(k-2) = e(k)$$

gde je $\{v(k)\}$ diskretan izlaz a $\{e(k)\}$ je ulazni signal, koji predstavlja beli šum nulte srednje vrednosti $\bar{e} = 0$ i varijanse σ_e^2 . Statističke (srednja vrednost) i stohastičke (auto i kros-kovarijacione funkcije) karakteristike izlaznog signala mogu se izračunati na identičan način kao u slučaju MA-procesa.

Srednja vrednost Primenjujući operator matematičkog očekivanja na obe strane diferentne jednačine, dobija se (u navedenom slučaju se generalisano matematičko očekivanje poklapa sa običnim matematičkim očekivanjem)

$$E\{v(k)\} + a_1 E\{v(k-1)\} + a_2 E\{v(k-2)\} = E\{e(k)\}$$

odnosno pošto je

$$E\{v(k)\} = E\{v(k-1)\} = E\{v(k-2)\} = \bar{v}$$

dalje sledi

$$\bar{v} + a_1 \bar{v} + a_2 \bar{v} = \bar{e} = 0$$

odakle se zaključuje da je $\bar{v} = 0$.

Auto i kros-kovarijacione funkcije Analogno kao u prethodnom primeru, množeći zadatu diferentnu jednačinu sa $e(k-\tau)$ i $v(k-\tau)$, respektivno i primenjujući operator matematičkog očekivanja $E\{\cdot\}$ na tako modifikovanu diferentnu jednačinu dobija se

$$v(k)e(k-\tau) + a_1 v(k-1)e(k-\tau) + a_2 v(k-2)e(k-\tau) = e(k)e(k-\tau)$$

$$v(k)v(k-\tau) + a_1 v(k-1)v(k-\tau) + a_2 v(k-2)v(k-\tau) = e(k)v(k-\tau)$$

odnosno

$$E\{v(k)e(k-\tau)\} + a_1 E\{v(k-1)e(k-\tau)\} + a_2 E\{v(k-2)e(k-\tau)\} = E\{e(k)e(k-\tau)\}$$

$$E\{v(k)v(k-\tau)\} + a_1 E\{v(k-1)v(k-\tau)\} + a_2 E\{v(k-2)v(k-\tau)\} = E\{e(k)v(k-\tau)\}$$

Uvodeći definicione izraze za auto i kros-kovarijacione funkcije široko stacionarnih signala

$$E\{v(t)e(r)\} = R_{ve}(t-r), \quad E\{e(t)e(r)\} = R_v(t-r), \quad \forall t, r \in Z$$

dalje se može pisati

$$R_{ve}(\tau) + a_1 R_{ve}(\tau-1) + a_2 R_{ve}(\tau-2) = R_e(\tau)$$

$$R_v(\tau) + a_1 R_v(\tau-1) + a_2 R_v(\tau-2) = R_{ev}(\tau) = R_{ve}(-\tau)$$

Slično kao u prethodnom primeru, usvajajući tri različite vrednosti za $\tau = 0, 1, 2$, dobija se sistem jednačina

$$\tau = 0 : \quad R_{ve}(0) + a_1 R_{ve}(-1) + a_2 R_{ve}(-2) = R_e(0)$$

$$\tau = 1 : \quad R_{ve}(1) + a_1 R_{ve}(0) + a_2 R_{ve}(-1) = R_e(1)$$

$$\tau = 2 : \quad R_{ve}(2) + a_1 R_{ve}(1) + a_2 R_{ve}(0) = R_e(2)$$

odnosno

$$\tau = 0 : \quad R_v(0) + a_1 R_v(1) + a_2 R_v(2) = R_{ve}(0)$$

$$\tau = 1 : \quad R_v(1) + a_1 R_v(0) + a_2 R_v(1) = R_{ve}(-1)$$

$$\tau = 2 : \quad R_v(2) + a_1 R_v(1) + a_2 R_v(0) = R_{ve}(-2)$$

Analogno kao u prethodnom primeru, dalje se mogu izvesti sledeći zaključci:

1. Pošto je $\{e(k)\}$ diskretan beli šum, nulte srednje vrednosti i varijanse σ_e^2 , to je njegova autokorelaciona funkcija $R_e(\tau) = \sigma_e^2 \Delta(\tau)$, gde je $\Delta(\tau) = 0$ za $\forall \tau \neq 0$ i $\Delta(\tau) = 1$ za $\tau = 0$ ($\tau \in Z$).
2. Na osnovu zadate diferentne jednačine $v(k) + a_1 v(k-1) + a_2 v(k-2) = e(k)$, očigledno je da tekuće vrednost izlaza $v(k)$ zavise samo od tekuće vrednosti ulaza $e(k)$, kao i od prethodnih ulaza $e(k-1)$ i $e(k-2)$, ali ne i od budućih vrednosti ulaza $e(k+i)$, $i > 0$, tako da je kros-korelaciona funkcija $R_{ve}(\tau) = E\{v(k)e(k-\tau)\} = 0$ za $\tau < 0$.

Imajući ove konstatacije u vidu, postavljeni sistemi jednačina postaju:

$$R_{ve}(0) = \sigma_e^2$$

$$R_{ve}(1) + a_1 R_{ve}(0) = 0$$

$$R_{ve}(2) + a_1 R_{ve}(1) + a_2 R_{ve}(0) = 0$$

odakle sledi

$$R_{ve}(0) = \sigma_e^2$$

$$R_{ve}(1) = -a_1 \sigma_e^2$$

$$R_{ve}(2) = (a_1^2 - a_2) \sigma_e^2$$

dok je

$$R_{ve}(\tau) = -a_1 R_{ve}(\tau-1) - a_2 R_{ve}(\tau-2) \quad \text{za } \tau > 2$$

$$R_{ve}(\tau) = 0 \quad \text{za } \tau < 0$$

Koristeći dobijene rezultate, odgovarajući sistem jednačina za auto-korelacionu funkciju postaje

$$R_v(0) + a_1 R_v(1) + a_2 R_v(2) = \sigma_e^2$$

$$a_1 R_v(0) + (1 + a_2) R_v(1) = 0$$

$$a_2 R_v(0) + a_1 R_v(1) + R_v(2) = 0$$

Postavljeni sistem može se rešiti po nepoznatim vrednostima $R_v(0)$, $R_v(1)$ i $R_v(2)$, odakle se dobija

$$R_v(0) = \frac{1 + a_2}{1 + a_2 - a_1^2 + a_1^2 a_2 - a_2^3 - a_2^2} \sigma_e^2$$

$$R_v(1) = R_v(-1) = \frac{-a_1}{1 + a_2 - a_1^2 + a_1^2 a_2 - a_2^3 - a_2^2} \sigma_e^2$$

$$R_v(2) = R_v(-2) = \frac{a_1^2 - a_2^2 - a_2}{1 + a_2 - a_1^2 + a_1^2 a_2 - a_2^3 - a_2^2} \sigma_e^2$$

Takođe je

$$R_v(\tau) = R_v(-\tau) = -a_1 R_v(\tau - 1) - a_2 R_v(\tau - 2) \quad \text{za } \tau > 2.$$

Ovde je iskorišćena činjenica da je

$$R_{ve}(\tau) = 0 \quad \text{za } \tau < 0.$$

U ovim primerima su srednja vrednost i kovarijacione funkcije izračunati teorijski, koristeći njihove definicione izraze i model sistema. U prethodnom poglavlju su ove vrednosti procenjene (estimirane) na osnovu jedne realizacije (vremenske serije) slučajnog procesa konačne dužine. U poslednjem pristupu dužina vremenske serije (broj odbiraka signala N) mora biti relativno veliki ($N \geq 50$) da bi ovakva heuristička (empirijska) procena dobro aproksimirala odgovarajuću vrednost koja je dobijena teorijskim izvođenjima.

Neparametarska identifikacija sistema na bazi Fourierove analize: empirijska procena funkcije prenosa sistema

Do sada su razmatrane dve tehnike (metode) identifikacije sistema zasnovane na frekvencijskom odzivu i korelacionoj analizi. Oba pristupa podrazumevaju dovođenje sinusoidalne (prostoperiodične) pobude na ulaz sistema, a vreme trajanja izvršenog eksperimenta je relativno dugo zbog zahteva da sistem, koji je po pretpostavci stabilan, dostigne ravnotežno (ustaljeno ili stacionarno) stanje, koje nastupa tek nakon iščezavanja prelaznog režima. Metod razmatran u ovom poglavlju zasnovan je na diskretnoj Fourierovoj analizi ulaznog i izlaznog diskretnog signala i ne poseduje navedene nedostatke prethodne dve metode, kao što su sinusoidalne pobude i snimanje odziva (izlaza) sistema u ravnotežnom stanju. Rezultujuća procena funkcije prenosa sistema naziva se empirijska procena (estimacija) funkcije prenosa (eng. Empirical Transfer Function Estimate ili skraćeno ETFE). Tako generisana procena funkcije prenosa sistema je prilično gruba; te zahteva dalju primenu neke od tehnika interpolacije (eng. smoothing) u cilju dobijanja "izglačane" završne procene funkcije prenosa (frekvencijske karakteristike) sistema.

Definicija konačne diskretne Fourierove transformacije (eng. *Finite Discrete Fourier Transform* ili skraćeno *DFT*)

Posmatrajmo konačan diskretan niz realnih brojeva $u(k)$, $k = 1, 2, \dots, N$. Tada konačna diskretna Fourierova transformacija preslikava vremenski niz (seriju) $\{u(k)\}$ u konačan niz komplek-

snih brojeva na osnovu relacije

$$\text{DFT}(u(k)) = U_N(\omega_\ell) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N u(k) e^{-j\omega_\ell k}; \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N$$

gde je ω_ℓ diskretna kružna učestanost.

Vremenski diskretni signal $u(k)$ može se rekonstruisati na osnovu inverzne konačne diskretne Fourierove transformacije na sledeći način.

Definicija inverzne konačne diskretne Fourierove transformacije (eng. *Inverse Finite Discrete Fourier Transform ili skraćeno IDFT*):

Neka je zadat konačan niz kompleksnih brojeva $U_N(\omega)$, koji predstavljaju DFT vremenski diskretnog konačnog niza $u(k)$. Tada inverzna konačna diskretna Fourierova transformacija preslikava konačan niz kompleksnih brojeva $U_N(\omega)$ u konačan vremenski diskretni niz $u(k)$ na osnovu relacije

$$\text{IDFT}(U_N(\omega_\ell)) = u(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^N U_N(\omega_\ell) e^{j\omega_\ell k}; \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Izraz za IDFT može se lako dokazati uvrštavanjem u ovaj izraz relacije za DFT, čime se dobija

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^N \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N u(n) e^{-j\omega_\ell n} \right] e^{j\omega_\ell k} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N \sum_{n=1}^N u(n) \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^{\ell n} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}} \right)^{\ell k} = u(k)$$

Prilikom izvođenja poslednjeg izraza uzeto je u obzir da je $\omega = \omega_\ell = 2\pi\ell/N$, kao i da je

$$\sum_{\ell=1}^N \left(e^{j2\pi/N} \right)^{(k-n)\ell} = \begin{cases} N, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

U poslednjoj relaciji slučaj $k = n$ je potpuno jasan, pošto su tada svih N članova u odgovarajućoj sumi jednaka jedinici. Kada je $k - n = p$ nenulti ceo broj, tada se posmatrana suma može posmatrati kao zbir vektora koji imaju jedinični moduo, pri čemu je ugao između odgovarajućih susednih vektora jednak, tako da je rezultanta tih vektora zaista jednaka nuli.

Na osnovu definicionog izraza za DFT zaključuje se da je $U_N(\omega)$ periodična funkcija sa osnovnom periodom jednakom 2π , odnosno da je

$$U_N(\omega + 2\pi) = U_N(\omega)$$

Sa druge strane, pošto je $u(k)$ realan broj, takođe važi

$$U_N(-\omega) = U_N^*(\omega)$$

gde simbol “*” označava konjugovano kompleksnu vrednost. Na taj način, kompleksna funkcija $U_N(\omega)$ realnog argumenta ω (predstavlja digitalnu kružnu učestanost) u potpunosti je definisana svojim vrednostima na intervalu $(0, 2\pi)$. Ponekad je uobičajeno da se $U_N(\omega)$ posmatra na intervalu $(-\pi, \pi)$, kada se može pisati

$$u(k) = \text{IDFT}(U_N(\omega_\ell)) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=-N/2+1}^{N/2+1} U_N(\omega_\ell) e^{j\omega_\ell k}, \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

U poslednjem izrazu je pretpostavljeno da je N paran ceo broj. Dakle, u formuli za IDFT signal $u(k)$ je predstavljen kao linearna kombinacija eksponencijalnih faktora $e^{j\omega_\ell k}$ za N različitih kružnih učestanosti ω_ℓ , $\ell = 1, \dots, N$, pri čemu $\text{DFT}(U_N(\omega_\ell))$ predstavlja težinske koeficijente u definisanoj linearnoj kombinaciji.

3.1 ETFE procena funkcije prenosa

Može se pokazati da analiza frekventijskog odziva na bazi korelacione metode predstavlja specijalan slučaj Fourierove analize. Pošto su korelacije odziva sa kosinusnom i sinusnom funkcijom definisane kao

$$I_c(\omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \cos(\omega_0 k); \quad I_s(\omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \sin(\omega_0 k)$$

a na osnovu definicionog izraza za DFT važi

$$Y_N(\omega) = \text{DFT}(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N y(k) e^{-j\omega k}$$

zaključuje se, uzimajući u obzir Eulerov obrazac $e^{-j\omega} = \cos(\omega) - j \sin(\omega)$, da je

$$Y_N(\omega_0) = \sqrt{N}(I_c(\omega_0) - j I_s(\omega_0))$$

Sa druge strane, za prosto-periodičan signal $u(k) = A \cos(\omega_0 k)$, gde je $\omega_0 = 2\pi/N_0$ za neki ceo broj $N_0 > 1$, može se pisati

$$U_N(\omega) = \text{DFT}(u(k)) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N u(k) e^{-j\omega k}$$

gde je pretpostavljeno da je posmatran konačan interval vremena $k = 1, 2, \dots, N$, pri čemu je N ceo multipl od N_0 , tj. $N = sN_0$, $s \in \mathbb{Z}$. Imajući u vidu da je na osnovu Eulerove formule

$$\cos(\omega_0 k) = \frac{e^{j\omega_0 k} + e^{-j\omega_0 k}}{2}$$

dalje sledi

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \frac{A}{2} \left[e^{j(\omega_0 - \omega)k} + e^{-j(\omega_0 + \omega)k} \right], \quad \omega = \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \quad \ell = 1, \dots, N.$$

Konačno, koristeći prethodno pokazan rezultat da je

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{j2\pi rk/N} = \begin{cases} 1, & r = 0 \\ 0, & 1 \leq r \leq N \end{cases}$$

dobija se

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{j(\omega_0 - \omega)k} = \begin{cases} 1, & \omega = \pm\omega_0 = \pm 2\pi/N_0 = \pm 2\pi s/N \\ 0, & \omega = \pm 2\pi k/N, \quad k \neq s \end{cases}$$

odakle sledi

$$U_N(\omega_0) = \frac{\sqrt{N}A}{2}.$$

Sa druge strane, na osnovu analize frekvencijskog odziva korelacionom tehnikom je pokazano u prethodnom poglavlju da je

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{I_c(\omega_0) - jI_s(\omega_0)}{A/2}.$$

Pošto se deljenjem izraza za $Y_N(\omega_0)$ i $U_N(\omega_0)$ takođe dobija

$$\frac{Y_N(\omega_0)}{U_N(\omega_0)} = \frac{I_c(\omega_0) - jI_s(\omega_0)}{A/2}$$

zaključuje se da je

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{Y_N(\omega_0)}{U_N(\omega_0)}$$

Dakle, primenom diskretne Fourierove analize izveden je identičan rezultat kao i kad je analiziran frekvencijski odziv na bazi korelacione metode. Međutim, za razliku od analize frekvencijskog odziva, Fourierova analiza nije ograničena samo na jednu kružnu učestanost ω_0 . Na taj način, ideja da se proceni frekvencijska funkcija (karakteristika) sistema za jednu kružnu učestanost može se kod Fourierove analize lako proširiti i na opseg frekvencija, čime se za procenu frekvencijske karakteristike sistema na skupu kružnih učestanosti ω_ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, N$ dobija

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_\ell}) = \frac{Y_N(\omega_\ell)}{U_N(\omega_\ell)}, \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N$$

gde $Y_N(\omega)$ i $U_N(\omega)$ predstavljaju DFT izlaznog $y(k)$ i ulaznog $u(k)$ signala, $k = 1, 2, \dots, N$, respektivno, odnosno

$$Y_N(\omega_\ell) = \text{DFT}(y(k)), \quad U_N(\omega_\ell) = \text{DFT}(u(k)).$$

Ovako dobijena procena naziva se empirijska estimacija funkcije prenosa (frekvencijske karakteristike) i obeležava sa ETFE (skraćenica potiče od odgovarajućeg termina na engleskom jeziku *Empirical Transfer Function Estimate*). Ovako generisana procena je prilično “gruba”, što se može objasniti činjenicom da je vremenski niz od N ulaznih i N izlaznih realnih brojeva (ukupno $2N$ brojeva) sveden na kompleksni niz od $N/2$ brojeva

$$\Re \left\{ \hat{G}_N \left(e^{j2\pi k/N} \right) \right\}, \quad \Im \left\{ \hat{G}_N \left(e^{j2\pi k/N} \right) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1.$$

Poslednji rezultat sledi na osnovu činjenice da je

$$\hat{G}_N \left(e^{j2\pi k/N} \right) = \hat{G}_N \left(e^{j2\pi(N-k)/N} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

3.1.1 Osobine ETFE procene

Razmotrimo u nastavku neke osobine ETFE procene. Analizirajmo prvo relaciju između DFT-a izlaznog i ulaznog signala čisto determinističkog stabilnog dela sistema, kod koga ne postoji prisustvo poremećaja, tj. kod koga je veza između izlaznog $y(k)$ i ulaznog $u(k)$ signala data sa

$$y(k) = G_0(q) u(k)$$

gde je $G_0(q)$ stvarna funkcija prenosa sistema. Ako je $u(k)$ poznat ali ograničen signal, tj.

$$|u(k)| \leq C_u < \infty, \quad \forall k \in Z$$

tada su $Y_N(\omega_\ell) = \text{DFT}(y(k))$ i $U_N(\omega_\ell) = \text{DFT}(u(k))$ povezani sa relacijom

$$Y_N(\omega) = G_0(e^{j\omega}) U_N(\omega) + R_N(\omega)$$

gde je

$$|R_N(\omega)| = |\rho_1(N)| \leq \frac{2C_u C_g}{\sqrt{N}}, \quad C_g = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell |g(\ell)|$$

Navedeni izraz se lako dokazuje na osnovu definicionih izraza za DFT izlaza i ulaza

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N y(k) e^{-j\omega k}, \quad U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N u(k) e^{-j\omega k}$$

pri čemu je veza između izlaznog i ulaznog signala

$$y(k) = G_0(q) u(k) = \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} g_0(\ell) q^{-\ell} \right] \sum_{\ell=1}^{\infty} g_0(\ell) q^{-\ell} u(k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g_0(\ell) u(k - \ell)$$

gde su $g_0(\ell)$ odbirci impulsnog odziva sistema. Dalje se može pisati

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^{\infty} g_0(\ell) u(k - \ell) e^{-j\omega k}$$

ili nakon uvođenja smene $m = k - \ell$ ($k = m + \ell$) i zamenom redosleda sumiranja

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1-\ell}^{N-\ell} g_0(\ell) u(m) e^{-j\omega\ell} e^{-j\omega m} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^{\infty} g_0(\ell) e^{-j\omega\ell} \sum_{m=1-\ell}^{N-\ell} u(m) e^{-j\omega m}$$

Ako se dalje definiše

$$R_N(\omega) = \rho_1(N) = Y_N(\omega) - G_0(e^{j\omega}) U_N(\omega)$$

tada je

$$\begin{aligned} |Y_N(\omega) - G_0(e^{j\omega}) U_N(\omega)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^{\infty} g_0(\ell) e^{-j\omega\ell} \sum_{m=1-\ell}^{N-\ell} u(m) e^{-j\omega m} - \sum_{\ell=1}^{\infty} g_0(\ell) e^{-j\omega\ell} U_N(\omega) \right| \\ &\leq \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} g_0(\ell) e^{-j\omega\ell} \right| \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1-\ell}^{N-\ell} u(m) e^{-j\omega m} - U_N(\omega) \right| \end{aligned}$$

Pošto je

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1-\ell}^{N-\ell} u(m) e^{-j\omega m} - U_N(\omega) \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1-\ell}^{N-\ell} u(m) e^{-j\omega m} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N u(k) e^{-j\omega k} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1-\ell}^{\circ} u(m) e^{-j\omega m} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^{N-\ell} u(m) e^{-j\omega m} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N-\ell} u(k) e^{-j\omega k} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=N-\ell+1}^N u(k) e^{-j\omega k} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1-\ell}^{\circ} u(m) e^{-j\omega m} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=N-\ell+1}^N u(m) e^{-j\omega m} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1-\ell}^{\circ} u(m) e^{-j\omega m} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=N-\ell+1}^N u(m) e^{-j\omega m} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1-\ell}^{\circ} |u(m)| |e^{-j\omega m}| + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=N-\ell+1}^N |u(m)| |e^{-j\omega m}| \\ &\leq \frac{C_u}{\sqrt{N}} \sum_{m=1-\ell}^{\circ} 1 + \frac{C_u}{\sqrt{N}} \sum_{m=N-\ell+1}^N 1 = \frac{2\ell C_u}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

Na taj način se dobija

$$\begin{aligned} |R_N(\omega)| = |\rho_1(N)| &\leq \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell g_0(\ell) e^{-j\omega\ell} \right| \frac{2C_u}{\sqrt{N}} \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} |\ell g_0(\ell)| |e^{-j\omega\ell}| \frac{2C_u}{\sqrt{N}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} |\ell g_0(\ell)| \frac{2C_u}{\sqrt{N}} = \frac{2C_u C_g}{\sqrt{N}}; \quad C_g = \sum_{\ell=1}^{\infty} |\ell g_0(\ell)| \end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

Primetimo da je za periodične signale $u(k)$ sa periodom N izraz

$$\left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1-\ell}^{N-\ell} u(m) e^{-j\omega m} - U_N(\omega) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1-\ell}^0 u(m) e^{-j\omega m} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=N-\ell+1}^N u(m) e^{-j\omega m} \right| = 0$$

za $\omega = \omega_\ell = 2\pi\ell/N$, $\ell = 1, 2, \dots, N$, odakle se zaključuje da je $R_N(\omega) = 0$.

Pretpostavimo sada da je sistem čija je stvarna funkcija prenosa izložen dejstvu aditivnog poremećaja na izlazu, tako da je odziv sistema dat sa

$$y(k) = G_0(q) u(k) + v(k)$$

gde je $u(k)$ pobudni signal a $v(k)$ signal poremećaja. Neka je dalje poremećaj slučajan signal nulte srednje vrednosti i spektralne gustine snage $S_v(\omega)$, dok je pobuda $u(k)$ signal nekorelisan sa $v(k)$ i takav da je $|u(k)| \leq C_u$ za $\forall k \in Z$, gde je C_u konačna pozitivna konstanta. Tada ETFE procena ima sledeće osobine:

1. ETFE je pomerena procena, pri čemu je njena srednja vrednost

$$\bar{E} \left\{ \hat{G}_N(e^{j\omega}) \right\} = G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)} = G_0(e^{j\omega}) + \frac{\rho_1(N)}{U_N(\omega)}$$

gde je

$$|R_N(\omega)| = |\rho_1(N)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{N}}, \quad C_1 = 2C_u C_g, \quad C_g = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell |g_0(\ell)|$$

2. Frekvencijska kovarijaciona funkcija ETFE procene definisana je izrazom

$$\begin{aligned} \bar{E} \left\{ \left[\hat{G}_N(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega}) \right] \left[\hat{G}_N(e^{-j\xi}) - G_0(e^{-j\xi}) \right] \right\} = \\ = \begin{cases} \frac{S_v(\omega) + \rho_2(N)}{|U_N(\omega)|^2}, & \xi = \omega \\ \frac{\rho_2(N)}{U_N(\omega) U_N(-\xi)}, & |\xi - \omega| = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \end{aligned}$$

pri čemu je

$$|\rho_2(N)| \leq \frac{C_2}{N}, \quad C_2 = C_1^2 + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\tau R_v(\tau)|$$

gde je $R_v(\tau)$, $\tau \in Z$, autokorelaciona funkcija poremećaja $v(k)$. Pretpostavljeno je da su razmatrane samo učestanosti ω za koje je $\hat{G}_N(e^{j\omega})$ definisano, tj. $\omega = \omega_\ell = 2\pi\ell/N$, $\ell = 0, 1, \dots, N-1$.

Dokaz sledi na osnovu izraza za odziv sistema

$$y(k) = G_0(q) u(k) + v(k)$$

odakle sledi da je

$$\text{DFT}(y(k)) = Y_N(\omega) = \text{DFT}(G_0(q) u(k)) + \text{DFT}(v(k))$$

Pošto je na osnovu prethodno izvršene analize za čisto deterministički sistem

$$\text{DFT}(G_0(q) u(k)) = G_0(e^{j\omega}) \text{DFT}(u(k)) + R_N(\omega) = G_0(e^{j\omega}) U_N(\omega) + R_N(\omega)$$

dalje sledi

$$Y_N(\omega) = G_0(e^{j\omega}) U_N(\omega) + R_N(\omega) + V_N(\omega)$$

gde je $V_N(\omega) = \text{DFT}(v(k))$. Na taj način se dobija izraz za ETFE procenu

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)} = G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)} + \frac{V_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

Pošto je $\{v(k)\}$ vremenski diskretan niz nulte srednje vrednosti, to je srednja vrednost

$$\bar{E}\{V_N(\omega)\} = 0$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} \bar{E}\{\hat{G}_N(e^{j\omega})\} &= \bar{E}\left\{G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)} + \frac{V_N(\omega)}{U_N(\omega)}\right\} = G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)} + \frac{\bar{E}\{V_N(\omega)\}}{U_N(\omega)} \\ &= G_0(e^{j\omega}) + \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)} = G_0(e^{j\omega}) + \frac{\rho_1(N)}{U_N(\omega)} \end{aligned}$$

gde je $R_N(\omega) = \rho_1(N)$ definisano prilikom razmatranja čisto determinističkog sistema i zadovoljava uslov

$$|R_N(\omega)| = |\rho_1(N)| \leq \frac{2C_u C_g}{\sqrt{N}}, \quad C_g = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell |g_0(\ell)|$$

Dalje je neophodno da se analizira kovarijansa (frekvencijska kovarijaciona funkcija) šuma

$$\begin{aligned} \bar{E}\{V_N(\omega) V_N(-\xi)\} &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \bar{E}\{v(r) e^{-j\omega r} v(s) e^{j\xi s}\} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N e^{j(\xi s - \omega r)} \bar{E}\{v(r) v(s)\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N e^{j(\xi s - \omega r)} R_v(r-s) \end{aligned}$$

gde je $R_v(\cdot)$ autokorelaciona funkcija poremećaja (šuma) $v(k)$. Uvodeći smenu $\tau = r - s$ dalje se dobija ($s = r - \tau$)

$$E\{V_N(\omega) V_N(-\xi)\} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sum_{\tau=r-N}^{r-1} e^{j(\xi - \omega)r} e^{-j\xi\tau} R_v(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N e^{j(\xi - \omega)r} \sum_{\tau=r-N}^{r-1} R_v(\tau) e^{-j\xi\tau}$$

Pošto je spektar snage poremećaja definisan na osnovu njegove auto-kovarijacione funkcije kao diskretna Fourierova transformacija poslednje funkcije

$$S_v(\xi) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_v(\tau) e^{-j\xi\tau}$$

dalje se može pisati

$$\sum_{\tau=r-N}^{r-1} R_v(\tau) e^{-j\xi\tau} = S_v(\xi) - \sum_{\tau=-\infty}^{r-N-1} e^{-j\xi\tau} R_v(\tau) - \sum_{\tau=r}^{\infty} e^{-j\xi\tau} R_v(\tau)$$

pri čemu je ranije pokazano da važi relacija

$$\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N e^{j(\xi-\omega)r} = \begin{cases} 1, & \xi = \omega \\ 0, & \xi - \omega = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = \pm 1, \dots, \pm(N-1) \end{cases}$$

Posmatrajmo u nastavku član

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N e^{j(\xi-\omega)r} \sum_{\tau=-\infty}^{r-N-1} e^{-j\xi\tau} R_v(\tau) \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sum_{\tau=-\infty}^{r-N-1} |R_v(\tau)| \leq \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sum_{\tau=-\infty}^{-1} |R_v(\tau)| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{\tau=-\infty}^{-1} \sum_{r=1}^N |R_v(\tau)| \leq \frac{1}{N} \sum_{\tau=-\infty}^{-1} |\tau| |R_v(\tau)| \leq \frac{C}{N} \end{aligned}$$

pretpostavljajući da je

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\tau R_v(\tau)| < \infty$$

Na sličan način se dobija

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N e^{j(\xi-\omega)r} \sum_{\tau=r}^{\infty} e^{-j\xi\tau} R_v(\tau) \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sum_{\tau=r}^{\infty} |R_v(\tau)| \leq \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sum_{\tau=1}^{\infty} |R_v(\tau)| \leq \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{r=1}^N |R_v(\tau)| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^{\infty} |\tau| |R_v(\tau)| \leq \frac{C}{N} \end{aligned}$$

Na taj način se konačno dobija

$$\begin{aligned} \bar{E} \{V_N(\omega) V_N(-\xi)\} &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N e^{j(\xi-\omega)r} \left[S_v(\xi) - \sum_{\tau=-\infty}^{r-N-1} e^{-j\xi\tau} R_v(\tau) - \sum_{\tau=r}^{\infty} e^{-j\xi\tau} R_v(\tau) \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N e^{j(\xi-\omega)r} S_v(\xi) + \rho_3(N) \end{aligned}$$

gde je

$$\rho_3(N) = -\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N e^{j(\xi-\omega)r} \sum_{\tau=-\infty}^{r-N-1} e^{-j\xi\tau} R_v(\tau) - \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N e^{j(\xi-\omega)r} \sum_{\tau=r}^{\infty} e^{-j\xi\tau} R_v(\tau)$$

Na osnovu prethodnih izraza se zaključuje da je

$$|\rho_3(N)| \leq \frac{2C}{N}; \quad C = \sum_{\tau=-\infty}^{-1} |\tau| |R_v(\tau)| = \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau |R_v(\tau)|$$

odnosno

$$2C = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\tau R_v(\tau)|$$

Imajući u vidu poslednje izraze, konačno sledi traženi izraz za kovarijansu poremećaja

$$\bar{E} \{V_N(\omega) V_N(-\xi)\} = \begin{cases} S_v(\omega) + \rho_3(N), & \xi = \omega \\ \rho_3(N), & |\xi - \omega| = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

Dalje se može pisati

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega}) = \frac{R_N(\omega)}{U_N(\omega)} + \frac{V_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} & \bar{E} \left\{ \left[\hat{G}_N(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega}) \right] \left[\hat{G}_N(e^{-j\xi}) - G_0(e^{-j\xi}) \right] \right\} = \\ & = \frac{R_N(\omega) R_N(-\xi)}{U_N(\omega) U_N(-\xi)} + \bar{E} \left\{ \frac{V_N(\omega) R_N(-\xi)}{U_N(\omega) U_N(-\xi)} \right\} + \bar{E} \left\{ \frac{R_N(\omega) V_N(-\xi)}{U_N(\omega) U_N(-\xi)} \right\} + \bar{E} \left\{ \frac{V_N(\omega) V_N(-\xi)}{U_N(\omega) U_N(-\xi)} \right\} \\ & = \frac{R_N(\omega) R_N(-\xi)}{U_N(\omega) U_N(-\xi)} + \frac{R_N(-\xi) \bar{E} \{V_N(\omega)\}}{U_N(\omega) U_N(-\xi)} + \frac{R_N(\omega) \bar{E} \{V_N(-\xi)\}}{U_N(\xi) U_N(-\xi)} + \bar{E} \left\{ \frac{V_N(\omega) V_N(-\xi)}{U_N(\omega) U_N(-\xi)} \right\} \end{aligned}$$

Pošto je

$$\bar{E} \{V_N(\omega)\} = 0, \quad |R_N(\omega)| = |\rho_1(N)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{N}}, \quad C_1 = \frac{2C_u C_g}{\sqrt{N}}, \quad C_g = \sum_{\ell=1}^{\infty} |\ell g_0(\ell)|$$

i koristeći izvedeni izraz za $\bar{E} \{V_N(\omega) V_N(-\xi)\}$, dalje se zaključuje (ovde se operator generalisanog matematičkog očekivanja $\bar{E} \{\cdot\}$ odnosi samo na poremećaj $v(k)$, pošto je pobudna sekvenca $u(k)$ poznata)

$$\begin{aligned} & \bar{E} \left\{ \left[\hat{G}_N(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega}) \right] \left[\hat{G}_N(e^{-j\xi}) - G_0(e^{-j\xi}) \right] \right\} = \\ & = \begin{cases} \frac{S_v(\omega) + \rho_2(N)}{U_N(\omega) U_N(-\omega)}; & \xi = \omega \quad (|\xi - \omega| = 2\pi k/N, \quad k = 0) \\ \frac{\rho_2(N)}{U_N(\omega) U_N(-\xi)}; & |\xi - \omega| = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \end{aligned}$$

gde je

$$|\rho_2(N)| \leq |\rho_1(N)|^2 + |\rho_3(N)| = \frac{C_1^2 + C}{N}$$

pri čemu je

$$C_1 = 2C_u C_g = 2C_u \sum_{\ell=1}^{\infty} |\ell g_0(\ell)|; \quad C = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |\tau R_v(\tau)|$$

Izvedeni izrazi ukazuju na sledeće zaključke vezane za kvalitet (osobine) ETFE procene.

1. Ako je pobuda $u(k)$ periodičan signal, sa periodom od N odbiraka, tada je $R_N(\omega) = \rho_1(N) = 0$ za učestanosti $\omega = \omega_\ell = 2\pi\ell/N$, $\ell = 0, 1, \dots, N-1$. Prethodno je takođe pokazano da za prostoperiodičan signal $u(k) = A \cos(\omega_0 k)$ gde je $\omega_0 = 2\pi/N_0$ za neko celobrojno $N_0 > 1$ na intervalu vremena $k = 1, 2, \dots, N$, pri čemu je N ceo multipl od osnovne periode N_0 , tj. $N = sN_0$, važi $|U_N(\omega)|^2 = (A^2/4)N$ za $\omega = \pm\omega_0 = \pm 2\pi/N_0 = \pm 2\pi s/N$ i $|U_N(\omega)|^2 = 0$ za $\omega = 2\pi k/N$, $k \neq s$. Veličina $|U_N(\omega)|^2/N$ naziva se i periodogram i ovaj periodogram ima dva impulsa na učestanostima $\pm\omega_0$ u okviru intervala $(-\pi, +\pi)$.

Razmotrimo u nastavku periodičan signal $u(k) = u(k + N_0)$, sa osnovnom periodom N_0 , koji se posmatra na konačnom intervalu $k = 1, 2, \dots, N$, gde je N ceo multipl od N_0 , tj. $N = sN_0$, $s \in \mathbb{Z}$. Ovakav signal se može predstaviti diskretnim Fourierovim redom (Discrete Fourier Sequence ili skraćeno DFS)

$$u(k) = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{n=-N_0/2+1}^{N_0/2} U_n e^{j2\pi nk/N_0} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{n=-N_0/2N}^{N_0/2} e^{jn\omega_0 k}, \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

gde su Fourierovi koeficijenti

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{k=1}^{N_0} u(k) e^{-j\omega_0 nk}, n = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N_0}{2}$$

Pošto je signal periodičan, izraz za $u(k)$ može se primeniti na celom intervalu posmatranja $k = 1, \dots, N$, pa je DFT ovog signala (pošto je signal periodičan Fourierova transformacija ovog signala postoji samo na diskretnim učestanostima $\omega = \omega_n = n\omega_0$, a pošto je signal diskretan Fourierova transformacija je periodična)

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N_0} u(k) e^{-j\omega k}, \omega = \omega_n = n\omega_0 = \frac{2\pi n}{N_0} = \frac{2\pi ns}{N}$$

odakle se zamenom DFS izraza za $u(k)$ dobija

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N_0} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-N_0/2+1}^{N_0/2} U_n e^{jn\omega_0 k} e^{-j\omega k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \frac{U_N}{\sqrt{N_0}} \sum_{n=-N_0/2+1}^{N_0/2} e^{j(n\omega_0 - \omega)k}$$

Pošto je

$$\sum_{k=1}^N e^{j(n\omega_0 - \omega)k} = \begin{cases} N & \text{za } \omega = \pm n\omega_0 = \pm 2\pi ns/N \\ 0 & \text{za } \omega = \pm 2\pi k/N, \quad k \neq ns \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U_N(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-N_0/2+1}^{N_0/2} \frac{U_N}{\sqrt{N_0}} \sum_{k=1}^N e^{j(n\omega_0 - \omega)k} \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{N}{N_0}} U_n = \sqrt{s} U_N, & \omega = \pm n\omega_0 = \pm 2\pi ns/N, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N_0}{2} \\ 0, & \omega = 2\pi k/N, \quad k \neq ns \end{cases} \end{aligned}$$

Koristeći ovaj rezultat zaključuje se da za periodičan signal sa osnovnom periodom N_0 , tj. $u(k) = u(k + N_0)$, koji se posmatra na konačnom intervalu $k = 1, 2, \dots, N$, gde je N ceo multipl od N_0 , tj. $N = sN_0$, $s \in \mathbb{Z}$, broj frekvencija na kojima je $|U_N(\omega)|^2 \neq 0$ je konačan i jednak $\omega = \omega_r = r\omega_0 = 2\pi r/N_0 = 2\pi rs/N$, $r = 0, \pm 1, \dots, \pm N_0/2$, pri čemu je na tim učestanostima $|U_N(\omega)|^2 = N \cdot \text{const}$, dok je $|U_N(\omega)|^2 = 0$ za $\omega = 2\pi k/N$, $k \neq rs$.

Imajući u vidu prethodno izvršenu analizu, mogu se izvesti sledeći zaključci:

- ETFE procena $\hat{G}_N(e^{j\omega})$ definisana je samo za konačan broj diskretnih učestanosti $\omega = \omega_k = 2\pi k/N$, $k = rs$, $r = 0, \pm 1, \dots, \pm N_0/2$, $s = N/N_0$, odnosno $\omega = \omega_r = 2\pi r/N_0$, $r = 0, \pm 1, \dots, \pm N_0/2$.
- Na učestanostima $\omega = \omega_r = 2\pi r/N$ na kojima je ETFE procena definisana, ona je i konzistentna, odnosno nepomerena je i varijansa procene opada sa faktorom $1/N$, odnosno srednja vrednost procene zadovoljava uslov

$$\bar{E} \left\{ \hat{G}_N(e^{j\omega}) \right\} = G_0(e^{j\omega}) + \rho_1(N)/U_N(\omega),$$

a kako je $\rho_1(N) = 0$ to je srednja vrednost procene jednaka nepoznatoj vrednosti koja se estimira

$$\bar{E} \left\{ \hat{G}_N(e^{j\omega}) \right\} = G_0(e^{j\omega})$$

dok je varijansa procene

$$\bar{E} \left\{ \left[\hat{G}_N(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega}) \right]^2 \right\} = [S_v(\omega) + \rho_2(N)] / |U_N(\omega)|^2$$

gde je $S_v(\omega)$ ograničeni spektar snage poremećaja a $|\rho_2(N)| \leq \text{const}/N$ i $|U_N(\omega)|^2 = \text{const} \cdot N$, odakle sledi da za dovoljno veliko N , $N \rightarrow \infty$

$$\bar{E} \left\{ \left[\hat{G}_N(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega}) \right]^2 \right\} \sim \frac{\text{const}}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

- Ako je ulazni signal realizacija slučajnog procesa, tada je periodogram (procena spektra snage) $|U_N(\omega)|^2$ neglatka i fluktuirajuća funkcija argumenta ω , koja fluktuiira oko tačnog ali nepoznatog spektra snage pobude $S_u(\omega)$, za koji se pretpostavlja da je ograničena funkcija učestanosti ω , pri čemu važe sledeći zaključci:

- (a) ETFE je asimptotski nepomerena procena ($N \rightarrow \infty$) funkcije prenosa sistema $G_0(e^{j\omega})$ u rastućem skupu učestanosti ω sa porastom dužine vremenske serije N . Naime, kao što je pokazano, srednja vrednost ETFE procene

$$\bar{E} \left\{ \hat{G}_N(e^{j\omega}) \right\} = G_0(e^{j\omega}) + \frac{\rho_1(N)}{U_N(\omega)}$$

gde je $\omega = \omega_\ell = \ell\omega_0 = 2\pi\ell/N$, $\ell = 0, 1, \dots, N-1$, dok je $|\rho_1(N)| \leq \text{const}/\sqrt{N}$ odakle sledi kada $N \rightarrow \infty$

$$\bar{E} \left\{ \hat{G}_N(e^{j\omega}) \right\} = G_0(e^{j\omega})$$

- (b) Varijansa ETFE procene ne opada sa porastom dužine uzorka N . Naime, ranije je pokazano da je varijansa ETFE procene

$$\bar{E} \left\{ \left[\hat{G}_N(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega}) \right]^2 \right\} = [S_v(\omega) + \rho_2(N)] / |U_N(\omega)|^2,$$

gde je $|\rho_2(N)| \leq \text{const}/N$, tako da sa porastom N varijansa ne teži nuli, već konstanti koja je određena odnosom signal-šum (eng. signal-to-noise ratio ili skraćeno $SNR = |U_N(\omega)|^2 / S_v(\omega)$ na posmatranoj učestanosti $\omega = \omega_\ell$, odnosno

$$\bar{E} \left\{ \left[\hat{G}_N(\omega) - G_0(e^{j\omega}) \right]^2 \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{S_v(\omega)}{|U_N(\omega)|^2} = SNR^{-1}(\omega), \omega = \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \ell = 1, \dots, N-1.$$

- (c) Procene ETFE na različitim učestanostima su asimptotski nekorelisane. Zaista, kao što je pokazano, frekvencijska kovarijaciona funkcija za dve različite učestanosti ω i ξ data je sa

$$\bar{E} \left\{ \left[\hat{G}_N(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega}) \right] \left[\hat{G}_N(e^{j\xi}) - G_0(e^{j\xi}) \right] \right\} = \rho_2(N) / U_N(\omega) U_N(-\xi)$$

gde je $|\rho_2(N)| \leq \text{const}/N$, odakle se zaključuje da

$$\bar{E} \left\{ \left[\hat{G}_N(e^{j\omega}) - G_0(e^{j\omega}) \right] \left[\hat{G}_N(e^{j\xi}) - G_0(e^{j\xi}) \right] \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

gde je $|\xi - \omega| = 2\pi k/N$, $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Izvedeni zaključci pokazuju da je kvalitet ETFE procene izuzetno visok ukoliko se primeni periodična pobuda (onda je procena konzistentna). Međutim, za neperiodične pobude kvalitet ETFE procene se ne povećava sa porastom broja podataka N , pošto se sa porastom N povećava i broj parametara koje treba estimirati, tako da količina informacije po parametru ostaje praktično nepromenjena, što ima za posledicu da varijansa ne opada sa porastom broja podataka N . Takođe, ETFE procene na različitim učestanostima su nekorelisane, tako da se sa porastom skupa učestanosti (porastom N) ne povećava raspoloživa apriorna informacija o sistemu.

3.1.2 Usrednjavanje (interpolacija ili glačanje) ETFE procene

Kvalitet ETFE procene može se ipak poboljšati koristeći osobinu nekorelisanih observacija na različitim učestanostima. Naime, ETFE na nekoj učestanosti ω_0 može se poboljšati na osnovu usrednjavanja ETFE procena u okviru intervala učestanosti

$$\frac{2\pi k_1}{N} = \omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega \leq \frac{2\pi k_2}{N}$$

Tada se usrednjeni (“izglačani ili ispeglani”) ETFE dobija kao

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \sum_{\ell=k_1}^{k_2} \hat{G}_N(e^{j\omega_\ell}),$$

Ovakav postupak podrazumeva sledeće:

1. Stvarna funkcija prenosa $G_0(e^{j\omega})$ je glatka funkcija argumenta ω .
2. Rastojanje $2\pi/N$ između diskretnih učestanosti ω_ℓ je malo u poređenju sa intervalom na kome se dešavaju značajnije promene funkcije $G_0(e^{j\omega})$, tj. funkcija $G_0(e^{j\omega})$ je približno konstantna u okviru intervala dužine $2\pi/N$.

Pomenuta usrednjena ETFE procena se može napisati u obliku težinske sume

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\sum_{\ell=k_1}^{k_2} \alpha_\ell \hat{G}(e^{j\omega_\ell})}{\sum_{\ell=k_1}^{k_2} \alpha_\ell}; \quad \alpha_\ell = 1, \quad \omega_\ell = 2\pi\ell/N$$

Kao što je već pomenuto, ukoliko je rastojanje između ekvidistantnih tačaka na frekvencijskoj skali $2\pi/N$ dovoljno malo u poređenju sa dinamikom promene stvarne funkcije prenosa $G_0(e^{j\omega})$, tada su

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_\ell}), \quad \omega_\ell = 2\pi\ell/N \approx \omega$$

nekorelisane i nepomerene procene iste konstante $G_0(e^{j\omega})$, dok je varijansa ovih procena data sa

$$\text{var} [\hat{G}_N(e^{j\omega_\ell})] \approx \frac{S_v(\omega_\ell)}{|U_N(\omega_\ell)|^2} = \text{SNR}^{-1}(\omega_\ell)$$

Ako se dalje pretpostavi da je $G_0(e^{j\omega}) \approx \text{const}$ na posmatranom intervalu

$$\frac{2\pi k_1}{N} = \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega = \frac{2\pi k_2}{N}$$

tada se težinski koeficijenti u usrednjenoj proceni mogu izabrati kao (ETFE procenama na onim učestanostima na kojima se dobija velika varijansa procene dodeljuje se mala težina)

$$\alpha_\ell = \text{var}^{-1} [\hat{G}_N(j\omega_\ell)] = \frac{|U_N(\omega_\ell)|^2}{S_v(\omega_\ell)} = \text{SNR}(\omega_\ell)$$

Za dovoljno veliko N ove sume se mogu smatrati kao aproksimacije odgovarajućih integrala, na osnovu čega sledi

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\int_{\xi=\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \alpha(\xi) \hat{G}_N(e^{j\xi}) d\xi}{\int_{\xi=\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \alpha(\xi) d\xi}; \quad \alpha(\xi) = \frac{|U_N(\xi)|^2}{S_v(\xi)}$$

Uvodeći pravougaonu prozorsku funkciju u frekvencijskom domenu

$$W(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < \Delta\omega \\ 0, & |\xi| > \Delta\omega \end{cases}$$

poslednja relacija se može napisati u obliku

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\int_{\xi=\omega_0-\Delta\omega}^{\xi=\omega_0+\Delta\omega} W(\xi - \omega_0) \alpha(\xi) \hat{G}_N(e^{j\xi}) d\xi}{\int_{\xi=\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} W(\xi - \omega_0) \alpha(\xi) d\xi}$$

Ukoliko $G_0(e^{j\omega})$ nije konstantno unutar razmatranog intervala učestanosti ω , tada je potrebno uvesti takvu prozorsku funkciju koja će dodatno ponderisati učestanosti bliske posmatranoj učestanosti ω_0 , tj.

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W(\xi - \omega_0) \alpha(\xi) \hat{G}_N(e^{j\xi}) d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W(\xi - \omega_0) \alpha(\xi) d\xi}$$

gde je $W(\xi)$ frekvencijska prozorska funkcija centrirana oko $\xi = 0$ (tada je $W(\xi - \omega_0)$ centrirana oko ω_0). Primena poslednje relacije pretpostavlja da je spektar snage $S_v(\omega)$ šuma poznat. Ako to nije slučaj, ali se pretpostavi da je spektar snage šuma približno konstantan unutar frekvencijske prozorske funkcije konačne širine, tada je

$$\alpha(\xi) = \frac{|U_N(\xi)|^2}{S_v(\xi)} \approx \frac{|U_N(\xi)|^2}{S_v(\omega_0)}$$

pa se zamenom ovog težinskog koeficijenta u poslednji izraz dobija sledeća usrednjena procena (faktor $S_v(\omega_0)$ u brojiocu i imeniocu se skraćuje)

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W(\xi - \omega_0) |U_N(\xi)|^2 \hat{G}_N(e^{j\xi}) d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W(\xi - \omega_0) |U_N(\xi)|^2 d\xi}$$

Poslednjem izrazu može se dati i sledeće tumačenje. Pošto je

$$|U_N(\xi)|^2 \hat{G}(e^{j\xi}) = |U_N(\xi)|^2 \frac{Y_N(\xi)}{U_N(\xi)} = U_N(\xi) U_N^*(\xi) \frac{Y_N(\xi)}{U_N(\xi)} = U_N^*(\xi) Y_N(\xi)$$

zaključuje se da je

$$|U_N(\xi)|^2 \hat{G}(e^{j\xi}) = \hat{S}_{uy}^N(\xi)$$

gde je $\hat{S}_{uy}(\xi)$ procena kros-spektra snage između ulaza i izlaza na učestanosti ξ . Dalje se može pisati

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\xi - \omega_0) |U_N(\xi)|^2 \hat{G}_N(e^{j\xi}) d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} W(\xi - \omega_0) \hat{S}_{uy}^N(\xi) d\xi$$

te ukoliko je frekvenzijska prozorska funkcija centrirana oko $\xi = 0$ i ima takvu širinu da je kros-spektar snage $S(\xi)$ približno konstantan u okviru širine frekvenzijske prozorske funkcije, kao i da je

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\xi) d\xi = 1$$

tada je ispunjeno

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\xi - \omega_0) \hat{S}_{uy}^N(\xi) d\xi \approx \hat{S}_{uy}^N(\omega_0)$$

Pod navedenim uslovima takođe važi

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\xi - \omega_0) |U_N(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} W(\xi - \omega_0) \hat{S}_u^N(\xi) d\xi \approx \hat{S}_u^N(\omega_0)$$

odakle se zaključuje da se navedena usrednjena ETFE procena funkcije prenosa u suštini svodi na

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{\hat{S}_{yu}^N(\omega_0)}{\hat{S}_u^N(\omega_0)}$$

gde brojilac označava procenu kros-spektra snage ulaza i izlaza, a imenilac procenu auto-spektra snage ulaza, koja se naziva i periodogram. Takođe, pošto relacija

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\xi - \omega_0) \hat{S}_u^N(\xi) d\xi = \hat{S}_u^N(\omega_0)$$

označava konvoluciju u frekvenzijskom domenu, njoj odgovara proizvod odgovarajućih inverznih Fourierovih likova u vremenskom domenu

$$\hat{R}_u^N(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{S}_u^N(\omega) e^{j\tau\omega} d\omega = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t) u(t - \tau)$$

$$w(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

odnosno diskretna Fourierova transformacija ovog proizvoda jednaka je razmatranom konvolucionom intervalu u frekvencijskom domenu, odakle se zaključuje da je

$$\hat{S}_u^N(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} w(\tau) \hat{R}_u^N(\tau) e^{-j\tau\omega}$$

Glatka frekvencijska prozorska funkcija $W(\xi)$ se obično bira tako da je njen Fourierov transformacioni par $w(\tau) = 0$ za $|\tau| > M$, gde je $M \ll N$. Veličina M naziva se tačka prekida (eng. truncation point) prozorske funkcije. Tipične prozorske funkcije, kao što su Bartlettova, Parzenova i Hammingova, navedene su u poglavlju posvećenom spektralnoj analizi.

Alternativno se može formirati usrednjena ili "ispeglana" procena funkcije prenosa, tako što se polazni skup od po N podataka o ulaznom i izlaznom signalu podeli na L podskupova od po R podataka ($N = R \cdot L$), nakon čega se formiraju ETFE procene funkcije prenosi za svaki od tih podskupova podataka

$$\hat{G}_R^k(e^{j\omega}), \quad k = 1, 2, \dots, L$$

nakon čega se usrednjena procena formira kao

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \hat{G}_R^k(e^{j\omega})$$

ili

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=1}^L \beta_R^k(\omega) \hat{G}_R^k(e^{j\omega})}{\sum_{k=1}^L \beta_R^k(\omega)}$$

gde je

$$\beta_R^k(\omega) = |U_R^k(\omega)|^2$$

Ovde nije korišćen težinski faktor $\alpha_R^k(\omega) = |U_R^k(\omega)|^2 / S_v(\omega)$ pošto je spektar snage šuma $S_v(\omega)$ u brojiocu i imeniocu skraćuje. Takođe, R se bira kao ceo stepen osnove 2, kako bi se koristio FFT algoritam (engl. Fast Fourier Transform ili skraćeno FFT) za praktičnu realizaciju ove procene.

3.2 Uslov perzistentne eksitacije

U prethodnom poglavlju je pokazano da ako se sistem pobudi periodičnim signalom $u(k) = \sin(\omega_0 k)$ izlaz linearnog stabilnog vremenski diskretnog sistema biće $y(k) = A \sin(\omega_0 k + \varphi)$, gde su $A(\theta)$ i $\varphi(\theta)$ amplituda i faza na frekvenciji ω_0 odgovarajuće frekvencijske funkcije sistema, koja je poznata sa tačnošću do nepoznatih parametara θ . Dakle, svaka periodična pobuda učestanosti

ω_i daje parametre $A(\theta, \omega_i)$ i $\varphi(\theta, \omega_i)$, dok smo izborom učestanosti ω_0 dobili dve relacije $A(\theta)$ i $\varphi(\theta)$ za određivanje nepoznatih parametara θ . Ako postoje samo dva parametra u vektoru θ , onda će oni moći da se odrede selekcijom sinusoidalne pobude. Na sličan način, izborom pobude koja sadrži n različitih frekvencija moći će se identifikovati $2n$ nepoznatih parametara u vektoru parametara θ . Navedeni primer pokazuje da pobudni signal mora biti dovoljno sadržajan ili "bogat" da bi se identifikovali svi nepoznati parametri u sistemu, pri čemu se "bogatstvo" pobude ogleda u njenom frekvencijskom liku, koji je opisan odgovarajućim spektrom snage $S(\omega)$.

Pojam "bogatstvo" pobude matematički se formuliše na osnovu pojma perzistentne eksitacije.

3.2.1 Definicija perzistentne eksitacije

Kvazi-stacionarni signal $u(k)$ sa spektrom snage $S_u(\omega)$ zadovoljava uslov perzistentne eksitacije reda n ukoliko za sve MA filtre reda n čija je funkcija prenosa oblika

$$M_n(q) = \sum_{i=1}^n m_i q^{-i}$$

relacija

$$|M_n(e^{j\omega})|^2 S_u(\omega) = 0$$

implicira da je $M_n(e^{j\omega}) \equiv 0$.

Ovakva formalna definicija može se interpretirati na sledeći način:

1. Signal $u(k)$ poseduje osobinu perzistentne eksitacije reda n ukoliko je njegov spektar snage $S_u(\omega)$ različit od nule za najmanje n različitih kružnih učestanosti u intervalu osnovne periode $-\pi \leq \omega \leq \pi$.
2. Signal $u(k)$ koji zadovoljava uslov perzistentne eksitacije reda n ne može se kompletno potisnuti nekim MA filtrom reda $(n-1)$.

Drugim rečima, ukoliko je pobudni signal $u(k)$ perzistentne eksitacije reda n , na osnovu observacija ulaza $u(k)$ i izlaza $y(k)$ mogu se identifikovati (estimirati) maksimalno n parametara u modelu sistema. Dakle, pobuda $u(k) = \sin(\omega_0 k)$ ima osobinu perzistentne eksitacije reda $n = 2$, dok suma od tri sinusoida različitih učestanosti ima perzistentnu eksitaciju reda $n = 6$, te omogućuje estimaciju do maksimalno šest parametara. Takođe, signal koji ima talasni oblik četvrtke ima mnogo učestanosti za koji je njegov spektar snage na intervalu $(-\pi, \pi)$ različit od nule, te dozvoljava identifikaciju velikog broja parametara.

Uz navedeno, kovarijaciona matrica R_u^n signala $u(k)$ koji poseduje perzistentnu eksitaciju reda n predstavlja regularnu matricu.

Osnovne osobine svih razmatranih neparametarskih metoda identifikacije prikazane su u tabeli 3.1.

METOD	DOMEN	PRINCIP	OSOBINE
Korelacioni	Vremenski	Korelacija ulaza i izlaza i rešavanje sistema jednačina po nepoznatim odbircima impulsnog odziva	Moguć svaki ulazni signal Aproksimacija kovarijanse
Frekvencijski odziv	Frekvencijski	Primena sinusne pobude i grafičko određivanje amplitude i faze odziva	Sinusoidalna pobuda Dug eksperiment Efekti prelaznog režima
Frekvencijski odziv i korelacija	Frekvencijski	Primena sinusne pobude i korelacija sa sinusnim i kosisinusnim signalom	Sinusoidalna pobuda Dug eksperiment Uticao prelaznog procesa
Fourierova analiza	Frekvencijski	Količnik DFT-a izlaza i ulaza u cilju dobijanja ETFE procene frekvencijske funkcije (karakteristike)	Svaki pobudni signal Brz Osetljiv na šum Može se glačati, tj. usrednjiti

Tabela 3.1: Osnovne osobine neparametarskih metoda identifikacije

Parametarska identifikacija

Pod pojmom parametarske identifikacije podrazumeva se estimacija (procena) konačnog broja nepoznatih parametara u unapred usvojenoj strukturi modela sistema. Izrada modela sistema nikad nije sama po sebi cilj, već se uvek ima u vidu namena dobijenog modela. Parametarski modeli se koriste za analizu procesa, njihovu simulaciju i projektovanje kontrolera (sistema upravljanja). Zadatak analize je da se predvidi ponašanje procesa pod određenim okolnostima i analiza se obično zasniva na računarskoj simulaciji. Sa druge strane, zadatak sinteze je da se projektuje kontroler, koji treba da obezbedi da se proces ponaša u skladu sa postavljenim zahtevima. Izvršenje bilo kog od ovih zadataka pretpostavlja postojanje adekvatnog modela procesa koji je u stanju da uspešno predvidi ponašanje procesa pod zadatim uslovima rada. Sa ovakvog stanovišta prirodan kriterijum za ocenu valjanosti modela predstavlja sposobnost modela da predviđa ponašanje procesa pod zadatim okolnostima. Ovakav verbalni kriterijum potrebno je prevesti na jezik matematike, kako bi se definisao matematički kriterijum ili mera kojom će se numerički iskazati kapacitet predikcije parametarskog modela. Jedan mogući pristup sastoji se u izračunavanju budućih izlaza (odziva) procesa za zadate uslove rada (zadate početne uslove, pobudne ulazne signale i poremećaje) i njihovo poređenje sa stvarnim izmerenim izlazima procesa, koji su dobijeni pod istim okolnostima. Ukoliko su greške između izmerenih izlaza i njihovih predikcija dovoljno male, takav model se može smatrati adekvatnim. Metode identifikacije koje se zasnivaju na ovakvom principu nazivaju se **metode greške predikcije** (odgovarajući termin na engleskom jeziku glasi *Prediction Error Methods* ili skraćeno PEMS), pošto je greška predikcije, tj. razlika između izmerene i prediktovane vrednosti, usvojena za meru ili kriterijum valjanosti, odnosno kriterijum za ocenu kvaliteta ponašanja modela u odnosu na realan sistem. Da bismo formalizovali izloženi koncept, uvedimo sledeće oznake. Neka $y(k)$ označava izmereni izlaz procesa u diskretnom trenutku vremena $t_k = kT$, $k \in \mathbb{Z}$, gde je T - perioda odabiranja, odnosno vremenski interval između dva sukcesivna ekvidistantna

diskretna merenja. Pretpostavimo, takođe, da je celokupna prošlost sistema do trenutka k poznata na osnovu raspoložive merne informacije $y(i)$, $i \leq k-1$, te da želimo da predvidimo budući izlaz sistema $y(k+1)$ u trenutku $k+1$. Ovakva predikcija naziva se jednokoračna predikcija izlaza unapred (eng. one-step ahead prediction) i označava sa $\hat{y}(k+1|k)$. Ako se u trenutku $k+1$ izmeri izlaz i ovo merenje označi sa $y(k+1)$, tada je greška predikcije (eng. prediction error)

$$\varepsilon(k+1|k) = y(k+1) - \hat{y}(k+1|k).$$

Na osnovu koncepta greške predikcije, model sistema je dobar ukoliko je ova greška mala. Međutim, mala greška predikcije u jednom trenutku ne implicira isto tako malu vrednost u nekom narednom trenutku. Zato je bolje kao kriterijum koristiti sekvencu (niz) grešaka predikcija, a da bi se sprečilo da se efekti pozitivnih i negativnih grešaka potru, uobičajeno da se posmatra sekvenca (niz) kvadrata grešaka predikcija. Dalje je prirodno da se kao empirijski kriterijum za ocenu valjanosti modela usvoji aritmetička sredina grešaka predikcija na posmatranom intervalu $k = 1, 2, \dots, N$

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k|k-1)$$

U skladu sa usvojenim kriterijumom, model ima dobar kapacitet predikcije ukoliko je brojna vrednost kriterijuma J_N dovoljno mala pozitivna veličina. Takođe, najbolji (optimalan) model je onaj koji minimizira usvojeni kriterijum (sumu kvadrata grešaka predikcija). Na taj način se zadatak parametarske identifikacije može postaviti kao optimizacioni (minimizacioni) problem.

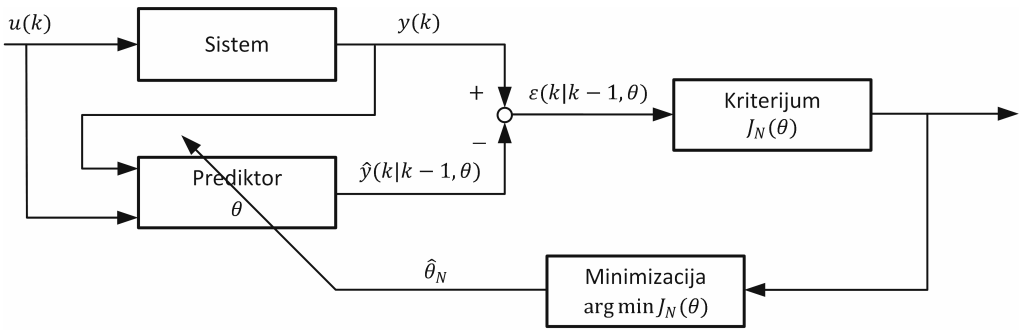
Kao što je istaknuto u prethodnom poglavlju, parametarski model se sastoji od odgovarajuće strukture (na primer, ARX, ARMAX, itd.), skupa celobrojnih promenljivih (označavaju redove odgovarajućih polinoma u usvojenoj strukturi, eventualno vreme kašnjenja, itd.) i skupa realnih promenljivih (označavaju nepoznate parametre u usvojenoj strukturi modela). Ako sve parametre skupimo u vektor parametara θ , tada je optimalan model u okviru usvojene strukture modela onaj čiji vektor parametara $\theta = \hat{\theta}_N$ minimizira usvojeni kriterijum za ocenu valjanosti modela

$$\hat{J}_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k|k-1, \theta)$$

odnosno

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta \in D_M} J_N(\theta)$$

Ovde je eksplicitno naznačeno da greške predikcije, a samim tim i kriterijum valjanosti, zavise od vrednosti parametara u usvojenoj strukturi modela, dok D_M označava skup svih mogućih vektora parametara za usvojenu strukturu modela, tj. usvojenu parametrizaciju modela (na primer, D_M može biti skup svih vektora parametara koji konstituišu ARX model drugog reda). Metode greške predikcije (PMEs) zasnivaju se na poslednje dve relacije. Blok šema parametarske identifikacije zasnovana na principu greške predikcije data je na slici 4.1.



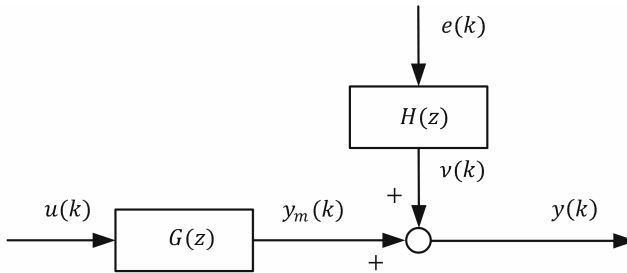
Slika 4.1: Blok šema parametarske identifikacije na bazi greške predikcije

4.1 Modeli predikcije: jednokoraćna predikcija unapred

Izračunavanje greške predikcije $\varepsilon(k|k-1)$ zahteva izračunavanje jednokoraćne predikcije izlaza unapred $\hat{y}(k|k-1)$ i to prvo na primeru standardne (generalne) strukture parametarskog modela, a dobijeni rezultat se lako može prilagoditi na slučajeve specifičnih parametarskih struktura, kao što su FIR, ARX, ARMAX, OE i BJ strukture.

4.1.1 Model predikcije za standardni parametarski model

Standardni (generalni) model razmatran je u prethodnom poglavlju i prikazan je blok dijagramom na slici 4.2



Slika 4.2: Standardni parametarski model

Na prikazanoj slici $u(k)$, $y(k)$ i $v(k)$ označavaju ulaz, izlaz i poremećaj u diskretnom trenutku k , dok je $e(k)$ beli šum nulte srednje vrednosti. Dalje se pretpostavlja da se raspolaže sa ulazno-izlaznom sekvencom merenja $\{u(\ell), y(\ell)\}$, $\ell = k-1, k-2, \dots$, kao i da su za momenat poznate

funkcije prenosa $G(z)$ i $H(z)$. Pod navedenim uslovima mogu se izračunati veličine

$$v(\ell) = y(\ell) - G(z)u(\ell), \ell = k-1, k-2, \dots$$

te se ove veličine mogu smatrati poznatim. Takođe, ako je funkcija prenosa $G(z)$ striktno kauzalna, tada je njen slobodni član $g_o \equiv 0$, pa je

$$G(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g_{\ell} z^{-\ell}$$

odakle sledi da

$$G(z)u(k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g_{\ell} z^{-\ell} u(k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} g_{\ell} u(k-\ell)$$

zavisi samo od izlaza $u(i)$, $i = k-1, k-2, \dots$, tako da je i ovaj član poznat. Polazeći dalje od izraza za izlaz sistema

$$y(k) = G(z)u(k) + H(z)e(k) = G(z)u(k) + v(k)$$

jednokoračna predikcija izlaza može se definisati sa

$$\hat{y}(k|k-1) = G(z)u(k) + \hat{v}(k|k-1)$$

Dakle, rešenje postavljenog jednokoračnog prediktora zahteva da se izračuna jednokoračna predikcija $\hat{v}(k|k-1)$ nemerljivog šuma $v(k)$. Da bi ovaj problem bio rešiv funkcija prenosa (filter) šuma $H(z)$ mora da zadovoljava sledeća tri uslova:

1. $H(z)$ je stabilna funkcija prenosa.
2. Inverzna funkcija prenosa $H^{-1}(z) = 1/H(z)$ je stabilna.
3. $H(z)$ je monik funkcija prenosa, odnosno $h_o = 1$ odakle sledi

$$H(z) = 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} h_{\ell} z^{-\ell}$$

Na osnovu trećeg uslova, korelisani (obojeni) aditivni šum na izlazu sistema je

$$v(k) = H(z)e(k) = e(k) + \sum_{\ell=1}^{\infty} h(\ell)e(k-\ell)$$

Sada se postavlja problem kako generisati predikciju $v(k)$, ako su izračunate prethodne vrednosti $v(\ell)$, $\ell \leq k-1$. Najbolju (optimalnu) predikciju prirodno predstavlja očekivana (srednja) vrednost $v(k)$, tj.:

$$\hat{v}(k|k-1) = \bar{E}\{v(k)\} = \bar{E}\{e(k)\} + \bar{E}\left\{\sum_{\ell=1}^{\infty} h(\ell)e(k-\ell)\right\}$$

gde je $\bar{E}\{\cdot\}$ generalisano matematičko očekivanje, koje se u navedenom slučaju svodi na klasično (stohastičko) matematičko očekivanje u odnosu na slučajnu varijablu $v(k)$. Pošto je na osnovu pretpostavke $\{e(k)\}$ beli šum nulte srednje vrednosti, to je $\bar{E}\{e(k)\} = 0$, dok je drugi sabirak deterministička veličina, pošto je $v(\ell)$, a samim time i $e(\ell)$, poznato za $\ell \leq k-1$. Na taj način se dobija

$$\hat{v}(k|k-1) = \sum_{\ell=1}^{\infty} h_{\ell} e(k-\ell) = [H(z) - 1] e(k)$$

Imajući u vidu da je

$$v(k) = H(z) e(k) \Rightarrow e(k) = H^{-1}(z) v(k) = v(k) / H(z)$$

Konačno se dobija traženi izraz za predikciju poremećaja

$$\hat{v}(k|k-1) = \frac{H(z) - 1}{H(z)} v(k) = \left[1 - \frac{1}{H(z)} \right] v(k)$$

Da bi se izračunao prediktor $\hat{v}(k|k-1)$ neophodne su samo vrednosti $v(\ell)$, $\ell \leq k-1$, koje su generisane na osnovu relacije

$$v(\ell) = y(\ell) - G(z) u(\ell).$$

Zamenom prediktora poremećaja (šuma) u izraz za predikciju izlaza dobija se relacija

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-1) &= G(z) u(k) + [1 - H^{-1}(z)] v(k) \\ &= G(z) u(k) + [1 - H^{-1}(z)] [y(k) - G(z) u(k)] \end{aligned}$$

na osnovu koje sledi

$$\hat{y}(k|k-1) = H^{-1}(z) G(z) u(k) + [1 - H^{-1}(z)] y(k)$$

ili u alternativnom obliku

$$H(z) \hat{y}(k|k-1) = G(z) u(k) + [H(z) - 1] y(k)$$

Zamenom izvedenog prediktora izlaza u definicioni izraz za grešku predikcije dalje se dobija

$$\varepsilon(k|k-1) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) = -H^{-1}(z) G(z) u(k) + H^{-1}(z) y(k)$$

Prilikom prethodnih izvođenja pretpostavljeno je da su funkcije prenosa $G(z)$ i $H(z)$ poznate, što inače nije ispunjeno, pošto je model poznat sa tačnošću do nepoznatih parametara, koje treba estimirati na bazi raspoloživih merenja ulaza i izlaza. Dakle, funkcije prenosa $G(z)$ i nisu poznate, ali su parametrizovane sa nekim vektorom parametara, tako da je u suštini greška predikcije funkcije ovog vektora parametara, odnosno

$$\varepsilon(k|k-1, \theta) = H^{-1}(z, \theta) [y(k) - G(z, \theta) u(k)]$$

Varirajući vektor parametara unutar skupa D_M može se izračunati greška predikcije ε i rezultujuća vrednost kriterijuma valjanosti modela J_N . Izvedeni prediktor je primenljiv na bilo koji model koji ima standardnu (generalnu) strukturu prikazanu gornjim blok dijagramom. Dobijeni prediktor može se primeniti na specifične parametrizovane modele, koji su razmatrani u prethodnom poglavlju, kao što su FIR, ARX, ARMAX, OE i BJ strukture, a koje predstavljaju posebne slučajeve standardne (generalne) reprezentacije modela sistema.

4.1.2 Model predikcije za FIR reprezentaciju sistema

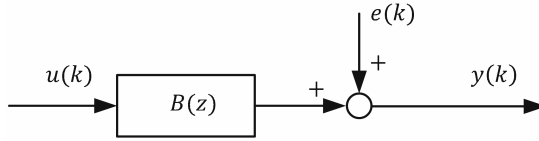
FIR struktura modela sistema predstavlja specijalan slučaj prethodno razmatrane standardne (generalne) strukture, kada se usvoji

$$G(z, \theta) = B(z) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i}, \quad H(z, \theta) = 1$$

tako da je vektor parametara u ovako parametrizovanom modelu

$$\theta = \{b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b}\}^T.$$

Ovakva struktura prikazana je blok dijagramom na slici 4.3.



Slika 4.3: FIR struktura modela sistema

Na taj način, izlazni signal može se prikazati relacijom

$$y(k) = B(z) u(k) + e(k)$$

gde je $u(k)$ pobudni signal u k -tom diskretnom trenutku, a $e(k)$ je aditivni šum na izlazu sistema, koji predstavlja beli šum nulte srednje vrednosti. Koristeći prethodno dobijeni izraz za prediktor izlaza u slučaju standardne reprezentacije modela sistema

$$\hat{y}(k|k-1) = G(z) u(k) + [1 - H^{-1}(z)] y(k)$$

i uvrštavajući izraze za funkcije prenosa u FIR strukturi

$$G(z) = B(z), \quad H(z) = 1$$

dobija se za prediktor izlaza FIR strukture

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = B(z) u(k) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i} u(k) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i)$$

Ako se merenja ulaza $u(\ell)$, $\ell \leq k-1$ sakupe u regresioni vektor kolonu

$$\varphi^T(k) = \{u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_b)\}$$

tada se prediktor izlaza može zapisati u formi linearne regresije

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \varphi^T(k) \theta = \theta^T \varphi(k)$$

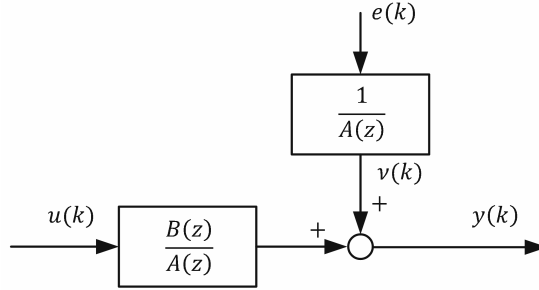
Naziv model linearne regresije potiče od činjenice da je relacija za predikciju izlaza linearna funkcija nepoznatog vektora parametara θ .

4.1.3 Model predikcije za ARX reprezentacije modela sistema

ARX struktura predstavlja poseban oblik standardne strukture u kojoj je usvojeno

$$G(z, \theta) = \frac{B(z)}{A(z)}, A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}, B(z) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i}, \quad H(z, \theta) = \frac{1}{A(z)}$$

Ovakva struktura predstavljena je blok dijagramom, prikazanim na slici 4.4.



Slika 4.4: ARX struktura modela sistema

Parametri polinoma $A(z)$ i $B(z)$ definišu vektor parametara

$$\theta^T = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a} \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b}\}$$

dok je izlaz sistema opisan relacijom (diferencnom jednačinom)

$$A(z) y(k) = B(z) u(k) + e(k)$$

Koristeći izraz za prediktor standardne strukture

$$H(z, \theta) \hat{y}(k|k-1, \theta) = G(z, \theta) u(k) + [H(z, \theta) - 1] y(k)$$

uz uvrštavanje izraza za odgovarajuće funkcije prenosa u ARX strukturi

$$G(z, \theta) = B(z) / A(z); H(z, \theta) = 1/A(z)$$

dobija se konačan izraz za prediktor izlaza

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-1, \theta) &= B(z) u(k) + [1 - A(z)] y(k) \\ &= \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i} u(k) - \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i} y(k) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) \end{aligned}$$

Uvodeći regresioni vektor

$$\varphi^T(k) = \{-y(k-1) - y(k-2) \ \dots \ -y(k-n_a) \ u(k-1) \ u(k-2) \ \dots \ u(k-n_b)\}$$

izvedeni izraz za prediktor izlaza ARX strukture modela može se napisati u formi modela linearne regresije

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \theta^T \varphi(k) = \varphi^T(k) \theta.$$

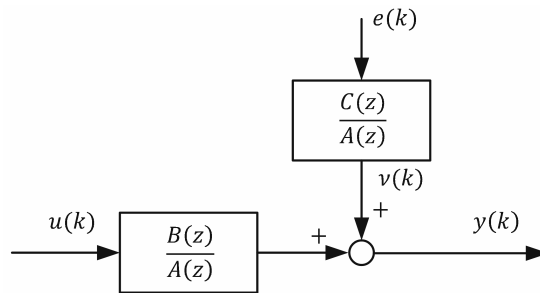
4.1.4 Model predikcije za ARMAX reprezentaciju modela sistema

ARMAX reprezentacija modela sistema predstavlja specijalan slučaj standardne strukture modela za specifičan izbor funkcija prenosa u standardnoj strukturi (reprezentaciji) modela

$$G(z, \theta) = \frac{B(z)}{A(z)}, B(z) = \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i}, A(z) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n_a} a_\ell z^{-\ell},$$

$$H(z, \theta) = \frac{C(z)}{A(z)}, C(z) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n_c} c_\ell z^{-\ell}.$$

ARMAX struktura modela prikazana je na slici 4.5.



Slika 4.5: ARMAX struktura modela sistema

Izlazni signal kod ARMAX strukture opisan je relacijom

$$A(z) y(k) = B(z) u(k) + C(z) e(k)$$

gde je $u(k)$ pobudni (ulazni) signal a $e(k)$ diskretni beli šum nulte srednje vrednosti. Parametri (koeficijenti) polinoma A , B , C definišu vektor parametara θ u ovako usvojenoj parametrizaciji modela

$$\theta^T = \{a_1 a_2 \cdots a_{n_a} b_1 b_2 \cdots b_{n_b} c_1 c_2 \cdots c_{n_c}\}$$

Zamenom usvojenih izraza za funkcije prenosa $G = B/A$ i $H = C/A$ u ARMAX strukturi, uz korišćenje formule za prediktor izlaza opšte strukture

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = H^{-1}(z) G(z) u(k) + [1 - H^{-1}(z)] y(k)$$

dobija se formula za prediktor izlaza ARMAX strukture

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \frac{B(z)}{C(z)} u(k) + \left[1 - \frac{A(z)}{C(z)}\right] y(k)$$

Množenjem dobijenog izraza sa $C(z)$ i dodavanjem člana $[1 - C(z)]\hat{y}(k|k-1, \theta)$ levoj i desnoj strani poslednjeg izraza, kao i nultog člana $y(k) - y(k)$, desnoj strani ovog izraza može se pisati

$$\begin{aligned} C(z)\hat{y}(k|k-1, \theta) + [1 - C(z)]\hat{y}(k|k-1, \theta) \\ = B(z)u(k) + [C(z) - A(z)]y(k) + [1 - C(z)]\hat{y}(k|k-1, \theta) + y(k) - y(k) \end{aligned}$$

odakle sledi izraz za prediktor izlaza ARMAX strukture

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = B(z)u(k) + [1 - A(z)]y(k) + [C(z) - 1][y(k) - \hat{y}(k|k-1, \theta)]$$

Uvodeći definicioni izraz za grešku predikcije

$$\varepsilon(k|k-1, \theta) = y(k) - \hat{y}(k|k-1, \theta)$$

dobija se konačan izraz za prediktor izlaza ARMAX modela

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-1, \theta) &= B(z)u(k) + [1 - A(z)]y(k) + [C(z) - 1]\varepsilon(k|k-1, \theta) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n_b} b_{\ell}z^{-\ell}u(k) - \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}y(k) + \sum_{j=1}^{n_c} c_j z^{-j}\varepsilon(k|k-1, \theta) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n_b} b_{\ell}u(k-\ell) - \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-\ell) + \sum_{j=1}^{n_c} c_j \varepsilon(k-j|k-j-1, \theta) \end{aligned}$$

Uvodeći regresioni vektor

$$\begin{aligned} \varphi^T(k, \theta) = \{-y(k-1) \cdots -y(k-n_a)u(k-1) \cdots u(k-n_b)\varepsilon(k-1|k-2, \theta) \cdots \\ \cdots \varepsilon(k-n_c|k-n_c-1, \theta)\} \end{aligned}$$

i imajući u vidu definicioni izraz za vektor parametara θ u razmatranom ARMAX strukturi, izraz za prediktor izlaza može se napisati u alternativnom obliku

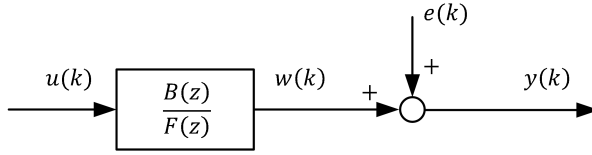
$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \varphi^T(k, \theta)\theta = \theta^T\varphi(k, \theta)$$

Primitimo da je u ovom slučaju, za razliku od FIR i ARX struktura, vektor regresije φ funkcija vektora parametara θ , pošto greška predikcije ε predstavlja funkciju θ , tako da izvedeni izraz za prediktor izlaza ne predstavlja linearnu funkciju vektora parametara. Stoga se poslednji izraz naziva model pseudo-linearne regresije, jer formalno podseća na model linearne regresije kod koga regresioni vektor φ ne zavisi od vektora parametara θ .

4.1.5 Model predikcije za OE strukturu modela sistema

OE reprezentacija modela sistema predstavlja poseban oblik standardne strukture modela, ako se u standardnoj strukturi odgovarajuće funkcije prenosa usvoje kao

$$G(z, \theta) = \frac{B(z)}{F(z)}, \quad H(z, \theta) = 1, \quad B(z) = \sum_{\ell=1}^{n_b} b_{\ell}z^{-\ell}, \quad F(z) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n_f} f_{\ell}z^{-\ell}$$



Slika 4.6: OE struktura modela sistema

Razmatrana struktura prikazana je na slici 4.6.

Na osnovu gornje blok šeme, izlaz $y(k)$ u k -tom diskretnom trenutku definisan je relacijama

$$F(z)w(k) = B(z)u(k)$$

$$y(k) = w(k) + e(k)$$

gde je $u(k)$ pobudni signal u k -tom diskretnom trenutku, a $e(k)$ je realizacija diskretnog belog šuma nulte srednje vrednosti u posmatranom diskretnom trenutku.

Polazeći od formule za prediktor izlaza standardne strukture

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = H^{-1}(z, \theta)G(z, \theta)u(k) + [1 - H^{-1}(z, \theta)]y(k)$$

i uvrštavajući usvojene izraze za odgovarajuće funkcije prenosa $G = B/F$ i $H = 1$, dobija se formula za prediktor izlaza OE strukture

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \frac{B(z)}{F(z)}u(k) = w(k|k-1, \theta)$$

ili u alternativnom obliku

$$F(z)\hat{y}(k|k-1, \theta) = B(z)u(k)$$

Zamenom izraza za polinome F i B , dalje sledi

$$\left[1 + \sum_{\ell=1}^{n_f} f_{\ell}z^{-\ell}\right] \hat{y}(k|k-1, \theta) = \sum_{\ell=1}^{n_b} b_{\ell}z^{-\ell}u(k)$$

odnosno, ako se ima u vidu da je $\hat{y}(k|k-1, \theta) = w(k|k-1, \theta)$,

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \sum_{\ell=1}^{n_b} b_{\ell}z^{-\ell}u(k) - \sum_{\ell=1}^{n_f} f_{\ell}z^{-\ell}w(k|k-1, \theta) = \sum_{\ell=1}^{n_b} b_{\ell}u(k-\ell) - \sum_{\ell=1}^{n_f} f_{\ell}w(k-\ell|k-\ell-1, \theta)$$

Sakupljajući koeficijente polinoma B i F u vektor parametara

$$\theta^T = \{b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b} \ f_1 \ f_2 \ \dots \ f_{n_f}\}$$

i definišući regresioni vektor φ , koji i u ovom slučaju zavisi od vektora parametara θ , pošto je predikcija izlaza determinističkog dela sistema $w(k|k-1, \theta)$ funkcija θ ,

$$\varphi^T(k, \theta) = \{u(k-1)u(k-2) \cdots u(k-n_b) - w(k|k-1, \theta) \cdots - w(k-n_f|k-n_f-1, \theta)\}$$

prediktor izlaza OE strukture može se zapisati u obliku modela pseudo-linearne regresije

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \varphi^T(k, \theta)\theta = \theta^T\varphi(k, \theta).$$

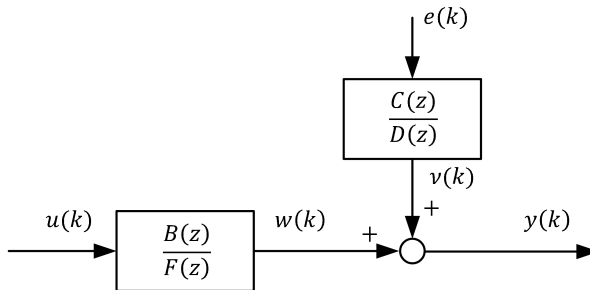
4.1.6 Model predikcije za BJ strukturu modela sistema

BJ struktura predstavlja specijalan slučaj opšte reprezentacije modela kod koje su odgovarajuće funkcije prenose izabrane na sledeći način

$$G(z, \theta) = \frac{B(z)}{F(z)}, B(z) = \sum_{\ell=1}^{n_b} b_\ell z^{-\ell}, F(z) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n_f} f_\ell z^{-\ell}$$

$$H(z, \theta) = \frac{C(z)}{D(z)}, C(z) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n_c} c_\ell z^{-\ell}, D(z) = 1 + \sum_{\ell=1}^{n_d} d_\ell z^{-\ell}$$

Razmatrana struktura modela može se prikazati blok dijagramom, prikazanim na slici 4.7.



Slika 4.7: BJ struktura modela sistema

Na osnovu datog strukturnog blok dijagrama može se pisati

$$w(k) = \frac{B(z)}{F(z)}u(k) \Rightarrow F(z)w(k) = B(z)u(k)$$

$$v(k) = \frac{C(z)}{D(z)}e(k) \Rightarrow D(z)v(k) = C(z)e(k)$$

$$y(k) = w(k) + v(k)$$

gde je $w(k)$ izlaz determinističkog dela sistema u k -tom diskretnom trenutku, koji je opisan sa funkcijom prenosa $G = B/F$, a $v(k)$ predstavlja realizaciju aditivnog šuma na izlazu kompletnog sistema u k -tom diskretnom trenutku, pri čemu je ovaj šum modelovan propuštanjem diskretnog belog šuma $\{e(k)\}$ kroz linearan sistem čija je funkcija prenosa $H = C/D$. Izlaz sistema $y(k)$ u k -tom diskretnom trenutku dobija se superpozicijom izlaza determinističkog dela sistema $w(k)$ i aditivnog šuma na izlazu $v(k)$.

Imajući u vidu relaciju za izlaz (odziv) $y(k)$, prediktor ovog signala u diskretnom trenutku k , na bazi raspoložive informacije o sistemu do trenutka $(k-1)$ i poznatog vektora parametara θ (elementi ovog vektora su koeficijenti polinoma B, F, C, D), $\hat{y}(k|k-1, \theta)$ može se izračunati kao

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \hat{w}(k|k-1, \theta) + \hat{v}(k|k-1, \theta)$$

gde je $\hat{w}(k|k-1, \theta)$ jednokoračni prediktor izlaza determinističkog dela sistema a $\hat{v}(k|k-1, \theta)$ je jednokoračni prediktor aditivnog slučajnog poremećaja na izlazu sistema. Pošto je deterministički deo sistema prikazan OE reprezentacijom

$$w(k) = \frac{B(z)}{F(z)}u(k), F(z)w(k) = B(z)u(k)$$

to je

$$\begin{aligned} w(k) &= B(z)u(k) + [1 - F(z)]w(k) = \sum_{\ell=1}^{n_b} b_\ell z^{-\ell} u(k) - \sum_{\ell=1}^{n_f} f_\ell z^{-\ell} w(k) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n_b} b_\ell u(k-\ell) - \sum_{\ell=1}^{n_f} f_\ell w(k-\ell) \end{aligned}$$

Pošto je, takođe, na osnovu OE reprezentacije modela jednokoračni prediktor definisan sa

$$\hat{w}(k|k-1, \theta) = \frac{B(z)}{F(z)}u(k)$$

dalje se može pisati

$$\begin{aligned} \hat{w}(k|k-1, \theta) &= B(z)u(k) + [1 - F(z)]w(k|k-1, \theta) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n_b} b_\ell u(k-\ell) - \sum_{\ell=1}^{n_f} f_\ell \hat{w}(k-\ell|k-1-\ell, \theta) \end{aligned}$$

Stohastički deo sistema opisan je ARMA procesom

$$v(k) = \frac{C(z)}{D(z)}e(k)$$

gde je $e(k)$ beli šum srednje vrednosti.

Polazeći od činjenice da je ARMA proces specijalni slučaj ARMAX procesa kod koga je X deo jednak nuli (polinom $B = 0$ u ARMAX strukturi) i koristeći ranije izvedenu formulu za jednokoračni prediktor za ARMAX strukturu, uz uslov $B = 0$, dalje sledi

$$\hat{v}(k|k-1, \theta) = \left[1 - \frac{D(z)}{C(z)} \right] v(k)$$

gde je polinom A u originalnom izrazu zamenjen sa polinomom D . Na sličan način kao kod analize ARMAX procesa, poslednja relacija se može pisati kao

$$C(z) \hat{v}(k|k-1, \theta) = [C(z) - D(z)] v(k)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} C(z) \hat{v}(k|k-1, \theta) + [1 - C(z)] \hat{v}(k|k-1, \theta) &= \\ = [C(z) - D(z)] v(k) + [1 - C(z)] \hat{v}(k|k-1, \theta) + v(k) - v(k) \end{aligned}$$

odnosno

$$\hat{v}(k|k-1, \theta) = [1 - D(z)] v(k) + [C(z) - 1] [v(k) - \hat{v}(k|k-1, \theta)]$$

Uvodeći izraz za grešku predikcije kod ARMA strukture

$$\varepsilon(k|k-1, \theta) = v(k) - \hat{v}(k|k-1, \theta)$$

konačno se dobija traženi izraz za prediktor ARMA procesa

$$\begin{aligned} \hat{v}(k|k-1, \theta) &= [1 - D(z)] v(k) + [C(z) - 1] \varepsilon(k|k-1, \theta) \\ &= - \sum_{\ell=1}^{n_d} d_\ell z^{-\ell} v(k) + \sum_{\ell=1}^{n_c} c_\ell z^{-\ell} \varepsilon(k|k-1, \theta) \\ &= - \sum_{\ell=1}^{n_d} d_\ell v(k-\ell) + \sum_{\ell=1}^{n_c} c_\ell \varepsilon(k-\ell|k-1-\ell, \theta) \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} v(k) &= y(k) - w(k) = y(k) - B(z) u(k) + [F(z) - 1] w(k) \\ &= y(k) - \sum_{\ell=1}^{n_b} b_\ell u(k-\ell) + \sum_{\ell=1}^{n_f} f_\ell w(k-\ell) \end{aligned}$$

Na taj način, prediktor za BJ reprezentaciju modela definisan je sa

$$\begin{aligned} \hat{y}(k|k-1, \theta) &= \\ &= \hat{w}(k|k-1, \theta) + \hat{v}(k|k-1, \theta) \\ &= B(z) u(k) + [1 - F(z)] \hat{w}(k|k-1, \theta) + [1 - D(z)] v(k) + [C(z) - 1] \varepsilon(k|k-1, \theta) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n_\ell} b_\ell u(k-\ell) - \sum_{\ell=1}^{n_f} f_\ell \hat{w}(k-\ell|k-\ell-1, \theta) - \sum_{\ell=1}^{n_d} d_\ell v(k-\ell) + \sum_{\ell=1}^{n_c} c_\ell \varepsilon(k-\ell|k-\ell-1, \theta) \end{aligned}$$

Ako se definiše vektor parametara θ

$$\theta^T = \{b_1 \cdots b_{n_b} \ f_1 \cdots f_{n_f} \ d_1 \cdots d_{n_d} \ c_1 \cdots c_{n_c}\}$$

i regresioni vektor

$$\varphi^T(k, \theta) = \{u(k-1) \cdots u(k-n_b) - \hat{w}(k-1|k-2, \theta) \cdots - \hat{w}(k-n_f|k-n_f-1, \theta) - \\ - v(k-1) \cdots - v(k-n_d) \ \varepsilon(k-1|k-2, \theta) \cdots \varepsilon(k-n_c|k-n_c-1, \theta)\}$$

izraz za prediktor se može napisati u formi pseudo-linearne regresije

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \varphi^T(k, \theta) \theta = \theta^T \varphi(k, \theta)$$

Modeli predikcije razvijeni u ovom poglavlju biće korišćeni za identifikaciju nepoznatih parametara θ na osnovu koncepta greške predikcije (PEM princip). Algoritmi (metode) za parametarsku identifikaciju sistema biće razmatrani u nastavku ovog poglavlja.

4.2 Parametarska identifikacija sistema: Metod najmanjih kvadrata

Metode parametarske identifikacije koje će se razmatrati u ovom poglavlju pripadaju porodici metoda tipa greške predikcije (PEM metode). Ove metode se zasnivaju na minimizaciji kriterijumske funkcije koju sačinjava suma kvadrata grešaka predikcija na nekom intervalu vremena. Rešavanje postavljenog optimizacionog problema zahteva primenu određenih matematičkih alata, a jedan uobičajen postupak je metod najmanjih kvadrata (odgovarajući naziv na engleskom jeziku je Least Squares Method ili skraćeno LS). Ovaj metod biće opisan u nastavku, a biće takođe pokazano kako se LS metod može primeniti za estimaciju parametara u specifičnoj strukturi modela sistema. Ovakav zadatak često se naziva i parametarska estimacija (eng. parameter estimation).

Kao što je već istaknuto, metod najmanjih kvadrata predstavlja matematički postupak za rešavanje problema identifikacije (estimacije) parametara u usvojenoj strukturi modela sistema, pri čemu je ovaj problem postavljen kao zadatak optimizacije (minimizacije) određene kriterijumske funkcije. Naime, problem parametarske identifikacije može se formulisati na sledeći način: za zadati skup merenja ulaza i izlaza sistema $\{u(k), y(k)\}$, $k = 1, 2, \dots, N$ i usvojenu strukturu modela sistema koja je poznata sa tačnošću do nepoznatog vektora parametara θ proceniti (estimirati) vektor θ tako da izvedeni model aproksimira što je moguće bolje realan sistem. Naravno, verbalni iskaz “što je moguće bolje” je subjektivne prirode i neophodno je da se uvede matematički kriterijum ili mera za ocenu kvaliteta ponašanja ili validnosti modela. Jednu moguću takvu matematičku meru predstavlja kriterijum koji se sastoji od sume kvadrata grešaka predikcija na posmatranom intervalu posmatranja

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k|k-1, \theta)$$

Tada je optimalna procena vektora parametara $\theta = \hat{\theta}_N$ ona koja minimizira usvojeni kriterijum

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} J_N(\theta)$$

Jednokoračna greška predikcije definisana je izrazom

$$\varepsilon(k|k-1, \theta) = y(k) - \hat{y}(k|k-1, \theta)$$

gde je $\hat{y}(k|k-1, \theta)$ jednokoračni prediktor izlaza sistema $y(k)$ na bazi raspoložive informacije o sistemu, kroz merenja, do trenutka $k-1$ i za neki usvojeni vektor parametara θ . U prethodnom poglavlju je pokazano da se jednokoračni prediktor izlaza sistema, zavisno od usvojene strukture modela, može prikazati u formi jednačine linearne regresije (FIR i ARX strukture)

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \varphi^T(k) \theta = \theta^T \varphi(k)$$

gde regresioni vektor $\varphi(k)$ ne zavisi od nepoznatog vektora parametara koji se estimira, ili u formi jednačine pseudolinearne regresije (ARMAX, OE i BJ strukture)

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \varphi^T(k, \theta) \theta = \theta^T \varphi(k, \theta)$$

kada regresioni vektor $\varphi(k, \theta)$ predstavlja funkciju vektora parametara θ . U prvom slučaju primena metoda najmanjih kvadrata za rešavanje postavljenog optimizacionog problema rezultuje u linearan sistem jednačina po nepoznatim elementima vektora parametara θ i takav metod naziva se linearan metod najmanjih kvadrata (eng. Linear Least Squares Method ili skraćeno LLS metod). U drugom slučaju primena tehnike najmanjih kvadrata za minimizaciju usvojenog kriterijuma rezultuje u nelinearan sistem jednačina po nepoznatim elementima vektora parametara θ i neophodno je primeniti neku iterativnu numeričku proceduru za rešavanje tako dobijenog nelinearnog sistema algebarskih jednačina. U poslednjem slučaju postupak najmanjih kvadrata se naziva pseudo-linearan metod najmanjih kvadrata (eng. *Pseudo-Linear Least Square Method* ili skraćeno PLLS metod).

4.2.1 Linearan metod najmanjih kvadrata: LLS metod

Kao što je izvedeno u prethodnom poglavlju, jednokoračna predikcija izlaza za FIR i ARX reprezentaciju (strukturu) modela sistema definisana je izrazom

$$\hat{y}(k|k-1, \theta) = \varphi^T(k) \theta = \theta^T \varphi(k)$$

koji predstavlja linearnu funkciju vektora parametara θ , pošto regresioni vektor $\varphi(k)$ ne zavisi od nepoznatog vektora parametara θ . Kao što je ranije pokazano, za FIR strukturu modela regresioni vektor sadrži samo zakašnjene (prethodne) ulazne signale

$$\varphi^T(k) = \{u(k-1) u(k-2) \cdots u(k-n_o)\}$$

dok za slučaj ARX strukture modela ovaj vektor dodatno sadrži i zakašnjene (prethodne) izlazne signale

$$\varphi^T(k) = \{-y(k-1) \cdots -y(k-n_a) u(k-1) \cdots u(k-n_b)\}$$

Na taj način, jednokoračna greška predikcije postaje

$$\varepsilon(k|k-1, \theta) = y(k) - \hat{y}(k|k-1, \theta) = y(k) - \varphi^T(k) \theta$$

te se usvojeni kriterijum valjanosti modela svodi na

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - \varphi^T(k) \theta]^2$$

U tački minimuma razmatranog kriterijuma $\theta = \hat{\theta}_N$ gradijent kriterijumske funkcije jednak je nuli, odnosno

$$\text{grad}_{\theta} J_N(\hat{\theta}_N) = \frac{\partial J_N(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_N} = \left\{ \frac{\partial J_N(\theta)}{\partial \theta_1} \frac{\partial J_N(\theta)}{\partial \theta_2} \dots \frac{\partial J_N(\theta)}{\partial \theta_p} \right\}_{\theta=\hat{\theta}_N}^T = 0$$

gde je p dimenzija vektora $\theta = \{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_p\}^T$ a 0 je $p \times 1$ dimenzioni nula vektor, čiji su svi elementi jednaki nuli. Primenom operatora parcijalnog diferenciranja na zadati kriterijum dobija se

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_N(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - \varphi^T(k) \theta]^2 \right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ [y(k) - \varphi^T(k) \theta]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 2 [y(k) - \varphi^T(k) \theta] \frac{\partial [y(k) - \varphi^T(k) \theta]}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-2) [y(k) - \varphi^T(k) \theta] \frac{\partial [\varphi^T(k) \theta]}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Prilikom dobijanja poslednjeg izraza uzeto je u obzir da izlaz sistema $y(k)$ ne zavisi od vektora parametara θ . Koristeći dalje pravila linearne algebre koja se odnose na diferenciranje skalarnog proizvoda po vektoru

$$\frac{\partial y^T x}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial x^T y}{\partial x} = y$$

gde su x i y vektori kolone odgovarajućih dimenzija, a y^T i x^T označavaju vektore vrste, kao i usvajajući $y = \varphi(k)$ i $x = \theta$ zaključuje se da je

$$\frac{\partial [\varphi^T(k) \theta]}{\partial \theta} = \varphi(k)$$

Zamenom izvedenog izraza u relaciju za gradijent kriterijumske funkcije, uz izjednačavanje poslednjeg izraza sa nulom, konačno se dobija linearna vektorska jednačina za izračunavanje vektora parametra θ

$$\sum_{k=1}^N [y(k) - \varphi^T(k) \theta] \varphi(k) = 0$$

odakle sledi da se procena najmanjih kvadrata $\theta = \hat{\theta}_N$ dobija kao rešenje linearne vektorske jednačine kojoj odgovara sistem linearnih jednačina po neponatim elementima vektora θ koje se nazivaju i normalne jednačine (eng. Normal equations)

$$\left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi^T(k) \varphi(k) \right] \hat{\theta}_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) \right]$$

odnosno

$$\hat{\theta}_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) \right]$$

pretpostavljajući da postoji inverzija navedene matrice.

U literaturi je uobičajeno da se LS procena prikaže u matricno-vektorskoj notaciji. U tom cilju definišimo $N \times p$ matricu Φ i $N \times 1$ vektor Y kao

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$$

tako da se usvojeni skalarni kriterijum $J_N(\theta)$ može prikazati u obliku

$$J_N(\theta) = \|Y - \phi\theta\|^2 = (Y - \phi\theta)^T (Y - \phi\theta)$$

gde $\|x\|$ označava Euclidian-ovu normu vektora x . Dalje se može pisati

$$J_N(\theta) = (Y^T - \theta^T \phi^T) (Y - \phi\theta) = Y^T Y - \theta^T (\theta^T Y) - (Y^T \phi) \theta + \theta^T (\phi^T \phi) \theta$$

odakle sledi potreban uslov za pronalaženje minimuma kriterijuma

$$\text{grad}_{\theta} J_N(\theta) = \frac{\partial J_N(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial \theta^T (\phi^T Y)}{\partial \theta} - \frac{\partial (Y^T \phi) \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \theta^T (\phi^T \phi) \theta}{\partial \theta} = 0$$

Prva dva člana u poslednjem izrazu dobijaju se korišćenjem prethodno definisanih pravila za diferenciranje skalarnog proizvoda vektora po vektoru

$$\frac{\partial \theta^T (\phi^T Y)}{\partial \theta} = \phi^T Y, \quad \frac{\partial \theta^T (Y^T \phi)}{\partial \theta} = (Y^T \phi)^T = \phi^T Y$$

kao i dodatnog pravila za diferenciranje skalarne kvadratne forme po vektoru

$$\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = 2Ax$$

je x vektor kolona odgovarajućih dimenzija a A kvadratna i simetrična matrica ($A = A^T$), odakle se zaključuje, usvajajući $x = \theta$ i $A = \phi^T \phi$,

$$\frac{\partial \theta^T (\phi^T \phi) \theta}{\partial \theta} = 2(\phi^T \phi) \theta$$

Zamenom izvedenih izraza za parcijalne izvode u relaciji za gradijent kriterijumske funkcije dobija se linearna vektorska jednačina, tzv. Normalna jednačina, za izračunavanje LS procene vektora parametara $\theta = \hat{\theta}_N$

$$[\phi^T \phi] \hat{\theta}_N = \phi^T Y$$

odnosno

$$\hat{\theta}_N = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T Y = \left[\frac{1}{N} \phi^T \phi \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \phi^T Y \right]$$

pretpostavljajući da odgovarajuća inverzna matrica postoji.

Primetimo, takođe, da je matrica čija se inverzija traži u stvari kovarijaciona matrica regresionog p -dimenzionog vektora $\varphi(k)$ ($p = n_a + n_b$ kod ARX modela a $p = n_b$ kod FIR modela), tako da se može pisati

$$R_{\varphi}^p(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) = \frac{1}{N} \Phi^T \Phi$$

Posebno, za ARX strukturu modela važi ($p = n_a + n_b$)

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi}^p(N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ -y(k-2) \\ \vdots \\ -y(k-n_a) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-n_b) \end{bmatrix} [-y(k-1) \dots -y(k-n_a) u(k-1) \dots u(k-n_b)] \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k-1) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-1)y(k-2) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-1)y(k-n_a) & \dots & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-1)u(k-1) & \dots & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-1)u(k-n_b) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-2)y(k-1) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k-2) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-2)y(k-n_a) & \dots & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-2)u(k-1) & \dots & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-2)u(k-n_b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-n_a)y(k-1) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-n_a)y(k-2) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k-n_a) & \dots & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-n_a)u(k-1) & \dots & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-n_a)u(k-n_b) \\ -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-1)y(k-1) & \dots & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-1)y(k-2) & \dots & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-1)y(k-n_a) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k-1) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k-n_b) \\ -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-n_b)y(k-1) & \dots & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-n_b)y(k-2) & \dots & -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-n_b)y(k-n_a) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-n_b)u(k-1) & \dots & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k-n_b) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{R}_{yy}(0) & \dots & \hat{R}_{yy}(n_a-1) & \dots & \hat{R}_{yy}(n_a) & \dots & \hat{R}_{yu}(1) & \dots & \hat{R}_{yu}(n_b-1) \\ \hat{R}_{yy}(1) & \dots & \hat{R}_{yy}(n_a-2) & \dots & \hat{R}_{yy}(n_a-1) & \dots & \hat{R}_{yu}(0) & \dots & \hat{R}_{yu}(n_b-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{R}_{yy}(n_a-1) & \dots & \hat{R}_{yy}(n_a-2) & \dots & \hat{R}_{yy}(0) & \dots & \hat{R}_{yu}(1-n_a) & \dots & \hat{R}_{yu}(n_b-n_a) \\ -\hat{R}_{yu}(0) & \dots & -\hat{R}_{yu}(-1) & \dots & -\hat{R}_{yu}(-n_a+1) & \dots & \hat{R}_{uu}(1) & \dots & \hat{R}_{uu}(n_b-1) \\ -\hat{R}_{yu}(1) & \dots & -\hat{R}_{yu}(0) & \dots & -\hat{R}_{yu}(-n_a+2) & \dots & \hat{R}_{uu}(0) & \dots & \hat{R}_{uu}(n_b-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\hat{R}_{yu}(-1+n_b) & \dots & -\hat{R}_{yu}(-2+n_b) & \dots & -\hat{R}_{yu}(-n_a+n_b) & \dots & \hat{R}_{uu}(n_b-1) & \dots & \hat{R}_{uu}(0) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Prilikom definisanja ove matrice iskorišćena je činjenica da je $R_{uy}(\tau) = R_{yu}(-\tau)$.

Dakle, elementi $p \times p$ dimenzije korelacione matrice p -dimenzionog ($p = n_a + n_b$) regresionog vektora $\varphi(k)$ su procene auto-kovarijacionih i kros-kovarijacionih funkcija ulaznog i izlaznog signala, odnosno

$$R_{\varphi}^p(N) = \{R_{ij}(N)\}_{p \times p}$$

gde je

$$R_{ij}(N) = \hat{R}_{yy}(j-i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-i)y(k-j), 1 \leq i, j \leq n_a$$

$$R_{ij}(N) = \hat{R}_{yu}(j-n_a-i) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-i)u(k-j), 1 \leq i, j \leq n_a, n_a+1 \leq j \leq p = n_a+n_b$$

$$R_{ij}(N) = \hat{R}_{uy}(j-i+n_a) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-i)y(k-j), n_a+1 \leq i \leq p, 1 \leq i, j \leq n_a$$

$$R_{ij}(N) = \hat{R}_{uu}(j-i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-i)u(k-j), n_a+1 \leq i, j \leq p$$

U navedenim izrazima simbol “ $\hat{}$ ” označava procenu, a R_{xx} i R_{xy} su autokorelacione i kros-korelacione funkcije razmatranih signala x i y , respektivno. Kod FIR strukture modela postoji samo blok sa procenama auto-korelacionih funkcija ulaznog signala, tj. za FIR strukturu $p = n_b$ i

$$R_{ij}(N) = \hat{R}_{uu}(j-i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-i)u(k-j), 1 \leq i, j \leq p = n_b$$

Na sličan način, p -dimenzioni vektor kolona

$$f_{\varphi}(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) = \phi^T Y$$

može se za ARX strukturu (reprezentacija) modela napisati u razvijenom obliku

$$f_{\varphi}(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ -y(k-2) \\ \vdots \\ -y(k-n_a) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-n_b) \end{bmatrix} y(k) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)y(k-1) \\ -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)y(k-2) \\ \vdots \\ -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)y(k-n_a) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)u(k-1) \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)u(k-n_b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{R}_{yy}(1) \\ -\hat{R}_{yy}(2) \\ \vdots \\ -\hat{R}_{yy}(n_a) \\ \hat{R}_{yu}(1) \\ \vdots \\ \hat{R}_{yu}(n_b) \end{bmatrix}$$

tako da su elementi ovog vektora

$$f_i(N) = -\hat{R}_{yy}(i) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) y(k-i), 1 \leq i \leq n_a$$

$$f_i(N) = \hat{R}_{yu}(i - n_a) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) u(k-i), n_a + 1 \leq i \leq p = n_a + n_b$$

Sledeći primer ilustruje primenu LS metode za parametarsku identifikaciju (estimaciju) usvojene strukture modela sistema.

Primer: Pretpostavimo da je realni proces opisan diferencnom jednačinom drugog reda koja povezuje izlaz y i ulaz u

$$y(k) - 1.2y(k-1) + 0.6y(k-2) = u(k-1) + 0.3u(k-2) + e(k), k = 0, 1, 2, \dots$$

gde je diskretni ulaz $\{u(k)\}$ beli šum nulte srednje vrednosti $\bar{u} = 0$ i varijanse $\sigma_u^2 = 1$, dok je aditivni poremećaj na izlazu e takođe beli šum nulte srednje vrednosti $\bar{e} = 0$ i varijanse $\sigma_e^2 = 1$, pri čemu su signali $\{e(k)\}$ i $\{u(k)\}$ međusobno nekorelisani. Da bi se identifikovao ovaj proces usvojena je ARX reprezentacija modela drugog reda

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k);$$

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{\ell=1}^2 a_\ell z^{-\ell}, B(z^{-1}) = \sum_{\ell=1}^2 b_\ell z^{-\ell}, n_a = n_b = 2$$

odnosno

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + e(k)$$

ili u formi jednačine regresije

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta + e(k)$$

$$\varphi^T(k) = \{-y(k-1) - y(k-2) \ u(k-1) \ u(k-2)\}, \theta^T = \{a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2\}$$

LS procena (estimacija) nepoznatog vektora parametara θ dobija se kao rešenje normalnog sistema jednačina

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_{yy}(0) & \hat{R}_{yy}(1) & -\hat{R}_{yu}(0) & -\hat{R}_{yu}(1) \\ \hat{R}_{yy}(1) & \hat{R}_{yy}(0) & -\hat{R}_{yu}(-1) & -\hat{R}_{yu}(0) \\ -\hat{R}_{yu}(0) & -\hat{R}_{yu}(-1) & \hat{R}_{uu}(0) & \hat{R}_{uu}(1) \\ -\hat{R}_{yu}(1) & -\hat{R}_{yu}(0) & \hat{R}_{uu}(1) & \hat{R}_{uu}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{R}_{yy}(1) \\ -\hat{R}_{yy}(2) \\ \hat{R}_{yu}(1) \\ \hat{R}_{yu}(2) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Dobijena linearna vektorska jednačina definiše sistem od 4 linearne jednačine sa 4 nepoznate $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$. Da bi se definisali koeficijenti u razmatranom sistemu jednačina potrebno je proceniti auto i kros-korelacione funkcije ulaznog i izlaznog signala na bazi njihovih merenja.

$$\hat{R}_{yy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) y(k-\tau); \tau = 0, 1$$

$$\hat{R}_{uu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k) u(k-\tau); \tau = 0, 1$$

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) u(k-\tau); \tau = -1, 0, 1, 2$$

Pošto se ne raspolaže sa realnim merenjima na sistemu, sistem se može simulirati u cilju generisanja ulazno-izlaznih podataka. Dijagram toka procedure za simulaciju sistema za usvojenu dužinu merne sekvence $N=200$ prikazan je u nastavku.

Korak 1: Inicijalizacija:

$$y(0) = y(-1) = y(-2) = u(-1) = u(-2) = 0; N = 200;$$

$$a_1 = -1.2, \quad a_2 = 0.6, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 0.3;$$

$$m_u = 0, \quad \sigma_u^2 = 1; \quad m_e = 0, \quad \sigma_e^2 = 1.$$

Korak 2: Startovanje brojača vremena: $k = 1$

Korak 3: Generisanje realizacije slučajnog ulaza $u(k-1)$ pozivom standardnog generatora pseudo slučajnih brojeva koji su raspodeljeni po normalnom (Gausovom) zakonu, nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse; $u(k-1) \sim N(0, 1)$.

Korak 4: Generisanje realizacije slučajnog poremećaja $e(k)$ pozivom standardnog gausovskog generatora pseudoslučajnih brojeva, nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse; $e(k) \sim N(0, 1)$.

Korak 5: Generisanje izlaza u k -tom diskretnom trenutku

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + e(k)$$

Korak 6: Test da li isteklo vreme simulacije: ako je $k \leq N$ inkrementirati brojač i vratiti se na korak 3; ako je zaustaviti proceduru: izlaz iz procedure su sekvence $\{y(0), y(1) \dots y(200)\}$, $\{u(0), u(1), \dots, u(200)\}$

Generisana ulazno-izlazna sekvenca dalje će se koristiti za estimaciju (izračunavanje) korelacionih funkcija, pa se rešavanjem postavljenog sistema normalnih jednačina dolazi do procena nepoznatih parametara modela. Asimptotske, kada $N \rightarrow \infty$, procene korelacionih funkcija težiće njihovim egzaktnim vrednostima, koje se mogu izračunati na osnovu postupka koji je ranije opisan. Naime, ako se jednačine egzaktnog modela sistema sa zadatim tačnim vrednostima parametara pomnože sa $y(k-\tau)$ i $u(k-\tau)$ i nađe matematičko očekivanje leve i desne strane tako formiranih jednačina dobija se

$$R_{yy}(\tau) + a_1 R_{yy}(\tau-1) + a_2 R_{yy}(\tau-2) = b_1 R_{uy}(\tau-1) + b_2 R_{uy}(\tau-2) + R_{ey}(\tau)$$

$$R_{yu}(\tau) + a_1 R_{yu}(\tau - 1) + a_2 R_{yu}(\tau - 2) = b_1 R_{uu}(\tau - 1) + b_2 R_{uu}(\tau - 2) + R_{eu}(\tau)$$

Pošto su u i e međusobno nekorelisani slučajni procesi to je $R_{eu}(\tau) = 0$, pa je $R_{ey}(\tau) = 0$, za $\tau \neq 0$ i $R_{ey}(0) = 1$. Takođe, pošto $y(k)$ ne zavisi od $u(k+i)$ za $i \geq 0$, to je $R_{yu}(-i) = E\{y(k)u(k+i)\} = 0$ za $i \geq 0$. Uzimajući dalje vrednosti $\tau = 0, 1, 2$ dobija se iz druge jednačine

$$R_{yu}(0) + a_1 R_{yu}(-1) + a_2 R_{yu}(-2) = b_1 R_{uu}(-1) + b_2 R_{uu}(-2)$$

$$R_{yu}(1) + a_1 R_{yu}(0) + a_2 R_{yu}(-1) = b_1 R_{uu}(0) + b_2 R_{uu}(1)$$

$$R_{yu}(2) + a_1 R_{yu}(1) + a_2 R_{yu}(0) = b_1 R_{uu}(1) + b_2 R_{uu}(0)$$

Imajući u vidu da je $R_{uu}(\tau) = \sigma_u^2 \Delta(\tau) = \Delta(\tau)$, gde je $\Delta(\tau) = 1$ za $\tau = 0$ i $\Delta(\tau) = 0$ za $\tau \neq 0$, kao i činjenicu da je $R_{yu}(\tau) = 0$ za $\tau \leq 0$, konačno se dobija

$$R_{yu}(0) = R_{yu}(-1) = 0$$

$$R_{yu}(1) = b_1 = 1$$

$$R_{yu}(2) + a_1 R_{yu}(1) = b_2 = 0.3 \Rightarrow R_{yu}(2) = 0.3 + 1.2 = 1.5$$

Uvrštavanjem vrednosti $\tau = 0, 1, 2$ u prvu jednačinu sledi sistem jednačina

$$R_{yy}(0) + a_1 R_{yy}(1) + a_2 R_{yy}(2) = b_1 R_{uy}(-1) + b_2 R_{uy}(-2) + R_{ey}(0) = 0$$

$$R_{yy}(1) + a_1 R_{yy}(0) + a_2 R_{yy}(1) = b_1 R_{uy}(0) + b_2 R_{uy}(-1)$$

$$R_{yy}(2) + a_1 R_{yy}(1) + a_2 R_{yy}(0) = b_1 R_{uy}(1) + b_2 R_{uy}(0)$$

Pošto je $R_{uy}(-1) = R_{yu}(1) = 1$, $R_{uy}(-2) = R_{yu}(2) = 1.5$, $R_{uy}(0) = R_{yu}(0) = 0$, $R_{uy}(1) = R_{yu}(-1) = 0$, navedeni sistem se svodi na

$$R_{yy}(0) - 1.2R_{yy}(1) + 0.6R_{yy}(2) = 1 + 0.3 \cdot 1.5 + 1 = 2.45$$

$$R_{yy}(1) - 1.2R_{yy}(0) + 0.6R_{yy}(1) = 0.5$$

$$R_{yy}(2) - 1.2R_{yy}(1) + 0.6R_{yy}(0) = 0$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se za autokorelacionu funkciju izlaza

$$R_{yy}(0) = 9.0714, R_{yy}(1) = 6.9911, R_{yy}(2) = 2.9464.$$

Uvrštavanjem izračunatih egzaktnih vrednosti za korelacione funkcije u normalan sistem jednačina dobiće se za LS procene tačne vrednosti parametara $\hat{\theta}_{LS} = \{-1.5 \ 0.7 \ 1 \ 0.5\}^T$. Dakle, asimptotski (kada $N \rightarrow \infty$) LS procena $\hat{\theta}_N$ konvergira ka tačnim parametrima sistema. Postavlja se pitanje da li je to uvek slučaj i ako nije pod kojim će uslovima LS procena da generiše asimptotski (kada dužina mernog uzorka N neograničeno raste) tačne procene parametara. O ovome problemu će biti više reči u nastavku ovog poglavlja.

U praksi bi se nakon prikupljanja merenja i upravljanja $y(k)$ i $u(k)$, izvršila estimacija svih korelacionih funkcija R , a zatim bi se rešavanjem jednačine (4.1) izračunali svi željeni parametri modela. $\hat{\theta}_{LS}$.

4.2.2 Linearni metod težinskih (ponderisanih) najmanjih kvadrata: WLS metod

Ako se umesto kriterijuma najmanjih kvadrata kao optimizacioni kriterijum za ocenu valjanosti modela usvoji sledeća njegova modifikacija koja se naziva kriterijum težinskih (ponderisanih) najmanjih kvadrata (eng. Weighted Least Squares ili skraćeno WLS)

$$J_N(\theta) = \|Y - \phi\theta\|_W^2 = (Y - \phi\theta)^T W (Y - \phi\theta)$$

gde je W pozitivno-definitna ($W > 0$) i simetrična ($W = W^T$) težinska matrica, tada je

$$J_N(\theta) = Y^T W Y - \theta^T \phi^T W Y - Y^T W \phi \theta + \theta^T \phi^T W \phi \theta$$

pa se iz uslova minimuma kriterijuma dobija

$$\text{grad}_{\theta} J_N(\theta) = \frac{\partial J_N(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial \theta^T (\phi^T W Y)}{\partial \theta} - \frac{\partial (Y^T W \phi) \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \theta^T (\phi^T W \phi) \theta}{\partial \theta} = 0$$

Primenom navedenih pravila za diferenciranje skalara po vektoru dalje se dobija

$$-(\phi^T W Y) - (Y^T W \phi)^T + 2(\phi^T W \phi) \theta = 0$$

odakle direktno sledi WLS procena težinskih najmanjih kvadrata

$$\hat{\theta}_N = [\phi^T W \phi]^{-1} \phi^T W Y$$

Za razmatranu ARX struktura modela matrice ϕ je dimenzije $N \times p$, $p = n_a + n_b$, vektor Y je kolona vektor dimenzije $N \times 1$, tako da je W matrica dimenzija $N \times N$. Posebno, ako se usvoji $W = cI$, gde je $c \geq 0$ a I jedinična matrica dimenzije $N \times N$, WLS metod se svodi na originalni LS metod. Ako se usvoji

$$W = \text{diag} \{ \rho^{N-1} \rho^{N-2} \dots \rho^0 \}$$

gde $\text{diag} \{ \cdot \}$ označava dijagonalnu matricu, to će se za konstantu $\rho < 1$ u proizvodu WY , koji definiše otežnjeni vektor merenja Y , veće težine dodeljivati potonjim merenjima $y(N), y(N-1), \dots$ u odnosu na početna merenja $y(1), y(2), \dots$, odnosno

$$WY = \begin{bmatrix} \rho^{N-1} y(1) \\ \rho^{N-2} y(2) \\ \vdots \\ \rho y(N-1) \\ \rho^0 y(N) \end{bmatrix}$$

dok će se za $\rho > 1$ veće težine dodeljivati početnim merenjima. Takođe, ako se usvoji da je težinska matrica W jednaka inverznoj matrici matrice kovarijanse aditivnog šuma na izlazu sistema

$$W = R_e^{-1} = [E \{ e e^T \}]^{-1}; e^T = \{ e(1) \ e(2) \ \dots \ e(N) \}$$

gde $E \{ \cdot \}$ označava matematičko očekivanje, WLS algoritam se naziva algoritam minimalne varijanse greške estimacije, pošto se u navedenom slučaju optimizacioni kriterijum svodi na totalnu varijansu greške estimacije, kao sumu varijansi grešaka estimacije pojedinih parametara u vektoru parametara koji se estimira.

4.2.3 Pseudo-linearni metod najmanjih kvadrata: PLLS metod

Prilikom izvođenja linearnog metoda najmanjih kvadrata (LLS) ili linearnog metoda ponderisanih (težinskih) najmanjih kvadrata (WLLS) ključna pretpostavka je bila da je regresioni vektor $\varphi(k)$ u linearnom modelu predikcije $\hat{y}(k|k-1, \theta) = \varphi^T(k)\theta$ nezavisan od nepoznatog vektora parametara, što je podrazumevalo FIR ili ARX reprezentaciju (strukturu) modela. Ukoliko ova pretpostavka nije ispunjena, već je i regresioni vektor funkcija nepoznatog vektora parametara, $\varphi(k, \theta)$, što je slučaj kod ARMAX, OE i BJ reprezentacija modela, tada je model prediktora $\hat{y}(k|k-1, \theta) = \varphi^T(k, \theta)\theta$ nelinearna funkcija vektora parametara θ , te se ovakav prediktor naziva pseudo-linearni prediktor. Kriterijum koji se minimizira tada postaje

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - \varphi^T(k, \theta)\theta]^2$$

a minimizacijom ovog kriterijuma dobija se procena $\hat{\theta}_N$ nepoznatog vektora parametara θ

$$\theta = \hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta \in D_M} J_N(\theta); J_N(\hat{\theta}_N) < J_N(\theta) \text{ za } \forall \theta \in D_M \text{ i } \theta \neq \hat{\theta}_N.$$

gde je D_M skup svih mogućih vrednosti nepoznatog vektora parametara θ . Rešenje ovako postavljenog optimizacionog problema, koji se naziva i pseudo-linearni problem najmanjih kvadrata (PLLS), zahteva primenu iterativnih nelinearnih numeričkih algoritama. Ovakav postupak je računski složen, a i sama konvergencija procena parametara koje su generisane nelinearnim numeričkim algoritmima ka stvarnom (tačnom) vektoru parametara nije u opštem slučaju garantovana.

Za razliku od klasičnog zadatka optimizacije, gde je u opštem slučaju poznata samo kriterijumska funkcija, ovde je pored kriterijuma $J_N(\theta)$ poznat i izraz za njen argument, odnosno grešku predikcije $\varepsilon(k, \theta)$, tj.

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta), \varepsilon(k, \theta) = y(k) - \varphi^T(k, \theta)\theta$$

što će omogućiti da se izvedu optimizacione (minimizacione) metode koje imaju relativno dobra konvergenciona svojstva. Neke od tih metoda biće razmatrane u nastavku teksta.

Razvojem kriterijuma $J_N(\theta)$ oko neke tačke u prostoru parametara $\theta = \theta_0$ dobija se

$$J_N(\theta) = J_N(\theta_0) + g^T(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^T H(\theta_0)(\theta - \theta_0) + o(\|\theta - \theta_0\|)$$

gde je

$$g(\theta_0) = \text{grad } J_N(\theta_0) = \frac{\partial J_N(\theta_0)}{\partial \theta}; H(\theta_0) = \frac{\partial^2 J_N(\theta_0)}{\partial \theta^2}, \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{o(\|\theta - \theta_0\|)}{\|\theta - \theta_0\|} = 0$$

pri čemu simbol $\|\cdot\|$ označava Euklidovu normu vektora. Ako se dalje pretpostavi da je θ_0 blisko minimumu θ^* kriterijuma, tada je $J_N(\theta_0) \approx 0$, te je potreban uslov minimuma definisan relacijom

$$\frac{\partial J_N(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial [g^T(\theta_0)(\theta - \theta_0)]}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} [(\theta - \theta_0)^T H^{-1}(\theta_0)(\theta - \theta_0)] = 0$$

Koristeći prethodno definisana pravila za diferenciranje skalara po vektoru, poslednja relacija se svodi na

$$g(\theta_0) + \frac{1}{2}2H^{-1}(\theta_0)(\theta - \theta_0) = 0$$

odnosno

$$\theta = \theta_0 - H^{-1}(\theta_0)g(\theta_0)$$

Ukoliko je $J_N(\theta)$ kvadratna funkcija ovako određeno θ odgovaraće minimumu kriterijumske funkcije θ^* i algoritam će u jednom koraku odrediti traženu tačku minimuma θ^* . U svakom drugom slučaju algoritam se može primeniti u više koraka, u cilju iterativnog pronalaženja minimuma kriterijuma θ^* . Na taj način, ako je θ_i procena vektora parametara u i -tom koraku, tada je procena vektora parametara u narednom koraku (iteraciji)

$$\theta_{i+1} = \theta_i - H^{-1}(\theta_i)g(\theta_i); \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad \theta_0 - \text{početna procena}$$

Ovakav iterativan postupak naziva se Newton-ov algoritam. Algoritam može zahtevati nekoliko ili čak relativno mnogo iteracija da bi se odredio minimum θ^* kriterijuma. Kao mogući kriterijum za zaustavljanje više koračne procedure može se koristiti jedan od sledećih uslova:

$$\|g(\theta_{i+1})\| \leq \varepsilon, |J(\theta_{i+1}) - J(\theta_i)| \leq \varepsilon, \|\theta_{i+1} - \theta_i\| \leq \varepsilon$$

gde je ε mala pozitivna konstanta.

Ako je kriterijumska funkcija $J_N(\theta)$ konveksna (konveksna kriterijumska funkcija J zadovoljava Jensenovu nejednakost $J(\lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2) < \lambda J(\theta_1) + (1-\lambda)J(\theta_2)$ za $0 < \lambda < 1$) tada je i unimodalna, tj. poseduje jedan ekstremum i algoritam će konvergirati ka tom jedinstvenom minimumu. Diferencijabilna funkcija $J_N(\theta)$ je konveksna ukoliko je Hessian matrica drugih izvoda $H(\theta) = \partial^2 J_N(\theta) / \partial \theta^2$ pozitivno-definitna ($H > 0$). Međutim, unimodalna funkcija u opštem slučaju ne mora biti i konveksna. Ukoliko se ne može dokazati ni konveksnost ni unimodalnost kriterijumske funkcije tada ona poseduje nekoliko minimuma, a minimum sa najmanjom vrednošću naziva se globalnim, dok se ostali minimumi nazivaju lokalnim. U navedenom slučaju ne postoji garancija da će algoritam konvergirati ka globalnom minimumu, odnosno kada algoritam dostigne tačku minimuma ne postoji mogućnost da se ispita da li je dostignuti minimum zaista i globalni. Inače, generalno je vrlo teško da se dokaže bilo konveksnost bilo unimodalnost kriterijumske funkcije i jedino u slučaju kriterijumske funkcije u formi sume kvadrata grešaka predikcije koje su linearne funkcije vektora parametara (FIR i ARX reprezentacije modela) može se dokazati konveksnost kriterijuma $J_N(\theta)$, što će u nastavku biti i učinjeno.

Važne osobine više koračne (iterativne) procedure su brzina konvergencije i robusnost. Brzina konvergencije odnosi se na sposobnost algoritma da locira tačku ekstremuma u što je moguće kraćem vremenskom intervalu, odnosno za što je moguće manji broj koraka (iteracija), dok robusnost označava sposobnost algoritma da odredi tačku minimuma za proizvoljan oblik kriterijumske funkcije.

Brzina konvergencije algoritma određuje se na osnovu faktora konvergencije

$$\beta = \frac{\|\theta_{i+1} - \theta^*\|}{\|\theta_i - \theta^*\|}$$

i ukoliko je $\beta \varepsilon(0, 1)$ takav iterativni algoritam je linearno konvergentan. Iterativni algoritmi za koje je $\beta \approx 0$ konvergiraće vrlo brzo, pošto je tada $\theta_{i+1} \approx \theta^*$. Posebno, za $\beta = 0$ algoritam će posedovati super brzu linearnu konvergenciju. Newtonov iterativni metod poseduje kvadratnu konvergenciju, pošto kod njega β^2 teži ka pozitivnoj konstanti. Inače, Newtonov algoritam će konvergirati vrlo brzo u okolini tačke minimuma, pošto je tada izvršena aproksimacija kriterijumske funkcije odgovarajućom kvadratnom funkcijom odgovarajuća. Takođe, ukoliko nije moguće da se Hessian izračuna egzaktno, ne može se garantovati konvergencija ovog algoritma, te se u takvim situacijama uvodi pozitivna skalarna veličina s_i kojom se utiče na priraštaj vektora parametara, odnosno veličinu koraka algoritma, kako bi se obezbedila njegova konvegencija

$$\theta_{i+1} = \theta_i - s_i H^{-1}(\theta_i) g(\theta_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \theta_0\text{-dato}$$

Faktor s_i može biti fiksna ili promenljiva. Na primer, dok god je ispunjen uslov $J(\theta_{i+1}) < J(\theta_i)$ može se koristiti konstantan faktor $s_i > 1$ (na primer, $s_i = 1.3$), a kada dođe do neadekvatnog koraka (otkaza algoritma) koji je okarakterisan uslovom $J(\theta_{i+1}) > J(\theta_i)$ veličinu koraka treba smanjiti njegovim množenjem sa nekom konstantom manjom od 1 (na primer, 0.2), pa nastaviti proceduru uz testiranje vrednosti kriterijumske funkcije.

Posebno, ukoliko se Hessian aproksimira sa jediničnom matricom, $H \approx I$, tada se Newton algoritam svodi na gradijentni algoritam

$$\theta_{i+1} = \theta_i - s_i g(\theta_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \theta_0\text{-dato}$$

kod koga se približavanje procene minimumu kriterijumske funkcije θ^* vrši u anti-gradijentnom smeru $-g(\theta_i)$, dok s_i definiše veličinu koraka u navedenom smeru. Ovakav metod naziva se metod najbržeg spusta (eng. steepest descent method).

Primena Newtonovog algoritma zahteva izračunavanje gradijenta i Hessiana

$$g(\theta) = \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\theta) \\ g_2(\theta) \\ \vdots \\ g_p(\theta) \end{bmatrix};$$

$$H(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_p} \\ \frac{\partial g_2(\theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2(\theta)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_2(\theta)}{\partial \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_p(\theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_p(\theta)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_p(\theta)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}$$

Polazeći od izraza za kriteirjumsku funkciju

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta); \quad \varepsilon(k, \theta) = y(k) - \varphi^T(k, \theta) \theta$$

i diferenciranjem po elementu θ_i , $i = 1, 2, \dots, p$, vektora parametara θ dobija se za i -ti element $g_i(\theta)$, $i = 1, 2, \dots, p$ gradijent vektora $g(\theta)$

$$g_i(\theta) = \frac{\partial J_N(\theta)}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2N} 2 \sum_{k=1}^N \varepsilon(k, \theta) \frac{\partial \varepsilon(k, \theta)}{\partial \theta_i}$$

Poslednja relacija se može napisati u obliku skalarnog proizvoda vektora

$$g_i(\theta) = \frac{1}{N} \left\{ \frac{\partial \varepsilon(1, \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon(2, \theta)}{\partial \theta_i} \dots \frac{\partial \varepsilon(N, \theta)}{\partial \theta_i} \right\} \begin{Bmatrix} \varepsilon(1, \theta) \\ \varepsilon(2, \theta) \\ \vdots \\ \varepsilon(N, \theta) \end{Bmatrix}; i = 1, 2, \dots, p$$

tako da je gradijent kriterijumske funkcije

$$g(\theta) = \frac{\partial J_N(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} g_1(\theta) \\ g_2(\theta) \\ \vdots \\ g_p(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon(1, \theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \varepsilon(2, \theta)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon(N, \theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \varepsilon(1, \theta)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \varepsilon(2, \theta)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \varepsilon(N, \theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon(1, \theta)}{\partial \theta_p} & \frac{\partial \varepsilon(2, \theta)}{\partial \theta_p} & \dots & \frac{\partial \varepsilon(N, \theta)}{\partial \theta_p} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon(1, \theta) \\ \varepsilon(2, \theta) \\ \vdots \\ \varepsilon(N, \theta) \end{Bmatrix}$$

odnosno

$$g(\theta) = \frac{1}{N} \phi(\theta) E(\theta)$$

gde je $p \times N$ dimenziona matrica

$$\phi(\theta) = \{\phi_{ij}(\theta)\}_{p \times N}; \phi_{ij}(\theta) = \frac{\partial \varepsilon(j, \theta)}{\partial \theta_i}; i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, N$$

a $N \times 1$ dimenzioni vektor grešaka predikcije

$$E(\theta) = \{\varepsilon(i, \theta)\}_{N \times 1}; \varepsilon(i, \theta) = y(i) - \varphi^T(i, \theta) \theta; i = 1, 2, \dots, N$$

Funkcije $\phi_{ij}(\theta) = \partial \varepsilon(j, \theta) / \partial \theta_i$ nazivaju se funkcije osetljivosti prvog reda, te se odgovarajuća matrica $\phi(\theta)$ naziva matrica funkcije osetljivosti.

Ponovnim diferenciranjem izraza za gradijent dobija se izraz za Hessian matricu

$$H(\theta) = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 J_N(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{N} \phi(\theta) \frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{N} \frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta} E(\theta)$$

Primenom pravila linearne algebre za diferenciranje n -dimenzionog kolona vektora $b = \{b_1 \ b_2 \dots b_m\}^T$ po n -dimenzionom vektoru koloni $c = \{c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n\}^T$, na osnovu koga je rezultat $m \times n$ dimenziona matrica

$$\frac{\partial b}{\partial c} = \left\{ \frac{\partial b_i}{\partial c_j} \right\}_{m \times n} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial c_1} & \frac{\partial b_1}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial b_1}{\partial c_n} \\ \frac{\partial b_2}{\partial c_1} & \frac{\partial b_2}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial b_2}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial b_m}{\partial c_1} & \frac{\partial b_m}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial b_m}{\partial c_n} \end{Bmatrix}_{m \times n}$$

dalje sledi, usvajajući $b = E(\theta)$ i $c = \theta$,

$$\frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta} = \left\{ \frac{\partial \varepsilon(i, \theta)}{\partial \theta_j} \right\}_{N \times p} = \phi^T(\theta)$$

Na taj način se dobija

$$H(\theta) = \frac{1}{N} \phi(\theta) \phi^T(\theta) + \frac{1}{N} \frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta} E(\theta)$$

U opštem slučaju, egzaktno izračunavanje izraza za Hessian je tehnički komplikovano, zbog potrebe da se odredi matrica funkcija osetljivosti drugog reda $\partial \phi(\theta) / \partial \theta$.

Posebno, ukoliko je usvojena ARX reprezentacija modela, tada je $\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \varphi^T(k, \theta) \theta$, gde $\varphi(k, \theta) = \varphi(k)$ i ne zavisi od θ , tako da je vektor funkcija osetljivosti prvog reda

$$-\frac{\partial \varepsilon(k, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi(k) \theta}{\partial \theta} = \varphi(k) = \begin{Bmatrix} -y(k-1) \\ \vdots \\ -y(k-n_a) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-n_b) \end{Bmatrix}_{p \times 1}$$

Dalje je matrica funkcija osetljivosti prvog reda

$$\phi(\theta) = \left\{ \frac{\partial \varepsilon(1, \theta)}{\partial \theta} \quad \frac{\partial \varepsilon(2, \theta)}{\partial \theta} \quad \dots \quad \frac{\partial \varepsilon(N, \theta)}{\partial \theta} \right\} = -\{\varphi(1) \varphi(2) \dots \varphi(N)\} = -\phi$$

odakle slede izrazi za gradijent i Hessian

$$g(\theta) = \frac{1}{N} \phi(\theta) E(\theta) = -\frac{1}{N} \phi E(\theta)$$

$$H(\theta) = \frac{1}{N} \phi(\theta) \phi^T(\theta) = \frac{1}{N} \phi \phi^T$$

Primetimo da u navedenom slučaju $\phi(\theta)$ ne zavisi od θ , te je $\partial \phi(\theta) / \partial \theta = \partial \phi / \partial \theta = 0$.

Takođe se zaključuje da je $N \times 1$ dimenzioni vektor grešaka predikcija

$$E(\theta) = \{\varepsilon(i, \theta)\} = \{y(i) - \varphi^T(i) \theta\} = \begin{Bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{Bmatrix} \theta = Y - \phi^T \theta$$

Ako se dalje primeni Newton-ov algoritam za nalaženje minimuma θ^* kriterijuma $J_N(\theta)$ samo u jednom koraku, polazeći od proizvoljnog početnog pogađanja vektora parametara $\theta = \theta_0$, dobija

se

$$\begin{aligned}\theta^* &= \theta_1 = \theta_0 - H^{-1}(\theta_0)g(\theta_0) = \theta_0 + \left(\frac{1}{N}\phi\phi^T\right)^{-1} \frac{1}{N}\phi(Y - \phi^T\theta_0) \\ &= \theta_0 + \left(\frac{1}{N}\phi\phi^T\right)^{-1} \frac{1}{N}\phi Y - \left(\frac{1}{N}\phi\phi^T\right)^{-1} \left(\frac{1}{N}\phi\phi^T\right)\theta_0\end{aligned}$$

odakle dalje sledi

$$\theta^* = (\phi\phi^T)^{-1} \phi Y$$

što predstavlja prethodno izvedenu normalnu vektorsku jednačinu za izračunavanje LS procene vektora parametara. Dakle, primena Newtonovog metoda za identifikaciju parametara u ARX, kao i FIR, reprezentaciji modela dovodi do procene vektora parametara u jednom koraku, polazeći od proizvoljne početne procene θ_0 ovog vektora. Tako dobijeno rešenje minimizira srednje-kvadratnu kriterijumsku funkciju greške $J_N(\theta)$ i ima analitički oblik koji predstavlja sistem normalnih jednačina (tj. normalnu vektorsku jednačinu). Međutim, za druge reprezentacije modela, kao što su ARMAX, OE ili BJ, greške predikcije $\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \varphi^T(k, \theta)\theta$ tako da je matrica $\phi(\theta) = \{\phi_{ij}(\theta)\}$, čiji su elementi funkcije osetljivosti prvog reda $\phi_{ij}(\theta) = \partial\varepsilon(j, \theta)/\partial\theta_i$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, N$, funkcija nepoznatog vektora parametara θ , te će Newtonov algoritam u više koraka odrediti numerički lokalni minimum razmatranog kriterijuma. U ovom slučaju određivanje Hessiana

$$H = \frac{1}{N}\phi(\theta)\phi^T(\theta) + \frac{1}{N}\partial\phi(\theta)/\partial\theta E(\theta)$$

je tehnički komplikovano, ne samo zbog činjenice da je matrica funkcija osetljivosti prvog reda $\Phi(\theta)$ funkcija θ , već i potrebe da se izračuna izvod ove matrice po vektoru θ , tj. odredi matrica funkcija osetljivosti drugog reda $\partial\phi(\theta)/\partial\theta$. Tada se obično pribegava određenim aproksimacijama prilikom izračunavanja Hessiana, od kojih se najčešće koriste sledeće:

Gauss-Newtonova aproksimacija: ovde se zanemaruje član $\partial\phi(\theta)/\partial\theta$ i Hessian aproksimira izrazom koji sadrži samo matricu funkcija osetljivosti prvog reda

$$H \approx \frac{1}{N}\phi(\theta)\phi^T(\theta)$$

a odgovarajući algoritam naziva se Gauss-Newtonov metod

$$\theta_{i+1} = \theta_i - s_i \left(\frac{1}{N}\phi(\theta_i)\phi^T(\theta_i)\right)^{-1} \frac{1}{N}\phi(\theta_i)E(\theta_i) = \theta_i - s_i (\phi(\theta_i)\phi^T(\theta_i))^{-1} \phi(\theta_i)E(\theta_i)$$

Ovaj algoritam zahteva relativno veliki broj iteracija da bi odredio lokalni minimum θ^* kriterijuma $J_N(\theta)$. Algoritam konvergira vrlo brzo samo u okolini minimuma, kada je aproksimacija kriterijuma $J_N(\theta)$ kvadratnom funkcijom odgovarajuća. Međutim, kada kriterijumska funkcija $J_N(\theta)$ nije kvadratna, tada aproksimacija $H \approx \phi\phi^T/N$ može biti vrlo netačna, te neće garantovati konvergenciju algoritma (može se desiti da ovako izračunat Hessian H nije više pozitivno definitna matrica).

Levenberg-Marquadt-ova aproksimacija , sastoji se u aproksimaciji Hessiana izrazom

$$H \approx \lambda I + \phi(\theta) \phi^T(\theta) / N$$

gde je λ pozitivna konstanta, a I jedinična matrica odgovarajuće dimenzije, čime se obezbeđuje da ovako izračunato H bude pozitivno-definitna matrica ($H > 0$), odnosno da postoji inverzija H^{-1} , što će garantovati konvergenciju algoritma

$$\theta_{i+1} = \theta_i - s_i \left(\lambda I + \frac{1}{N} \phi(\theta_i) \phi^T(\theta_i) \right)^{-1} \frac{1}{N} \phi(\theta_i) E(\theta_i)$$

Posebno, za $\lambda = 0$ algoritam se svodi na Gauss-Newtonov metod, a za $\lambda \gg 1$ algoritam postaje metod "najbržeg spusta".

Aproksimacija "najbržeg spusta" sastoji se u izrazu

$$H \approx I$$

čime se dobija gradijentni metod "najbržeg spusta"

$$\theta_{i+1} = \theta_i - s_i g(\theta_i) = \theta_i - s_i \frac{1}{N} \phi(\theta_i) E(\theta_i)$$

Dvokoračna procedura , kod koje se u prvom koraku, kada su procene parametara daleko od tačke ekstremuma kriterijuma, koristi gradijentni metod najbržeg spusta (koji ima linearnu brzinu konvergencije), a u drugom koraku, kada su procene parametara blizu minimuma kriterijuma, koristi Gauss-Newtonov metod (koji ima kvadratnu brzinu konvergencije).

Numerička realizacija PLLS algoritma zasniva se na sledećim koracima:

Korak 1. Inicijalizacija algoritma: usvajanje strukture i izbor početnog $px1$ dimenzionog vektora parametara θ_0 , početnog faktora konvergencije S_0 , skala faktora α , parametra za zaustavljanje iterativnog postupka ε .

Korak 2. Formiranje paketa ulazno-izlaznih podataka $(u(k), y(k))$, $k = 1, 2, \dots, N$, izračunati početni vektor regresije $\varphi(k; \theta_0)$, $k = 1, 2, \dots, N$ i greške predikcije $\varepsilon(k, \theta_0) = y(k) - \varphi^T(k, \theta_0) \theta_0$, $k = 1, 2, \dots, N$ i formirati $Nx1$ dimenzioni vektor $E(\theta_0) = \{\varepsilon(k, \theta_0)\}$ čiji su elementi greške predikcije.

Korak 3. Postavljanje brojača iteracija $i = 1$.

Korak 4. Izračunavanje grešaka predikcije: formiranje regresionog vektora $\varphi(k, \theta_{i-1})$, $k = 1, 2, \dots, N$ i izračunavanje grešaka predikcije $\varepsilon(k, \theta_{i-1}) = y(k) - \varphi^T(k, \theta_{i-1}) \theta_{i-1}$; formiranje $Nx1$ dimenzionog vektora $E(\theta_{i-1}) = \{\varepsilon(k, \theta_{i-1})\}$ čiji su elementi greške predikcije $\varepsilon(k, \theta_{i-1})$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Korak 5. Izračunavanje funkcija osetljivosti prvog reda: izračunavanje izvoda grešaka predikcije $\varepsilon_{\theta_j}(k, \theta) = \partial \varepsilon(k, \theta) / \partial \theta_j$, $j = 1, \dots, p$ i formiranje $p \times 1$ dimenzionog vektora funkcija osetljivosti $\varepsilon_{\theta}(k, \theta_{i-1}) = \{\varepsilon_{\theta_j}(k, \theta_{i-1})\}$, čiji su elementi funkcije osetljivosti $\varepsilon_{\theta_j}(k, \theta_{i-1})$, $j = 1, \dots, p$, kao i formiranje $p \times 1$ dimenzione matrice funkcije osetljivosti

$$\phi(\theta_{i-1}) = \{\varepsilon_{\theta}(1, \theta_{i-1}) \varepsilon_{\theta}(2, \theta_{i-1}) \cdots \varepsilon_{\theta}(N, \theta_{i-1})\}$$

čije su kolone vektori osetljivosti $\varepsilon_{\theta}(k, \theta_{i-1})$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Korak 6. Izračunavanje gradijenta i neke od aproksimacije Hessiana, na primer Gauss-Newtonove aproksimacije,

$$g(\theta_{i-1}) = \frac{1}{N} \phi(\theta_{i-1}) E(\theta_{i-1}); H(\theta_{i-1}) = \frac{1}{N} \phi(\theta_{i-1}) \phi^T(\theta_{i-1})$$

Korak 7. Izračunavanje procene parametara u tekućoj iteraciji

$$\theta_i = \theta_{i-1} - S_{i-1} H^{-1}(\theta_{i-1}) g(\theta_{i-1})$$

Korak 8. Izračunavanje kritijuma $J(\theta_i) = E^T(\theta_i) E(\theta_i)$ i testiranje da li je $J(\theta_i) \leq J(\theta_{i-1})$; ako da ići na sledeći korak, ako ne modifikovati (smanjiti) parametar S_{i-1} kao $S_{i-1} = \alpha S_{i-1}$ i ići na korak 7.

Korak 9. Ispitati da li je $|J(\theta_i) - J(\theta_{i-1})| \leq \varepsilon$, ako da ići na korak 4, ako ne zaustaviti iterativni numerički postupak PLS algoritam se može šematski prikazati blok dijagramom, datim na slici 4.8.

Na kraju ilustrujemo postupak određivanja modela osetljivosti na primeru ARMAX reprezentacije modela

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})e(k)$$

gde su odgovarajući polinomi

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}; B(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i}; C(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i}$$

a $y(k)$, $u(k)$ i $e(k)$ predstavljaju realizacije izlaza, ulaza i poremećaja (belog slučajnog procesa) u k -tom diskretnom trenutku. Pošto je na osnovu date relacije

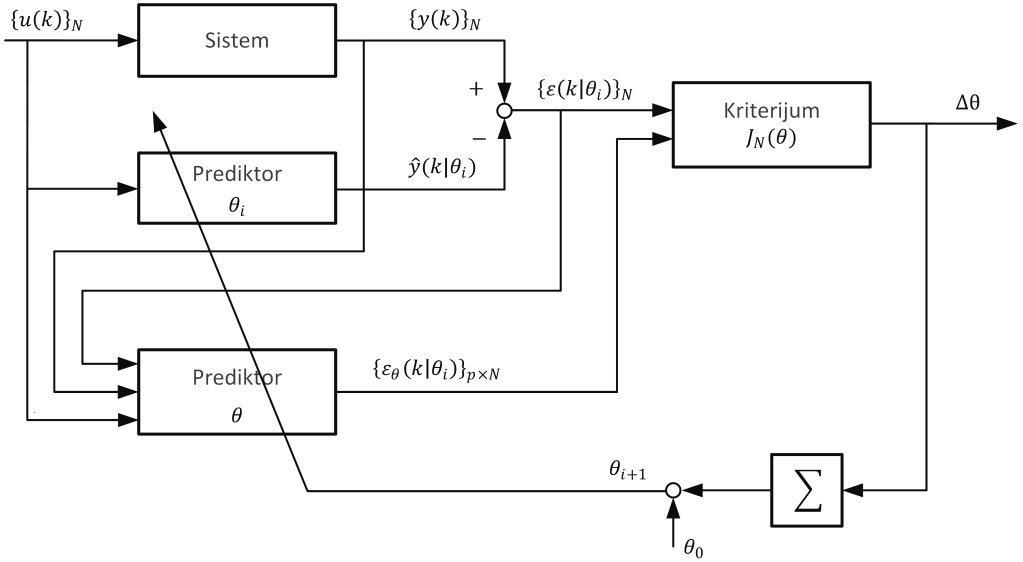
$$y(k) = [1 - A(z^{-1})]y(k) + B(z^{-1})u(k) + [C(z^{-1}) - 1]e(k) + e(k)$$

odnosno

$$y(k) = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i} y(k) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i} u(k) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} e(k) + e(k)$$

ili imajući u vidu značenje operatora kašnjenja z^{-1}

$$y(k) = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i y^{-i} y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i z^{-i} u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} e(k-i) + e(k)$$



Slika 4.8: Blok dijagram pseudo-linearnog metoda najmanjih kvadrata za parametarsku identifikaciju sistema

predikcija izlaza sistema data je sa

$$\hat{y}(k|\theta) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i \varepsilon(k-i, \theta), k = 1, 2, \dots, N$$

gde je greška predikcije

$$\varepsilon(k_i\theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta), k = 1, 2, \dots, N$$

Uvodeći regresioni vektor

$$\varphi^T(k, \theta) = \{-y(k-1) \cdots -y(k-n_a) u(k-1) \cdots u(k-n_b) \varepsilon(k-1, \theta) \cdots \varepsilon(k-n_c, \theta)\}$$

greške predikcije se može zapisati i u formi linearne regresije

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi^T(k|\theta) \theta, k = 1, 2, \dots, N$$

gde je vektor parametara

$$\theta^T = \{a_1 \cdots a_{n_a} b_1 \cdots b_{n_b} c_1 \cdots c_{n_c}\}.$$

Diferenciranjem izvedenog izraza za grešku predikcije dobijaju se funkcije osetljivosti prvog reda

$$\varepsilon_{a_j}(k, \theta) = \frac{\partial \varepsilon(k, \theta)}{\partial a_j} = y(k-j) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i \frac{\partial \varepsilon(k-i, \theta)}{\partial a_j} = y(k-j) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i \varepsilon_{a_j}(k-i, \theta), j = 1, \dots, n_a$$

$$\varepsilon_{b_j}(k, \theta) = \frac{\partial \varepsilon(k, \theta)}{\partial b_j} = -u(k-j) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i \frac{\partial \varepsilon(k-i, \theta)}{\partial b_j} = -u(k-j) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i \varepsilon_{b_j}(k-i, \theta), j = 1, \dots, n_b$$

$$\varepsilon_{c_j}(k, \theta) = \frac{\partial \varepsilon(k, \theta)}{\partial c_j} = -\varepsilon(k-j) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i \frac{\partial \varepsilon(k-i, \theta)}{\partial c_j} = -\varepsilon(k-j) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i \varepsilon_{c_j}(k-i, \theta), j = 1, \dots, n_c$$

Sada je $p \times 1$ dimenzioni vektor osjetljivosti

$$\varepsilon_\theta(k, \theta) = \{\varepsilon_{\theta_j}(k, \theta)\}$$

čiji su elementi funkcije osjetljivosti prvog reda

$$\varepsilon_{\theta_j}(k, \theta) = \varepsilon_{a_j}(k, \theta), j = 1, \dots, n_a$$

$$\varepsilon_{\theta_j}(k, \theta) = \varepsilon_{b_{j-n_a}}(k, \theta), j = n_a + 1, \dots, n_a + n_b$$

$$\varepsilon_{\theta_j}(k, \theta) = \varepsilon_{c_{j-n_a-n_b}}(k, \theta), j = n_a + n_b + 1, \dots, n_a + n_b + n_c = p$$

Uvodeći operator kašnjenja, može se pisati

$$y(k-j) = z^{-j}y(k), \varepsilon(k-j, \theta) = z^{-j}\varepsilon(k, \theta)$$

odakle se zaključuje da je

$$\varepsilon_{a_j}(k, \theta) = z^{-j}y(k) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} \varepsilon_{a_j}(k, \theta), j = 1, \dots, n_a$$

$$\varepsilon_{b_j}(k, \theta) = z^{-j}u(k) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} \varepsilon_{b_j}(k, \theta), j = 1, \dots, n_b$$

$$\varepsilon_{c_j}(k, \theta) = z^{-j}\varepsilon(k, \theta) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} \varepsilon_{c_j}(k, \theta), j = 1, \dots, n_c$$

odnosno

$$\varepsilon_{a_j}(k, \theta) = \frac{z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i}} y(k) = \frac{z^{-j}}{C(z^{-1}, \theta)} y(k), j = 1, \dots, n_a$$

$$\varepsilon_{b_j}(k, \theta) = \frac{z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i}} u(k) = \frac{z^{-j}}{C(z^{-1}, \theta)} u(k), j = 1, \dots, n_b$$

$$\varepsilon_{c_j}(k, \theta) = \frac{z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i}} \varepsilon(k) = \frac{z^{-j}}{C(z^{-1}, \theta)} \varepsilon(k), j = 1, \dots, n_c$$

gde $C(z^{-1}, \theta)$ označava $C(z^{-1})$ polinom u ARMAX modelu kod koga je eksplicitno naznačeno da koeficijenti ovog polinoma predstavljaju elemente nepoznatog vektora parametara θ koji se estimira.

Izvedene relacije ukazuju na zaključak da je

$$\varepsilon_{a_2}(k, \theta) = z^{-1}\varepsilon_{a_1}(k, \theta), \varepsilon_{a_3}(k, \theta) = z^{-1}\varepsilon_{a_2}(k, \theta) \cdots \varepsilon_{a_{n_a}}(k, \theta) = z^{-1}\varepsilon_{a_{n_a-1}}(k, \theta)$$

$$\varepsilon_{b_2}(k, \theta) = z^{-1}\varepsilon_{b_1}(k, \theta), \varepsilon_{b_3}(k, \theta) = z^{-1}\varepsilon_{b_2}(k, \theta) \cdots \varepsilon_{b_{n_b}}(k, \theta) = z^{-1}\varepsilon_{b_{n_b-1}}(k, \theta)$$

$$\varepsilon_{c_2}(k, \theta) = z^{-1}\varepsilon_{c_1}(k, \theta), \varepsilon_{c_3}(k, \theta) = z^{-1}\varepsilon_{c_2}(k, \theta) \cdots \varepsilon_{c_{n_c}}(k, \theta) = z^{-1}\varepsilon_{c_{n_c-1}}(k, \theta)$$

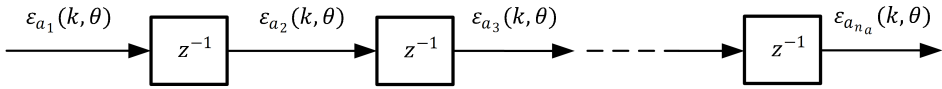
pri čemu je

$$\varepsilon_{a_1}(k, \theta) = \frac{z^{-1}}{1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-1}} y(k)$$

$$\varepsilon_{b_1}(k, \theta) = \frac{z^{-1}}{1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-1}} u(k)$$

$$\varepsilon_{c_1}(k, \theta) = -\frac{z^{-1}}{1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-1}} \varepsilon(k)$$

Dakle, funkcije osetljivosti se generišu na izlazne blokove za kašnjenje, koji su vezani kaskadno (redno) i formiraju tzv. Lanac kašnjenja, što je za funkciju osetljivosti ε_{a_i} , $i = 1, \dots, n_a$ može prikazati sledećim blok dijagramom.



Slika 4.9: Blok šema formiranja funkcija osetljivosti

Na identičan način se formiraju lanci blokova za kašnjenje u slučaju funkcija osetljivosti $\varepsilon_{b_i}(k, \theta)$, $\varepsilon_{c_i}(k, \theta)$, $i = 1, \dots, n_b$, $j = 1, \dots, n_c$.

Polazna funkcija osetljivosti $\varepsilon_{a_i}(k, \theta)$ može se generisati na osnovu tehnike pomoćne promenljive. Naime, na osnovu definicionog izraza za ε_{a_1} može se pisati

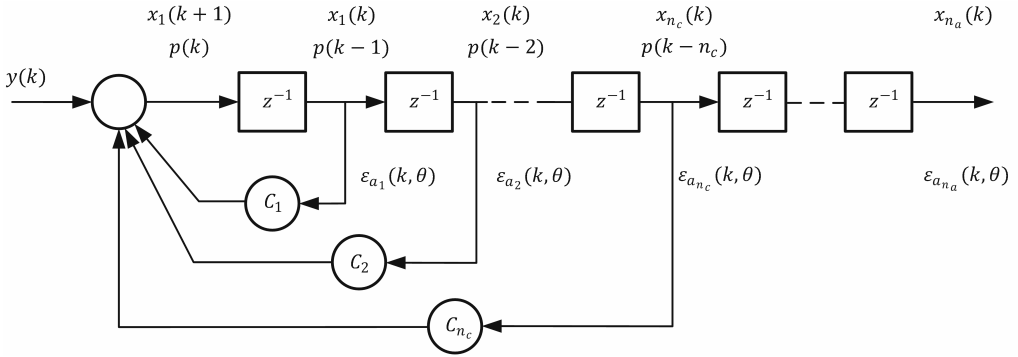
$$\frac{\varepsilon_{a_1}(k, \theta)}{y(k)} = \frac{z^{-1}}{1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i}} \frac{p(k)}{p(k)}$$

gde je $p(k)$ pomoćna promenljiva. Na osnovu poslednje relacije se zaključuje da je

$$y(k) = \left[1 + \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} \right] p(k) \Rightarrow p(k) = y(k) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i z^{-i} p(k) = y(k) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i p(k) = y(k) - \sum_{i=1}^{n_c} c_i p(k)$$

$$\varepsilon_{a_1}(k, \theta) = z^{-1} p(k) = p(k-1)$$

Na osnovu prikazanih relacija može se formirati sledeći blok dijagram, na kome su istovremeno naznačene i ostale funkcije osetljivosti ε_{a_i} , $i = 1, \dots, n_a$



Slika 4.10: Blok dijagram za formiranje funkcija osjetljivosti $\epsilon_{a_i}(k, \theta)$, $i = 1, \dots, n_a$, pretpostavljajući da je uobičajeno $n_c \leq n_a$

Ako se izlazi blokova za kašnjenje označe komponenta vektora stanja dalje se može pisati

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= y(k) - c_1 x_1(k) - c_2 x_2(k) \cdots - c_{n_c} x_{n_c}(k) \\
 x_2(k+1) &= x_2(k) \\
 &\vdots \\
 x_{n_c}(k+1) &= x_{n_c-1}(k) \\
 &\vdots \\
 x_{n_a}(k+1) &= x_{n_a-1}(k)
 \end{aligned}$$

Uvodeći vektor stanja

$$x^T(k+1) = \{x_1(k+1) \ x_2(k+1) \ \dots \ x_{n_a}(k+1)\}$$

Poslednji sistem od n_a diferencnih jednačina prvog reda može se zapisati u obliku vektorske diferencne jednačine prvog reda

$$x(k+1) = F_a x(k) + E_a y(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

gde su odgovarajuće matrice F i E dimenzija $n_a \times n_a$ i $n_a \times 1$, respektivno, odnosno

$$F_a = \begin{bmatrix} -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n_c} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n_a \times n_a} \quad ; \quad E_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n_a \times 1}$$

Funkcije osetljivosti se, dakle, mogu generisati kao odgovarajući elementi vektora stanja, koji je opisan navedenim modelom u prostoru stanja,

$$e_{a_1}(k, \theta) = x_1(k), e_{a_2}(k, \theta) = x_2(k), \dots, e_{a_{n_a}}(k, \theta) = x_{n_a}(k)$$

Na identičan način se mogu generisati funkcije osetljivosti $e_{b_i}(k, \theta)$, $i = 1, \dots, n_b$; $e_{c_i}(k, \theta)$, $i = 1, \dots, n_c$, uvodeći odgovarajuće modele u prostoru stanja koji su opisani sa matričnim parom (F_b, E_b) i (F_c, E_c) , respektivno. Prilikom definisanja funkcije osetljivosti $e_{b_1}(k, \theta)$ pobudni signal u jednačini stanja biće umesto $y(k)$ signal $-u(k)$, dok se kod generisanja funkcija osetljivosti $e_{c_i}(k, \theta)$ signal $y(k)$ zamenjuje sa $-\varepsilon(k, \theta)$, gde je $\varepsilon(k, \theta)$ greška predikcije izlaza. Ako je $n_b > n_c$ matrica F_b imaće identičan oblik kao matrica F_a , samo će joj dimenzije biti $n_b \times n_c$, umesto $n_c \times n_a$, dok je E_b vektor dimenzije $n_b \times 1$. Za $n_b < n_c$ matrica F_b i E_c biće identična i imaće dimenzije $n_c \times n_c$, a vektor E_b biće identičan $n_c \times 1$ vektoru E_c , gde je

$$F_c = \begin{bmatrix} -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n_c} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 10 \end{bmatrix}_{n_c \times n_c} \quad ; \quad E_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n_c \times 1}$$

4.3 Primer identifikacije parametara ARX modela prvog reda

Posmatrajmo jednostavnu relaciju ulaza i izlaza koja je data u formi diferencne jednačine:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-1) + \cdots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \quad (4.2)$$

Kako je $e(t)$ beli šum, ovakav model često se naziva modelom greške jednačine, a vektor podešljivih parametara je

$$\pi = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{n_a} \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n_b}]^T$$

Ako usvojimo

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}$$

$$B(z) = b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}$$

tada jednačinu (4.2) možemo pisati u sledećoj formi

$$A(z)y(t) = B(z)u(t) + e(t) \quad (4.3)$$

Model (6.11) i (4.3) se mogu nazvati i ARX model, gde AR označava autoregresioni deo $A(z)y(t)$, a X spoljni ulaz $B(z)u(t)$. Predikcija izlaza u trenutku t se može predstaviti kao

$$\hat{y}(t|\theta) = [1 - A(z)]y(t) + B(z)u(t)$$

i uvođenjem regresionog vektora koji definišemo kao

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad \dots \quad -y(t-n_a) \quad u(t-1) \quad u(t-2) \quad \dots \quad u(t-n_b)]$$

možemo predikciju predstaviti u formi, koja se naziva linearna regresija:

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi(t)^T \pi$$

Ako pretpostavimo, bez gubitka opštosti, da se radi o modelu prvog reda, tj. $n_a = 1$ i $n_b = 1$, tada je vektor parametara

$$\pi = [a_1 \quad b_1]^T$$

a regresioni vektor je

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \quad u(t-1)]$$

Ako imamo sekvencu merenja dužine K , tada se vektor merenja izlaza Y može prikazati kao

$$Y = \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(1) & u(1) \\ -y(2) & u(2) \\ \vdots & \vdots \\ -y(K-1) & u(K-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = S\pi$$

Primenjujći algoritam najmanjih kvadrata, vektor estimiranih parametara π dat je kao

$$\pi = (S^T S)^{-1} S^T Y$$

Demonstracija identifikacije modela prvog reda data je kroz sledeći primer. U Simulink okruženju, prikazanog na slici 4.11, formiran je model prvog reda u obliku funkcije prenosa $G(s) = \frac{1.5}{s+1}$. Napravljena je simulacija trajanja 100 sekundi, a perioda odabiranja T_s se zadaje unutar programa pisanog u MATLAB kodu, iz koga se i poziva simulacioni model. Za vreme simulacije u radno okruženje (*workspace*) se smeštaju sve potrebne promenljive za kasniju analizu, kao što su vektori ulaza u (pobude), izlaza procesa y , ali i vektor vremena t , šum (*noise*) ...

Motivacija za ovaj primer je bila da se na jednostavan način prikaže formiranje Simulink modela (slika 4.11) koji će generisati podatke za identifikaciju, zatim da se napravi MATLAB kod (listing 4.1) koji će metodom najmanjih kvadrata estimirati parametre usvjenog ARX modela,

i da se izvrši analiza predstavljene metodologije. U okviru MATLAB koda se zadaje perioda odabiranja T_s , i poziva Simulink model. Nakon završetka simulacije se iz *workspace*-a preuzimaju varijablje potrebne za rad, sa izabranom periodom odabiranja. Izbor periode odabiranja biće detaljno razmotren u okviru narednog primera.

Kako bi se izvršila kvalitetna estimacija parametara potrebno je proces (koji je ovde predstavljen funkcijom prvog reda) pobuditi perzistentnom eksitacijom, koja je ovde realizovana kao pseudoslučajna binarna sekvenca nulte srednje vrednosti, koja je prikazana na slici 4.13, na kojoj se vidi pobudni signal, kao i odziv sistema. Pri izboru pobude treba voditi računa da, u okviru sekvence, dužina trajanja impulsa bude takva da postoji dovoljno prelaznih pojava u odzivu, ali i stacionarnih stanja. Ako posmatramo estimaciju parametara modela prvog reda, ugrubo možemo govoriti da, ukoliko odziv procesa procentualno sadrži više stacionarnih vrednosti nego prelaznih pojava, bolje će se izvršiti procena pojačanja. Ako je izlazni signal dominantno prikazan kao niz prelaznih pojava, tada će se bolje procenjivati parametar vezan za vremensku konstantu procesa. U ovom primeru je analiziran slušaj procesa bez šuma, tj. bez poremećaja i mernog šuma.

Nakon izvršene estimacije parametara ARX modela prvog reda, a_1 i b_1 , formiran je model, određeno je pojačanje K , pol p_1 i odgovarajuća vremenska konstanta modela T . Zatim je simuliran dobijeni model koji je pobuđen ulaznom sekvencom, kao i za potrebe identifikacije. Na slici 4.13 prikazan je odziv modela i odziv procesa na pobudu tipa pseudoslučajne binarne sekvence.

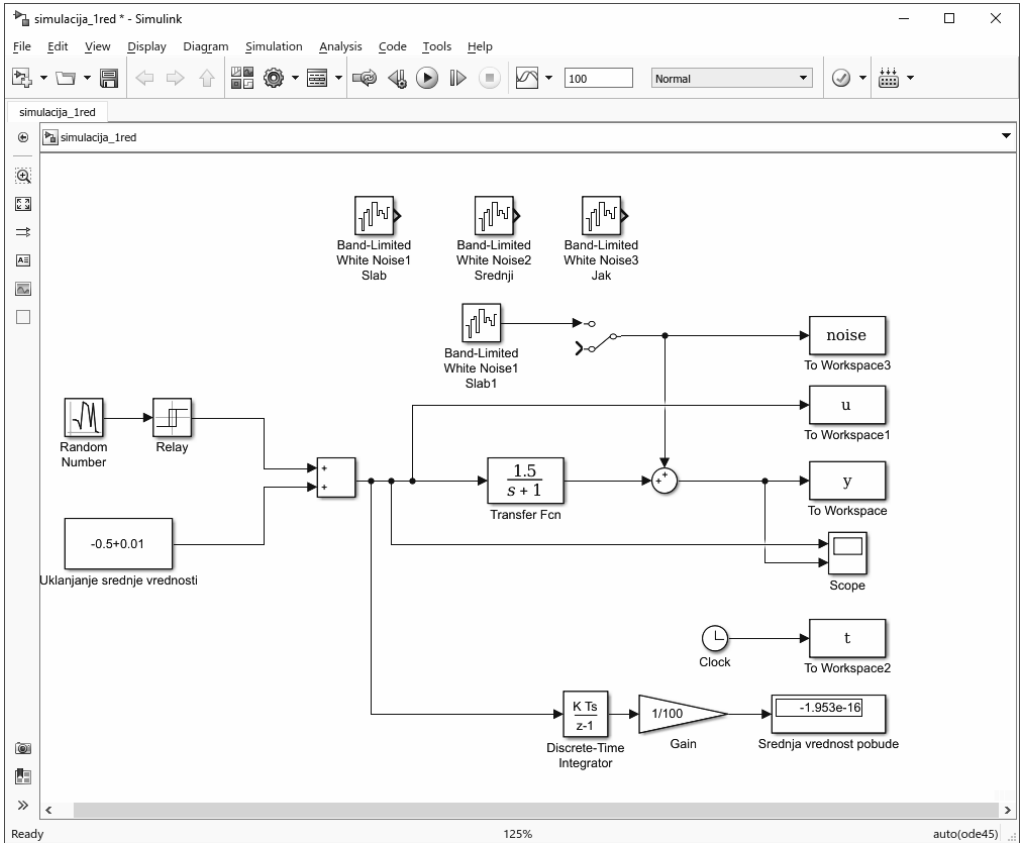
Nakon identifikacije dobijeni su sledeći parametri modela prvog reda, čija je struktura usvojena na početku primera i koja je data jednačinom (4.3) za $n_a = 1$ i $n_b = 1$:

- pojačanje $K = 1.5000$
- pol sistema u diskretnom domenu $p_1 = 0.9048$, perioda odabiranja je $T_s = 0.1$ s
- vremenska konstanta $T = 1.0000$

Ovakvi rezultati, slika 4.13, gde se odziv modela i izlaz procesa idealno poklapaju, kao i da su pojačanje i vremenska konstanta modela identični sa odgovarajućim veličinama pretpostavljene funkcije prenosa modela, pokazuju da se ovakvim modeliranjem dobijaju odlični rezultati. To znači da su polazna pretpostavka oko izbora modela, reda modela i metode estimacije parametara bili opravdani.

Pretpostavimo da je u sistemu pristutan i merni šum, tj. šum na izlazu procesa. To znači da će u okviru Simulink modela biti povezan jedan od blokova *Band-Limited White Noise* u zavisnosti od željenog intenziteta šuma. Varijansa šuma se zadaje parametrom *Noise power* i *Sample time*, jer je varijansa definisana njihovim međusobnim odnosom, tj. $\sigma^2 = \frac{\text{Noise power}}{\text{Sample time}}$. U našem slučaju je perioda odabiranja samog bloka šuma odabrana kao $T_s = 0.01$ s, pa se vrednost varijanse zadaje preko snage šuma.

Izvršene su simulacije sa tri vrednosti intenziteta šuma: slab, umeren i jak, a nakon toga su za sva tri slučaja estimirani parametri već usvojenog modela. Izvršena je validacija dobijenih modela sa istom pobudnom sekvencom, što se može videti na slici 6.4.



Slika 4.11: Simulink model za simulaciju procesa koji je predstavljen funkcijom prenosa prvog reda

Listing 4.1: MATLAB program za identifikaciju modela prvog reda

```

%sample time
Ts=0.1;
sim('simulacija_1red.slx')

% broj odbiraka
K=max(size(y)); r=1:round(K/2);

% prvi red - arx111
%A(z)*Y(z)=B(z)*U(z);
%A(z)=1+a1*z^-1; B(z)=b1*z^-1;
Y=[y(2:K)];
S=[-y(1:K-1) u(1:K-1)];

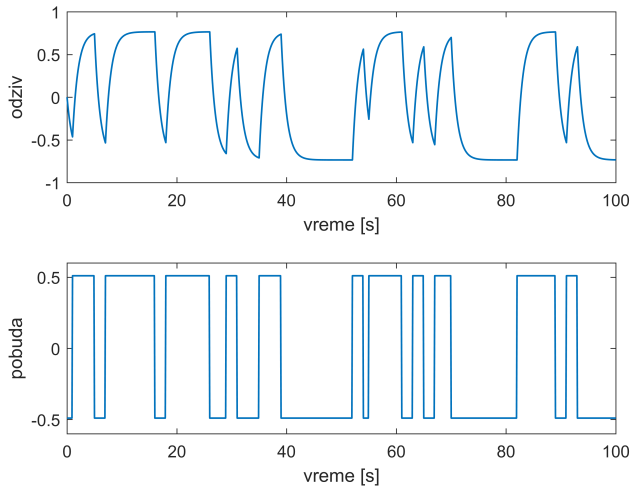
pi=(S'*S)^-1*S'*Y; % pi=[a1; b1]

%      a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + ... + b(nb+1)*x(n-nb)
%                                     - a(2)*y(n-1) - ... - a(na+1)*y(n-na)
Am1=[1 pi(1)]; %Am1=[a(1) a(2)]
Bm1=[0 pi(2)]; %AB1=[b(1) b(2)]
ym1 = filter(Bm1,Am1,u);
k1=(pi(2))/(1+pi(1))
p1=roots(Am1)
T1=-1./((1/Ts)*log(p1))

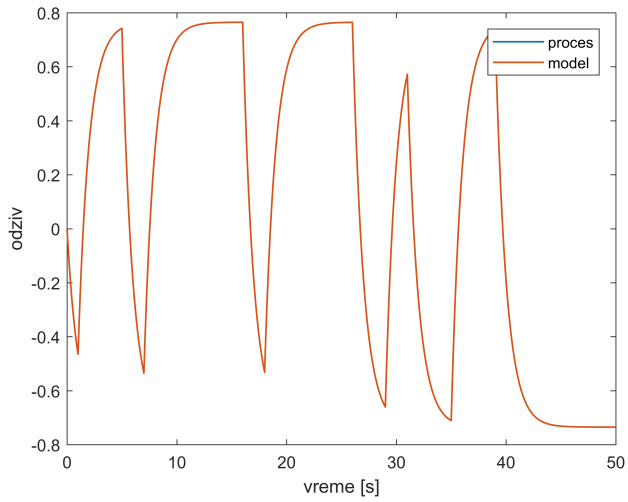
figure(1);
subplot(2,1,1); plot(t,y, 'LineWidth', 1)
xlabel('vreme [s]'); ylabel('odziv');
subplot(2,1,2); plot(t,u, 'LineWidth', 1);
axis([0 Ts*(K-1) -0.6 0.6]); xlabel('vreme [s]'); ylabel('pobuda');

figure(2);
plot(t(r),y(r),t(r),ym1(r), 'LineWidth', 1)
legend('proces', 'model'); axis([0 Ts*(K/2) -1 1]); xlabel('vreme [s]');
ylabel('odziv');

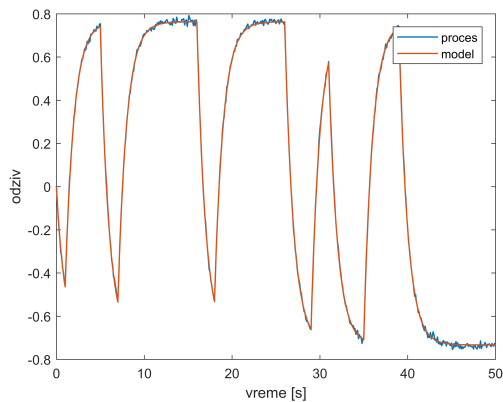
```



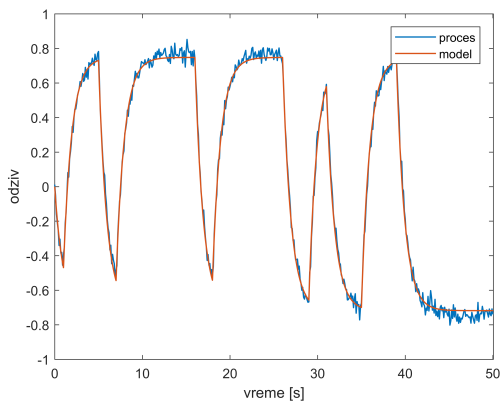
Slika 4.12: Pobuda i odziv procesa bez šuma, koji je dobijem nakon simulacije u Simulink-u



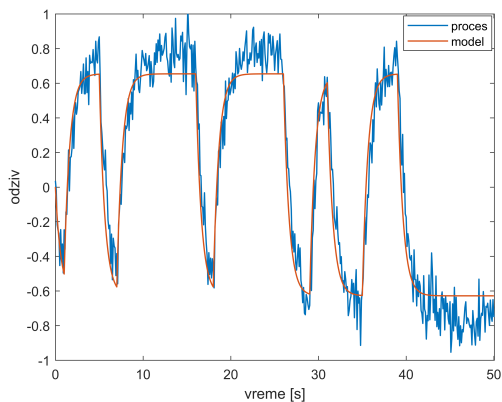
Slika 4.13: Odziv procesa i modela prvog reda na pobudu tipa pseudoslučajne binarne sekvence



(a) Slab šum, $\sigma^2 = 0.0001$



(b) Umeren šum, $\sigma^2 = 0.001$



(c) Jak šum, $\sigma^2 = 0.01$

Slika 4.14: Odziv procesa i modela prvog reda sa različitim vrednostima šuma na izlazu

Kao što se i može pretpostaviti sa povećanjem amplitude šuma, tj. smanjivanjem odnosa korisnog signala i šuma, dobijaju se sve lošije procene parametara modela, a što se najbolje vidi iz tabele 4.1. Za simulaciju bez šuma, $\sigma^2 = 0$, estimirane su tačne vrednosti parametara.

Parametar	Proces	Bez šuma	Slab	Umeren	Jak
σ^2	–	0	0.0001	0.001	0.01
K	1.500	1.500	1.4964	1.4659	1.2819
p	0.9048	0.9048	0.9044	0.8995	0.8515
T	1.0000	1.0000	0.9952	0.9442	0.6223

Tabela 4.1: Parametri modela u zavisnosti od intenziteta mernog šuma: K -pojačanje procesa, p -pol sistema u diskretnom domenu, T -vremenska konstanta

4.4 Primer identifikacije parametara ARX/ARMAX/OE modela prvog, drugog i trećeg reda u prisustvu mernog šuma

U okviru ovog primera biće demonstrirana estimacija parametara ARX modela, prvog, drugog i trećeg reda.

Sada je funkcija prenosa procesa koji se analizira drugog reda i glasi $G(s) = \frac{1.5}{(s+1)^2}$. Realizovana je unutar Simulink okruženja, kao i u prethodnom primeru, sa istom, perzistentnom pobudom, kao što je prikazano na slici (6.1).

U prvom delu biće analizirana estimacija parametara ARX modela prvog, drugog i trećeg reda primenom koda napisanog u MATLAB-u, a u drugom delu će se ista analiza izvršiti primenom `systemIdentification toolbox-a`. Unutar ove analize, spektar modela biće proširen i na ARX, ARMAX i OE modele.

U okviru MATLAB koda koji je dat listingom 4.2, poziva se simulink model kako bi se simulirao proces, a zatim se preko radnog okruženja (*workspace-a*) preuzimaju ulazi i izlazi simuliranog procesa. Vršiti se estimacija parametara modela prvog, drugog i trećeg reda imenovanih kao `arx111`, `arx221` i `arx331` respektivno.

4.4.1 Eksperiment bez mernog šuma

Prvo je vršena simulacija procesa bez mernog šuma, a zatim estimacija parametara modela prvog i drugog reda, a ekvivalentni parametri kao što su pojačanje i vremenske konstante funkcije prenosa u s -domenu dati su u tabeli 4.2. Odzivi procesa i simuliranog modela su prikazani na slici 4.15. Kao što se vidi, u situaciji gde ne postoji aditivni, merni šum na izlazu, model drugog reda idealno se poklapa sa simuliranim procesom drugog reda, kao što je i bilo za očekivati.

Parametar	Proces	Model 1.reda	Model 2.reda
K	1.500	2.0160	1.5000
T	1.0000, 1.0000	3.8271	1.0000, 1.0000

Tabela 4.2: Parametri procesa i modela prvog i drugog reda bez mernog šuma: K -pojačanje procesa, T -vremenska konstanta/ e

4.4.2 Promenljiv šum merenja

U sledećem eksperimentu je u simulaciji procesa uključen merni šum i to sa dva različita intenziteta, a vremenski odzivi procesa i modela prvog, drugog i trećeg reda prikazani su na slici 4.15. Jasno se može uočiti da za niski intenzitet šuma, najbolje rezultate postiže model najvišeg, trećeg, reda, dok za srednji intenzitet šuma, svi modeli daju podjednako loš rezultat. Ovi rezultati se mogu jasnije uočiti pregledom tabela 4.3 i 4.4. U prisustvu šuma, algoritam ne

Listing 4.2: MATLAB program za identifikaciju modela prvog drugog i treceg reda i simulaciju / estimaciju parametara modela funkcije prenosa u s-domenu

```

Ts=0.2;           %sample time
sim('simulacija_2red.slx')

K=max(size(y)); % broj odbiraka
r=round(K/2):K;

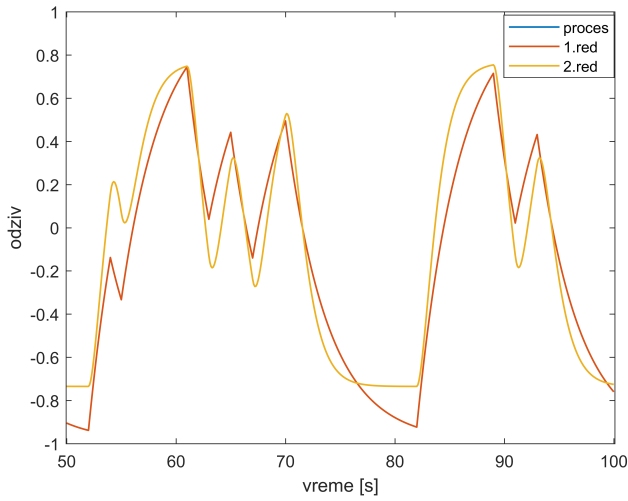
% prvi red: arx111
%A(z)*y(t)=B(z)*u(t)+e(t);
%A(z)=1+a1*z^-1; B(z)=b1*z^-1;
Y=[y(2:K)];
S=[-y(1:K-1) u(1:K-1)];
pi=(S'*S)^-1*S'*Y;
% a(1)*y(n) = b(1)*x(n) + b(2)*x(n-1) + ... + b(nb+1)*x(n-nb)
% - a(2)*y(n-1) - ... - a(na+1)*y(n-na)
Am1=[1 pi(1)]; Bm1=[0 pi(2)];
ym1 = filter(Bm1,Am1,u);
k1=(pi(2))/(1+pi(1))
p1=roots(Am1);
t1=real(-1./((1/Ts)*log(p1)))

% Drugi red: arx221
% A(z)*y(t)=B(z)*u(t)+e(t);
% A(z)=1+a1*z^-1+a2*z^-2; B(z)=b1*z^-1+b2*z^-2;
Y=[y(3:K)];
S=[-y(2:K-1) -y(1:K-2) u(2:K-1) u(1:K-2)];
pi=(S'*S)^-1*S'*Y;
Am2=[1 pi(1) pi(2)];
Bm2=[0 pi(3) pi(4)];
ym2 = filter(Bm2,Am2,u);
k2=(pi(3)+pi(4))/(1+pi(1)+pi(2))
p2=roots(Am2);
t2=real(-1./((1/Ts)*log(p2)))

% Model treceg reda: arx331
% A(z)*y(t)=B(z)*u(t)+e(t);
% A(z)=1+a1*z^-1+a2*z^-2+b3*z^-3; B(z)=b1*z^-1+b2*z^-2+b3*z^-3;
Y=[y(4:K)];
S=[-y(3:K-1) -y(2:K-2) -y(1:K-3) u(3:K-1) u(2:K-2) u(1:K-3)];
pi=(S'*S)^-1*S'*Y;
Am3=[1 pi(1) pi(2) pi(3)];
Bm3=[0 pi(4) pi(5) pi(6)];
ym3 = filter(Bm3,Am3,u);
k3=(pi(4)+pi(5)+pi(6))/(1+pi(1)+pi(2)+pi(3))
p3=roots(Am3);
t3=real(-1./((1/Ts)*log(p3)))

figure(1);
plot(t(r),y(r),t(r),ym1(r),t(r),ym2(r),t(r),ym3(r), 'LineWidth', 1)
legend('proces', '1.red', '2.red', '3.red')
axis([Ts*(K/2-1) Ts*K -1 1]) %axis([0 Ts*(K/2) -1 1])
xlabel('vreme [s]'); ylabel('odziv');

```



Slika 4.15: Odziv procesa i ARX modela prvog i drugog reda bez mernog šuma

može da identifikuje dva pola sa istim vremenskim konstantama, nego se dominantno određuje jedan pol koji je dominantan i jedan ili dva pola koji su značajno manjih vremenskih konstanti.

Parametar	Proces	Model 1.reda	Model 2.reda	Model 3.reda
K	1.500	1.9899	1.8257	1.6733
T	1.0000, 1.0000	3.7690	3.0665, 0.0635	0.0047, 2.3755, 0.2118

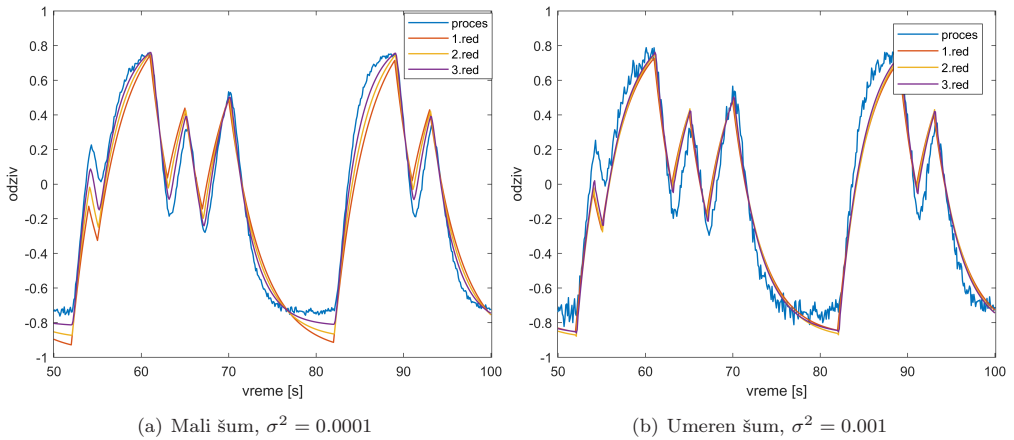
Tabela 4.3: Parametri procesa i modela prvog, drugog i trećeg reda sa slabim mernim šumom, $\sigma^2 = 0.0001$: K -pojačanje procesa, T -vremenska konstanta/ e

Parametar	Proces	Model 1.reda	Model 2.reda	Model 3.reda
K	1.500	1.7949	1.8298	1.7752
T	1.0000, 1.0000	3.2770	3.2093, 0.0091	2.9341, 0.0165, 0.0165

Tabela 4.4: Parametri procesa i modela prvog, drugog i trećeg reda sa umerenim mernim šumom, $\sigma^2 = 0.001$: K -pojačanje procesa, T -vremenska konstanta/ e

4.4.3 Promenljiva perioda odabiranja

U sledećem primeru proces je drugog reda, merni šum na izlazu je umerenog intenziteta, a za potrebe estimacije parametara, vršena je promena periode odabiranja i to $T_s = 0.1$ s, $T_s = 0.2$ s i

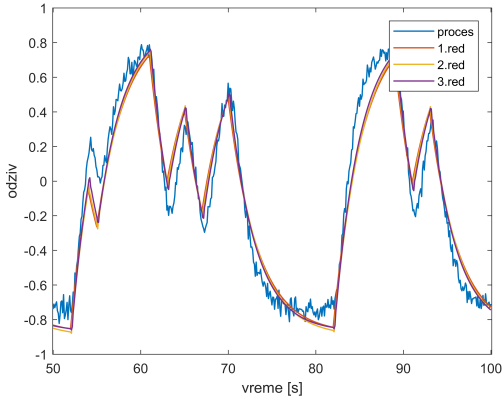


Slika 4.16: Odziv procesa i modela prvog, drugog i trećeg reda sa različitim vrednostima šuma na izlazu, perioda odabiranja $T_s = 0.1$ s

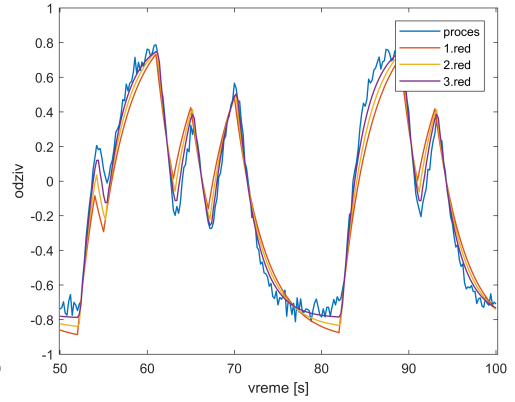
$T_s = 0.5$ s. U ovom primeru, za razumno velike periode odabiranja do 0.5 sekundi, bolji rezultati se postižu za veće periode odabiranja, što se vidi na slici 4.17. Estimirane vrednosti parametara dati su u tabeli 4.5. Ovo je moguće objasniti na taj način što se bolje vidi priraštaj odziva za veće vremenske intervale, zbog prisustva šuma. Naravno da nije moguće povećavati periodu odabiranja i na taj način dobijati sve bolje rezultate, jer u jednom trenutku teorema odabiranja više ne bi bila zadovoljena.

Parametar	Proces	Model 1.reda	Model 2.reda	Model 3.reda
$T_s = 0.1$ s				
K	1.500	1.7949	1.8298	1.7752
T	1.0000, 1.0000	3.2770	3.2093, 0.0091	2.9341, 0.0165, 0.0165
$T_s = 0.2$ s				
K	1.500	1.8803	1.7420	1.6156
T	1.0000, 1.0000	3.5089	2.8198, 0.0309	0.0114, 2.2005, 0.1837
$T_s = 0.5$ s				
K	1.500	1.8422	1.5834	1.5224
T	1.0000, 1.0000	3.3699	2.0242, 0.2358	0.0171, 1.4856, 0.5706

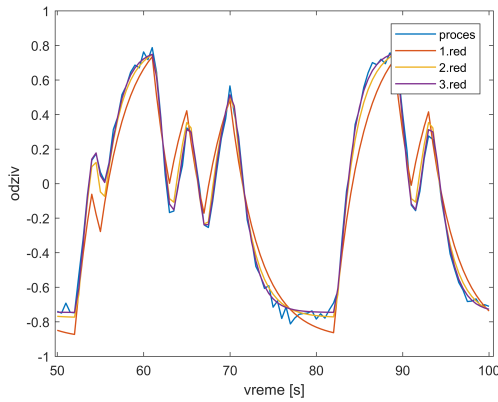
Tabela 4.5: Parametri procesa i modela prvog, drugog i trećeg reda sa umerenim mernim šumom, $\sigma^2 = 0.001$: K -pojačanje procesa, T -vremenska konstanta/ e



(a) Perioda odabiranja $T_s = 0.1$ s



(b) Perioda odabiranja $T_s = 0.2$ s



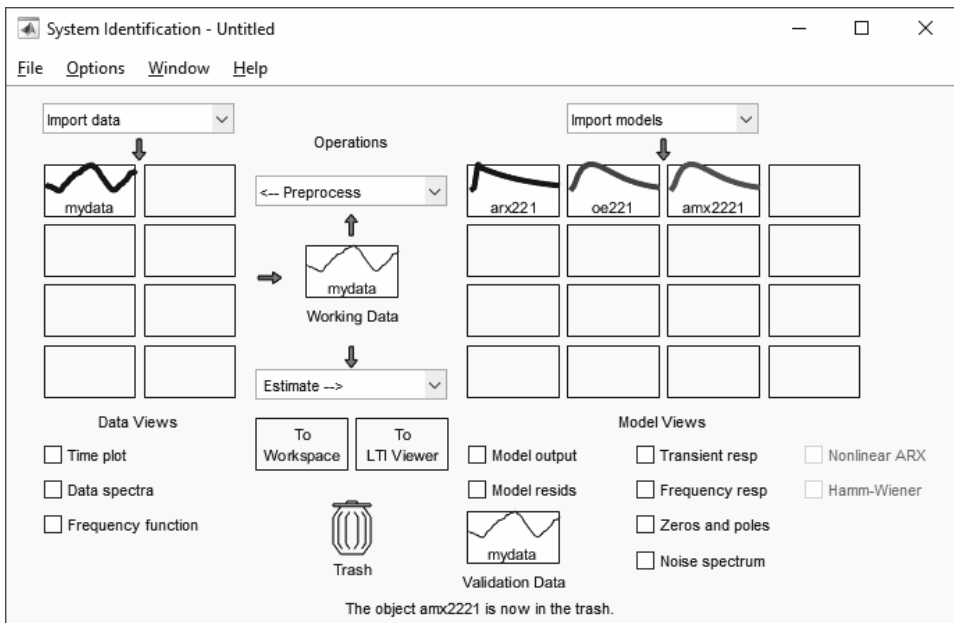
(c) Perioda odabiranja $T_s = 0.5$ s

Slika 4.17: Odziv procesa i modela prvog, drugog i trećeg reda, za estimaciju parametara sa različitim periodama odabiranja i umeren merni šum, $\sigma^2 = 0.001$

4.4.4 Primena *MATLAB systemIdentification toolbox-a*

U sledećem primeru, izvršena je demonstracija primene *MATLAB systemIdentification toolbox-a* koji služi za brzu i efikasnu primenu velikog broja algoritama, nad podacima koji mogu biti sintetički, ali i iz industrijske prakse. Za potrebe ovog primera, upotrebom navedenog paketa izvršeno je poređenje ARX, ARMAX i OE modela drugog reda, a podaci su sa procesa drugog reda i umerenim mernim šumom, prikazanim u prethodnom primeru.

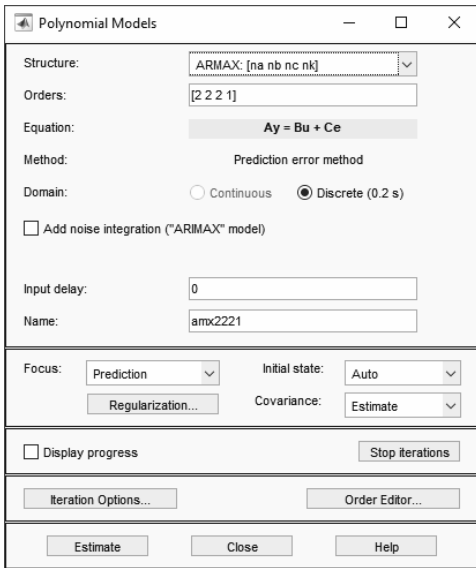
Kako bi se izvršila pravilna estimacija parametara potrebno je obaviti nekoliko koraka unutar samog paketa, a to je: učitavanje podataka, njihova predobrada (uklanjanje srednje vrednosti, trenda, filtriranje...), odabir metode identifikacije i parametrizacija metode. Na kraju dolazi se do validacije i analize dobijenog modela. Radno okruženje ovog paketa prikazano je na slici 4.18. Sama parametrizacija ARMAX i OE modela prikazana je na slici , konkretno za modele drugog reda.



Slika 4.18: *System Identification Toolbox*: identifikacija i analiza ARX, ARMAX i OE modela drugog reda

Za modele ARX, ARMAX, i OE koji su dati kao

- ARX: $A(z)y(t) = B(z)u(t \sim n_k) + e(t)$
- ARMAX: $A(z)y(t) = B(z)u(t \sim n_k) + C(z)e(t)$



(a) Konfigurisanje i parametri ARMAX modela



(b) Konfigurisanje i parametri OE modela

Slika 4.19: *System Identification Toolbox*: konfigurisanje ARMAX i OE modela drugog reda

- OE: $y(t) = \frac{B(z)}{F(z)}u(t - n_k) + e(t)$

gde su definisani polinomi:

$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a}$$

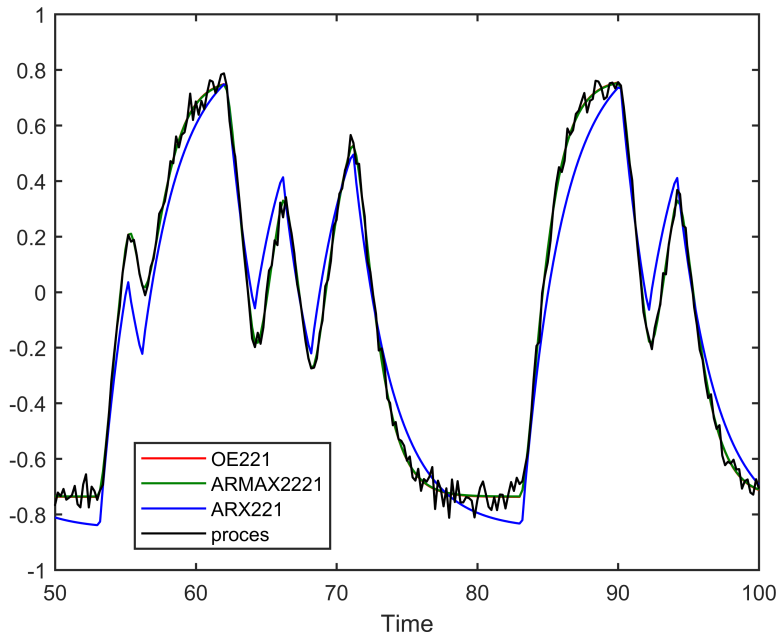
$$B(z) = b_1 + b_2z^{-1} + b_3z^{-2} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b-1}$$

$$C(z) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{n_c}z^{-n_c}$$

$$F(z) = 1 + f_1z^{-1} + f_2z^{-2} + \dots + f_{n_f}z^{-n_f}$$

izvršena je analiza za model drugog reda, primenom navedenog paketa.

Odziv u vremenskom domenu prikazan je na slici 4.20. Primenom ovog paketa dobijaju se isti rezultati za ARX model kao u prithodnim analizama, dok se upotrebom ARMAX i OE modela dobijaju značajno bolji rezultati. *System Identification Toolbox* predstavlja moćno oružje za modeliranje procesa u smislu analize, ali i još moćniji alat za identifikaciju procesa. Ovo važi ne samo za merenja dobijena simulacijom, nego i merenja iz tipične industrijske prakse.



Slika 4.20: Odziv procesa ARX, ARMAX i OE modela drugog reda, dobijenih upotrebom *System Identification Toolbox*-a

Analiza algoritma najmanjih kvadrata: konvergencija i konzistencija procena parametara

5.1 Linearni algoritam najmanjih kvadrata (LLS)

Pretpostavimo da se realan sistem može egzaktno opisati linearnim diskretnim vremenski-invarijantnim modelom, koji je opisan jednačinom linearne regresije

$$y(k) = \varphi^T(k) \theta_0 + v_0(k)$$

gde je θ_0 tačan vektor parametara, $y(k)$ izlazni signal u k -tom diskretnom trenutku, $v_0(k)$ realizacija aditivnog šuma na izlazu u k -tom diskretnom trenutku, a $\varphi(k)$ je regresioni vektor koji sadrži zakašnjene izlaze i ulaze (ARX reprezentacija modela) ili samo zakašnjene ulazne signale (FIR struktura modela). Tada linearni metod najmanjih kvadrata LLS (eng. *Linear Least Squares*) daje sledeću procenu $\hat{\theta}_N$ nepoznatog vektora θ_0 na bazi skupa ulazno-izlaznih podataka

$$\{u(k), y(k), k = 1, \dots, N\} = \{u(k), y(k)\}_N$$

$$\hat{\theta}_N = \left(\frac{1}{N} \phi^T \phi \right)^{-1} \frac{1}{N} \phi^T Y$$

gde je kovarijaciona matrica regresionog vektora dimenzije $p \times 1$

$$R_\varphi^p(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) = [\varphi(1) \cdots \varphi(N)] \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix} = \phi^T \phi$$

dok je vektor

$$\frac{1}{N} \phi^T Y = \frac{1}{N} [\varphi(1) \cdots \varphi(N)] \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k)$$

Na taj način, LLS procena $\hat{\theta}_N$ vektora parametara θ_0 postaje

$$\hat{\theta}_N = [R_\varphi^p(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k)$$

odakle se, nakon zamene izraza za $y(k)$, dobija

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_N &= [R_\varphi^p(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) [\varphi^T(k) \theta_0 + v_0(k)] \\ &= [R_\varphi^p(N)]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right] \theta_0 + [R_\varphi^p(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) v_0(k) \\ &= [R_\varphi^p(N)]^{-1} R_\varphi^p(N) \theta_0 + [R_\varphi^p(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) v_0(k) \\ &= \theta_0 + [R_\varphi^p(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) v_0(k) \end{aligned}$$

Željene osobine procene $\hat{\theta}_N$ su sledeće:

- Da je $\hat{\theta}_N$ blisko tačnom θ_0 , odnosno da $\hat{\theta}_N$ konvergira nekom fiksnom vektoru.
- Da $\hat{\theta}_N$ konvergira ka θ_0 kada broj podataka N neograničeno raste ($N \rightarrow \infty$), odnosno da je procena $\hat{\theta}_N$ konzistentna.

Primetimo prvo da će član

$$[R_\varphi^p(N)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) v_0(k)$$

koji definiše grešku ili odstupanje procene $\hat{\theta}_N$ od tačne vrednosti θ_0 i naziva se pomeraj procene, biti mali ukoliko je $v_0(k)$ malo u poređenju sa $\varphi(k)$, tako da će pod navedenim uslovima $\hat{\theta}_N$ biti blisko θ_0 .

Da bismo ispitali šta se dešava sa procenom $\hat{\theta}_N$ kada N neograničeno raste, tj. asimptotske osobine procene uobičajeno je da se $v_0(k)$ posmatra kao realizacija široko (slabo) stacionarnog slučajnog procesa, a da se regresioni vektor $\varphi(k)$ pripiše ARX ili FIR strukturi modela. Ako se dalje pretpostavi da je pobudni signal $u(k)$ kvazi-stacionaran, tada će s obzirom da je sistem vremenski-invarijantan i stabilan i izlazni signal $y(k)$ biti kvazi-stacionaran, tako da će procene auto- i kros-kovarijacionih funkcija, koje predstavljaju elemente kovarijacione matrice $R_\varphi^p(N)$, konvergirati u određenom smislu (sa verovatnoćom 1) sa porastom broja podataka N ka njihovim tačnim vrednostima, odnosno

$$\hat{R}_u^N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k) u(k-\tau) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R_u(\tau) = \bar{E} \{u(k) u(k-\tau)\}$$

$$\hat{R}_y(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) y(k-\tau) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R_y(\tau) = \bar{E} \{y(k) y(k-\tau)\}$$

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) u(k-\tau) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R_{yu}(\tau) = \bar{E} \{y(k) u(k-\tau)\}$$

gde je $\bar{E}\{\cdot\}$ operator generalisanog matematičkog očekivanja. Na taj način, i sama procena kovarijacione matrice regresionog vektora na bazi N polazno-ulaznih podataka $R_\varphi^p(N)$ konvergiće (sa verovatnoćom 1) ka konstantnoj matrici R^* , tj.

$$R_\varphi^p(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R^* = \bar{E} \{\varphi(k) \varphi^T(k)\}$$

Analogno se može zaključiti da će i član koji definiše pomeraj LLS procena konvergirati ka fiksnom vektoru, tj.

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) v_0(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} h^* = \bar{E} \{\varphi(k) v_0(k)\}$$

Uzimajući u obzir poslednje dve relacije, dalje se zaključuje da LLS procena $\hat{\theta}_N$ konvergira kada $N \rightarrow \infty$ (asimptotski) ka fiksnoj vrednosti, odnosno

$$\hat{\theta}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \theta_0 + (R^*)^{-1} h^*$$

pretpostavljajući da je R^* regularna matrica. Dobijeni rezultat ukazuje da će procena $\hat{\theta}_N$ konvergirati ka θ_0 , tj. da će biti konzistentna, pod sledećim uslovima:

1. $\hat{R}_\varphi^p(N)$, odnosno R^* , je regularna matrica, što će biti ispunjeno ukoliko je pobudni signal $u(k)$ perzistentne eksitacije reda p (p je dimenzija vektora parametara koji se procenjuje).
2. $h^* = \bar{E} \{\varphi(k) v_0(k)\} = 0$, što će biti ispunjeno u bilo kome od sledeća dva slučaja:

- (a) $v_0(k)$ je beli šum nulte srednje vrednosti $\bar{E}\{v_0(k)\} = 0$; u navedenom slučaju realizacija u k -tom diskretnom trenutku ne zavisi od toga šta se dogodilo do trenutka $(k-1)$, pri čemu regresioni vektor

$$\varphi^T(k) = \{-y(k-1) \cdots -y(k-n_a) \ u(k-1) \cdots u(k-n_b)\}$$

sadrži samo ulazno-izlazne signale do trenutka $(k-1)$, tako da se može pisati

$$\bar{E}\{\varphi(k)v_0(k)\} = \bar{E}\{\varphi(k)\}\bar{E}\{v_0(k)\} = 0$$

- (b) Istovremeno su ispunjene sledeće tri pretpostavke:
- i. pobudni signal $u(k)$ je nezavisan od šuma $v_0(k)$;
 - ii. bar jedan od signala $u(k)$ i $v_0(k)$ ima nultu srednju vrednost;
 - iii. $n_a = 0$, odnosno $\varphi(k)$ sadrži samo odbirke pobude $u(i)$, $k-1 \leq i \leq k-n_b$, $p = n_b$, što odgovara FIR strukturi modela.

Ukoliko je $n_a > 0$, a $v_0(k)$ nije beli šum, tada regresioni vektor $\varphi(k)$ sadrži i zakašnjene odbirke izlaza $y(i)$, $k-1 \leq i \leq k-n_a$, pa pošto $y(i)$ sadrži $v_0(i)$, koje je korelisano sa $v_0(k)$, to će u opštem slučaju važiti $\bar{E}\{\varphi(k)v_0(k)\} \neq 0$, odnosno $\hat{\theta}_N$ neće asimptotski konvergirati ($N \rightarrow \infty$) ka θ_0 , te procena LLS neće biti asimptotski konzistentna. Dakle, jedino u slučajevima (1), (2a) i (1), (2b) može se očekivati asimptotski konzistentna LLS procena vektora parametara.

Uz navedeno, u slučaju (1), (2a) može se takođe dokazati da greška procene konvergira po raspodeli ka normalnoj (gausovskoj) raspodeli nulte srednje vrednosti i matrice kovarijanse $\sigma_0^2 (R^*)^{-1}$, gde je σ_0^2 varijansa belog šuma $v_0(k)$, odnosno

$$\sqrt{N} \left(\hat{\theta}_N - \theta_0 \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N \left(0, \sigma_0^2 (R^*)^{-1} \right)$$

Na taj način, zadatak planiranja eksperimenta, odnosno selekcije pobudnog signala, svodi se na zadatak da se R^* učini što je moguće većim pod zadatim realnim ograničenjima koja se postavljaju na sistem.

Teorija statističkog odlučivanja, kao i identifikacije sistema i estimacije parametara, bavi se problemom izdvajanja informacije iz merenja (opservacija), koja sama po sebi mogu biti nepouzdana usled prisustva mernog šuma. Stoga se opservacije posmatraju kao slučajne varijable. U navedenom kontekstu pretpostavimo da su ulazno-izlazne opservacije $\{u(i), y(i), i = 1, \dots, N\} = \{u(i), y(i)\}_N$ predstavljene multidimenzionom slučajnom varijablom, odnosno slučajnim vektorom, $z_N = \{z(1), \dots, z(N)\}$ čije komponente $z(i) = \{u(i), y(i)\}$, $i = 1, \dots, N$ uzimaju vrednosti iz realnog skupa brojeva R^{2N} . Pretpostavimo, takođe, da postoji združena (zajednička) funkcija gustine verovatnoće slučajnih varijabli $z(i)$, $i = 1, \dots, N$

$$f(z_1, z_2, \dots, z_N; \theta) = f_z(z^N; \theta)$$

tako da je verovatnoća događanja $\{z^N \in A\}$ da realizacija slučajnog vektora z^N pripada nekom skupu (podprostoru) A skupa (N -dimenzionog Euklidovog prostora) R^{2N} data sa

$$P(z^N \in A) = \int_{z^N \in A} f_z(z^N; \theta) dz^N$$

U navedenim relacijama θ predstavlja p -dimenzioni vektor koji opisuje osobine razmatranih slučajnih varijabli. Pretpostavljajući da su izabrane slučajne varijable kao komponente slučajnog vektora merljive, cilj merenja ovih varijabli je da se estimira (proceni) vektor θ na bazi raspoložive informacije koja je dostupna kroz merenja. Ovaj zadatak se ostvaruje kroz estimator

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}(z^N)$$

koji na bazi izmerenih komponenti $N \times 1$ vektora z^N proračunava (procenjuje) vrednost $\hat{\theta}_N$ nepoznatog $p \times 1$ vektora parametara θ , odnosno predstavlja funkciju ili preslikavanje iz skupa realnih brojeva R^{2N} na skup realnih brojeva R^p . Na taj način, ako je izmereni vektor z^N označen sa z_N^* , tada je rezultujuća procena $\hat{\theta}_N$ data sa $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(z_N^*)$. Očigledno je da postoji vrlo veliki broj funkcija ili preslikavanja navedenog tipa koje se mogu uzeti za estimacioni algoritam, pri čemu se kao prirodni kriterijum za ocenu kvaliteta estimacije uzima matrica kovarijanse greške estimacije

$$P = E \left\{ \left[\hat{\theta}(z^N) - \theta_0 \right] \left[\hat{\theta}(z^N) - \theta_0 \right]^T \right\} = E \left\{ \tilde{\theta}_N \tilde{\theta}_N^T \right\}$$

gde $E \{ \cdot \}$ označava matematičko očekivanje, a $\tilde{\theta}_N = \hat{\theta}(z^N) - \theta_0 = \hat{\theta}_N - \theta_0$ je vektor grešaka estimacija, čije komponente predstavljaju greške estimacije pojedinih komponenti vektora parametara θ , čija je tačna vrednost označena sa θ_0 . Pošto dijagonalni elementi matrice P predstavljaju varijanse grešaka estimacija pojedinih komponenti vektora parametara, to je ukupna (totalna) greška estimacije definisana sa tragom matrice P (predstavlja sumu dijagonalnih elemenata ove matrice)

$$\text{Trag } P = \text{Trag } E \left\{ \tilde{\theta}_N \tilde{\theta}_N^T \right\} = \tilde{\theta}_N^T \tilde{\theta}_N; \quad \tilde{\theta}_N = \hat{\theta}_N - \theta_0.$$

Cramer-Rao-va teorema (nejednakost) određuje donju granicu matrice P za sve estimatore koji zadovoljavaju uslov nepomerivosti procene (eng. unbiased estimates)

$$E \left\{ \hat{\theta}_N \right\} = \theta_0; \quad E \left\{ \tilde{\theta}_N \right\} = 0$$

i opisana je matematički sa relacijom

$$P = E \left\{ \left[\hat{\theta}_N - \theta_0 \right] \left[\hat{\theta}_N - \theta_0 \right]^T \right\} = E \left\{ \tilde{\theta}_N \tilde{\theta}_N^T \right\} \geq L^{-1}$$

gde je *Cramer-Rao*-va donja međa

$$L = E \left\{ \left[\frac{d}{d\theta} \log f_z(z^N; \theta) \right] \left[\frac{d}{d\theta} \log f_z(z^N; \theta) \right]^T \right\} \Bigg|_{\theta=\theta_0} = -E \left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} \log f_z(z^N; \theta) \right\} \Bigg|_{\theta=\theta_0}$$

pretpostavljajući da funkcija gustine verovatnoće $f_z(z^N; \theta_0)$ postoji za bilo koje θ_0 , kao i da z_N uzima vrednosti iz nekog podskupa skupa realnih brojeva R^N čije granice ne zavise od θ . Pošto je θ vektor kolona dimenzije $p \times 1$, to je gradijent $\left(\frac{d}{d\theta} \right) \log f_z(z^N; \theta)$ skalarne funkcije $\log f_z(z_N; \theta)$ $p \times 1$ dimenzioni vektor kolona, dok je Hessian $\left(\frac{d^2}{d\theta^2} \right) \log f_z(z^N; \theta)$ matrica dimenzije $p \times p$. Matrica L

naziva se Fisherova informacijska matrica. Pošto određivanje ove matrice zahteva tačnu vrednost θ_0 nepoznatog vektora parametara θ , to u praksi ova matrica obično nije poznata. Estimator koji dostiže *Cramer-Rao*-vu donju među L^{-1} je optimalan estimator, u smislu minimalno moguće ukupne (totalne) varijanse greške estimacije.

Izvedimo sada izraz za matricu P za razmatrani slučaj modela linearne regresije

$$y(k) = \varphi^T(k) \theta_0 + v_0(k), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

koji se može napisati u vektorsko-matričnom obliku

$$Y = \phi \theta_0 + V_0$$

gde je

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}; \quad \phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}; \quad V_0 = \begin{bmatrix} v_0(1) \\ \vdots \\ v_0(N) \end{bmatrix}$$

pri čemu je, kao što je ranije pokazano, linearni estimator najmanjih kvadrata LLS definisan sa

$$\hat{\theta}_N = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T (\phi \theta_0 + V_0) = (\phi^T \phi)^{-1} (\phi^T \phi) \theta_0 + (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T V_0$$

odnosno

$$\hat{\theta}_N = \theta_0 + (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T V_0$$

gde je kovarijaciona matrica regresionog vektora φ

$$R_\varphi^p(N) = \phi^T \phi$$

Pretpostavljajući dalje da su ispunjene pretpostavke (1) i (2), odnosno da je R_φ^p regularna matrica dok je V_0 slučajni vektor čije su komponente $v_0(k)$, $k = 1, \dots, N$ realizacije belog šuma nulte srednje vrednosti koje su nekorelisane sa komponentama regresionog vektora $\varphi(k)$, $k = 1, \dots, N$, koji sadrži zakašnjene ulazno-izlazne signale $u(i)$, $k-1 \leq i \leq k-n_b$ i $y(j)$, $k-1 \leq j \leq k-n_a$. Tada se može pisati

$$\bar{E} \{ \hat{\theta}_N \} = \theta_0 + \bar{E} \{ (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T V_0 \} = \theta_0 + \bar{E} \{ (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \} \bar{E} \{ V_0 \}$$

ili pošto je $\bar{E} \{ V_0 \} = 0$

$$\bar{E} \{ \hat{\theta}_N \} = \theta_0$$

odakle se zaključuje da je LLS procena nepomerena (srednja vrednost procene jednaka je tačnoj vrednosti vektora parametara). Dalje je greška estimacije

$$\tilde{\theta}_N = \hat{\theta}_N - \theta_0 = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T V_0 = (R_\varphi^p)^{-1} \phi^T V_0$$

pa je matrica kovarijanse greške estimacije

$$P_N = \bar{E} \{ \tilde{\theta}_N - \tilde{\theta}_N^T \} = \bar{E} \{ (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T V_0 V_0^T \phi (\phi^T \phi)^{-1} \}$$

Ukoliko su ispunjene pretpostavke (1) i (2) dalje se može pisati, pošto je regresioni vektor nezavisan od šuma

$$P_{N|N-1} = \bar{E} \left\{ \hat{\theta}_N \hat{\theta}_N^T \mid z_{N-1} \right\} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \bar{E} \left\{ V_0 V_0^T \mid z_{N-1} \right\} \phi (\phi^T \phi)^{-1}$$

gde je kovarijaciona matrica šuma

$$R_0 = \bar{E} \left\{ v_0 v_0^T \right\} = \bar{E} \left\{ \begin{bmatrix} v_0(1) \\ \vdots \\ v_0(N) \end{bmatrix} [v_0(1) \dots v_0(N)] \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{E} \{v_0^2(1)\} & \bar{E} \{v_0(1)v_0(2)\} & \dots & \bar{E} \{v_0(1)v_0(N)\} \\ \bar{E} \{v_0(2)v_0(1)\} & \bar{E} \{v_0^2(2)\} & \dots & \bar{E} \{v_0(2)v_0(N)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{E} \{v_0(N)v_0(1)\} & \bar{E} \{v_0(N)v_0(2)\} & \dots & \bar{E} \{v_0^2(N)\} \end{bmatrix}$$

Pošto je $v_0(k)$ realizacija belog šuma nulte srednje vrednosti, to je

$$P_{N/N-1} = \sigma_0^2 (\phi^T \phi)^{-1} = \sigma_0^2 [R_\varphi^p(N)]^{-1}; \quad \bar{E} \{v_0^2(i)\} = \sigma_0^2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

gde je pretpostavljeno da sve realizacije belog šuma $v_0(k)$ imaju identičnu funkciju raspodele sa istom varijansom, tako da se može pisati

$$R_0 = \sigma_0^2 I_N$$

pri čemu je I_N jedinična matrica dimenzija $N \times N$. Na taj način se dobija

$$P_N = \sigma_0^2 \bar{E} \left\{ (\phi^T \phi)^{-1} \right\} = \sigma_0^2 [R_\varphi^p(N)]^{-1}$$

Prethodno je takođe napomenuto da asimptotski, kada $N \rightarrow \infty$,

$$R_\varphi^p(N) = \bar{E} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R^*$$

gde je R^* konstantna matrica, tako da važi

$$P_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P = \sigma_0^2 (R^*)^{-1}.$$

Izvedena relacija takođe omogućava da se proceni nepoznata varijansa šuma σ_0^2 na bazi reziduala ili greške merenja

$$E_N = Y - \hat{Y}_N = Y - \phi \hat{\theta}_N$$

gde je Y stvarni vektor merenja čije su komponente merenja izlaza $y(i)$, $i = 1, \dots, N$, dok je \hat{Y}_N predikcija ovog vektora na bazi izračunate procene $\hat{\theta}_N$ nepoznatog vektora parametara θ_0 ,

koristeći raspoloživa merenja ulaza i izlaza $z^N = \{z(i), i = 1, \dots, N\}$, $z(i) = \{u(i), y(i)\}$. Polazeći od prethodno izvedenih relacija dalje se može pisati

$$E_N = \phi\theta_0 + V_0 - \phi \left[\theta_0 + (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T V_0 \right] = V_0 - \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T V_0 = \left[I - \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \right] V_0 = M V_0$$

gde je matrica

$$M = I - \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T$$

Lako se pokazuje da je matrica M idempotentna, tj. da ispunjava uslove

$$M = M^T; \quad M = M^2.$$

Zaista,

$$\begin{aligned} M^T &= \left[I - \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \right]^T = I - \left[\phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \right]^T = I - (\phi^T)^T \left[(\phi^T \phi)^{-1} \right]^T \phi^T \\ &= I - \phi \left[(\phi^T \phi)^T \right]^{-1} \phi^T = I - \phi \left[\phi^T (\phi^T)^T \right]^{-1} \phi^T = I - \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T = M \end{aligned}$$

dok je

$$\begin{aligned} M^2 &= M M = \left[I - \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \right] \left[I - \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \right] \\ &= I - \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T - \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T + \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \\ &= I - \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T = M \end{aligned}$$

Na taj način se dobija

$$E_N^T E_N = (M V_0)^T (M V_0) = V_0^T M^T M V_0 = V_0^T M^2 V_0 = V_0^T M V_0$$

Imajući u vidu dobro poznate rezultate iz linearne algebre, koji se odnose na Trag matrice, a na osnovu kojih je

$$\text{Trag}(B a a^T) = a^T B a$$

gde je a vektor kolona, a^T vektor vrste, a B matrica odgovarajućih dimenzija, kao i da je

$$\text{Trag}(cA) = c \text{Trag}(A)$$

$$\text{Trag}(A + B) = \text{Trag}(A) + \text{Trag}(B)$$

$$\text{Trag}(AB) = \text{Trag}(BA)$$

gde je c skalarna konstanta, a A i B matrice odgovarajućih dimenzija, dalje sledi

$$E_N^T E_N = \text{Trag}(M V_0 V_0^T)$$

Primenjujući na poslednji izraz operator generalisanog matematičkog očekivanja $\bar{E}\{\cdot\}$ u odnosu na slučajne varijable dalje se može pisati

$$\bar{E}\{E_N^T E_N\} = \bar{E}\{\text{Trag}(M V_0 V_0^T)\} = \text{Trag}(\bar{E}\{M V_0 V_0^T\})$$

Ako su ispunjene pretpostavke (2) i V_0 je nezavisno od M tada važi

$$\bar{E} \{MV_0V_0^T\} = \bar{E} \{M\bar{E} \{V_0V_0^T\}\}$$

a kako je V_0 vektor čiji su elementi realizacije belog šuma $v_0(k)$ koje nisu korelisane u vremenu, to je

$$\bar{E} \{V_0V_0^T\} = R_0 = \sigma_0^2 I_N$$

odakle se zaključuje

$$\{\bar{E} \{MV_0V_0^T\} = \bar{E} \{MR_0\}\} = MR_0 = \sigma_0^2 M$$

Prilikom izvođenja poslednjeg izraza očekivanje $\bar{E} \{M\}$ je aproksimirano sa jednom realizacijom M . Na taj način se dobija

$$\bar{E} \{E_N E_N^T\} = \sigma_0^2 \text{Trag}(M) = \sigma_0^2 \text{Trag} [I_N - \phi(\phi^T \phi)^{-1} \phi^T] = \sigma_0^2 \text{Trag}(I_N) - \sigma_0^2 \text{Trag} [\phi(\phi^T \phi)^{-1} \phi^T]$$

Imajući u vidu činjenicu da je $\text{Trag}(AB) = \text{Trag}(BA)$ i usvajajući $A = \phi(\phi^T \phi)^{-1}$ i $B = \phi^T$ konačno se dobija

$$\bar{E} \{E_N E_N^T\} = \sigma_0^2 \text{Trag} \{I_N\} - \sigma_0^2 \text{Trag} [\phi^T \phi (\phi^T \phi)^{-1}] = \sigma_0^2 \text{Trag} \{I_N\} - \sigma_0^2 \text{Trag} \{I_p\} = \sigma_0^2 (N - p)$$

Na taj način se nepoznata varijansa belog šuma može proceniti kao

$$\sigma_0^2 = \frac{\bar{E} \{E_N^T E_N\}}{N - p}$$

ili ako se matematičko očekivanje aproksimira samo sa jednom realizacijom

$$\bar{E} \{E_N^T E_N\} \approx E_N^T E_N = (Y - \phi \hat{\theta}_N)^T (Y - \phi \hat{\theta}_N)$$

dobija se za procenu varijanse šuma

$$\sigma_0^2 = \frac{\bar{E}_N^T E_N}{N - p} = \frac{(Y - \phi \hat{\theta}_N)^T (Y - \phi \hat{\theta}_N)}{N - p}$$

5.2 Pseudo-linearni metod najmanjih kvadrata (PLLS)

U opštem slučaju modela pseudo-linearne regresije, kod koga i regresioni vektor $\varphi(k)$ zavisi od nepoznatog vektora parametara θ , tj. $\varphi(k) = \varphi(k, \theta)$ kriterijum koji se minimizira

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - \varphi^T(k, \theta) \theta]^2$$

ne predstavlja konveksnu funkciju argumenta θ , te ne predstavlja ni unimodalnu funkciju koja ima jedinstven minimum, tako da će procena pseudo-linearne regresije koja minimizira usvojeni kriterijum

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} J_N(\theta)$$

u najboljem slučaju konvergirati ka jednom od postojećih minimuma kriterijuma. Može se pokazati da pod određenim i ne tako strogim uslovima kriterijum $J_N(\theta)$ konvergira u određenom smislu (sa verovatnoćom 1) ka graničnoj vrednosti $J_{\infty}(\theta)$ kada broj podataka $N \rightarrow \infty$

$$J_N(\theta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} J_{\infty}(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta) = \bar{E} \{ \varepsilon^2(k, \theta) \}$$

Ako je D_M skup svih mogućih vrednosti vektora parametara θ , poslednja relacija označava da supremum apsolutne vrednosti odstupanja $J_N(\theta)$ od $J_{\infty}(\theta)$ (maksimum od svih odstupanja za $\theta \in D_M$) konvergira (sa verovatnoćom 1) ka nuli, odnosno

$$\sup_{\theta \in D_M} |J_N(\theta) - J_{\infty}(\theta)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Takode, ukoliko kriterijum $J_N(\theta)$ asimptotski konvergira ($N \rightarrow \infty$) ka $J_{\infty}(\theta)$ tada će i argument $\hat{\theta}_N$ koji minimizira $J_N(\theta)$ konvergirati (sa verovatnoćom 1) ka vrednosti θ_{∞} koja minimizira graničnu vrednost kriterijuma $J_{\infty}(\theta)$. Pri tome, vrednost θ_{∞} u opštem slučaju nije jedinstvena, već pripada nekom skupu D_{∞} definisanom sa

$$D_{\infty} = \arg \min_{\theta \in D_M} J_{\infty}(\theta) = \left\{ \theta \mid \theta \in D_M, J_{\infty}(\theta) = \min_{\eta \in D_M} J_{\infty}(\eta) \right\}$$

odnosno

$$\hat{\theta}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} D_{\infty}$$

Konvergencija u okviru skupa označava da infimum apsolutnog odstupanja $\hat{\theta}_N$ od θ_{∞} (minimum od svih mogućih odstupanja) konvergira asimptotski (kada $N \rightarrow \infty$) ka nultoj vrednosti, tj.

$$\inf_{\theta_{\infty} \in D_{\infty}} \left| \hat{\theta}_N - \theta_{\infty} \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Imajući u vidu sve rečeno, za neki estimator $\hat{\theta}_N$ se kaže da je konvergentan ukoliko procena $\hat{\theta}_N$ konvergira (sa verovatnoćom 1) u okviru skupa D_{∞} , odnosno

$$\hat{\theta}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} D_{\infty}$$

gde je D_{∞} skup koji kao elemente sadrži sve minimume graničnog kriterijuma $J_{\infty}(\theta)$, odnosno

$$D_{\infty} = \arg \min_{\theta \in D_M} J_{\infty}(\theta) = \left\{ \theta \mid \theta \in D_M, J_{\infty}(\theta) = \min_{\eta \in D_M} J_{\infty}(\eta) \right\}$$

$$J_\infty(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta) = \bar{E} \{ \varepsilon^2(k, \theta) \}$$

Ukoliko skup D_∞ sadrži samo jednu vrednost θ_0

$$D_\infty = \{ \theta_0 \}$$

tada je estimator $\hat{\theta}_N$ i konzistentan.

Očigledno je da je konzistentnu procenu parametara sistema moguće dobiti jedino ukoliko usvojena parametrizacija, odnosno izabrani vektor parametara θ egzaktno opisuje realan sistem, kada će tačna vrednost vektora parametara θ_0 pripadati skupu mogućih vrednosti vektora parametara D_M . Ukoliko stvarni vektor parametara θ_0 pripada skupu D_M , tada će funkcije prenosa $G(q, \hat{\theta}_N)$ i $H(q, \hat{\theta}_N)$ u standardnoj reprezentaciji modela sistema konvergirati kada $N \rightarrow \infty$ ka njihovim stvarnim vrednostima $G_0(z)$ i $H_0(z)$, respektivno. Pitanje da li se stvarna funkcija prenosa $G_0(z)$ i $H_0(z)$, kojima je opisan realan sistem, mogu odrediti na osnovu planiranog eksperimenta naziva se problem identifikabilnosti. Ako realan sistem ne pripada usvojenom skupu modela. D_M tada se može govoriti o aproksimativnoj (približnoj) identifikaciji, o čemu će biti više reči u nastavku.

5.2.1 Aproksimativna identifikacija

Kada se koristi metod greške predikcije (PEM) za parametarsku identifikaciju sistema, tada se vrednost θ_∞ kojoj asimptotski konvergira PEM procena $\hat{\theta}_N$ kada $N \rightarrow \infty$ naziva granična vrednost i njoj odgovara granični model. Analizirajmo u nastavku dobijeni granični model.

Granična vrednost PEM kriterijuma $J_N(\theta)$ je

$$J_\infty(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta) = \bar{E} \{ \varepsilon^2(k, \theta) \}$$

Sekvenci (vremenskoj seriji) greške predikcije $\varepsilon(k, \theta)$, $k = 1, \dots, N$ odgovara u frekvencijskom domenu spektar snage $S_\varepsilon(\omega, \theta)$ koji je definisan kao diskretna Fourierova transformacija auto-kovarijacione funkcije (ovaj rezultat je poznat kao Viner-Hinčinova teorema)

$$R_\varepsilon(\tau, \theta) = \bar{E} \{ \varepsilon(k, \theta) \varepsilon(k - \tau, \theta) \}$$

pri čemu je srednja vrednost $\bar{E} \{ \varepsilon(k, \theta) \} = 0$, odnosno

$$S_\varepsilon(\omega, \theta) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_\varepsilon(\tau, \theta) e^{-j\omega\tau}$$

Auto-kovarijaciona funkcija se može jedinstveno odrediti na osnovu spektra snage primenom inverzne vremenski diskretne Fourierove transformacije

$$R_\varepsilon(\tau, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\varepsilon(\omega, \theta) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Posebno, za $\tau = 0$ sledi

$$R_\varepsilon(0, \theta) = \bar{E} \{ \varepsilon(k, \theta) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\varepsilon(\omega, \theta) d\omega$$

Imajući u vidu da je

$$J_\infty(\theta) = \bar{E} \{ \varepsilon^2(k, \theta) \}$$

zaključuje se da se granična vrednost PEM kriterijuma može izraziti u frekvencijskom domenu kao

$$J_\infty(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\varepsilon(\omega, \theta) d\omega$$

Pretpostavimo dalje da je realni sistem opisan egzaktno (tačno) sa funkcijom prenosa $G_0(z)$, tako da je izlaz sistema $y(k)$ dat sa

$$y(k) = G_0(z) u(k) + v_0(k)$$

gde je $u(k)$ pobudni signal, a $v_0(k)$ poremećaj (šum) nulte srednje vrednosti na izlazu, koji se egzaktno može modelovati propuštanjem belog šuma nulte srednje vrednosti $e(k)$ kroz funkciju prenosa $H_0(z)$, tj.

$$v_0(k) = H_0(z) e(k).$$

Sa druge strane, estimirane (procenjene) funkcije prenosa realnog sistema i aditivnog šuma su $G(z, \theta)$ i $H(z, \theta)$, respektivno, gde je θ procenjene vrednost vektora parametara. Greške predikcije, kao procena belog šuma $e(k)$, zadovoljava relaciju

$$\varepsilon(k, \theta) = H^{-1}(z, \theta) [y(k) - G(z, \theta) u(k)]$$

ili kada se zameni izraz za $y(k)$

$$\varepsilon(k, \theta) = H^{-1}(z, \theta) \{ [G_0(z) - G(z, \theta)] u(k) + v_0(k) \} = G_e(z, \theta) u(k) + H_e(z, \theta) v_0(k)$$

gde je

$$G_e(z, \theta) = \frac{G_0(z) - G(z, \theta)}{H(z, \theta)}; \quad H_e(z, \theta) = \frac{1}{H(z, \theta)}$$

pri čemu je

$$v_0(k) = H_0(z) e(k).$$

Pretpostavljajući da su pobuda $u(k)$ i šum $v_0(k)$ nekorelisani kvazi-stacionarni slučajni procesi i koristeći ranije izvedene izraze za transformaciju spektra, zaključuje se da je spektar snage greške predikcije

$$S_\varepsilon(\omega, \theta) = |G_e(e^{j\omega}, \theta)|^2 S_u(\omega) + |H_e(e^{j\omega}, \theta)|^2 S_{v_0}(\omega)$$

gde je

$$|G_e(e^{j\omega}, \theta)|^2 = \frac{|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \theta)|^2}{|H(e^{j\omega}, \theta)|^2}$$

$$|H_e(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{|H(e^{j\omega}, \theta)|^2}$$

a vrednost kriterijuma u frekvencijskom području je specificirana sa

$$J_\infty(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \theta)|^2 S_u(\omega) + S_{v_0}(\omega)}{|H(e^{j\omega}, \theta)|^2} d\omega$$

gde je spektar snage aditivnog šuma

$$S_{v_0}(\omega) = |H_0(e^{j\omega})|^2 S_e(\omega) = |H_0(e^{j\omega})|^2 \sigma_e^2$$

U navedenim izrazima σ_e^2 označava varijansu belog šuma $e(k)$ čijim se filtriranjem dobija šum $v_0(k)$, a $S_u(\omega)$ je spektar snage pobudnog signala. Tada je skup D_∞ kome pripada granična vrednost PEM procene parametara definisan sa

$$D_\infty = \arg \min_{\theta \in D_M} J_\infty(\theta)$$

Dobijeni rezultat ukazuje na sledeće zaključke. Ukoliko je stvarni sistem $G_0(z) = G(z, \theta_0)$ u usvojenom skupu modela D_M tada se može postići da model konvergira ka stvarnom sistemu, odnosno da

$$|G_0(z) - G(z, \theta)| \rightarrow 0 \quad \text{za} \quad \theta \rightarrow \theta_0$$

gde je θ_0 pravi vektor parametara, tako da će se minimum kriterijumske funkcije dobiti ako model šuma konvergira ka stvarnom procesu kojim je generisan aditivni šum, tj. ako

$$H(z, \theta) \rightarrow H_0(z) = H(z, \theta_0) \quad \text{za} \quad \theta \rightarrow \theta_0$$

kada se za minimum kriterijuma dobija

$$\min_{\theta \in D_M} J_\infty(\theta) = \sigma_e^2.$$

Tada skup D_∞ sadrži samo jednu graničnu vrednost θ_0 i PEM procena parametara θ je konzistentna.

Međutim, ako sistem ne pripada usvojenom skupu modela D_M ne može se izvesti neki generalni teorijski rezultat, ali se intuitivno mogu definisati sledeća dva slučaja:

1. Fiksni model šuma
2. Generalni model šuma

Fiksni model šuma

U ovakvom modelu

$$H(z, \theta) = H^*(z) \quad \text{za} \quad \forall \theta \in D_M$$

tako da je granična vrednost PEM kriterijuma

$$J_\infty(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \theta)|^2 Q^*(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S_{v_0}(\omega)}{|H^*(e^{j\omega})|^2} d\omega$$

gde je

$$Q^*(\omega) = \frac{S_u(\omega)}{|H^*(e^{j\omega})|^2}$$

tako da je skup D_∞ kome pripada granična vrednost PEM procene θ_∞ određen samo minimumom prvog člana u $J_\infty(\theta)$ (drugi član ne zavisi od θ), odnosno

$$D_\infty = \arg \min_{\theta \in D_M} \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \theta)|^2 Q^*(\omega) d\omega$$

Na taj način, za bilo koje $\theta^* \in D_\infty$ procena funkcije prenosa sistema $G(e^{j\omega}, \theta^*)$ je optimalna u smislu minimuma srednje-kvadratnog kriterijuma greške procene $G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \theta)$, pri čemu je kvadrat greške procene ponderisan (otežinjen) u frekvencijskom domenu sa faktorom $Q^*(\omega)$ koji zavisi od spektra snage pobude $S_u(\omega)$ i usvojenog fiksnog modela šuma $H^*(z)$. Posebno za OE reprezentaciju modela (D_M je skup OE modela) fiksni model šuma $H^*(z) = 1$, tako da je

$$Q^*(\omega) = S_u(\omega)$$

Na taj način, selekcijom pobudnog signala, odnosno izborom njegove spektralne karakteristike, može se uticati na rezultat estimacije i posebnu težinu prilikom minimizacije dati ovom frekvencijskom području u kome se nalazi koristan pobudni signal koji se prenosi i obrađuje posmatranim sistemom (u tom području će biti najbolje slaganje stvarne i estimirane funkcije prenosa).

Generalni model šuma

U slučaju generalnog parametarskog modela sistema nije moguće egzaktno teorijski okarakterisati graničnu vrednost rezultujuće PEM procene. U literaturi postoji teorijski rezultat koji se odnosi na BJ strukturu modela i pokazuje da je kod ovakve strukture PEM procena θ tako određena da estimirani model spektra šuma $|H(e^{j\omega}, \theta)|^2$ što je moguće bolje aproksimira spektar $S_\varepsilon(\omega, \theta)$ greške predikcije $\varepsilon(k, \theta) = y(k) - G(z, \theta)u(k)$. Međutim, ovakav rezultat nije u opštem slučaju moguće izvesti za ostale parametarske reprezentacije, kao što su ARX i ARMAX. Kod ovakvih struktura granična vrednost θ^* PEM procene određena je u opštem slučaju kao kompromis između što bolje aproksimacije stvarnog sistema $G_0(e^{j\omega})$ procenjenim modelom $G(e^{j\omega}, \theta)$, u smislu minimalno mogućeg ponderisanog srednje-kvadratnog kriterijuma greške u frekvencijskom domenu, gde je težinski faktor u frekvencijskom domenu

$$Q(\omega, \theta^*) = \frac{S_u(\omega)}{|H(e^{j\omega}, \theta^*)|^2}$$

i što je moguće većeg približavanja (fitovanja) modela spektra šuma $|H(e^{j\omega}, \theta^*)|^2$ spektru greške predikcije $\varepsilon(k, \theta^*) = y(k) - G(z, \theta^*)u(k)$.

5.2.2 Filtriranje grešaka predikcije

Prethodne analize su pokazale da će modelovanje ARX strukturom podataka koji nisu egzaktno generisani ARX procesom, već na primer ARMAX procesom, rezultovati u pomerene PEM procene parametara. Međutim, glavna prednost ARX strukture je da je PEM estimator linearan, tako da se procene parametara dobijaju u jednom koraku, rešavanjem linearnog sistema jednačine po nepoznatim elementima vektora parametara θ . Dakle, postavlja se pitanje kako poboljšati linearnu procenu najmanjih kvadrata LLS, da bi se koristila zbog svoje računске jednostavnosti i u slučajevima kada podaci nisu egzaktno generisani modelom linearne regresije. Na osnovu analize u prethodnom poglavlju zaključuje se da je asimptotska (granična) vrednost θ_∞ PEM procene u slučaju ARX strukture određene kao

$$\theta_\infty = \arg \min_{\theta} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left| G_0(e^{j\omega}) - \frac{B(e^{j\omega}, \theta)}{A(e^{j\omega}, \theta)} \right|^2 Q_{ARX}(\omega, \theta) + |A(e^{j\omega}, \theta)|^2 S_{v_0}(\omega) \right\} d\omega$$

gde je

$$Q_{ARX}(\omega, \theta) = |A(e^{j\omega}, \theta)|^2 S_u(\omega)$$

Primetimo da je za ARX strukturu $G = B/A$ i $H = 1/A$. U opštem slučaju $1/A(z)$ odgovara funkciji prenosa nisko-frekvencijskog (NF) filtra, tako da inverzna funkcija prenosa $A(z)$ odgovara funkciji prenosa visoko-frekvencijskog (VF) filtra. To znači da će se u otežinjenom srednje-kvadratnom kriterijumu greške procene u frekvencijskom domenu veće težine dodeliti visokim frekvencijama, što će imati za posledicu da će PEM procene $G(e^{j\omega}, \theta) = B(e^{j\omega}, \theta)/A(e^{j\omega}, \theta)$ bolje aproksimirati stvarnu funkciju prenosa $G_0(e^{j\omega})$ na višim nego na nižim frekvencijama. Ovo predstavlja neželjeni efekat, pošto je u opštem slučaju područje niskih frekvencija od većeg značaja u mnogim primenama. Da bi se poboljšala PEM procena na nižim frekvencijama, po cenu smanjenja tačnosti procene funkcije prenosa sistema na višim frekvencijama, koriste se filtri. Postupak se sastoji u tome da se umesto greške predikcije $\varepsilon(k, \theta)$ koristi filtrirana greška predikcije

$$\varepsilon_F(k, \theta) = F(z) \varepsilon(k, \theta)$$

gde je $F(z)$ linearan, diskretan, vremenski-invarijantan inverzno-stabilan filtar konačnog reda. Na osnovu rezultata o transformaciji spektra, spektar filtrirane greške predikcije dat je sa

$$S_{\varepsilon_F}(\omega) = |F(e^{j\omega})|^2 S_{\varepsilon}(\omega)$$

gde je ranije navedeni izraz za spektar snage greške predikcije dat sa

$$S_{\varepsilon}(\omega) = \frac{|G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \theta)|^2 S_u(\omega) + S_{v_0}(\omega)}{|H(e^{j\omega}, \theta)|^2}$$

Tada je granična (asimptotska) vrednost PEM kriterijuma

$$J_\infty(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{\varepsilon_F}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 S_{\varepsilon}(\omega) d\omega$$

Na taj način, za ARX model frekventijska težinska funkcija data je sa

$$Q_{ARX}(\omega) = |F(e^{j\omega})|^2 |A(e^{j\omega}, \theta)|^2 S_u(\omega)$$

Postoji više načina da se izabere filter $F(z)$. Posebno, ako se izabere

$$F(z) = \frac{1}{A(z)}$$

dostići će se ARX strukturom kvalitet procene parametara kao kod OE reprezentacije modela. Međutim, pošto polinom $A(z)$ nije poznat, mogući pristup sastoji se da se u prvom koraku proceni ovaj polinom, pa da se tako estimirani A -polinom koristi kao filter u drugom koraku. Ovakav postupak može se koristiti iterativno, u nekoliko koraka, kako bi se dobio zadovoljavajući kvalitet procena.

Primetimo da se iz uslova

$$F(z)A(z) = 1$$

gde je

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i z^{-i}, \quad F(z) = 1 + \sum_{i=1}^{n_a} f_i z^{-i}$$

mogou odrediti koeficijenti polinoma $F(z)$ kao

$$f_j = - \sum_{\ell=1}^j a_\ell f_{j-\ell}, \quad j = 1, 2, \dots, n_a; \quad f_0 = 1$$

Međutim, ideja da se filtrira greška predikcije može se koristiti kod bilo koje parametarske reprezentacije modela. Izborom filtra se dodeljuje veća težina u ponderisanom kriterijumu srednje-kvadratne greške estimacije u frekventijskom domenu onim frekvencijama koje su od interesa, čime se u ovom području postiže bolja aproksimacija stvarne funkcije prenosa procesa. Ovo je posebno važno ukoliko nije moguće da se eksperiment redizajnira.

Primetimo, takođe, da je filtriranje greške predikcije sa filtrom $F(z)$ ekvivalentno kod sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom filtriranju samih ulazno-izlaznih podataka, odnosno isti rezultat se dobija kada se umesto podataka $\{u(k), y(k)\}_N$ koriste filtrirani podaci $\{u_F(k), y_F(k)\}_N$. Zaista, pošto je

$$\begin{aligned} \varepsilon_F(k, \theta) &= F(z)\varepsilon(k, \theta) = F(z)H^{-1}(z, \theta)[y(k) - G(z, \theta)u(k)] \\ &= H^{-1}(z, \theta)[F(z)y(k) - G(z, \theta)F(z)u(k)] \end{aligned}$$

usvajajući da je

$$y_F(k) = F(z)y(k), \quad u_F(k) = F(z)u(k)$$

dobija se za filtriranu grešku predikcije

$$\varepsilon_F(k, \theta) = H^{-1}(z, \theta)[y_F(k) - G(z, \theta)u_F(k)]$$

na koji je moguće primeniti klasičan LLS metod. Posebno za ARX strukturu i usvojeni filter $F = 1/A$, dobija se da je $FH^{-1} = (1/A)A = 1$ tako da je $\varepsilon_F = y - Gu$.

Rekurzivni metod najmanjih kvadrata

Osnovni nedostatak prethodno razmatranog metoda najmanjih kvadrata je što se sa povećanjem merne populacije

$$z^N = \{u(i), y(i); i = 1, \dots, N\}$$

za jedno merenje

$$z(N+1) = \{u(N+1), y(N+1)\}$$

celokupni proračun mora da ponovi u cilju generisanja nove procene parametara $\hat{\theta}_{N+1}$, pri čemu se povećavaju i računarski zahtevi vezani za potreban memorijski prostor i vreme izračunavanja. Stoga se prikazani metod najmanjih kvadrata naziva i metod paketne obrade (eng. batch processing method) podataka ili nerekurzivni (eng. *off-line*) metod. Za razliku od nerekurzivnih metoda, rekurzivne metode parametarske identifikacije generišu novu procenu parametara $\hat{\theta}_{N+1}$ na bazi prethodno izračunate procene $\hat{\theta}_N$ i novo dobijene informacije kroz merenja $z(N+1) = \{u(N+1), y(N+1)\}$. Rekurzivna varijanta metode najmanjih kvadrata obično se izvodi iz nerekurzivnog metoda koristeći alat matricne linearne algebre. U tom cilju usvojimo reprezentaciju modela u formi jednačine linearne regresije

$$y(k) = \varphi^T(k) \theta + e(k); \quad k = 1, 2, \dots, N$$

gde je $y(k)$ vektor izlaza u k -tom diskretnom trenutku, $\varphi(k)$ je regresioni vektor, $e(k)$ predstavlja beli šum nulte srednje vrednosti na izlazu sistema, a θ je nepoznati vektor parametara koji se estimira. Sistem od N relacija može se napisati u matricno-vektorskoj formi

$$Y(N) = \phi(N) \theta + E(N)$$

gde su odgovarajući vektori i matrice definisani sa

$$Y(N) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}; \quad \phi(N) = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}; \quad E(N) = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}$$

Linearni algoritam težinskih najmanjih kvadrata (eng. *Weighted Linear Least Squares*) WLLS minimizira kvadratni optimizacioni kriterijum

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2N} \varepsilon^T(N, \theta) W(N) \varepsilon(N, \theta) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N w(i) \varepsilon^2(i, \theta)$$

gde je vektor grešaka predikcija ili reziduala merenja

$$\varepsilon(N, \theta) = Y(N) - \phi(N)\theta$$

a težinska kriterijumska matrica je dijagonalna matrica

$$W(N) = \text{diag}\{w(1) \ w(2) \ \cdots \ w(N)\}$$

Procena najmanjih kvadrata koji minimizira dati kriterijum je

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_N &= [\phi^T(N) W(N) \phi(N)]^{-1} \phi^T(N) W(N) Y(N) \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(i) \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(i) \varphi(i) y(i) \right] \end{aligned}$$

Na identičan način, procena najmanjih kvadrata zasnovana na $(N+1)$ merenju ulaza i izlaza sistema data je sa

$$\hat{\theta}_{N+1} = [\phi^T(N+1) W(N+1) \phi(N+1)]^{-1} \phi^T(N+1) W(N+1) Y(N+1)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} Y(N+1) &= \begin{bmatrix} Y(N) \\ y(N+1) \end{bmatrix}; \quad \phi(N+1) = \begin{bmatrix} \phi(N) \\ \varphi^T(N+1) \end{bmatrix}; \\ E(N+1) &= \begin{bmatrix} E(N) \\ e(N+1) \end{bmatrix}; \quad W(N+1) = \begin{bmatrix} W(N) & 0 \\ 0 & w(N+1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Posebno ako se izabere da su dijagonalni elementi težinske matrice $W(N)$ dati u formi eksponencijalnih faktora

$$w(i) = \rho^{N-i}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

gde je ρ pozitivna konstanta, tada je

$$W(N+1) = \begin{bmatrix} \rho W(N) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalje se može pisati

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{N+1} &= \left\{ [\phi^T(N) \varphi(N+1)] \begin{bmatrix} W(N) & 0 \\ 0 & w(N+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(N) \\ \varphi^T(N+1) \end{bmatrix} \right\}^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ [\phi^T(N) \varphi(N+1)] \begin{bmatrix} W(N) & 0 \\ 0 & \varphi(N+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(N) \\ y(N+1) \end{bmatrix} \right\} \\ &= [\phi^T(N) W(N) \phi(N) + w(N+1) \varphi(N+1) \varphi^T(N+1)]^{-1} \times \\ &\quad \times [w(N+1) \varphi(N+1) y(N+1) + \phi^T(N) W(N) Y(N)] \end{aligned}$$

ili ako su elementi težinske matrice $W(N)$ eksponencijalni faktori $w(i) = \rho^{N-1}$, $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{N+1} &= [\rho \phi^T(N) W(N) \phi(N) + \varphi(N+1) \varphi^T(N+1)]^{-1} \times \\ &\quad \times [\varphi(N+1) y(N+1) + \rho \phi^T(N) W(N) Y(N)] \end{aligned}$$

Usvajajući dalje oznaku za matricu pojačanja algoritma

$$P(N) = [\phi^T(N) W(N) \phi(N)]^{-1}$$

može se pisati

$$\hat{\theta}_N = P(N) \phi^T(N) W(N) Y(N)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{N+1} &= P(N+1) [w(N+1) \varphi(N+1) y(N+1) + \phi^T(N) W(N) Y(N)] \\ P^{-1}(N+1) &= P^{-1}(N) + w(N+1) \varphi(N+1) \varphi^T(N+1) \end{aligned}$$

Na osnovu poslednje dve relacije se zaključuje da je

$$\begin{aligned} P^{-1}(N) &= P^{-1}(N+1) - w(N+1) \varphi(N+1) \varphi^T(N+1) \\ \phi^T(N) W(N) Y(N) &= P^{-1}(N) \hat{\theta}_N \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\phi^T(N) W(N) Y(N) = P^{-1}(N+1) \hat{\theta}_N - w(N+1) \varphi(N+1) \varphi^T(N+1) \hat{\theta}_N$$

a zamenom ovog izraza u relaciji za $\hat{\theta}_N$ sledi

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{N+1} &= \\ &= P(N+1) [w(N+1) \varphi(N+1) y(N+1) + P^{-1}(N+1) \hat{\theta}_N - \\ &\quad - w(N+1) \varphi(N+1) \varphi^T(N+1) \hat{\theta}_N] \\ &= \hat{\theta}_N + P(N+1) \varphi(N+1) w(N+1) [y(N+1) - \varphi^T(N+1) \hat{\theta}_N] \end{aligned}$$

Na taj način, definitivni rekurzivni oblik linearnog metoda težinskih najmanjih kvadrata, koji se skraćeno označava i sa RWLLS, dat je sa

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K(N+1) \left[y(N+1) - \varphi^T(N+1) \hat{\theta}_N \right]; N = 0, 1, \dots$$

$$K(N+1) = P(N+1) \varphi(N+1) w(N+1)$$

$$P^{-1}(N+1) = P^{-1}(N) + w(N+1) \varphi(N+1) \varphi^T(N+1)$$

Posebno, usvajajući da je težinska matrica $W(N) = I$, gde je I jedinična matrica, zaključuje se da je $w(N+1) = 1$ a odgovarajući algoritam je rekurzivni linearni metod najmanjih kvadrata, koji se označava sa RLLS. Takođe, ukoliko se usvoji da je težinska matrica $W(N)$ jednaka inverznoj kovarijacionoj matrici belog šuma nulte srednje vrednosti $e(k)$, tada je $W(N) = R_e^{-1} = \sigma_o^{-2} I$, gde je σ_o^2 varijansa šuma, tako da je $w(N+1) = \sigma_o^{-2}$, a odgovarajući algoritam je rekurzivni linearni metod minimalne varijanse greške, koji se skraćeno označava sa RLMV. Kod algoritma sa eksponencijalnim ponderisanjem merenja, gde su težinski koeficijenti $w(i) = \rho^{N-i}$, $i = 1, \dots, N$, u dobijenim izrazima treba matricu $W(N)$ zameniti sa $\rho W(N)$ i usvojiti $w(N+1) = 1$, odakle se zaključuje da je

$$P^{-1}(N+1) = \rho P^{-1}(N) + \varphi(N+1) \varphi^T(N+1) = \rho \phi^T(N) W(N) \phi(N) + \varphi(N+1) \varphi^T(N+1)$$

pri čemu je

$$\hat{\theta}_{N+1} = P(N+1) \left[\rho \phi^T(N) W(N) Y(N) + \varphi(N+1) y(N+1) \right]$$

gde je procena najmanjih kvadrata na bazi mernog uzorka dužine N , odnosno u N -tom diskretnom trenutku, definisana sa

$$\phi^T(N) W(N) Y(N) = P^{-1}(N) \hat{\theta}_N$$

Analogno kao u prethodnom slučaju, dalje se može pisati

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{N+1} &= P(N+1) \left[\varphi(N+1) y(N+1) + \rho P^{-1}(N) \hat{\theta}_N \right] \\ &= P(N+1) - \left\{ \varphi(N+1) y(N+1) + [P^{-1}(N+1) - \varphi(N+1) \varphi^T(N+1)] \hat{\theta}_N \right\} \\ &= \hat{\theta}_N + P(N+1) \varphi(N+1) \left[y(N+1) - \varphi^T(N+1) \hat{\theta}_N \right] \end{aligned}$$

što se i direktno dobija iz prethodno izvedenog izraza usvajajući $w(N+1) = 1$.

Na taj način rekurzivna varijanta linearnog metoda najmanjih kvadrata sa eksponencijalnim ponderisanjem opservacije data je sa

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K(N+1) \left[y(N+1) - \varphi^T(N+1) \hat{\theta}_N \right]; \quad N = 0, 1, \dots$$

$$K(N+1) = P(N+1) \varphi(N+1)$$

$$P^{-1}(N+1) = \rho P^{-1}(N) + \varphi(N+1) \varphi^T(N+1)$$

Primena algoritma zahteva određivanje inverzne matrice prilikom određivanja matrice pojačanja algoritma, što se može izbeći korišćenjem leme o inverziji matrica, na osnovu koje se matricna relacija

$$P_2^{-1} = P_1^{-1} + H^T R^{-1} H$$

gde su R i P_1 regularne matrice, može napisati u alternativnom obliku

$$P_2 = P_1 - P_1 H^T (H P_1 H^T + R)^{-1} H P_1.$$

Usvajajući da je

$$P_2 = P(N+1), P_1 = P(N), H^T = \varphi(N+1), H = \varphi(N+1), R^{-1} = w(N+1)$$

dobija se alternativan izraz za matricu pojačanja algoritma

$$\begin{aligned} P(N+1) &= \\ &= P(N) - P(N) \varphi(N+1) [\varphi^T(N+1) P(N) \varphi(N+1) + w^{-1}(N+1)]^{-1} \varphi^T(N+1) P(N) \end{aligned}$$

Primitimo da je član u srednjim zagradama skalarna veličina u slučaju sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom (engl. single input-single output ili SISO sistemi), tako da poslednja relacija ne zahteva inverziju matrice.

U slučaju rekurzivnog težinskog linearnog algoritma najmanjih kvadrata sa eksponencijalnim ponderisanjem opservacija treba usvojiti

$$P_2 = P(N+1), P_1 = \rho^{-1} P(N), H^T = \varphi(N+1), H = \varphi^T(N+1), R^{-1} = 1$$

pa se na osnovu leme o inverziji matrice može pisati

$$P(N+1) = \frac{1}{\rho} \left\{ P(N) - P(N) \varphi(N+1) [\varphi^T(N+1) P(N) \varphi(N+1) + \rho]^{-1} \varphi^T(N+1) P(N) \right\}$$

Kao što je već istaknuto, izborom faktora $\rho < 1$, koji se u navedenom slučaju naziva i faktor zaboravljanja (engl. forgetting factor) u algoritmu za estimaciju parametara manje težine dodeljuju se prethodnim merenjima izlaza u odnosu na potonja merenja, čime je u algoritam implicitno ugrađena eksponencijalno opadajuća memorija. Na taj način, izborom faktora zaboravljanja $\rho < 1$, ali koji je blizak jediničnoj vrednosti, mogu se pratiti vremenski promenljivi parametri modela, čija je dinamika promene relativno spora. Međutim, praćenje naglih promena parametara, kao i vremenski brzo promenljivih parametara, zahteva da se faktor ρ menja adaptivno u svakom vremenskom koraku. Naime, u opštem slučaju što je vrednost ρ više udaljena od 1 algoritam će bolje pratiti brze promene parametara, ali će lošije pratiti konstantne i sporo promenljive parametre, dok će obrnuto vrednost ρ bliska 1 omogućiti dobro praćenje konstantnih i sporo promenljivih parametara, uz lošije praćenje relativno brzo promenljivih parametara modela. Na taj način, zavisno od dinamike promene parametara treba podešavati faktor ρ u svakom koraku rada algoritma, ali ovakva razmatranja izlaze iz konteksta ove materije. Takođe, pošto se za vrednosti ρ bliske 1 može pisati

$$\rho^k = e^{k \ln \rho} = e^{k \ln(1+\rho-1)} \approx e^{-k(1-\rho)}$$

ili

$$\rho^k = e^{k/\tau}, \quad \tau = \frac{1}{1 - \rho}$$

zaključuje se da je za $\rho < 1$, pri čemu je ρ blisko 1, efektivna memorija algoritma

$$\tau = \frac{1}{\log \rho} \approx \frac{1}{1 - \rho}$$

Pošto je za poslednje merenje $k = N$ (u težinskoj matrici $W(N)$ element na glavnoj dijagonali je ρ^{N-k} , $k = 1, \dots, N$), odnosno N -tom merenju se dodeljuje težina $\rho^o = 1$, izvedeni izraz pokazuje da će se merenjima starijim od τ ($k > \tau$) dodeliti težine manje od $e^{-1} \approx 0.36$ ($k = \tau$). Drugim rečima, ovako izabran težinski faktor odgovara eksponencijalno opadajućoj memoriji algoritma, pri čemu vremenska konstanta τ eksponencijalne krive odgovara približno efektivnoj dužini memorije algoritma u usvojenim jedinicama vremena ili broju perioda diskretnih merenja. Na taj način, izbor dužine memorije algoritma τ , kojim je određena direktno vrednost faktora zaboravljanja ρ , zavisi od očekivane dinamike promene parametara i treba je tako usvojiti da parametri budu približno konstantni na intervalu dužine τ . Na nestacionarnim intervalima merenja, kojima odgovaraju brzo promenljivi parametri, treba usvojiti malo τ , kome odgovara $\rho < 1$, dok na stacionarnim intervalima merenja, kojima odgovaraju približno konstantni parametri, treba usvojiti relativno veliko τ (teorijski $\tau \rightarrow \infty$), kome odgovara $\rho \approx 1$ (teorijski $\rho = 1$). U praksi se ponekad usvaja da je faktor ρ vremenski promenljiv na intervalu kvazistacionarnosti i da asimptotski eksponencijalno raste ka vrednosti 1 (kada $k \rightarrow \infty$), odnosno u okviru takvog intervala merenja može se usvojiti

$$\rho(k) = \rho_o \rho(k-1) + (1 - \rho_o), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

pri čemu je uobičajen izbor $\rho_o = 0.99$ i $\rho(0) = 0.95$.

Za startovanje ($N = 0$) bilo koje od predloženih varijanti rekurzivnih algoritama potrebno je usvojiti početne procene parametara $\hat{\theta}_o$ i početnu vrednost matrice pojačanja algoritma $P(0)$ (ove vrednosti se nazivaju i početna pogađanja) i ukoliko ne postoji nikakva apriorna informacija o očekivanim vrednostima parametara modela uobičajeno je da se usvoji

$$\hat{\theta}_0 = 0, \quad P(0) = c^2 I, \quad c^2 \gg 1.$$

gde je I jedinična matrica. Takođe, početno pogađanje $\hat{\theta}_o$ može se generisati i nerekurzivnim linearnim algoritmima najmanjih kvadrata na paketu merenja odgovarajuće dužine. Takođe, kao što je prethodno pokazano, matrica $P(N)$ predstavlja ocenu matrice kovarijanse greške estimacije parametara u koraku N , tako da trag ove matrice određuje ukupnu srednju kvadratnu grešku estimacije po svim parametrima u datom koraku. Na taj način, ukoliko je početna procena $\hat{\theta}_o$ tačnije određena faktor c^2 u izrazu za $P(0)$ treba smanjiti i usvojiti $c^2 \approx 1$.

Programska realizacija rekurzivnog linearnog algoritma najmanjih kvadrata RLLS može se izvesti na osnovu sledećeg dijagrama toka.

6.1 Dijagram toka RLLS algoritma

Korak 1 Inicijalizacija

- $$\hat{\theta}_0 = 0, \quad P(0) = c^2 I, \quad c^2 \gg 1$$
- formiranje početnog regresionog vektora $\varphi(1)$

Korak 2 U svakom diskretnom trenutku $k = 1, 2, \dots$ pretpostavljajući da je poznato $\hat{\theta}_{k-1}$, $\varphi(k)$ i $P(k-1)$ izračunati:

- predikciju izlaznog signala

$$\hat{y}(k, \hat{\theta}_{k-1}) = \varphi^T(k) \hat{\theta}_{k-1}$$

- grešku predikcije ili rezidual merenja, očitavajući prethodni trenutni izlaz $y(k)$

$$\varepsilon(k, \hat{\theta}_{k-1}) = y(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta}_{k-1}$$

- matricu pojačanja

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1) \varphi(k) \varphi^T(k) P(k-1)}{1 + \varphi^T(k) P(k-1) \varphi(k)}$$

- matricu pojačanja

$$K(k) = P(k) \varphi(k)$$

- procene parametara modela

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K(k) \varepsilon(k, \hat{\theta}_{k-1})$$

Korak 3 Formirati novi regresioni vektor $\varphi(k+1)$, koristeći prethodna i tekuća merenja ulaza i izlaza sistema.

Korak 4 Inkrementirati brojač vremena k za 1 i ponoviti proceduru od koraka 2.

Primitimo da kod FIR i ARX reprezentacije modela regresioni vektor $\varphi(k)$ sadrži samo zakašnjene ulazne (FIR) ili zakašnjene ulazne i izlazne signale (ARX), odnosno

$$\varphi_{FIR}^T(k) = \{u(k-1) \cdots u(k-n_b)\}$$

$$\varphi_{ARX}^T(k) = \{-y(k-1) \cdots -y(k-n_a) u(k-1) \cdots u(k-n_b)\}$$

Uz navedeno, zbog osobine kauzalnosti svi signali biće jednaki nuli za negativne indekse vremena, odnosno $u(i) = y(i) = 0$ za $i < 0$, pri čemu je zbog osobine striktno kauzalnosti $y(0) = 0$.

U slučaju da usvojena reprezentacija modela odgovara jednačini pseudo-linearne regresije (AR-MAX, OE i BJ strukture modela)

$$y(k) = \varphi^T(k, \theta) \theta + e(k), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

tada je za numeričku minimizaciju optimizacionog kriterijuma u više koraka

$$J_N(\theta) = \frac{1}{2N} E^T(N, \theta) E(N, \theta) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^2(i, \hat{\theta}_N(k))$$

$$E(N, \theta) = Y(N) - \phi(N, \theta) \theta$$

gde je

$$Y(N) = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}; \quad \phi(N, \theta) = \begin{bmatrix} \varphi^T(1, \theta) \\ \vdots \\ \varphi^T(N, \theta) \end{bmatrix}$$

potrebno koristiti nerekurzivni *Newton*-ov algoritam

$$\hat{\theta}_N(k+1) = \hat{\theta}_N(k) - H^{-1}(\hat{\theta}_N(k)) g(\hat{\theta}_N(k))$$

gde su gradijent i Hessian dati sa

$$g(\hat{\theta}_N(k)) = \nabla_{\theta} J_N(\hat{\theta}_N(k)) = \sum_{i=1}^N \varepsilon(i, \hat{\theta}_N(k)) \nabla_{\theta} \varepsilon(i, \hat{\theta}_N(k))$$

pri čemu je greška predikcije

$$\begin{aligned} \varepsilon(i, \hat{\theta}_N(k)) &= y(i) - \hat{y}(i, \hat{\theta}_N(k)) \\ &= y(i) - \varphi^T(i, \hat{\theta}_N(k)) \hat{\theta}_N(k), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Na taj način se dobija

$$\nabla_{\theta} \varepsilon(i, \hat{\theta}_N(k)) = -\nabla_{\theta} \hat{y}(i, \hat{\theta}_N(k)) = -\psi(i, \hat{\theta}_N(k))$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} \nabla J_N(\hat{\theta}_N(k)) &= -\sum_{i=1}^N \varepsilon(i, \hat{\theta}_N(k)) \psi(i, \hat{\theta}_N(k)) \\ &= -\sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon(i, \hat{\theta}_N(k)) \psi(i, \hat{\theta}_N(k)) - \varepsilon(N, \hat{\theta}_N(k)) \psi(N, \hat{\theta}_N(k)) \\ &= \nabla J_{N-1}(i, \hat{\theta}_N(k)) - \varepsilon(N, \hat{\theta}_N(k)) \psi(N, \hat{\theta}_N(k)) \end{aligned}$$

Pretpostavljajući, dalje, da je procena $\hat{\theta}_N(k)$ bliska minimumu θ^* usvojenog kriterijuma, može se pretpostaviti da je

$$\nabla J_{N-1}(\hat{\theta}_N(k)) \approx 0$$

odakle sledi

$$g(\hat{\theta}_N(k)) = \nabla J_N(\hat{\theta}_N(k)) \approx -\varepsilon(N, \hat{\theta}_N(k)) \psi(N, \hat{\theta}_N(k))$$

Izvođenje rekurzivne verzije algoritma zahteva da se uvedu dodatne aproksimacije. Naime, ako se zanemari zavisnost regresionog vektora $\varphi(N, \hat{\theta}_N(k))$ od $\hat{\theta}_N(k)$, što će rezultovati u aproksimaciju greške predikcije

$$\varepsilon(N, \hat{\theta}_N(k)) = y(k) - \hat{y}(N, \hat{\theta}_N(k)) = y(N) - \varphi^T(N, \hat{\theta}_N(k)) \hat{\theta}_N(k)$$

sa izrazom

$$\varepsilon(N, \hat{\theta}_N(k)) \approx \varepsilon(N) = y(N) - \hat{y}(N) = y(N) - \varphi^T(N) \hat{\theta}_N(k)$$

tako da se može pisati

$$\psi(N, \hat{\theta}_N(k)) = \nabla_{\theta} \hat{y}(N, \hat{\theta}_N(k)) \approx \nabla_{\theta} \hat{y}(N) = \varphi^T(N)$$

odakle sledi

$$g(\hat{\theta}_N(k)) \approx \varphi(N) \varepsilon(N)$$

Na sličan način se za *Gauss-Newton*-ovu aproksimaciju *Hessian*-a može pisati

$$\begin{aligned} H(\hat{\theta}_N(k)) &= \nabla^2 J_N(\hat{\theta}_N(k)) \approx \sum_{i=1}^N \nabla \varepsilon(i, \hat{\theta}_N(k)) \nabla^T \varepsilon(i, \hat{\theta}_N(k)) \\ &= \sum_{i=1}^N \psi(i, \hat{\theta}_N(k)) \psi^T(i, \hat{\theta}_N(k)) \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} \nabla^2 J_N(\hat{\theta}_N(k)) &= \sum_{i=1}^{N-1} \psi(i, \hat{\theta}_N(k)) \psi^T(i, \hat{\theta}_N(k)) + \psi(N, \hat{\theta}_N(k)) \psi^T(N, \hat{\theta}_N(k)) \\ &= \nabla^2 J_{N-1}(\hat{\theta}_N(k)) + \psi(N, \hat{\theta}_N(k)) \psi^T(N, \hat{\theta}_N(k)) \end{aligned}$$

Dobijanje rekurzivne varijante ovog izraza zahteva sledeće aproksimacije. Naime, pretpostavljajući da su procene parametara blizu traženog minimuma kriterijuma, može se dodatno usvojiti aproksimacija da su procene parametara zasnovane na mernom skupu dužine N približno jednake procenama parametara zasnovanim na mernoj populaciji dužine $N - 1$ odakle sledi

$$\hat{\theta}_N(k) \approx \hat{\theta}_{N-1}(k)$$

na osnovu čega se zaključuje da je

$$\nabla^2 J_{N-1}(\hat{\theta}_N(k)) \approx \nabla^2 J_{N-1}(\hat{\theta}_{N-1}(k))$$

tako da se Hessijan matrica može aproksimirati sa izrazom

$$\begin{aligned} H(\hat{\theta}_N(k)) &= \nabla^2 J_N(\hat{\theta}_N(k)) \approx \nabla^2 J_{N-1}(\hat{\theta}_{N-1}(k)) + \varphi(N) \varphi^T(N) \\ &= H(\hat{\theta}_{N-1}(k)) + \varphi(N) \varphi^T(N) \end{aligned}$$

Usvajajući dalje oznake

$$\hat{\theta}(N) = \hat{\theta}_N(k), \hat{\theta}(N-1) = \hat{\theta}_{N-1}(k), H(\hat{\theta}_N(k)) = \bar{P}(N), H(\hat{\theta}_{N-1}(k)) = \bar{P}(N-1)$$

dolazi se do rekurzivne verzije više-koračne iterativne nerekurzivne *Gauss-Newton*-ove metode

$$\hat{\theta}(N) = \hat{\theta}(N-1) + \bar{P}^{-1}(N) \varphi(N) \varepsilon(N), \quad N = 1, 2, \dots$$

$$\varepsilon(N) = y(N) - \varphi^T(N) \hat{\theta}(N-1)$$

$$\bar{P}(N) = \bar{P}(N-1) + \varphi(N) \varphi^T(N)$$

ili uvodeći smenu

$$\bar{P}^{-1}(N) = P(N)$$

i koristeći lemu o inverziji matrice

$$\hat{\theta}(N) = \hat{\theta}(N-1) + K(N) \varepsilon(N), \quad N = 1, 2, \dots$$

$$K(N) = P(N) \varphi(N)$$

$$\varepsilon(N) = y(N) - \varphi^T(N) \hat{\theta}(N-1)$$

$$P(N) = P(N-1) - P(N-1) \varphi(N) [\varphi^T(N) P(N-1) \varphi(N) + 1]^{-1} \varphi^T(N) P(N-1)$$

Izvedeni algoritam predstavlja pseudolinearni rekurzivni metod najmanjih kvadrata (engl. Pseudo Linear Recursive Least Square, ili skraćeno PLRLS). Slično kao i rekurzivni linearni metod najmanjih kvadrata RLLS i ovaj algoritam je izveden iz odgovarajuće nerekurzivne varijante na osnovu izvesnih aproksimacija koje su uobičajene za takva izvođenja. Kao i kod RLLS algoritma, startovanje algoritma zahteva da se usvoji početna pogađanja $\hat{\theta}(0)$ i , na identičan način kao kod RLLS metode. Posebno, za ARMAX reprezentaciju modela, linearne aproksimacija pseudo-linearnog regresionog vektora data je sa

$$\varphi^T(N) = \{-y(N-1) \cdots -y(N-n_a) u(N-1) \cdots u(N-n_b) \varepsilon(N-1) \cdots \varepsilon(N-n_c)\}$$

pri čemu je zbog uslova kauzalnosti $u(i) = y(i) = \varepsilon(i) = 0$ za $i < 0$, kao i zbog uslova striktno kauzalnosti $y(0) = \varepsilon(0) = 0$, dok vrednost $u(0)$ može postojati. Dijagram toka PLRLS algoritma identičan je dijagramu toka RLLS algoritma. Sofisticiranije varijante PLRLS algoritma mogu se naći u literaturi posvećenoj parametarskoj identifikaciji i neće biti razmatrane u ovom tekstu.

6.2 Primer rekurzivna identifikacija ARX modela prvog i drugog reda

Polazeći od osnovnog algoritma najmanjih kvadrata, za eksperiment koji sadrži N merenja i upotrebom kraćeg zapisa u formi

$$Q(t) = S^T(t)S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(t-k)\varphi^T(t-k) \quad (6.1)$$

$$p(t) = S^T(t)Y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(t-k)y(t-k) \quad (6.2)$$

dobijamo da je estimacija vektora parametara

$$\hat{\theta}(t) = Q^{-1}(t)p(t) \quad (6.3)$$

Iz ovoga sledi da procena parametara zavisi od dužine sekvence ulaznih podataka, koja ima N odbiraka, kao i od trenutka poslednjeg odabiranja t .

6.2.1 Rekurzivno skupljanje podataka

Veličina matrice $Q(t, N)$ je $N \times N$ i $p(t, N)$ je $N \times 1$ bez obzira koliko se merenja uzima. Sledi da se ove matrice mogu formirati rekurzivno tj.:

$$Q(t) = Q(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (6.4)$$

$$p(t) = p(t-1) + \varphi(t)y(t) \quad (6.5)$$

Na ovaj način nije potrebno formirati matrice velikih dimenzija ϕ i Y , pa čak i kada se radi o *batch* proceduri, kada se vrši obrada svih prikupljenih podataka.

6.2.2 Faktor zaboravljanja

U praksi je čest slučaj da se proces sporo menja, pa je potrebno da identifikovani model prati proces. Da bi se ovo postiglo potrebno je na određen način "zaboraviti" podatke koji se nalaze u daljoj prošlosti, tj. oni podaci koji potiču od procesa koji se promenio nisu potrebni u identifikaciji novog modela. Ovo je moguće uvođenjem "faktora zaboravljanja" λ , a tada formule (6.4)-(6.5) postaju

$$Q(t) = \lambda Q(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (6.6)$$

$$p(t) = \lambda p(t-1) + \varphi(t)y(t) \quad (6.7)$$

Na ovaj način se postiže filtriranje podataka, tj. stariji podaci se uzimaju sa faktorom koji eksponencijalno slabi tokom vremena, kako su podaci stariji, tako imaju manje učešće u sumi. Sada

vremensko trajanje akvizicije podataka nije bitno s'obzirom da se na ovaj način ne troše memorijski resursi. Pokazuje se da se uvođenjem faktora λ jednačine (6.1)-(6.2) pretvaraju u

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi(t-k) \varphi^T(t-k) \quad (6.8)$$

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi(t-k) y(t-k) \quad (6.9)$$

Ovaj izraz govori da se skorija merenja množe faktorom koji je značajniji (k je manje), dok se daleka merenja množe sa manjim faktorom (k je veće), a faktor je definisan kao λ^k .

Jednačine (6.6)-(6.7) i (6.8)-(6.9) daju iste vrednosti matrica Q i p , a razlika je u tome da se jednačine (6.6)-(6.7) mogu primenjivati i u toku izvršavanja eksperimenta (*online*), kao i da ne zahtevaju veliki memorijski kapacitet.

U svakom trenutku, estimacija vektora parametara je data kao

$$\hat{\theta}(t) = Q^{-1}(t)p(t) \quad (6.10)$$

U slučaju da se usvoji parametar $\lambda = 1$, tada zaboravljanja nema, i dobija se estimacija parametara θ kao i u slučaju *batch* algoritma. U slučaju da je $\lambda = 0$ može se primetiti da je tada estimacija parametara zasnovana samo na poslednjem merenju, tj. jednom odbirku.

Inicijalizacija.

Za primenu rekurzivnog algoritma potrebne su početne vrednosti, kako bi počeo sa radom. Izbor početnih vrednosti utiče na estimaciju parametara i u literaturi postoji veliki broj predloženih metoda koje olakšavaju ovaj izbor. U praksi se dobro pokazalo da se algoritam startuje sa malom sekvencom kao *batch* algoritam, a da se dobijene vrednosti Q uzmu kao početne vrednosti za primenu rekurzivnog algoritma.

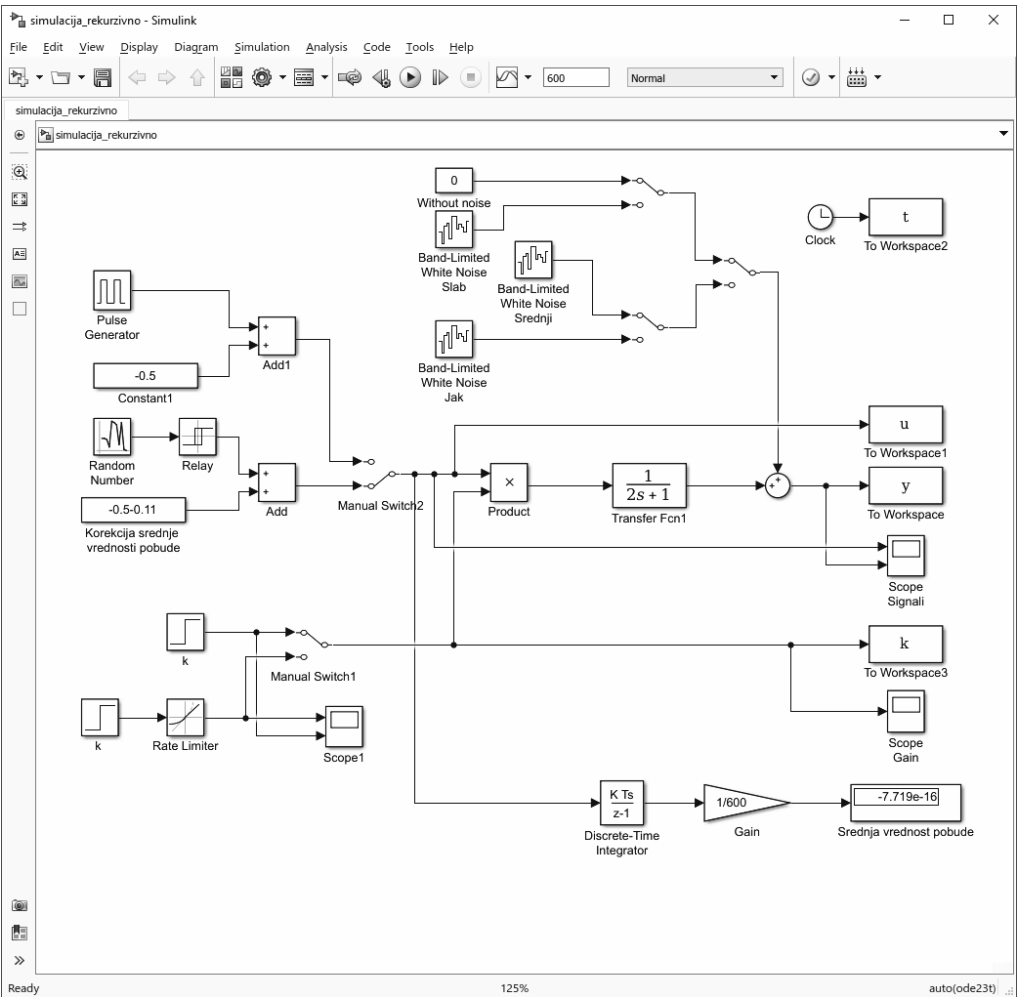
U okviru ovog primera biće demonstrirane tehnike rekurzivne identifikacije ARX modela prvog i drugog reda.

Na slici 6.1 prikazana je šema realizovana u MATLAB-Simulink okruženju koja služi za demonstraciju rekurzivne identifikacije ARX modela prvog i drugog reda. Proces je predstavljen jednostavnom funkcijom prenosa **Transfer Fcn1**, $W = \frac{1}{2s+1}$.

Kako bi se izvršila kvalitetna estimacija parametara potrebno je proces (koji je ovde predstavljem funkcijom prvog reda) pobuditi perzistentnom eksitacijom, koja je ovde realizovana kao pseudoslučajna binarna sekvenca nulte srednje vrednosti, koja je dobijena eksperimentalno određenom korekcijom.

Posmatrajmo jednostavnu relaciju ulaza i izlaza koja je data u formi diferencne jednačine:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \quad (6.11)$$



Slika 6.1: Simulink model eskperimenta za rekurzivno određivanje parametara ARX modela crne kutije

Kako je $e(t)$ beli šum, ovakav model često se naziva modelom greške jednačine, a vektor podešljivih parametara je

$$\pi = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a} \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b}]^T$$

Ako usvojimo

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}$$

$$B(z) = b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}$$

Sada pretpostavimo dva ARX modela, prvog i drugog reda, koji su dati u sledećoj formi ($n_a = n_b = 1$ i $n_a = n_b = 2$, respektivno za model prvog i drugog reda):

$$A(z)y(t) = B(z)u(t) + e(t) \quad (6.12)$$

a regresioni vektor definišemo za model prvog i drugog reda, respektivno, kao:

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \quad u(t-1)]$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad u(t-1) \quad u(t-2)]$$

Za model prvog reda je vektor parametara

$$\pi = [a_1 \quad b_1]^T$$

dok je za model drugog reda vektor parametara

$$\pi = [a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2]^T$$

U okviru ovog primera, u Simulink modelu napravljan je proces, kome je promenljivo pojačanje K , i u prvom delu primera je to skokovita promena sa vrednosti $K = 1.5$ na $K = 2$. Estimacija pojačanja ARX modela data kao

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n_b} b_i}{1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i}$$

Primenom rekurzivnog algoritma, sa uvođenjem faktora zaboravljanja, za ARX model prvog i drugog reda dobijena je estimacija pojačanja procesa, i estimacija pojačanja K je prikazana u toku vremena vršenja eksperimenta, kroz iteracije, slika (6.4). Svaka nova iteracija izvršava sa novom periodom odabiranja. Trajanje eksperimenta je 600 sekundi, tj. broj iteracija je $N = 600/T_s = 600/0.2 = 3000$.

Kada je faktor zaboravljanja $\lambda = 1$, tada je najlošija estimacija dinamičke promene pojačanja K , dok se smanjivanjem faktora zaboravljanja ubrzava estimacija.

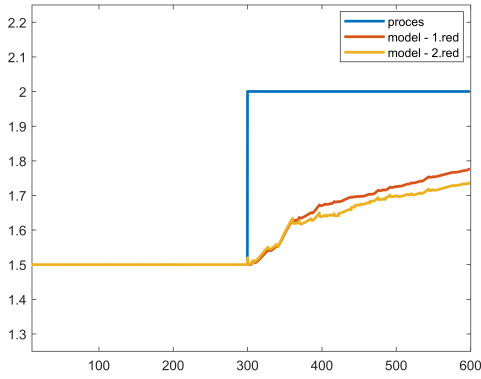
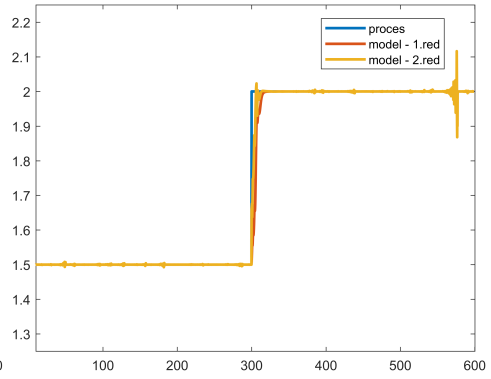
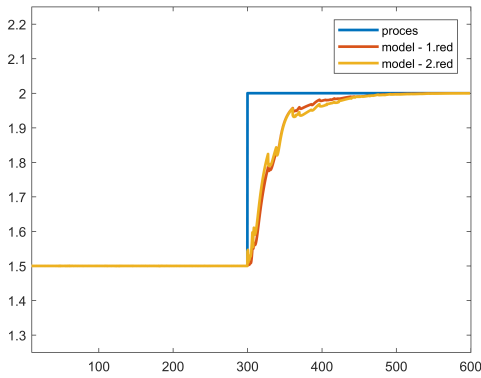
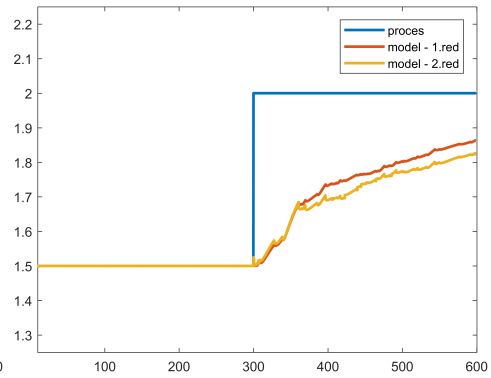
Na slici (6.4) prikazan je isti eksperiment, ali je simulirano postojanje šuma merenja, i izvršena je analiza ponašanja estimacije pojačanja K , spram vrednosti faktora zaboravljanja. Evidentno je da se smanjivanjem faktora zaboravljanja λ vrši brža estimacija promene pojačanja K , ali da se zbog prisustva šuma mora povećati faktor zaboravljanja kako estimacija ne bi bila previše zašumljena.

Listing 6.1: MATLAB program za rekurzivnu identifikaciju modela prvog i drugog reda

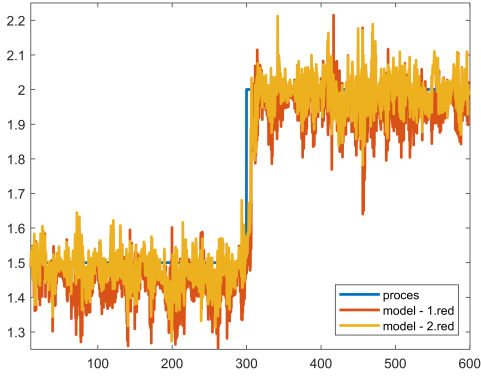
```

Ts=0.2;      % perioda odabiranja
sim('simulacija_rekurzivno.slx')
K=max(size(y)) % broj odbiraka
r=1:round(K/1);
r=1:round(K-5);
lambda=0.995; %faktor zaboravljanja
n=1;      % model prvog reda
K_init=50; % init Q i p batch algoritmom sa malim brojem merenja
Y=[y(2:K_init)];
S=[-y(1:K_init-1) u(1:K_init-1)];
Q=(S'*S); % alternativna inicijalizacija Q=0.001*eye(2*n,2*n)
p=S'*Y;   % alternativna inicijalizacija p=0.001*eye(2*n,1)
pi=[];
% rekurzivna identifikacija
for i=n+1:K
    phi=[-y(i-1) u(i-1)]';
    Q=lambda*Q+phi*phi';
    p=lambda*p+phi*y(i);
    pi=[pi Q^-1*p];
    if i>K_init
        ymr1(i)=-ymr1(i-1)*pi(1,i-n)+u(i-1)*pi(2,i-n);
        kr1(i-n)=(pi(2,i-n))/(1+pi(1,i-n));
    else
        ymr1(i)=y(i-1);
        kr1(i-n)=0;
    end
end
n=2;      % Model drugog reda
Y=[y(3:K_init)];
S=[-y(2:K_init-1) -y(1:K_init-2) u(2:K_init-1) u(1:K_init-2)];
Q=(S'*S); % alternativna inicijalizacija Q=0.001*eye(2*n,2*n)
p=S'*Y;   % alternativna inicijalizacija p=0.001*eye(2*n,1)
pi=[];
% rekurzivna identifikacija
for i=n+1:K
    phi=[-y(i-1) -y(i-2) u(i-1) u(i-2)]';
    Q=lambda*Q+phi*phi';
    p=lambda*p+phi*y(i);
    pi=[pi Q^-1*p];
    if i>K_init
        ymr2(i)=-ymr2(i-1)*pi(1,i-n)-ymr2(i-2)*pi(2,i-n)+u(i-1)*pi(3,i-n)
            +u(i-2)*pi(4,i-n);
        kr2(i-n)=(pi(3,i-n)+pi(4,i-n))/(1+pi(1,i-n)+pi(2,i-n));
    else
        ymr2(i)=y(i);
        kr2(i-n)=0;
    end
end
end
figure(1);
plot(t(r), k(r), t(r),kr1(r),t(r),kr2(r),'LineWidth', 2)
legend('proces', 'model - 1.red', 'model - 2.red')
axis([Ts*K_init Ts*K 1.25 2.25])
figure(2);
plot(t(r),y(r),t(r),ymr1(r),t(r),ymr2(r), 'LineWidth', 2)
legend('proces', 'model - 1.red', 'model - 2.red')

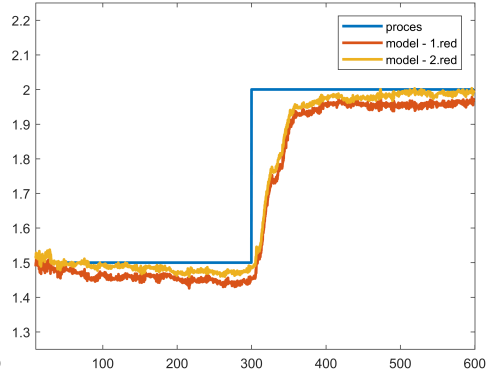
```

(a) Bez šuma, $\lambda = 1$ (b) bez šuma, $\lambda = 0.95$ (c) bez šuma, $\lambda = 0.995$ (d) bez šuma, $\lambda = 0.9995$

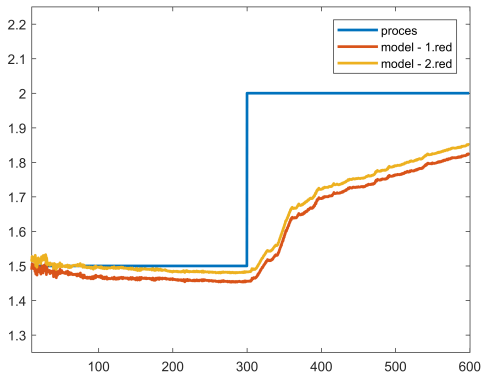
Slika 6.2: Rekurzivna identifikacija modela prvog i drugog reda sa različitim vrednostima faktora zaboravljanja λ , bez prisustva mernog šuma



(a) Umeren šum, $\lambda = 0.95$

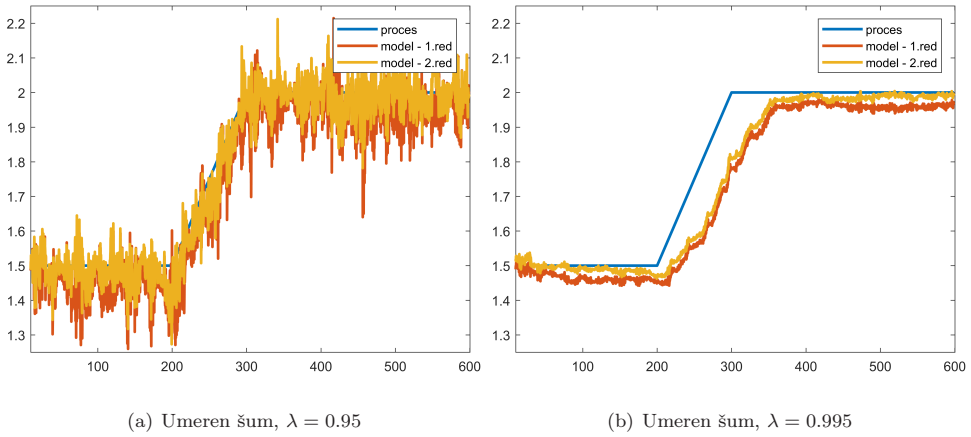


(b) Umeren šum, $\lambda = 0.995$



(c) Umeren šum, $\lambda = 0.9995$

Slika 6.3: Rekurzivna identifikacija modela prvog i drugog reda sa različitim vrednostima faktora zaboravljanja λ



Slika 6.4: Rekurzivna identifikacija modela prvog i drugog reda sa različitim vrednostima faktora zaboravljanja λ

Na slici (6.4), prikazana je primena priloženog algoritma za slučaj kada je promena pojačanja procesa K postepena, tj. sa odgovarajućim gradijentom, što je uglavnom i slučaj u industrijskoj praksi. Tada su zaključci slični, ali se može primetiti da je estimacija sa praktično dobrim rezultatima, s'tim da postoji određeno transportno kašnjenje.

Literatura

- [1] P. Adby, *Introduction to optimization methods*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer-controlled systems: theory and design*. Courier Corporation, 2013.
- [3] E. M. L. Beale, *Introduction to optimization*. Wiley-Interscience, 1988.
- [4] J. V. Beck and K. J. Arnold, *Parameter estimation in engineering and science*. James Beck, 1977.
- [5] J. Bendat and A. Pierson, *Random Data Analysis and Measurement Procedures*. Wiley, New York, 1986.
- [6] P. P. van den Bosch and A. C. van der Klauw, *Modeling, identification and simulation of dynamical systems*. crc Press, 1994.
- [7] B. Carnahan, H. A. Luther, and J. O. Wilkes, *Applied numerical methods*. John Wiley & Sons, Inc, 1969.
- [8] F. E. Cellier and J. Greifeneder, *Continuous system modeling*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical methods for engineers*, vol. 2. McGraw-Hill New York, 1998.
- [10] J. R. Cogdell, *Modeling Random Systems*. Prentice Hall, 2004.
- [11] J. E. Dennis Jr and R. B. Schnabel, *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. SIAM, 1996.
- [12] L. C. W. Dixon, *Nonlinear optimisation*. English Univ. Press, 1972.

- [13] Ž. M. Đurović and B. D. Kovačević, *Digitalni signali i sistemi: pregled teorije i rešeni zadaci*. Akademska misao, 2004.
- [14] Ž. Đurović and B. Kovačević, *Sistemi automatskog upravljanja*. Akademska misao, 2006.
- [15] P. Eykhoff, *System parameter and state estimation*. Technische Hogeschool Eindhoven, 1972.
- [16] V. V. Fedorov, *Theory of optimal experiments*. Elsevier, 1972.
- [17] G. C. Goodwin and R. L. Payne, *Dynamic system identification: experiment design and data analysis*. Academic press, 1977.
- [18] D. Graupe, "Identification of systems," 1972.
- [19] F. Gustafsson and N. Bergman, *MATLAB® for engineers explained*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [20] E. Hannan and M. Deistler, *The statistical theory of linear systems*. Wiley, New York, 1988.
- [21] S. S. Haykin, *Adaptive filter theory*. Pearson Education India, 2008.
- [22] M. T. Heath, *Scientific computing: an introductory survey*, vol. 2. McGraw-Hill New York, 2002.
- [23] F. Van Der Heijden, R. P. Duin, D. De Ridder, and D. M. Tax, *Classification, parameter estimation and state estimation: an engineering approach using MATLAB*. John Wiley & Sons, 2005.
- [24] F. B. Hildebrand, *Introduction to numerical analysis*. Courier Corporation, 1987.
- [25] D. M. Ingels, *What every engineer should know about computer modeling and simulation*. Marcel Dekker, Inc., 1985.
- [26] G. M. Jenkins and D. G. Watts, *Spectral analysis*. Holden-day, 1968.
- [27] D. C. Karnopp, D. L. Margolis, and R. C. Rosenberg, *System dynamics: a unified approach*. John Wiley, 1990.
- [28] S. M. Kay, *Modern spectral estimation*. Pearson Education India, 1988.
- [29] S. M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing, volume I: estimation theory*. Prentice Hall, 1993.
- [30] N. Kheir, *Systems modeling and computer simulation*, vol. 94. CRC Press, 1995.
- [31] B. D. Kovačević, Ž. Đurović, and S. Stanković, *Signali i sistemi*. Akademska misao, 2007.
- [32] B. Kovacevic and Z. Durovic, *Fundamentals of stochastic signals, systems and estimation theory: with worked examples*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.

- [33] B. Kovačević, Z. Banjac, and M. Milosavljević, *Adaptive digital filters*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [34] B. Kovacevic, M. Milosavljevic, M. Veinovic, and M. Markovic, *Robust digital speech processing*. Springer, Berlin, 2004.
- [35] E. Kreyszig, E. Kreyszig, and E. J. Norminton, *Advanced engineering mathematics*, vol. 72. John Wiley New York, 2006.
- [36] V. G. Kulkarni, *Modeling and analysis of stochastic systems*. CRC Press, 2016.
- [37] D. C. Kuncicky, *MATLAB programming*. Prentice-Hall, 2004.
- [38] M. Law Averill and K. W. David, *Simulation modeling and analysis*. Mc-Graw Hill, 2000.
- [39] D. F. Lawden, *Analytical Methods of Optimization*. Courier Corporation, 2006.
- [40] R. C. Lee, *Optimal estimation, identification, and control*. MIT, 1964.
- [41] J. R. Leigh, *Modelling and simulation*. Peregrinus, 1983.
- [42] L. Ljung and T. Söderström, *Theory and practice of recursive identification*, vol. 5. JSTOR, 1983.
- [43] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User, PTR Prentice Hall Information and System Sciences Series*. Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [44] L. Ljung, *System identification toolbox: User's guide*. Citeseer, 1995.
- [45] E. Magrab, S. Azarm, B. Balachandran, J. Duncan, K. Herold, and G. Walsh, *An Engineers guide to MATLAB: With applications from mechanical, aerospace, electrical, and civil engineer*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [46] R. K. Mehra and D. G. Lainiotis, *System identification advances and case studies*, vol. 126. Academic press, 1977.
- [47] J. M. Mendel, *Discrete techniques of parameter estimation: the equation error formulation*. M. Dekker New York, 1973.
- [48] J. L. Melsa, D. L. Cohn, et al., *Decision and estimation theory*. McGraw-Hill, 1978.
- [49] S. Miller and D. Childers, *Probability and random processes: With applications to signal processing and communications*. Academic Press, 2012.
- [50] T. K. Moon and W. C. Stirling, *Mathematical methods and algorithms for signal processing*. Prentice hall, 2000.
- [51] P. S. Naidu, *Modern spectrum analysis of time Series: Fast algorithms and error control techniques*. CRC Press, 1995.
- [52] K. Ogata, *Solving control engineering problems with MATLAB*. Prentice-Hall, Inc., 1994.

- [53] W. J. Palm, *Introduction to MATLAB 7 for Engineers*. McGraw-Hill New York, 2005.
- [54] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, random variables, and stochastic processes*. Tata McGraw-Hill Education, 2002.
- [55] M. Pidd *et al.*, *Computer modelling for discrete simulation*. Wiley Chichester,, England, 1989.
- [56] R. Pintelon and J. Schoukens, *System identification: a frequency domain approach*. John Wiley & Sons, 2012.
- [57] W. F. Ramirez, *Process control and identification*. Academic Press, 1994.
- [58] S. S. Rao and S. S. Rao, *Engineering optimization: theory and practice*. John Wiley & Sons, 2009.
- [59] G. W. Recktenwald, *Numerical methods with MATLAB: implementations and applications*. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [60] S. M. Ross, *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists*. Academic Press, 2014.
- [61] B. D. Ripley, *Stochastic simulation*, vol. 316. John Wiley & Sons, 2009.
- [62] J. Schoukens and R. Pintelon, *Identification of linear systems: a practical guideline to accurate modeling*. Elsevier, 2014.
- [63] N. Sinha, *Kushta. Modeling and Identification of Dynamic System*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1983.
- [64] H. W. Sorenson, *Parameter estimation: principles and problems*, vol. 9. M. Dekker, 1980.
- [65] T. Söderström and P. Stoica, *System identification*. Prentice-Hall, Inc., 1988.
- [66] J. U. Thoma, *Introduction to bond graphs and their applications*. Elsevier, 1975.
- [67] Y. Z. Tsympkin, “Osnovy informatsionnoi teorii identifikatsii (fundamentals of the informational identification theory),” 1984.
- [68] P. Stoica, R. L. Moses, *et al.*, *Spectral analysis of signals*, vol. 452. Pearson Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2005.
- [69] Y. Z. Tsympkin, *Fundamentals of the Theory of Learning Systems*. Nauka, Moscow, 1970.
- [70] M. Verhaegen and V. Verdult, *Filtering and system identification: a least squares approach*. Cambridge university press, 2007.
- [71] R. E. White, *Elements of Matrix Modeling and Computing with MATLAB*. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [72] S. J. Yakowitz, *Computational probability and simulation*, vol. 12. Advanced Book Program, 1977.

-
- [73] P. C. Young, *Recursive estimation and time-series analysis: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2012.