Glava II

# TEHNIČKI UVJETI ZA REGULACIONE SISTEME

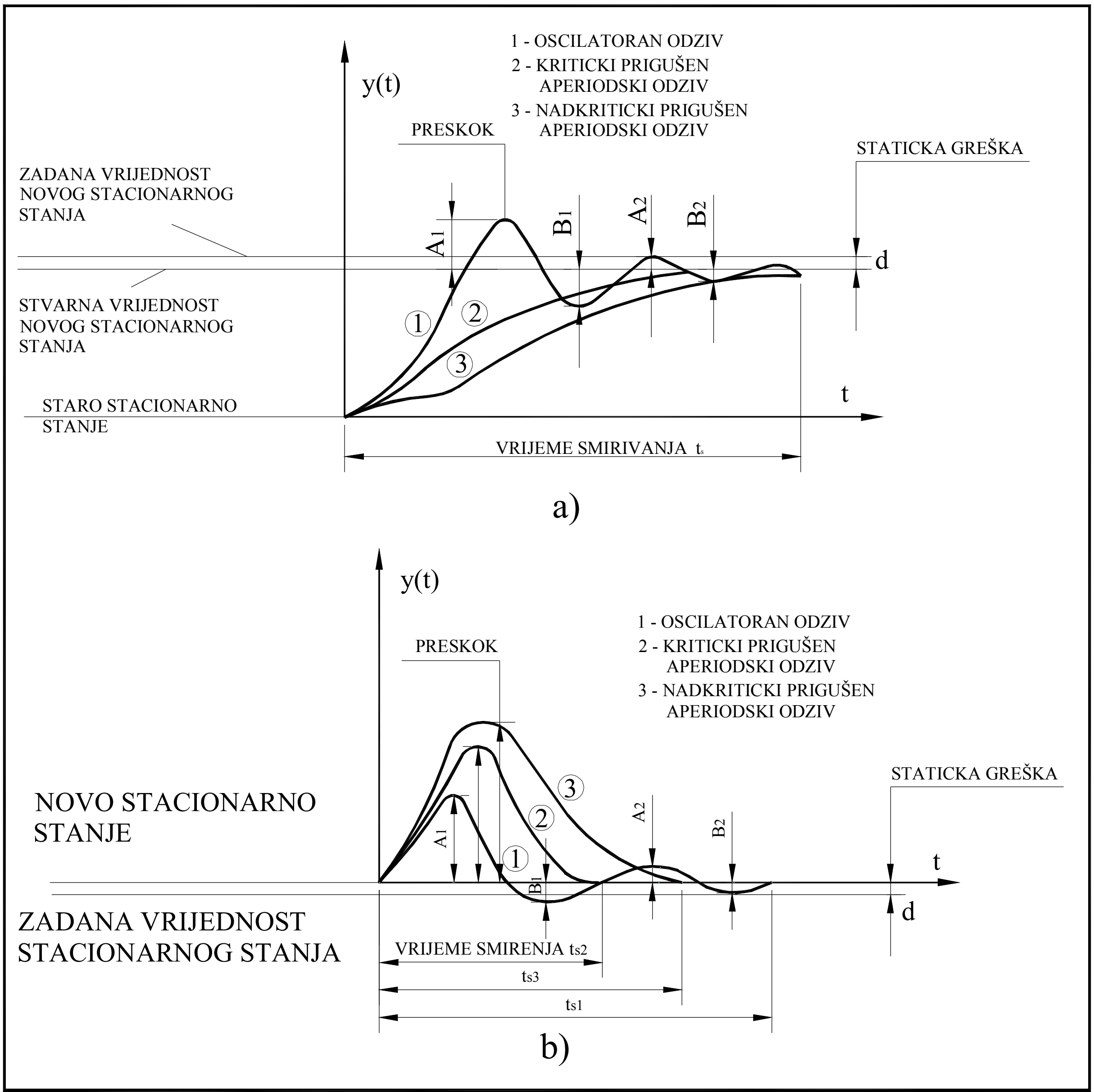
## 2.1. UVOD

Neosporno je da ogromna većina regulacionih kontura pripada skupu kontura u kojima dominira princip negativne povratne sprege. S obzirom da se kod svih sistema sa povratnom spregom kao temeljni problem postavlja pitanje stabilnosti konture, prirodan put ka kvantitativnoj ocjeni kvalitete rada konture i definiranja pokazatelja kvalitete regulacije vodi preko kvantativnog određivanja stupnja stabilnosti regulacionog kruga. Naravno postojanje apsolutne stabilnosti u konturi je samo nužan, ali ne i dovoljan uvjet, da se rad regulacionog sistema prihvati kao zadovoljavajući. Nužno je da kontura bude i relativno stabilna. Stupanj relativne stabilnosti konture će u daljem izlaganju upravo i biti onaj pokazatelj kvaliteta preko kojega će se ocijenjivati rad konture ili koji će biti temeljni tehnički uvjet pri sintezi regulacione konture.

Očevidno je, da tehnički uvjeti imaju svoje jasno fizikalno značenje samo u vremenskom domenu opisivanja sistema. Vremenski odziv sistema, ma kojeg tipa on bio, omogućava lagano određivanje osnovnih parametara koji ga karakteriziraju. Na primjer, na sl. 2.1. pokazano je nekoliko tipova vremenskih odziva zatvorene konture. Sl. 2.1.a) pokazuje odzive zatvorene konture pri promjeni zadane vrijednosti regulatora, a sl. 2.1.b) odzive zatvorene konture pri pojavi skokovite (impulsne) smetnje koja nastoji otkloniti reguliranu veličinu sistema sa zadane vrijednosti. Obje vrste odziva su od interesa, jer su prvi relevantni kod pozicionih servomehanizama, programske regulacije i računalski koordinirane regulacije, a drugi kod stabilizacionih kontura. U oba slučaja se vidi da se kvaliteta regulacije može kvantitativno opisati sa tri pokazatelja; veličinom prvog preskoka $A_1$, vremenom smirenja $t_s$, i statičkom greškom $\delta$. Moguće je uvesti i neke druge oznake (npr. veličinu drugog pozitivnog preskoka $A_2$, itd.), ali su te veličine vezene jednoznačno za već navedene tri i ne nose nikakvu novu informaciju u sebi, ali nekad mogu biti pogodne za primjenu. Idealno reguliran sistem bi imao jednoznačan skup vrijednosti $A_1 = 0, \delta = 0, t_s = 0$, što je, međutim, nemoguće postići, jer sistemi sa povratnom spregom kao svoju inherentnu osobinu nose pravilo: akcija za otklanjanje greške slijedi samo kao reakcija na pojavu greške. Zato realni sistemi sa povratnom spregom imaju te veličine različite od nule i tehnički uvjeti na kvalitet regulacije svode se upravo na definiciju dopuštenih vrijednosti tih triju veličina.

Veličina $\delta$ u principu može biti svedena na veoma malenu vrijednost uzimanjem u algoritam regulatora integralne komponente i nije vezana sa definicijom stabilnosti odziva (ali kao uzročnik postojanja integralne komponente u algoritmu regulatora posredno djeluje na stabilnost konture).

Veličine $A_1$ i $t_s$ za sve slučajeve linearnih sistema sa prigušenjima, ne većim od kritičkog, su jednoznačno povezane veličine, te ako je određena jedna, zapravo je određena i druga. Kako se u praksi veoma rijetko od sistema zahtijeva da ima nadkritički prigušen odziv, u daljem bit će izučavani slučajevi, koji leže između kritički prigušenog aperiodskog odziva i oscilatornog, sa nekim stupnjem oscilatornosti, definiranim relativnim odnosom prvog i drugo pozitivnog presoka. Iz svega navedenog slijedi, da će u daljem razmatranju oscilatornost prelaznog procesa, kao najvažniji pokazatelj kvalitete rada sistema, biti razmotrena prosto kao mjera relativne stabilnosti sistema.




**Slika 2.1.**

Ali, na žalost, veoma shvatljiva razmatranja koja su vezana uz definiciju kvaliteta regulacije, prema sl. 2.1., neprimjenjiva su direktno pri sintezi sistema sa povratnom spregom. Naime, metode sinteze sistema automatske regulacije su isključivo primjenjive u nevremenskim domenima ($s$ domenu, $j\omega$ domenu, Re–Im domenu itd.), te je potrebno tehničke uvjete, uvijek zadavane u vremenskom domenu, preslikati u domen u kome se vrši sinteza.

Ovo poglavlje će upravo prikazati napomenutu proceduru – definiranje tehničkih uvjeta u vremenskom domenu i njihovo preslikavanje u domen u kome se vrši sinteza [2].

## 2.2. TEHNIČKI UVJETI SISTEMA AUTOMATRSKE REGULACIJE U VREMENSKOM DOMENU

Da bi se definirali tehnički uvjeti za sisteme automatske regulacije dovoljno jednostavno, a za praktičke svrhe sa zadovoljavajućom korektnošću, moguće je izvršiti aproksimaciju odziva sistema $n$–tog reda sa sistemom drugog reda, temeljem sljedećeg razmatranja:

Odziv 1 sa sl. 2.1. kao oscilatoran, nastao je kao rezultat postojanja konjugirano–kompleksnog para korijena karakteristične jednadžbe sistema. Najveći utjecaj na formu odziva ima par korijena koji je najbliži imaginarnoj osi $s$ ravni. Ukoliko postoje i drugi korijeni, ali dalje od imaginarne ose, njihov realni dio ima veći apsolutni iznos i, prema tome, predstavljaju komponentu u odzivu koja isčezava u daleko kraćem vremenu negoli je $t_s$, te je amplitudni utjecaj toga para konjugirano – kompleksnih korijena zanemarljiv, ako se nalaze bar tri puta više lijevo u $s$ ravni, u usporedbi s prvim ili dominantnim parom. Prema tome, ovaj pristup je točan za slučaj sistema drugog reda, veoma dobra i opravdana aproksimacija sistema višeg reda s jednim dominantnim parom korijena i jedna komponenta točnog rješenja za slučaj sistema višeg reda kod koga nema dominantnog para korijena.

Prema tome, ako se pođe od karakteristične jednadžbe sistema drugog reda:

$$T_2^2\,\ddot{y} + T_1\dot{y} + y = k \cdot x \tag{2.1}$$

i ako se ograniči promatranje na oscilatorno rješenje, koje slijedi, ako je ispunjen uvjet

$$\frac{T_1}{T_2} < 2 \tag{2.2}$$

tada ocjenu oscilatornosti vremenske karakteristike se može izvršiti prema STEPENU GUŠENJA, koji je, po definiciji, veličina

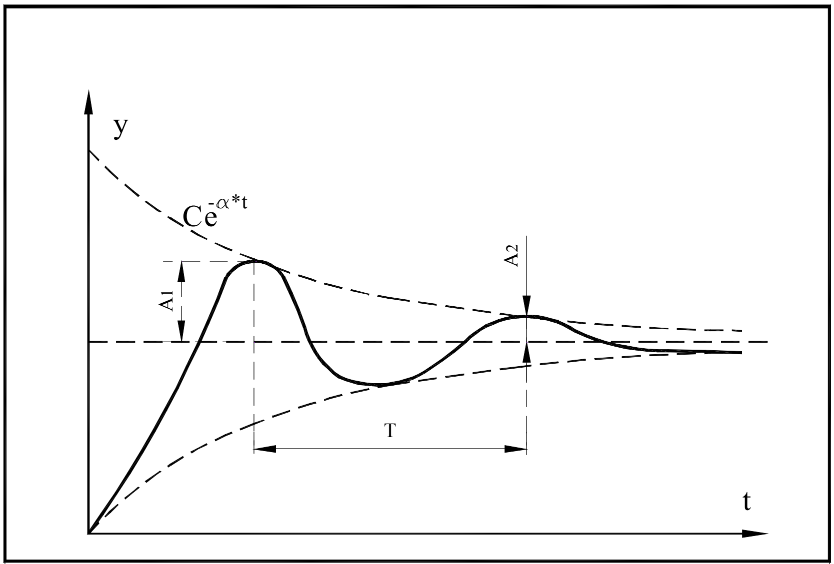
$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1} \tag{2.3}$$

Ako je konjugirano–kompleksni par korijena definiran sa:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta \tag{2.4}$$

tada je, suglasno slici 2.2. (odziv na skokovitu ulaznu funkciju),

$$\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_1 e^{-\alpha T} \tag{2.5}$$




**Slika 2.2.**

tj. pri zamjeni $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$A_2 = A_1 e^{-2\pi\frac{\alpha}{\omega}} \tag{2.6}$$

Postavivši (2.6) u (2.3) slijedi:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi\frac{\alpha}{\omega}} \tag{2.7}$$

Dakle, stupanj gušenja ovisi od odnosa realnog dijela korijena $\alpha$ prema imaginarnom $\omega$:

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{T_1}{2T_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (T_1/2T_2)^2}} \tag{2.8}$$

koji očevidno ovisi samo od odnosa $T_1/T_2$.

Jednadžba (2.7) je direktna veza tehničkih uvjeta u vremenskom domenu ($\psi$) sa $s$ domenom ($\alpha/\omega$). Ali, da bi se pristupilo sintezi u $s$ domenu, potrebno je imati identificiran objekt, sa punom informacijom o polovima i nulama prenosne funkcije, što je veoma teško ostvariti pri identifikaciji objekta – tehnološkog procesa, jer metode identifikacije praktično primjenjive na tehničke procese ne daju kao rezultat prenosnu funkciju, nego vremensku ili amplitudno – faznu karakteristiku. Čak i pri upotrebi dosta složenih pretvaranja karakteristika dobivenih pokusom, u prenosnu funkciju, pojavljuje se teškoća uzrokovana činjenicom, da tehnološki procesi najčešće sadrže elemente kako prenosnog tako i transportnog (čistog) kašnjenja, što daje transcendentnu formu prenosnoj funkciji, a poznato je da su metode sinteze u $s$ ravni primjenjive samo na racionalne forme prenosnih funkcija. Tako, veoma pogodni postupci upotrebe $s$ ravni pri sintezi pozicionih servomehanizama, elektromehaničkih konvertora energije itd. gube primjenjivost pri sintezi regulacionih sistema na objektima–tehnološkim procesima, koji uslijed prisustva kašnjenja pripadaju neminimalno–faznim sistemima. Iz tih razloga, sinteza neće biti moguća ni preko logaritamskih karakteristika, te će slijedeći korak biti preslikavanje jednadžbe (2.7) u domen amplitudno–fazne karakteristike gdje će se i vršiti sinteza.

## 2.3. TEHNIČKI UVJETI SISTEMA AUTOMATSKE REGULACIJE U DOMENU AMPLITUDNO – FAZNE KARAKTERISTIKE

Amplitudno–fazna karakteristika sistema opisanog jednadžbom (2.1) je:

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T_2^2)^2 + \omega^2 T_1^2}} \cdot e^{j \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\omega T_1}{1-\omega^2 T_2^2}\right)} \tag{2.9}$$

Grafički oblik ove amplitudno–fazne karakteristike, kao i amplitudno–frekventne za isti sistem prikazani su na slici 2.3.

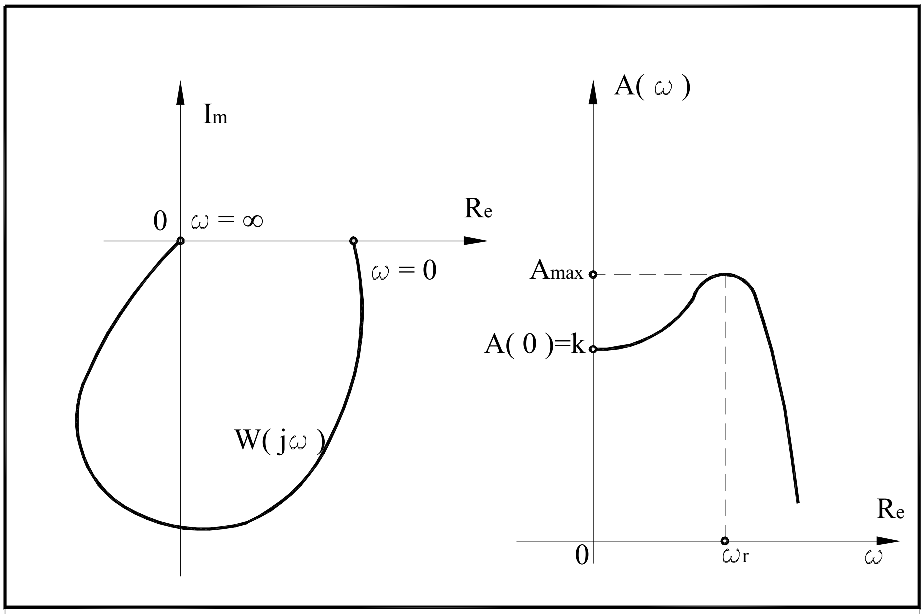
Oscilatornom karakteru vremenske karakteristike odgovara postojanje u amlitudno–frekventnoj karakteristici rezonantnog vrha, pri čemu nije teško pokazati da među veličinom toga vrha i stupnjom gušenja $\psi$ postoji jednoznačna veza.

Stvarno, amplitudno–frekventna karakteristika ima maksimum kada potkorijeni izraz u nazivniku (2.9) ima minimum. Uzevši derivaciju toga izraza i izjednačujući ga sa nulom, dobije se izraz za rezonantnu frekvenciju:

$$\omega_r = \frac{1}{T_2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} \tag{2.10}$$

Ako se vrijednosti rezonantne frekvencije uvrsti u (2.9), dobije se veličina rezonantnog vrha:

$$A_{max} = \frac{k}{\frac{T_1}{T_2}\sqrt{1 - \left(\frac{T_1}{2T_2}\right)^2}} \tag{2.11}$$




**Slika 2.3.**

Na taj način odnos maksimuma amplitudno–frekventne karakteristike $A(\omega_r) = A_{max}$ prema njezinoj veličini pri nultoj frekvenciji $A(0) = k$, kao i stupanj gušenja $\psi$ ovisi samo od odnosa vremenskih konstanti $T_1/T_2$. Rezultati proračuna ovisnosti $A_{max}/A(0)$, a također i odnosa prirodne frekvencije sistema $\omega$ prema rezonantnoj frekvenciji $\omega_r$ od stupnja gušenja $\psi$ dati su u Tabeli 6.

Tabela 6.

| $\psi$ | 0,65 | 0.70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,90 | 0,95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{A_{max}}}{\mathrm{A(0)}}$ | 3,09 | 2,70 | 2,38 | 2,09 | 1,80 | 1,55 | 1,29 |
| $\frac{\omega}{\omega_r}$ | 1,012 | 1,019 | 1,024 | 1,035 | 1,049 | 1,075 | 1,13 |

Pri tome je uzet u obzir samo onaj dijapazon vrijednosti $\psi$ koji je od praktičnog interesa.

Vidljivo je da se veličina rezonantnog vrha povećava sa smanjenjem stupnja gušenja $\psi$, te je veličina

$$\frac{\mathrm{A_{max}}}{\mathrm{A(0)}} = M \tag{2.12}$$

dobila naziv POKAZATELJ OSCILATORNOSTI.

Za $M > 1{,}5$ Tabela 6. pokazuje da se prirodna frekvencija $\omega$ veoma malo razlikuje od rezonantne frekvencije $\omega_r$.

Na ovaj način je izvršeno preslikavanje tehničkog uvjeta $\psi$ iz vremenskog domena u domen amplitudno–frekventne karakteristike, dovodeći u vezu veličinu $\psi$ određenu u vremenskom domenu i veličinu $M$ koja ima svoju definiciju u domenu amplitudno–frekventne karakteristike.

Sljedeći korak je preslikavanje $M$ u domen koji je izabran kao domen sinteze, tj. domen amplitudno–fazne karakteristike.

Neka je amplitudno–fazna karakteristika otvorenog sistema $W(j\omega)$ data kao na sl. 2.4.

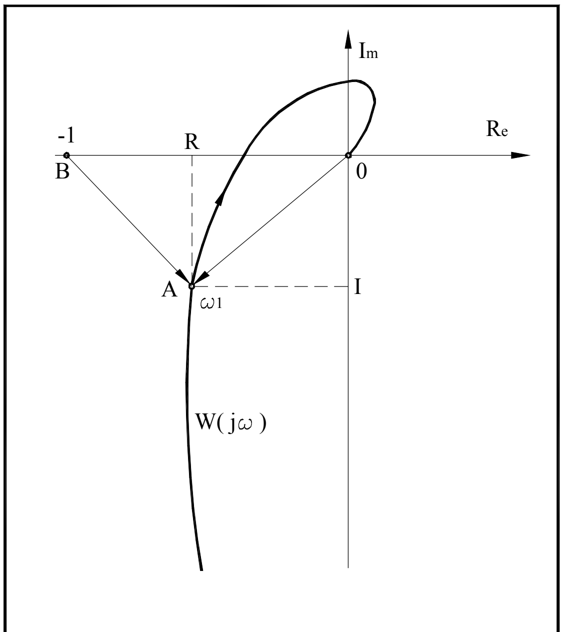
Amplitudno–frekventna karakteristika zatvorenog sistema je u tom slučaju:

$$\mathrm{A}(\omega) = |\Phi(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|W(j\omega)|}{|1 + W(j\omega)|} \tag{2.13}$$

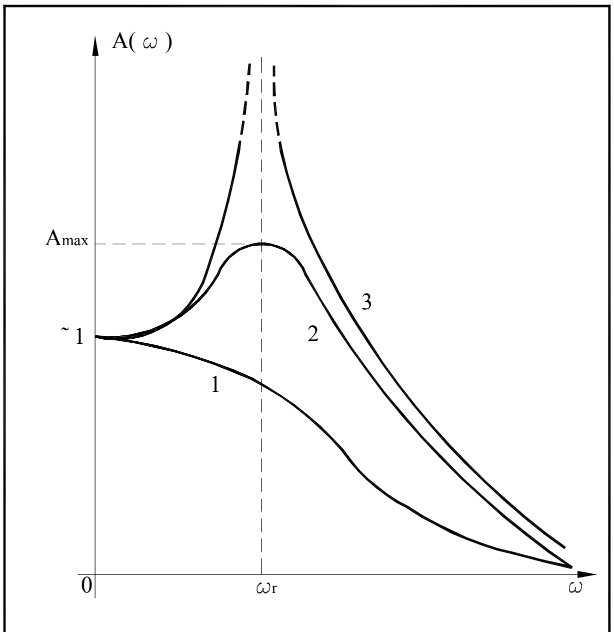
Brojnik ove formule za neku frekvenciju $\omega_1$ jednak je dužini odreska $OA$, a nazivnik dužini odreska $BA$, te slijedi:

$$\mathrm{A}(\omega_1) = \frac{OA}{BA} \tag{2.14}$$

Ako sistem sadrži u konturi regulator, koji ima u algoritmu upravljanja integralnu komponentu ili ako je objekt bez svojstva samoizravnanja (astatski), tada modul amplitudno–fazne karakteristike otvorenog sistema pri $\omega = 0$ postaje beskonačan. U tom slučaju odnos dužina odrezaka $OA$ i $BA$ pri $\omega = 0$ je jednak jedinici. Ako u sistemu postoji regulator sa samo proporcionalnim djelovanjem, tada je taj odnos blizak jedinici, jer dužina odreska $OA$ je u tom slučaju, po pravilu, mnogo veća od jedinice.




**Slika 2.4.**




**Slika 2.5.**

Pri povećanju frekvencije, točka $A$ se pomjera kako je naznačeno stelicom, ako amplitudno–fazna karakteristika otvorenog sistema prolazi dovoljno daleko od točke $(-1, j0)$, tada dužina odreska $BA$ cijelo vrijeme ostaje duža od veličine odreska $OA$ i pri $\omega \to \infty$ stremi prema jedinici. Istovremeno s tim, dužina odreska $OA$ se smanjuje stremeći nuli. Zato pri promjeni frekvencije od $\omega = 0$ do $\omega \to \infty$ amplitudno–frekventna karakteristika zatvorenog sistema se monotono smanjuje od jedinice do nule kao kriva 1 na sl. 2.5.

Ako amplitudno–fazna karakteristika prolazi dosta blizu točke $(-1, j0)$, dužina odreska $BA$ pri nekim frekvencijama je manje od dužine odreska $OA$. Zato u nekom dijapazonu frekvencija od $\omega = 0$ do $\omega = \omega_r$, amplitudno–frekventna karakteristika zatvorenog sistema raste od jedinice do nekog maksimalnog iznosa $A_{max}$. Idući dalje, kao posljedica toga da pri $\omega \to \infty$, $OA$ stremi nuli, a $OB$ jedinici, karakteristika stremi nuli (sl. 2.5. kriva 2). Čim bliže prolazi amplitudno–fazna karakteristika otvorenog sistema točki $(-1, j0)$ tim je veći maksimum amplitudno–frekventne karakteristike zatvorenog sistema. Na kraju, kada amplitudno–fazna karakteristika zatvorenog sistema prolazi kroz točku $(-1, j0)$, maksimum amplitudno–frekventne karakteristike zatvorenog sistema ide u beskonačnost (sl. 2.5. kriva 3), jer je u tom slučaju $BA = 0$ na mjestu presjeka $W(j\omega)$ sa negativnom realnom osom.

Na taj način čim veći maksimum ima amplitudna–frekventna karakteristika zatvorenog sistema, tim je amplitudno–fazna karakteristika otvorenog sistema bliža «opasnoj» točki $(-1, j0)$ i kao posljedica toga manja je relativna stabilnost sistema.

Koristeći izraz (2.14), može se odrediti kakve uvjete mora zadovoljavati položaj amplitudno–fazne kaakteristike u odnosu na točku $(-1, j0)$ da bi maksimum amplitudno–frekventne karakteristike zatvorenog sistema imao zadanu veličinu. U tu svrhu je neophodno naći geometrijsko mjesto točka na kompleksnoj ravni amplitudno–fazne karakteristike otvorenog sistema koje zadovoljava uvjet da odnos odrezaka $OA$ i $BA$ ima konstantnu veličinu M:

$$\frac{OA}{BA} = M = konst. \tag{2.15}$$

Sa slike 2.4. slijedi:

$$\mathrm{OA} = \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{I}^2} \tag{2.16}$$

$$BA = \sqrt{(1 - R)^2 + I^2} \tag{2.17}$$

to jest:

$$M^2 = \frac{R^2 + I^2}{(1 - R)^2 + I^2} \tag{2.18}$$

Poslije transformacija, posljednja jednadžba poprima vid:

$$\left(R + \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + I^2 = \left(\frac{M}{1 - M^2}\right)^2 \tag{2.19}$$

Dobivena jednadžba je jednadžba kruga radijusa: kojega je:

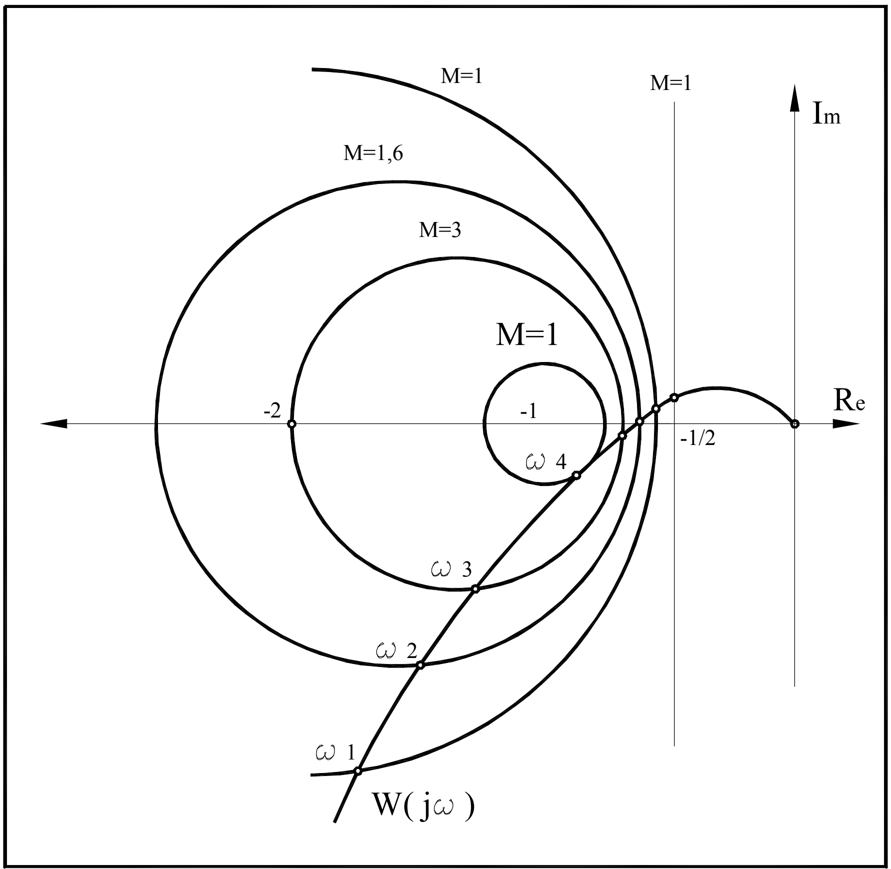
$$r = \frac{M}{M^2 - 1} \tag{2.20}$$

a centar je smješten na negativnoj realnoj poluosi na udaljenosti

$$R_0 = \frac{M^2}{M^2 - 1} \tag{2.21}$$

od koordinatnog početka.

Na slici 2.6 pokazana je familija krugova za različite iznose $M$. Dobiveni kružni dijagram omogućava laganu konstrukciju amplitudno–frekventne karakteristike zatvorenog sistema na temelju amplitudno–fazne karakteristike otvorenog sistema, jer je $A(\omega_1)$ za neku frekvenciju $\omega_1$ jednako indeksu $M$ kruga koji siječe $W(j\omega)$ pri toj frekvenciji. Nije teško primijetiti da je maksimum amplitudno–frekventne karakteristike zatvorenog sistema jednak indeksu kruga kojeg tangira amplitudno–fazna karakteristika otvorenog sistema, a frekvencija na kojoj je maksimum amplitude (rezonantna frekvencija sistema), je jednaka frekvenciji pri kojoj se dešava tangiranje.




**Slika 2.6.**

Na taj način zahtjev, da maksimum amplitudno–frekvetne karakteristike zatvorenog sistema ne bude veći od unaprijed zadate veličine, svodi se na zahtjev da amplitudno–fazna karakteristika otvorenog sistema ne uđe u oblast ograničenu krugom sa parametrima $r\ i\ R_0$, datim jednadžbama (2.20) i (2.21).

Dakle, uvjet apsolutne stabilnosti, koji se izražava zahtjevom da $W(j\omega)$ ne obuhvatiti točku $(-1, j0)$, se pooštrava na uvjet relativne stabilnosti, koji traži da $W(j\omega)$ ne uđe u zabranjenu oblast koja okružava «opasnu» točku $(-1, j0)$.

Na ovaj način tehnički uvjeti na kvalitet prelaznog procesa zatvorene konture, definirani u vremenskom domenu sa $\psi$, preslikani su u domen u kome će se vršiti sinteza konture, tj. domen amplitudno–fazne karakteristike, gdje su tehnički uvjeti karakterizirani brojem $M$.

U tehničkoj praksi se smatra, da sistem sa povratnom spregom ima zadovoljavajuću relativnu stabilnost (rezervu stabilnosti) ako pokazatelj oscilatornosti $M$ nije veći od 3, što odgovara približno relativnoj stabilnosti sistema podešenog prema integralnom kriteriju MIN $\int \varepsilon_y^2\, dt$, gdje je $\varepsilon_y$ greška koordinate $y$. Na veću relativnu stabilnost nego je $M$ = 1 obično se ne ide, jer to daje preveliki iznos $\int \varepsilon_y^2\, dt$ i veliko vrijeme smirenja $T_s$.

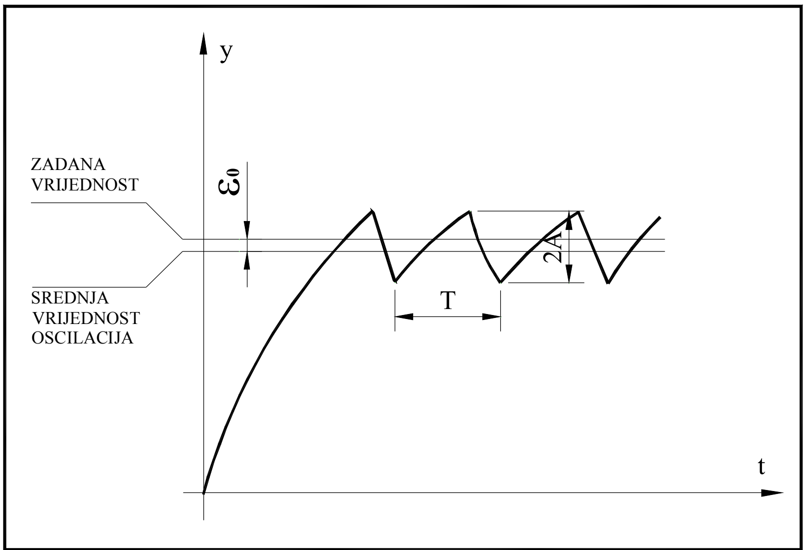
S obzirom da praktično upotrebljivi opseg $M$ ide od $M$ = 1 do $M$ = 3, tipični prelazni režimi su odabrani kako je pokazano u Tabeli 7. Izbor jednog od ovih kriterija ovisi od konkretnog tehnološkog procesa ili vrste regulirane veličine, sukladno s karakteristikama kriterija s obzirom na $T_s$ i $A_1$ i sa zahtjevima procesa koji se regulira. Treba napomenuti da se kao opis kvaliteta regulacione konture može koristiti i $R_d$ koji se zove POKAZATELJ DINAMIČKOG KVALITETA konture, a jednak je procentualnom iznosu $A_1$, od odziva nereguliranog objekta.

Tabela 7.

| $M$ | Relativna stabilnost približno odgovara onoj koju ima sistem podešen prema kriteriju | N a z i v | Karakteristike odziva |
|---|---|---|---|
| 3 | $min \int \varepsilon_y^2 \, dt$ | Kriterijum minimuma integrala kvadrata greške | $T_s$ veliko, $A_1$ maleno |
| ~1,61 | $B_1 = 0{,}2\, A_1$ | Kriterijum 20%–tne oscilatornosti | $T_s$ osrednje, $A_1$ osrednje |
| 1 | $B_1 = 0$ | Aperiodički kriterijum | $T_s$ maleno, $A_1$ veliko |

## 2.4. TEHNIČKI UVJETI ZA KONTURE SA DVOPOZICIONIM REGULATORIMA

U odjeljcima 2.2. i 2.3. izučavani tehnički uvjeti na sisteme automatskog upravljanja se odnose, na konture regulirane linearnim regulatorima tipa P, PI, PD, I, PID, te su i odzivi sa sl. 2.1. sukladno s tim. Međutim, dvopozicioni regulatori daju odzive suglasno sl. 2.7, te je potrebno definirati tehničke uvjete na sisteme sa takvim regulatorima, i to samo u vremenskom domenu,




**Slika 2.7.**

pošto za nelinearne sisteme od svih metoda, imaju primjenu samo metode koje izučavaju sistem u vremenskom domenu ili domenu faznog prostora (fazne ravni za sisteme do drugog reda). Međutim, pošto vrijeme nije eksplicitna koordinata u metodi faznog prostora, a vrijeme je jedan od glavnih tehničkih uvjeta u ovakvim sistemima, preostaje samo da se razmatra vremenski domen i da se sinteza vrši korištenjem činjenice, da je sistem sa dvopozicionim regulatorom zapravo u odsječcima linearan sistem. Tehnički uvjeti na zatvorene regulacione konture sa dvopozicionim regulatorima odnose se isključivo na paremetre kvazistacionarnog stanja, tj. stacionarnih oscilacija oko zadane vrijednosti, a to su:

$T$ – period oscilacija
$A$ – amplituda oscilacija
$\varepsilon_0$ – statička greška srednje vrijednosti oscilacija.

Ako ovakvi sistemi u sebi imaju prekidačke elemente kontaktnog tipa, tada je veoma važno da broj prekidanja u jedinici vremena bude što manji (da se produži životni vijek kontakta), te slijedi zahtjev da $T$ bude što veće.

Prirodno je da trenutačna odstupanja od zadane vrijednosti budu što manja, te se traži da i veličina $2A$ bude što manja. Također je potrebno da i $\varepsilon_0$ bude što manje.

Kako će biti pokazano kasnije (glava IV), prva dva zahtjeva su kontradiktorna, jer smanjenje $2A$ smanjuje i $T$, te se u ovakvim sistemima obično ide na kompromis, koji se točno definira za svaki konkretni slučaj, ovisno o tehnološkom procesu koji se regulira.

Međutim, ako su prekidački elementi u ovakvom sistemu beskontaktni, te im životni vijek nije ovisan o broju prekljućivanja, kao osnovni uvjet se pojavljuje $2A$, a o $T$ se ne vodi posebno računa, nego se $T$ tretira kao ovisan parametar na koji se ne postavljaju posebni zahtjevi.