

---

# **Upravljanje procesima**

**Srbijanka Turajlić**

**Beograd 2011**



## Predgovor

---

Brojni teorijski rezultati doveli su do toga da se teorija automatskog upravljanja često posmatra kao "primenjena matematika". Namera, ove knjige je da pokaže da je ona pored toga, ili čak i pre toga, mnogo više "primenjena filozofija". To naravno ne znači da se ovim želi umanjiti značaj matematičkih rezultata. Oni su sami po sebi neizbežni. Šta više, kao što će se čitalac uveriti, oni zauzimaju značajan deo prostora u tekstu koji sledi. Suština je, međutim u tome, da oni zapravo nemaju smisla, ako se ne pronikne u samu filozofiju upravljanja i ako se ne uoče kompromisi koji se, u svakoj teoriji, nužno prave između realnosti i raspoloživog matematičkog aparata. Otuda je pažnja posvećena prvenstveno razumevanju samog pristupa projektovanju upravljanja, dok je teorijsko izvođenje u nekim slučajevima svedeno na uvodne, osnovne rezultate.

Imajući u vidu da su savremene metode projektovanja visoko matematizirane i često usmerene na specifične modele procesa, pri njihovom izučavanju često se gube iz vida osnovni fizički fenomeni na kojima su one originalno zasnovane. Nadalje, dinamika teorijskog razvoja dovela je, tokom godina, do niza paralelnih teorija koje se naizgled veoma razlikuju, a koje bar za neke karakteristične modele imaju isto ishodište. U želji da se, bar u nekoj meri, prevaziđu ovi problemi učinjen je pokušaj da se izloži uporedni pregled osnovnih polazišta različitih metoda i to na jednostavnom karakterističnom modelu. Na taj način uspostavljen je fizički smisao izloženih metoda i postavljena je osnova za eventualno kasnije detaljnije proučavanje onih metoda za koje se proceni da će biti od koristi u rešavanju nekog konkretnog problema.

Pretpostavljajući da čitalac vlada osnovama klasične teorije upravljanja, pažnja je usmerena na savremene metode upravljanja. Pri tome, budući da će svi algoritmi upravljanja biti implementirani na računaru razmatraju se problemi projektovanja diskretnih kontrolera.

Budući da se u savremenoj teoriji upravljanja projektovanje kontrolera zasniva na poznavanju matematičkog modela, izlaganje počinje od metodologije za formiranje matematičkog modela procesa i praktičnih problema koji pri tome nastaju. Sa teorijske tačke gledišta, izlaganje je ograničeno na model linearnog regresora i metodu najmanjih kvadrata. Ovo opredeljenje uslovljeno je ne samo širokom rasprostranjenosti ovog modela, već i činjenicom da gotovo svi teorijski pristupi određivanju matematičkog modela, primenjeni na ovaj model daju isti rezultat. U tom smislu izloženi pregled različitih metodologija predstavlja polaznu osnovu za dalje proučavanje rezultata njihove primene na drugačijim modelima. Pored toga, metoda najmanjih kvadrata omogućava i da se jednostavno sagledaju gotovo svi problemi vezani za praktičnu implementaciju različitih algoritama za identifikaciju matematičkog modela.

Sledeće poglavlje daje kratak pregled rezultata klasične teorije upravljanja. Ovde se ukazuje na logiku razvoja intuitivnih rešenja koja se u osnovi sastoje u nastojanju da se na pojednostavljen način oponaša operatorsko vođenje procesa. Posebno se ukazuje na domete do kojih se može doći kada se jedan tako složen mehanizam kao što je čovek zamenjuje matematičkim modelom. Otuda je prirodno da savremena teorija upravljanja napušta ovaj pristup i usmerava se ka drugačijim kriterijuma koji su primereniji matematičkom modeliranju.

U okviru savremene teorije upravljanja kao prvo se izlaže optimalno upravljanje koje se često koristi i kao mera valjanosti svih drugih rešenja. Akcenat je stavljen na dinamičko programiranje koje omogućava da se primenom jednog, u osnovi jednostavnog principa, reši veoma široki spektar problema. Privlačnost Belmanovog principa optimalnosti leži u činjenici da je on ugrađen u svakodnevno ljudsko iskustvo. Nešto što svaki čovek intuitivno zna i uspešno koristi u mnogim situacijama, pretočeno u jezik matematike, postaje moćan alat u rešavanju jedne klase problema automatskog upravljanja. Dobijeno rešenje iskorišćeno je i kao reprezent projektovanja kontrolera zatvaranjem povratne sprege po stanju.

Projektovanju kontrolera na osnovu ulazno/izlaznih modela posvećeno je sledeće poglavlje. Ono započinje prediktivnim upravljanjem kao intuitivno najjednostavnijim konceptom

koji vodi ka optimalnom rešenju. Daljim proširenjem kriterijuma prediktivno upravljanje prerasta u opštu metodu za rešavanje problema praćenja i podešavanja polova sistema. Konačno, problem nedovoljno poznatog ili sporo promenljivog modela procesa obrađen je u sledećem poglavlju u kome se izlažu osnovi teorije adaptivnog upravljanja.

Poslednje poglavlje posvećeno je osnovama fazi upravljanja, koje se poslednjih decenija prošlog veka razvilo kao jedan potpuno novi i drugačiji koncept posmatranja modeliranja sistema i shodno tome i projektovanja odgovarajućih kontrolera. Možda je najtačnije reći da nas fazi koncept vraća ka klasičnoj teoriji upravljanja u smislu oponašanja čoveka. Međutim, uviđajući da čovek u obavljanju svojih aktivnosti svakako ne rešava diferencijalne jednačine, fazi pristup uvodi drugačije modeliranje zasnovano na lingvističkim promenljivim. Tako se iz sveta brojeva u kome je zarobljena klasična teorija prešlo u svet pojmova koje čovek koristi u rasuđivanju i donošenju odluka.

# SADRŽAJ

<b>1 U nastojanju da se oponaša priroda .....</b>	<b>1</b>
1.1 Upravljanje i regulacija kao intuitivna aktivnost .....	1
1.2 Zatvaranje povratne sprege .....	3
1.3 Kvantifikacija kao osnov projektovanja klasičnih kontrolera .....	6
1.4 U potrazi za mehanizmom odlučivanja – period savremene automatike.....	8
1.5 Zatvaranje kruga.....	10
<b>2 Modeliranje sistema .....</b>	<b>13</b>
2.1 Sistem i proces.....	13
2.2 Matematički model .....	15
2.3 Mogući pristupi u izboru matematičkog modela .....	17
2.4 Određivanje parametara matematičkog modela.....	20
2.5 Linearizacija modela .....	22
2.6 Linearni prediktor .....	27
2.6.1 <i>Prediktor lineranog modela – greška izlaza i greška jednačine.....</i>	<i>27</i>
2.6.2 <i>Model linearnog procesa sa nemodeliranim poremećajem .....</i>	<i>29</i>
2.7 Model linearne regresije i metod najmanjih kvadrata.....	30
2.7.1 <i>Minimizacija funkcije greške izlaza - metod najmanjih kvadrata.....</i>	<i>30</i>
2.7.2 <i>Normalne jednačine.....</i>	<i>31</i>
2.7.3 <i>Moguće interpretacije funkcije kriterijuma .....</i>	<i>33</i>
2.8 Stohastički pristup estimaciji.....	34
2.8.1 <i>Mogući izbori funkcije kriterijuma .....</i>	<i>34</i>
2.8.2 <i>Linearni estimator minimalne varijanse .....</i>	<i>36</i>
2.9 Rekurzivni algoritmi.....	39
2.9.1 <i>Rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata .....</i>	<i>39</i>
2.9.2 <i>Inicijalizacija rekurzivnog algoritma .....</i>	<i>40</i>
2.9.3 <i>Izbor početne vrednosti matrice <math>P_0</math>.....</i>	<i>42</i>
2.9.4 <i>Rekurzivni algoritam minimalne varijanse - Kalmanov filter.....</i>	<i>42</i>
2.9.5 <i>Metod stohastičke aproksimacije .....</i>	<i>43</i>
2.9.6 <i>Rekurzivni projekcioni algoritmi .....</i>	<i>44</i>
2.10 Perzistentno pobuđujući signali .....	47
2.10.1 <i>Estimacija u zatvorenoj sprezi .....</i>	<i>51</i>
2.11 Modeliranje u prostoru stanja.....	52
2.11.1 <i>Stanje sistema.....</i>	<i>52</i>
2.11.2 <i>Linearni model u prostoru stanja.....</i>	<i>53</i>

2.12	Eksperimentalno snimanje podataka .....	55
<b>3</b>	<b>Klasična teorija projektovanja sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom .....</b>	<b>59</b>
3.1	Linearni zakoni upravljanja .....	59
3.2	Ocena performanse .....	64
3.3	Grafo-analitičke metode projektovanja .....	66
3.3.1	<i>Projektovanje u frekvencijskom domenu .....</i>	<i>66</i>
3.3.2	<i>Projektovanje u kompleksnom domenu.....</i>	<i>69</i>
3.3.3	<i>Kompenzacija poremećaja – prenosno upravljanje .....</i>	<i>70</i>
3.3.4	<i>Smitov prediktor.....</i>	<i>70</i>
3.4	Projektovanje kontrolera u prostoru stanja .....	72
3.4.1	<i>Podošavanje polova .....</i>	<i>72</i>
3.4.2	<i>Implementacija kontrolera .....</i>	<i>73</i>
3.4.3	<i>Luenbergerov observer identiteta.....</i>	<i>73</i>
3.4.4	<i>Kalmanov filter.....</i>	<i>74</i>
<b>4</b>	<b>Optimalno upravljanje.....</b>	<b>77</b>
4.1	Optimalno rešenje problema .....	77
4.1.1	<i>Matematički model sistema .....</i>	<i>77</i>
4.1.2	<i>Fizička ograničenja.....</i>	<i>78</i>
4.1.3	<i>Kriterijum performanse.....</i>	<i>79</i>
4.1.4	<i>Formulacija problema optimalnog upravljanja .....</i>	<i>80</i>
4.1.5	<i>Implementacija rešenja.....</i>	<i>81</i>
4.2	Kriterijum performanse sistema.....	81
4.2.1	<i>Osobine funkcije kriterijuma .....</i>	<i>81</i>
4.2.2	<i>Kontrolabilnost sistema .....</i>	<i>83</i>
4.2.3	<i>Specifikacija problema i odgovarajućih kriterijuma performanse.....</i>	<i>83</i>
4.3	Rešavanje problema optimalnog upravljanja.....	89
4.3.1	<i>Statičko optimalno upravljanje.....</i>	<i>89</i>
4.3.2	<i>Dinamičko optimalno upravljanje.....</i>	<i>90</i>
4.4	Dinamičko programiranje.....	90
4.4.1	<i>Belmanov princip optimalnosti .....</i>	<i>90</i>
4.4.2	<i>Dinamičko programiranje .....</i>	<i>91</i>
4.4.3	<i>Optimalno upravljanje dinamičkim sistemom .....</i>	<i>94</i>
4.5	Linearni optimalni regulator .....	103
4.5.1	<i>Minimizacija mere prelaza.....</i>	<i>103</i>
4.5.2	<i>Matrična Rikatijeva diferentna jednačina .....</i>	<i>106</i>
4.5.3	<i>Optimalni diskretni kontroler na beskonačnom intervalu vremena .....</i>	<i>108</i>
4.5.4	<i>Stabilnost kontrolera .....</i>	<i>109</i>
4.5.5	<i>Optimalni kontinualni kontinualni kontroler na neograničenom intervalu vremena .....</i>	<i>112</i>

<b>5</b>	<b>Savremene metode projektovanja upravljačkih sistema .....</b>	<b>119</b>
5.1	Opšti pristup projektovanju kontrolera.....	119
5.2	Model prediktora .....	121
5.2.1	<i>Linearni prediktor minimalne varijanse .....</i>	<i>122</i>
5.2.2	<i>Model determinističkog procesa u prediktorskoj formi.....</i>	<i>124</i>
5.3	Prediktivno upravljanje determinističkih sistema .....	126
5.3.1	<i>Osobine projektovanog sistema upravljanja .....</i>	<i>126</i>
5.3.2	<i>Realizacija kontrolera .....</i>	<i>127</i>
5.3.3	<i>Kontroler minimalne greške predikcije .....</i>	<i>131</i>
5.4	Težinski jednokoračni prediktivni kontroler.....	132
5.4.1	<i>Osobine prediktivnog težinskog kontrolera.....</i>	<i>133</i>
5.4.2	<i>Realizacija prediktivnog težinskog kontrolera.....</i>	<i>134</i>
5.5	Prediktivni kontroler sa zagarantovanom stabilnošću .....	136
5.5.1	<i>Osobine prediktivnog kontrolera sa zagarantovanom stabilnošću .....</i>	<i>136</i>
5.5.2	<i>Realizacija prediktivnog kontrolera sa zagarantovanom stabilnošću.....</i>	<i>137</i>
5.5.3	<i>Interpretacija Smitovog prediktora .....</i>	<i>138</i>
5.6	Robusnost kontrolera.....	140
5.7	Praćenje referentnog modela .....	141
5.7.1	<i>Dead-beat kontroler .....</i>	<i>142</i>
5.7.2	<i>Dalinov (Dahlin) kontroler .....</i>	<i>144</i>
5.7.3	<i>Serijski MRAS .....</i>	<i>145</i>
5.7.4	<i>Serijsko-paralelni MRAS.....</i>	<i>148</i>
5.8	Paralelni MRAS i podešavanje polova .....	151
5.8.1	<i>Izbor referentnog modela .....</i>	<i>152</i>
5.8.2	<i>Određivanje parametara kontrolera .....</i>	<i>155</i>
<b>6</b>	<b>Adaptivno upravljanje.....</b>	<b>161</b>
6.1	Osnovna ideja projektovanja adaptivnog upravljanja.....	161
6.1.1	<i>Adaptivno upravljanje u otvorenoj sprezi – podešavanje pojačanja .....</i>	<i>163</i>
6.1.2	<i>Adaptivno upravljanje u zatvorenoj sprezi .....</i>	<i>163</i>
6.1.3	<i>Optimalno adaptivno upravljanje i adaptivno podešavanje polova.....</i>	<i>164</i>
6.1.4	<i>Samopodešavajući regulatori .....</i>	<i>165</i>
6.2	Adaptivni sistemi sa referentnim modelom.....	167
6.2.1	<i>Adaptivno upravljanje sa referentnim modelom.....</i>	<i>167</i>
6.2.2	<i>Model greške praćenja .....</i>	<i>168</i>
6.2.3	<i>MIT pravilo.....</i>	<i>169</i>
6.2.4	<i>Stabilni adaptivni algoritmi .....</i>	<i>172</i>
6.2.5	<i>Algoritmi zasnovani na teoriji pasivnosti.....</i>	<i>173</i>
<b>7</b>	<b>Fazi upravljanje.....</b>	<b>187</b>

7.1	Motivacija i osnovni koncept fazi upravljanja .....	187
7.2	Fazi skupovi .....	191
7.2.1	<i>Definicija fazi skupa</i> .....	191
7.2.2	<i>Funkcije pripadnosti</i> .....	192
7.2.3	<i>Osnovne operacije nad fazi skupovima</i> .....	193
7.2.4	<i>Fazi brojevi</i> .....	195
7.3	Fazi model sistema .....	197
7.3.1	<i>Okvir spoznaje - Fazi skup ulaza i izlaza sistema</i> .....	197
7.3.2	<i>Fazi relacija – Kodiranje fazi pravila</i> .....	199
7.3.3	<i>Određivanje izlaza fazi modela - kompozicija fazi relacija</i> .....	206
7.3.4	<i>Određivanje fazi skupa izlaza sistema za izmerenu veličinu ulaza</i> .....	210
7.3.5	<i>Određivanje brojne vrednosti promenljive - defazifikacija</i> .....	213
7.4	Projektovanje fazi kontrolera .....	217
7.4.1	<i>Opšti postupak projektovanja kontrolera</i> .....	217
7.4.2	<i>Specifikacija performanse</i> .....	218
7.4.3	<i>Određivanje funkcije upravljanja (uz identifikaciju matematičkog modela)</i> .....	221
7.4.4	<i>Implementacija kontrolera</i> .....	225
7.5	Primer projektovanja fazi regulatora .....	235
<b>8</b>	<b>Dodatak A – Osnovni rezultati teorije pasivnosti i pozitivnosti .....</b>	<b>241</b>
8.1	Razlozi za uvođenje koncepta pasivnosti i pozitivnosti.....	241
8.2	Pozitivno realne funkcije prenosa .....	242
8.2.1	<i>Kontinualni sistemi</i> .....	242
8.2.2	<i>Diskretni sistemi</i> .....	242
8.3	Pozitivni sistemi .....	243
8.3.1	<i>Kontinualni sistemi</i> .....	243
8.3.2	<i>Diskretni sistemi</i> .....	244
8.4	Pregled rezultata teorije pasivnosti.....	246
<b>9</b>	<b>Literatura .....</b>	<b>249</b>



*"Jednostavnost prirode ne treba ceniti u odnosu na naše razumevanje pojava. Beskrajno raznovrsna u svojim efektima, priroda je jednostavna samo u uzrocima; njena efikasnost se sastoji u proizvodnji velikog broja, često izuzetno složenih, fenomena pomoću malog broja opštih zakonitosti"*

*P.S.Laplace<sup>1</sup>*

## **1 U nastojanju da se oponaša priroda**

### **1.1 Upravljanje i regulacija kao intuitivna aktivnost**

*U intuiciji nema ničeg mističnog, već pre osećaja kako nešto treba da radi*

Prema Websterovom rečniku "proces je prirodna operacija koja se progresivno odvija kroz niz postepenih promena koje slede jedna drugu na relativno utvrđen način i vode ka određenom rezultatu ili ishodu, ili veštačka ili voljno izazvana progresivna operacija koja se sastoji od niza upravljanih akcija ili pokreta koji su sistematično usmereni ka određenom rezultatu ili cilju". U osnovi, dakle, proces vodi ka ostvarenju nekog cilja. Ukoliko se, na neki način, utiče na vrstu i redosled odvijanja promena i krajnji ishod će biti drugačiji. Otuda, nije ni čudno da je čovek oduvek težio da razume način na koji se neki proces odvija i da stvori mogućnost da na njega utiče tako da, u nekom ograničenom vremenskom intervalu, na što efikasniji način ostvari željeni cilj. To zapravo znači da je određujući vrstu spoljnog uticaja – upravljanja - čovek zapravo, od mogućih ishoda, odabirao onaj koji mu je iz nekog razloga najviše odgovarao.

Posmatrano sa te tačke gledišta upravljanje je potpuno prirodna i zapravo veoma stara ljudska aktivnost. Tako je, na primer, još u kamenom dobu čovek koji je održavao vatru morao da odluči koju količinu drveta, koje dimenzije i kog stepena vlažnosti će da upotrebi da bi dobio odgovarajući plamen za kuvanje, grejanje ili slanje dimnih signala. Sposobnost čoveka – operatera na procesu – da tokom rada uočava efekte pojedinih aktivnosti i da na osnovu tako stečenog iskustva donosi odluku vodila je ka usavršavanju veštine upravljanja. Može se slobodno reći da je upravljanje u to vreme bila individualna umetnost koja je počivala na sposobnosti operatera da prepozna uslove pod kojima proces radi i da intuitivno odabere odgovarajuću upravljačku akciju. Iskustvo kojim je pećinski čovek održavao vatru, nastavili su i razvili, svako na svoj način, i kovač koji je podešavajući temperaturu ostvarivao najpovoljnije usijanje gvožđa i domaćica koja je ložeći vatru u štednjaku održavala temperaturu koja je odgovarala datoj vrsti jela.

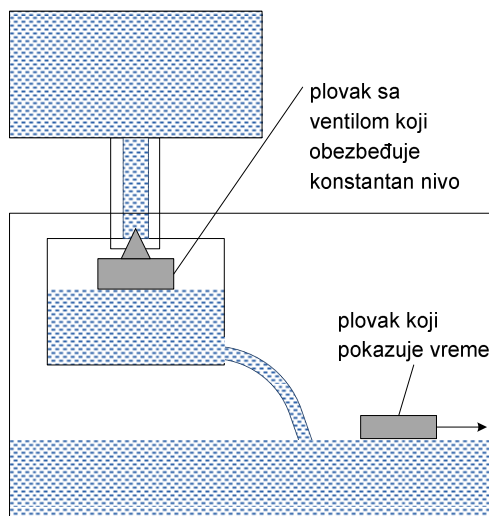
Sa razvojem ljudskog društva, rastle su i potrebe da se ovlada sve složenijim procesima, a time je rastao i broj mogućih izbora. Istovremeno, rasla je i sposobnost korisnika da što preciznije specificira zahteve u pogledu kvaliteta finalnog proizvoda. Subjektivno procenjivanje uslova pod kojima se neki proces odvija, kao i samog ishoda, zamenjeno je preciznim merenjima svih relevantnih parametara. Projektovanje i ugradnja merne opreme ili uvođenje nekih drugih kvalitativnih pokazatelja omogućila je operaterima da mnogo lakše donose odluke o izboru upravljačkih akcija. Šta više, neke upravljačke procedure postale su standardizovane. Upravljanje je i dalje intuitivno, ali se odluka donosi na osnovu objektivnih pokazatelja njenih posledica.

Uočavanje činjenice da je moguće uspostaviti standardizovanu proceduru za obavljanje neke upravljačke aktivnosti otvorilo je i pitanje neophodnosti učešća čoveka kao donosioca i izvršioca odluke. Drugim rečima, ako je već u svakom trenutku potpuno jasno koja aktivnost treba da se izvrši da li je moguće konstruisati neki mehanički uređaj koji bi to sam automatski i obavljao. Sa jedne strane takav uređaj bi oslobodio čoveka monotonije obavljanog posla, a sa druge mogao

---

<sup>1</sup>P.S.Laplace, Exposition du système du monde, 1796, (Prema navodu iz J:Gribbin; *The Scientists*; Random House; New York, 2002.)

bi da bude i precizniji jer na njegov rad ne bi uticali ljudski faktori kao što su zamor, gubljenje koncentracije ili nešto drugo. Na taj način rođena je ideja o kreiranju sistema automatskog upravljanja. Početno, ovi sistemi su održavali neku veličinu na konstantnoj vrednosti, što znači da su, savremenim jezikom rečeno, obavljali zadatak regulacije.



SL. 1-1 KTESIBIOSOV VODENI SAT

Prvi mehanički regulatori javljaju se još u antičko vreme zahvaljujući nastojanjima da se konstruiše uređaj koji bi merio vreme. Intuitivno je bilo jasno da pravljenje časovnika zahteva da se obezbedi ritmična promena neke veličine. U skladu sa tom idejom, grčki filozof Ktesibios je oko 250 godina p.n.e napravio vodeni sat. Sat se sastojao od jednog rezervoara u kome je obezbeđivan konstantan nivo tečnosti tako da je voda oticala konstantnim protokom u sledeći sud. Imajući u vidu da su i dimenzije suda i dotok tečnosti bili konstantni, nivo tečnosti u tom sudu zavisio je isključivo od proteklog vremena (Sl. 1-1). Konstantan nivo vode u gornjem sudu održavan je pomoću plovka koji zapravo predstavlja prvi mehanički regulator<sup>1</sup>.

Nema nikakve sumnje da se pri pravljenju ovog sata, kao ni niza drugih uređaja koji su nastajali tokom vekova nije eksplicitno razmatrao problem

konstrukcije regulatora. Regulator se ovde pojavljuje kao sastavni deo celog sistema koji obavlja zamišljenu aktivnost. Intuitivno je bilo jasno da se konstantan nivo tečnosti u manjem rezervoaru Industrijska može obezbediti tako što će se dotok u sud povećati ako nivo počne da opada, a smanjiti ako on raste. Otuda je bilo neophodno da se obezbedi da se otvor cevi za dotok tečnosti automatski menja u skladu sa nivoom. Postavljanje ventila na plutajućem plovku, oblik i dimenzije i plovka i ventila rezultat su izumiteljskih sposobnosti autora. Izvesno je takođe da je konačnom rešenju prethodio niz eksperimenata.

Poput Ktesibiosovog vodenog sata razvoj čitavog niza drugih uređaja u velikoj meri je prethodio teorijskim rezultatima koji bi objašnjavali njihov rad. Svi ti uređaji bili su rezultat intuitivnog razumevanja procesa i izumiteljskih sposobnosti konstruktora. Dobar primer za to je svakako i renesansna tehnologija<sup>2</sup> koja je dovela do velikog broja korisnih uređaja koji su olakšavali obavljanje svakodnevnih aktivnosti ili povećavali njihovu efikasnost. Smatra se da ona svoj zamah duguje definisanju osnove linearne perspektive koja je omogućila da se svi ti uređaji vizuelno predstavljaju pre nego što su bili konstruisani. Time se zapravo podvlači značaj vizuelizacije, odnosno neposrednog uvida u ono što treba napraviti.

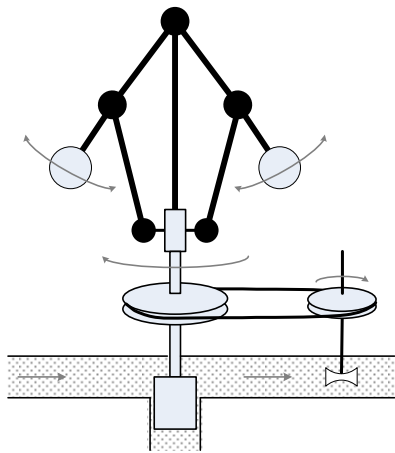
Interesantno je napomenuti da je u to isto vreme veliki broj uređaja razvijen za potrebe eksperimenata kojima su proveravane naučne hipoteze u sebi sadržavao različite regulatore. Iako je to bio period u kome se nauka okreće ka formiranju modela prirodnih fenomena i uspostavljanju kvantitativnih relacija između pojedinih veličina sami regulatori nisu bili posebno razmatrani sa teorijske tačke gledišta. Otuda se taj period, nezavisno od izuzetno kvalitetnih rezultata, često označava kao *praistorijsko doba automatskog upravljanja*.

Početak industrijske revolucije u drugoj polovini osamnaestog veka obeležava novu etapu u razvoju automatskog upravljanja. Naime, sada se regulator se, po prvi put, javlja kao poseban uređaj namenski konstruisan u cilju upravljanja radom neke mašine. Usavršavajući svoju parnu mašinu James Watt je 1788. godine konstruisao centrifugalni regulator za upravljanje protokom

<sup>1</sup> F.L.Lewis, *Applied Optimal Control and Estimation*, Prentice-Hall, 1992. (Ch.1: Introduction to Modern Control Theory)

<sup>2</sup> Pojmom renesansna tehnologija označava se skup tehnoloških uređaja, kao što su mašina za štampanje, centrifugalna pumpa, visoka peć itd., nastalih u periodu između 14. i 16. veka

pare(Sl. 1-2).



SL. 1-2 VATOV REGULATOR

Ispitujući parnu mašinu Vat je ustanovio da se protok pare menja u zavisnosti od opterećenja mašine. Održavanje protoka konstantnim je, prema tome, zahtevalo da se otvor ventila koji reguliše dotok pare menja u zavisnosti od protoka. Problem je rešen tako što je u cev kroz koju prolazi para horizontalno postavljen propeler čija brzina obrtanja zavisi isključivo od protoka pare. Obrtanje osovine sa propelerom se preko kaišnika prenosi na osovinu na koju su preko dve pokretne poluge obešene kugle. Poluge sa kuglama se dižu ili spuštaju pod dejstvom centrifugalne sile koja zavisi od brzine obrtanja osovine na koju su obešene kugle. Pri dizanju kugli, ventil se zatvara, dok se pri njihovom spuštanju otvara. Budući da brzina obrtanja zavisi od protoka, izvesno je da je povećana brzina rezultat povećanog protoka, te je za njeno smanjivanje neophodno da se ventil zatvara. Na isti način, smanjen protok prouzrokuje smanjenje brzine obrtanja, a time i opadanje centrifugalne sile, odnosno spuštanje kugli i otvaranje ventila.

Iako su regulatori koji su radili na istom principu korišćeni još u sedamnaestom veku za održavanje konstantnog rastojanja vodeničnih kamenova u vetrenjačama<sup>1</sup>, činjenica je da je tek sa pojavom Vatovog regulatora prihvaćeno da su ovakvi uređaji neophodni sastavni delovi svih mašina te da je potrebno da im se posveti pažnja i sa teorijske tačke gledišta. Na prve rezultate, međutim, čekalo se još gotovo ceo jedan vek. Tek 1868. godine Maksvel<sup>2</sup> je postavio jednačine koje opisuju rad regulatora i pomoću zakona mehanike izvršio rigoroznu analizu povratne sprege, stabilnosti i prigušenja. Na taj način je jedno, u osnovi, intuitivno rešenje dobilo naknadno i odgovarajuće teorijsko objašnjenje. Time otpočinje takozvano *primitivno doba automatike* koje će trajati sve do prve decenije dvadesetog veka. Konstrukcija regulatora je i dalje intuitivna, ali se pri njihovoj analizi i podešavanju koriste i odgovarajuće jednačine koje izražavaju prirodne zakone mehanike.

Nagli porast zahteva, interesa i ulaganja koji su bili praćeni i odgovarajućim rezultatima automatsko upravljanje duguje prvom i drugom svetskom ratu. Osnovni problem koji je zahtevao rešenje bilo je pozicioniranje artiljerijskog oružja na pokretnim nosačima, poput broda ili aviona. Rešavanje ovih problema dovelo je do konstrukcije servomehanizama<sup>3</sup> čije se projektovanje zasniva na primeni teorijskih rezultata. Sumiranjem rezultata razvoja servomehanizama<sup>4</sup>, kao i analize rada sistema sa zatvorenom povratnom spregom nastaje *klasično doba automatike* u kome automatsko upravljanje postaje konzistentna teorijska disciplina.

## 1.2 Zatvaranje povratne sprege

*Upravljanje na osnovu stvarnog, a ne očekivanog učinka<sup>5</sup>*

Gledano potpuno opšte upravljanje ima za cilj da u nekom zadanom vremenskom periodu obezbedi željeni ishod. U tom smislu teorija upravljanja bavi se pitanjem načina na koji treba promeniti buduće ponašanje sistema. Da bi se to moglo uraditi neophodno je da se, kao prvo, definiše željeni ishod. Pored toga, mora da postoji i skup mogućih akcija kojima se utiče na

<sup>1</sup> Smatra se da je to objašnjenje činjenice da Vat nikada nije patentirao ovaj regulator.

<sup>2</sup> James Clerk Maxwell, "On governors", Proceedings of the Royal Society 16 (1868), pp. 270-83

<sup>3</sup> Naziv *servomehanizam* pojavljuje se po prvi put u radu H.L.Hazen, "Theory of Servo/mechanisms", J. Franklin Institute, 1934,

<sup>4</sup> H.M.James, V.B.Nichols, R.S.Philips (Eds), "Theory of Servomechanisms", McGraw-Hill Book Company, Inc., M.I.T. Radiation Lab. Series, Vol.25, 1947

<sup>5</sup> Norbert Wiener, *The Human Use of Human Beings*, Houghton Mifflin, New York, 1950

ponašanje sistema. Projektovanje sistema automatskog upravljanja se tako svodi na formiranje algoritma pomoću koga će se odabrati ona akcija koja će dovesti do željenog ishoda. Uređaj koji realizuje ovaj algoritam označava se kao *kontroler*<sup>1</sup>.

U principu, traženi algoritam bi mogao da se zasniva na tehnici "probanja i greške" kojom bi se ispitali ishodi svih mogućih akcija. Izvesno je da bi ovakav pristup bio izuzetno neefikasan, ali često i nemoguć, jer bi neka akcija mogla da dovede i do fatalnih ishoda. Preostaje, prema tome, da se osmisli neka drugačija metodologija određivanja zahtevane akcije.

Razmatrajući moguća rešenja postavljenog problema čovek se prirodno okrenuo ka sopstvenom iskustvu koje je govorilo da je, kao prvo, neophodno da se proces kojim se želi upravljati upozna i da se stekne neko iskustvo u pogledu načina njegovog rada. To je značilo ili da se ustanove i analiziraju zakonitosti koje vladaju u procesu ili da se kroz niz eksperimenata sa brižljivo odabranim akcijama prate ishodi i da se tako postepeno povećava razumevanje pojava koje se u procesu odvijaju. Na osnovu poznavanja procesa čovek je u stanju da intuitivno pretpostavi šta bi koja od sledećih akcija mogla da donese. Na taj način, on je, i bez probe, uspešno eliminisao sve one akcije koje nisu vodile ka željenom cilju.

Tako je, na primer, pokušavajući da održi konstantnu brzinu obrtanja neke turbine, čovek uočio da brzina zavisi od dovoda goriva (tečnosti ili pare), ali i od opterećenja koje se nalazi na osovini turbine. Budući, da je opterećenje, po pravilu, zavisilo od svrhe za koju je turbina korišćena, što znači da se na njega nije moglo uticati, čoveku je preostalo da se koncentriše na dotok goriva i da pokušava da ga menja tako da brzina bude konstantna. Pri tome je, naravno, bilo neophodno da se stalno procenjuje brzina obrtanja i da se, na osnovu toga, menja dotok goriva. Vremenom je, međutim, čovek radeći na istoj turbini stekao i odgovarajuće iskustvo tako da je, čim bi video opterećenje odmah znao koliki dotok treba da obezbedi. Tada mu je preostalo samo da nadzire da li se sve odvija po planu i da eventualno reaguje u slučaju nekih nepredviđenih događaja.

Savladavanjem osnovnih principa upravljanja nekim procesom, odnosno pretvaranjem procesa donošenja odluke u rutinu, prirodno se otvorilo pitanje konstrukcije uređaja koji bi tu rutinu i izvršavao. U traženju odgovora na postavljeni problem moguća su dva pristupa. Prvi se zasniva na ideji poznavanja fizičkih zakonitosti procesa kojim se upravlja. U posmatranom primeru to bi značilo da se poznaju parametri turbine i opterećenja na izlaznoj osovini, da se postave jednačine kretanja i da se egzaktno izračuna koliki je potreban dotok goriva da bi se ostvarila zadana brzina obrtanja. Tada bi se nakon podešavanja otvora ventila na ulazu i turbina pustila u rad.

U teorijskom smislu ovaj pristup je svakako moguć. Ukoliko su svi potrebni parametri tačno određeni i ukoliko su svi fenomeni koji se javljaju u sistemu uzeti u obzir, ostvariće se očekivana brzina obrtanja. Problem, međutim nastaje ukoliko se iz bilo kog razloga očekivanje ne ispuni. Za razliku od ručnog upravljanja, gde će se, kada se ustanovi da brzina ne odgovara očekivanoj, izvršiti dodatno doterivanje otvora ventila, pri automatskom upravljanju to neće biti moguće. Ključni problem koji se javlja u izloženom pristupu leži u činjenici da regulator radi na osnovu apriornog, teorijski očekivanog učinka. Za razliku od toga, čovek takođe, prvo mora da proceni očekivanu brzinu, ali je zatim u mogućnosti da prati grešku dok sistem radi i da, u zavisnosti od nje, izvršava korektivnu akciju.

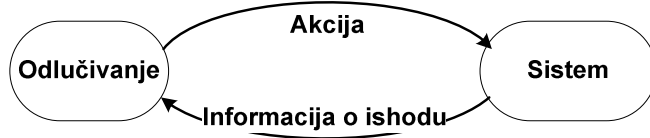
U nastojanju da se prevaziđe izloženi problem uočeno je da je upravljanje inherentno čitavom nizu prirodnih procesa. Pri tome, ono se uvek javlja kao reakcija na neki poticaj. Tako se, na primer, oči same zatvaraju kada svetlost postane toliko jaka da bi mogla da ošteti vid, ili se krvni sudovi sami sužavaju na niskoj temperaturi da bi se smanjenom cirkulacijom očuvala potrebna temperatura tela i tako dalje. Odluke o tome donosi ljudski mozak, primenjujući neki,

---

<sup>1</sup> Uobičajeno je da se uređaj koji održava neku veličinu konstantnom označava kao *regulator*. U našem jeziku se za jednu klasu jednostavnih algoritama koristi i termin *kompensator*. Kako su se algoritmi upravljanja usložnjavali uveden je termin *kontroler* koji označava uređaj koji realizuje bilo koji zakon upravljanja.

nama još uvek, nedovoljno poznat mehanizam. Izvesno je, međutim, da u osnovi ovog mehanizma leži niz kružno povezanih uzročno-posledičnih akcija. Oči će tako "izveštavati" mozak da je svetlost nepodnošljivo jaka, a on će ih zatvarati sve dok se ne uspostavi neka vrsta ravnoteže u kojoj dopustiv intenzitet svetlosti pada na rožnjaču. Na taj način se zapravo uspostavlja *mehanizam negativne povratne sprege* koji obezbeđuje samoregulaciju sistema.

Ostavljajući, za trenutak, sam mehanizam odlučivanja po strani, izvesno je da u prirodnim



Sl. 1-3 UPRAVLJANJE U ZATVORENOJ SPREZI

procesima upravljanja, kao i u ručnom upravljanju, ključnu ulogu igra informacija o ishodu koja se uzima u obzir pri donošenju odluke. Budući da je osnovna ideja projektovanja automatskog upravljanja u zameni čovekove aktivnosti mašinom, prirodno je i da se i pri donošenju odluke o

upravljanju, odnosno pri formiranju automatskog mehanizma upravljanja, koristi analogija sa ručnim upravljanjem. To nadalje znači da sistem automatskog upravljanja mora biti konstruisan tako da radi na osnovu stvarnog, a ne očekivanog ishoda. Tako je zapravo nastalo automatsko upravljanje sa zatvorenim povratnom spregom u okviru koga se informacija o stvarnom ishodu vraća u kontroler i uzima u obzir pri određivanju naredne akcije (Sl. 1-3). Osnovni princip koji se pri tome koristi svodi se na to da se uvek preduzima ona akcija koja će smanjiti razliku između željenog i ostvarenog ishoda.

Ako se sada iz ovog ugla pogledaju Ktesibiosov časovnik ili Vatov regulator vidi se da su i oni koristili isti mehanizam povratne sprege. I jedan i drugi regulator implicitno prate ishod – nivo tečnosti, odnosno brzinu – i na osnovu toga podešavaju otvor ventila koji reguliše protok tečnosti. Izvesno je, naime, da je i intuitivni pristup projektovanju kontrolera zahtevao da se u svakom konkretnom slučaju pođe od samog sistema, da se njime, kao prvo upravlja ručno, kako bi se uočili različiti fenomeni koji pri tome nastaju, da se na osnovu toga stekne izvesno iskustvo i da se onda formira kontroler koji bi menjao pobudu sistema proporcionalno ostvarenom ishodu. Ipak bilo je potrebno da prođe više od dvadeset vekova da bi ovaj intuitivni pristup bio formalizovan. Tek sa nastankom kibernetike kao discipline koja je pokušala da ustanovi jedinstven pristup problemima komunikacije i upravljanja mehanizam povratne sprege dobija svoje mesto u okviru konzistentne matematičke teorije sistema<sup>1</sup>.

Sa gledišta projektovanja regulatora formalizacija principa povratne sprege zahtevala je da se osmisli način na koji be se, u izvesnom smislu, preslikala ljudska moć opažanja, kao i sposobnost učenja na osnovu iskustva. Sledeći analogiju sa modeliranjem niza dinamičkih procesa, odnosno prateći rezultate fizike, činilo se da je neophodno da se i problem regulacije iskaže simboličkim jezikom matematike.

Polazeći od značaja koji su merenja različitih fenomena igrala u eksperimentalnoj potvrdi niza prirodnih zakonitosti uočenih ili intuitivno naslućenih pomoću čula, logično je bilo pretpostaviti da se čula, kao osnovni izvor informacija o ostvarenom ishodu relativno jednostavno mogu zameniti odgovarajućom mernom opremom. Na taj način je čitav spektar značenja mogućih ishoda koji je zasnovan na opažanju, dodiru, sluhu, ukusu ili mirisu, zamenjen brojnim vrednostima. Nema nikakve sumnje da je naša spoznaja o ishodu time objektivizirana. Sa druge strane međutim, ona je istovremeno i osiromašena, jer je zahtevala da se niz kvalitativnih pojmova kao što su veliko ili malo, hladno ili toplo, koji u krajnjoj liniji zavise od konteksta, iskaže jasnim granicama intervala u kome se izmerena veličina kreće.

Diskusije o meri u kojoj je ovaj pristup obogatio ili osiromašio naš pristup realizaciji upravljanja vode se danas. Izvesno je, međutim, da je uvođenje bročanih kvantifikatora ishoda direktno usmerilo razvoj teorije automatskog upravljanja u pravcu koji je, tokom poslednjih

<sup>1</sup> A Rosenblueth, N.Wiener, J.Bigelow, "Behavior, Purpose and Teleology", Philosophy of Science, 10(1943), pp.18-24

pedeset godina, doveo do izuzetno značajnih teorijskih rezultata, od kojih se mnogi veoma uspešno primenjuju u praksi.

Konačno, potrebno je zapaziti da, za razliku od moći opažanja, u prvo vreme nije bilo ozbiljnijih pokušaja da se osmisli način na koji bi se oponašala sposobnost učenja i donošenja odluka. Umesto toga, očekivalo se da će ta sposobnost, na neki način biti zamenjena blagotvornim dejstvom mehanizma negativne povratne sprege. Činilo se da ključnu ulogu u donošenju odluke igra zapravo sposobnost da se uoči razlika između željenog i ostvarenog ponašanja.

### 1.3 Kvantifikacija kao osnov projektovanja klasičnih kontrolera

*Od spektra pojmova do brojne ose*

#### MATEMATIČKI MODEL PROCESA

Opređenje za izražavanje ishoda mernim veličinama prevelo je ceo problem upravljanja u domen matematičkih jednačina. Pošlo se od pretpostavke da se zakon upravljanja mora izraziti u analitičkoj formi. Otuda se prirodno nametnula ideja da se sam sistem posmatra preko odgovarajućeg matematičkog modela. Gledano potpuno opšte matematički model treba da odražava zakonitosti koje povezuju pojedine veličine u procesu. Otuda je on definisan kao funkcija kojom se skup dozvoljenih pobuda procesa ( $U$ ) preslikava u ishode ( $Y$ )

$$\mathcal{H} : U \rightarrow Y \quad (1.1)$$

Prvi matematički modeli procesa bili su veoma jednostavni. Moguće je da je na to uticala jednostavnost prirodnih zakona održanja energije koji su se pokazali izuzetno efikasnim u naknadnoj analizi intuitivno razvijenih regulatora. Budući da se radilo o mehaničkim sistemima oni su, po prirodi stvari, bili modelirani pomoću Njutnovih zakona mehanike što je dovelo do predstavljanja modela u formi linearnih diferencijalnih jednačina. Na taj način se analiza ponašanja sistema usmerila ka ispitivanju osobina diferencijalnih jednačina kojima je sistem modeliran i njihovom rešavanju. Pojmovi ravnotežnog stanja i prelaznog procesa tokom koga sistem ulazi u stacionarno ravnotežno stanje preuzeti su takođe iz mehanike i počeli da se koriste u širem kontekstu i ne-mehaničkih sistema.

Uočavanje analogije između mehaničkih sistema i električnih kola dovela je do konstrukcije elektronskih uređaja za simulaciju mehaničkih sistema, a ubrzo i do analognih računskih mašina kao uređaja za rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina. Korišćenjem ovog alata produbljivano je razumevanje samih modela što je omogućilo i kreiranje niza grafo-analitičkih metoda za analizu ponašanja procesa.

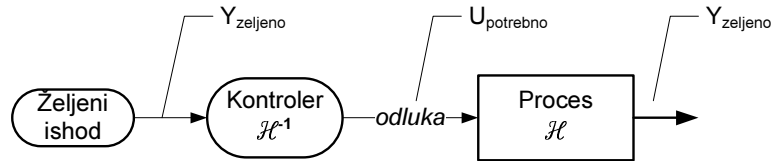
#### KONTROLER U OTVORENOJ SPREZI

Formiranjem matematičkog modela procesa kojim se upravlja stvoreni su uslovi da se razvije konzistentna metodologija projektovanja i implementacije kontrolera. Činjenica da je ostvareni ishod rešenje diferencijalne jednačine, odnosno izražen brojnim vrednostima, zahtevala je da se i željeni ishod specificira odgovarajućim kvantitativnim pokazateljima. U tom smislu projektovanje kontrolera svodi se na određivanje potrebne vrednosti pobude koja će dovesti do željenog ishoda. Sam princip posmatranja matematičkog modela kao funkcije preslikavanja doveo je i do ideje korišćenja inverznog preslikavanja za projektovanje kontrolera (Sl. 1-4). Naime, ako se već analizom procesa može doći do funkcije preslikavanja pobude u ishod, onda se ne vidi razlog zašto se inverznim preslikavanjem željeni ishod ne bi mogao preslikati u odgovarajuću pobudu koja do njega dovodi.

$$\mathcal{H} : U_{\text{potrebno}} \rightarrow Y_{\text{zelejno}} \Rightarrow \mathcal{H}^{-1} : Y_{\text{zelejno}} \rightarrow U_{\text{potrebno}} \quad (1.2)$$

Samo se po sebi razume da bi, kada bi ovaj pristup bio i praktično moguć, celokupni problem upravljanja bio rešen. Praktična primena izložene ideje nije, međutim, dala očekivane rezultate. Sa jedne strane pokazalo se da za veoma veliki broj modela inverzno preslikavanje nije fizički ostvarljivo. Najčešći uzrok bila je činjenica da ishod vremenski kasni za pobudom, što bi pri realizaciji inverznog preslikavanja zahtevalo uređaj u kome ishod (u ulazi domena iz koga se preslikava) prethodi pobudi (domen u koji se preslikavanje vrši). Izvesno je da se, u našem

kauzalnom svetu, takvi uređaji koji bi imali sposobnost predikcije nisu mogli konstruisati.

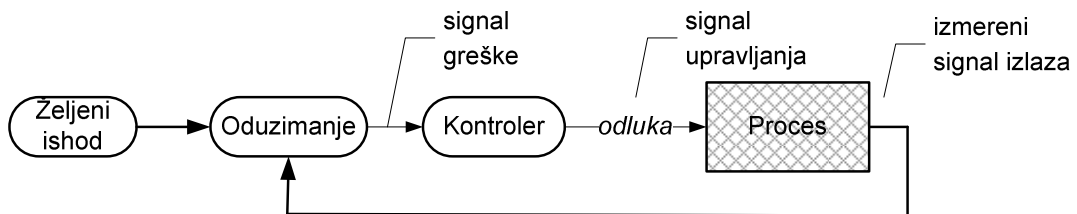


SL. 1-4 UPRAVLJANJE POMOĆU INVERZNOG PRESLIKAVANJA

Problem je, međutim, nastao i kod onih sistema kod kojih je inverzno preslikavanje bilo fizički ostvarljivo. Implementacija takvih kontrolera pokazuje da oni, u najvećem broju slučajeva, neće dati željene rezultate. Razlog leži u činjenici da usvojeni matematički model samo aproksimativno opisuje proces, odnosno da postoje i fenomeni koji nisu obuhvaćeni funkcijom preslikavanja, a koji će nužno doći do izražaja u dužem radu postrojenja. To znači da nijedan proračun upravljanja zasnovan na modelu ne može da dovede do željenog rezultata. Drugim rečima, ovde se upravljanje vrši na osnovu očekivanog ishoda. Za razliku od toga, ručno upravljanje u kome čovek donosi odluke vrši se na osnovu stvarnog uočenog ishoda. Čovek, takođe, prvo mora da proceni pobudu koju će da koristi, ali je zatim u mogućnosti da prati grešku dok sistem radi i da, u zavisnosti od nje, izvršava korektivnu akciju. Otuda i nije realno očekivati da će sistem moći da radi bez zatvaranja povratne sprege, odnosno bez nekog mehanizma korekcije upravljanja na osnovu realno dobijenog ishoda. Iz tog razloga se odustalo od projektovanja kontrolera u otvorenoj sprezi.

#### KONTROLER U ZATVORENOJ SPREZI

Preslikavanjem ponašanja čoveka koji upravlja nekim procesom, kontroler koji radi sa zatvorenim povratnom spregom zamišljen je kao uređaj koji prima rezultat poređenja ostvarenog i željenog ishoda i na osnovu njega generiše pobudu procesa tako da se njegov ishod približi željenom. Ključna uloga u realizaciji upravljanja poverena je poređenju između željenog i ostvarenog ishoda. Mehanizam poređenja sveden je na formiranje *vrednosti greške* ( $E$ ) koja predstavlja razliku između željene (referentne) veličine i ostvarene (Sl. 1-5).

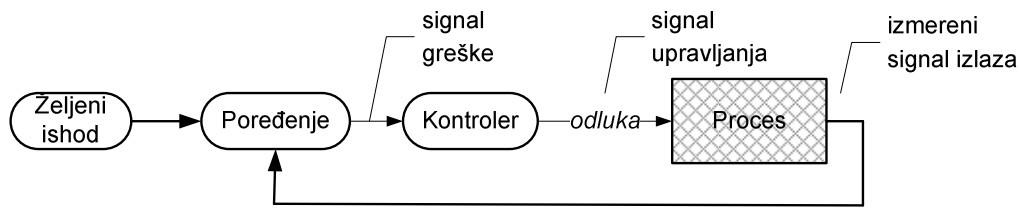


SL. 1-5 PROJEKTOVANJE KONTROLERA U ZATVORENOJ SPREZI

Budući da je model procesa izražen preko diferencijalnih jednačina i kontroler je morao da bude modeliran na isti način. Na taj način kontroler, posmatran sa analitičke tačke gledišta, obavlja preslikavanje iz prostora greške u prostor upravljanja. Funkcija preslikavanja određuje se na osnovu matematičkog modela procesa.

$$U = \mathcal{D}(E) \quad (1.3)$$

U praktičnoj implementaciji kontrolera treba imati na umu da se projektovane informacije o brojnim vrednostima pojedinih veličina prenose preko fizičkih signala (Sl. 1-6). To znači da će svaka nesavršenost modela nužno rezultovati u drugačijem ponašanju sistema od projektovanog. Kao što je već rečeno, ova činjenica je razlog zašto se u sistemu zatvara povratna sprege. Očekuje se da će mehanizam povratne sprege biti u stanju da kompenzuje odstupanje modela od procesa, odnosno da će kontroler pomerati ishod procesa u željenom smeru sve dok postoji neki signal greške.



SL. 1-6 IMPLEMENTACIJA KONTROLERA U ZATVORENOJ SPREZI

#### KLASIČNE METODE PROJEKTOVANJA KONTROLERA

Principijelno rešenje strukture kontrolera i načina upravljanja zahtevalo je da se posebna pažnja posveti i specifikaciji željenog ishoda. Nesumnjivo je da se željeni ishod uvek izražava u kontekstu sistema koji se posmatra. Tako se na primer zahteva da se brod održi na zadatom kursu ili da temperatura u sobi bude prijatna itd. Svođenje opažanja ishoda na merne signale impliciralo je i da se željeni ishod zadaje kao brojna vrednosti. U konkretnim primerima to bi značilo da se zadani kurs broda izrazi pomoću koordinata tačkaka na željenoj trajektoriji ili da se željena temperatura specificira bilo kao jedna brojna vrednost, bilo kao interval dozvoljenih brojnih vrednosti.

Osnovni zadatak kontrolera je da omogući da izlaz procesa ima zadanu vrednost ili da se kreće u zadanom opsegu. Međutim, imajući u vidu dinamičku prirodu svih procesa kojima se upravlja izvesno je da se određena pažnja mora posvetiti i vremenu u kome se ostvaruje željeni ishod, ali i načinu na koji se to postiže. U tom kontekstu se pojam željenog ishoda posmatra nešto šire od zadane referentne brojne vrednosti tako da se govori o nizu pokazatelja koji na neki način preciziraju trajektoriju izlaza procesa. Ovi pokazatelji se označavaju kao *performansa sistema*.

Nezavisno od svih parametara koji se uključuju u ocenu performanse sistema činjenica je da se oni specificiraju preko brojnih vrednosti. Te vrednosti su uvek precizne, za razliku od stvarnog željenog ponašanja sistema koje to ne mora da bude. Nema naime nikakve sumnje da upravljanje nožem na strugu zahteva da se željeni položaj noža iskaže veoma preciznim vrednostima koordinata, ali je takođe izvesno da se željena temperatura u sobi teško može svesti na jedan jedini broj.

Polazeći od niza intuitivno razvijenih regulatora klasična teorija projektovanja kontrolera usvaja nekoliko osnovnih struktura kontrolera koji zapravo realizuju iste upravljačke akcije kao i već prethodno razvijeni kontroleri. To zapravo znači da se u pogledu projektovanja kontrolera i dalje oslanjalo na intuitivnom razumevanju procesa. Razlika se sastoji u tome što se parametri kontrolera, a time i intenzitet i vrsta pojedinih akcija podešavaju kvantitativno tako da se u što je većoj mogućoj meri ispune postavljeni zahtevi u pogledu performanse.

Uprkos jednostavnosti linearnih modela kojima su predstavljani i proces i kontroler sam postupak projektovanja zahtevao je da se razvije čitav niz grafo-analitičkih metoda kojima su određivani parametri i proveravana valjanost dobijenog rešenja. Koliko god ove metode, na današnjem nivou razvoja računarstva i odgovarajućih softverskih alata za simulaciju procesa, izgledale arhaično, činjenica je da su one zasnovani na razumevanju suštine samih procesa i mogućnosti njihovog upravljanja. Otuda i nije čudno da su se mnoge od njih zadržale i danas i da se i dalje uspešno koriste u projektovanju industrijskih regulatora.

## 1.4 U potrazi za mehanizmom odlučivanja – period savremene automatike

*Koliko i kakvih jednačina i pravila koristi ljudski mozak*

Već prva primena klasičnih kontrolera pokazala je da koncept oponašanja čoveka pomoću jednostavnih kontrolera, iako veoma efikasan, ima ipak ograničen domen primene. To je zapravo značilo da mehanizam povratne sprege nije sam po sebi dovoljan da zameni ljudski mozak,



odnosno mehanizam donošenja odluke. Rešenje je potraženo u dva pravca. Sa jedne strane pošlo se od pretpostavke da se inteligentno ponašanje čoveka može opisati do mere preciznosti koja bi omogućila da se ono simulira pomoću računara. Tako je nastala oblast *veštačke inteligencije*<sup>1</sup>. Ovaj ambiciozni projekat je bio u punom zamahu naredne dve decenije tokom kojih je postalo jasno da je težina problema značajno potcenjena. Ipak teorijski rezultati u ovoj oblasti našli su svoju primenu u rešavanju čitavog niza problema koji nisu u direktnoj vezi sa osnovnim ciljem. Redefinisanjem i diferencijacijom problema nastao je čitav niz posebnih disciplina kao što su prepoznavanje oblika, neuralne mreže, ekspertski sistemi i sistemi odlučivanja. Međutim, čini se da smo još uvek daleko od sveobuhvatnog mehanizma odlučivanja.

Drugi pristup rešavanju ograničenosti primene klasičnih rešenja zasnivao se na ideji da bi mehanizam povratne sprege mogao da bude dovoljan ukoliko bi se razvio kompleksniji matematički model procesa koji daleko sveobuhvatnije izražava fenomene koji se unutar procesa odvijaju. Za tako razvijen model bi se onda postavili drugačiji kriterijumi ocene performanse koji bi omogućili projektovanje sofisticiranijih algoritama upravljanja. Drugim rečima, težište problema pomeren je od postupka određivanja parametara kontrolera date strukture ka osmišljavanju zahteva koji se iskazuju merom performanse. Ispunjavanje ovih zahteva svodi se na minimizaciju ili maksimizaciju neke funkcije pri čemu se algoritam upravljanja dobija kao rešenje postavljenog problema. Ovaj pristup koji je zapravo okarakterisan daljom matematizacijom problema uvodi automatiku u takozvani *savremeni period*.

Po prirodi stvari, savremeni period započeo je razvojem metoda za identifikaciju matematičkog modela procesa. Razvijeni modeli otvorili su širom vrata za primenu različitih matematičkih rezultata u oblasti teorije upravljanja. Teorija stabilnosti, praćena modeliranjem u prostoru stanja, projektovanje optimalnih i adaptivnih sistema, razvoj koncepta impulsnih sistema itd. obeležili su pedesete i šezdesete godine prošlog veka. Ako se uzme u obzir da je prva knjiga iz oblasti automatike objavljena tek 1947 godine, onda činjenica da je krajem šezdesetih, dakle za manje od četvrt veka, automatika postala jedna celovita, zaokružena oblast deluje krajnje impresivno. Šta više, bio je to trenutak kada su teorijski rezultati iskoračili ispred mogućnosti za njihovu praktičnu realizaciju. Teško je reći kako bi se ova oblast dalje razvijala da nije došlo do razvoja mikroračunara koji se pokazao kao idealno sredstvo za realizaciju složenih algoritama upravljanja. Tek sa mikroračunarima započinje prava provera teorijski postavljenih rešenja.

Početne realizacije savremenih kontrolera zasnivale su se na kontinualnim modelima procesa i kontrolera. U cilju implementacije na računaru kontroler je morao biti digitalizovan čime se nužno gubilo na tačnosti. Na taj način dobijen je sistem koji je bio fleksibilniji i pouzdaniji od svog analognog ekvivalenta, ali je to bilo plaćeno gubitkom tačnosti i povećanjem troškova. Otuda je u prvo vreme mikroračunar korišćen isključivo za realizaciju algoritama upravljanja koji zbog svoje kompleksnosti nisu mogli da se implementiraju u analognoj formi. Neka od ovih rešenja dala su bolje rezultate od klasičnih, ali u čitavom nizu sistema upravljanja ta prednost nije izražena do mere koja bi opravdala implementaciju složenijeg, a time i skupljeg rešenja.

Sa gledišta praktične realizacije kontrolera pomoću mikroračunara pravu revoluciju izazvao je nagli razvoj teorije digitalnih signala i sistema koja je ukazala na mogućnost da se projektovanju pristupi na suštinski drugačiji način. Činjenica da se kod digitalnih sistema operiše sa konačnim, prebrojivim skupom podataka, a ne sa kontinuumom dovela je do relativiziranja pojma trenutnog vremena, odnosno omogućila da se u razmatranje uzmu i prošli i budući podaci<sup>2</sup>. Čisto vremensko kašnjenje koje se javlja kao jedan od osnovnih problema u sintezi kontinualnih sistema upravljanja, ovde se pojavljuje kao izvor jedne potpuno nove klase diskretnih prediktivnih kontrolera koja nema svoj pandan u kontinualnom svetu.

Uprkos nesumnjivom uspehu savremene teorije upravljanja, sve razvijene metode

<sup>1</sup> Termin se po prvi put pojavljuje 1956. godine na konferenciji u Dartmouth-u koju su organizovali Marvin Minsky i John McCarthy

<sup>2</sup> R.Hamming, "*Topics in modern system theory - Bell Labs and the development of digital systems*", Lecture notes, Naval Postgraduate School, (Monterey, USA), 1985.

projektovanja imaju i dalje određena ograničenja. Suština je zapravo u tome da nijedna od njih nije u dovoljnoj meri uspeła da odslika mehanizam odlučivanja koji se koristi pri ručnom upravljanju.

Moglo bi se reći da klasifikacija perioda automatskog upravljanja predstavlja svojevrsni paradoks. Naime, iako se radi o inženjerskoj disciplini kod koje ključni interes nužno mora biti usmeren ka krajnjem praktičnom ishodu, njen razvoj se zapravo meri po obimu teorijskih rezultata. Šta više, uprkos izuzetno vrednim metodološkim razmatranjima, činjenica je da i danas preko devedeset posto industrije koristi rešenja kontrolera razvijenih u klasičnom dobu, realizovanih u okviru savremene mikroračunarske tehnologije.

Čini se da postoji nekoliko mogućih objašnjenja navedenog paradoksa. Sa jedne strane upravljanje izuzetno složenim procesima, kao što su recimo navigacija ili navođenje, nije moguće ostvariti pomoću klasičnih metoda. U tom smislu, razvoj teorije upravljanja zapravo pomera granice procesa i objekata koje čovek stavlja pod svoju kontrolu. Pored toga, čitav niz teorijskih rezultata razvijenih u okviru automatike našao je svoju primenu u drugim oblastima, prevashodno u obradi signala, komunikacijama i računarstvu. Konačno, ne treba izgubiti iz vida i da je koncept sistema kao dinamičke celine koja ima svoje "ulaze" i "izlaze" doveo do toga da se automatsko upravljanje posmatra u širem kontekstu teorije sistema. Na taj način ono crpe metodološke pristupe razvijene za drugačije sisteme, ali i autohtonim teorijskim rezultatima doprinosi zaokruživanju opšte teorije sistema<sup>1</sup>.

## 1.5 Zatvaranje kruga

*Verovanje da su naši apstraktni koncepti "stvari" i "pojava" realnost prirode je čista iluzija<sup>2</sup>*

Moguće je da objašnjenje relativnog neuspeha oba pristupa u formiranju mehanizma odlučivanja leži u pitanju matematičke kompresibilnosti univerzuma. Naime čini se da se potraga za mehanizma odlučivanja odvijala u domenu matematike prevashodno zato što je to bio aparat pomoću koga su modelirane sve prirodne pojave. Ono što se pri tome izgubilo iz vida se možda najjasnije može sagledati iz *"pitanja zašto se evidentno kompleksna struktura našeg sveta može, u toliko mnogo slučajeva, opisati relativno jednostavnim matematičkim formulama? Ovo pitanje je tesno vezano sa pitanjem zašto je indukcija, pa samim tim i nauka u celini toliko uspešna. Veoma je teško da se izbegne pitanje da li matematika, kao ishod ljudskog mišljenja, poseduje svoju sopstvenu specifičnost, koja iz bilo kojih razloga, odgovara specifičnostima onoga što čovek vidi i doživljava. Sve dok se na ovo pitanje ne nađe pravi odgovor, nauka može da objasni mnogo, ali ne i svoj sopstveni uspeh"*<sup>3</sup>.

Ne upuštajući se u traženje odgovora na postavljeno pitanje čini se ipak da je suština problema u činjenici da je matematički aparat u utvrđivanju prirodnih zakona korišćen zapravo samo kao jedno od sredstava da se uočeni fenomen precizno iskaže. Još je Maksvel, formulišući osnovne principe elektromagnetizma, istakao da se *"za potrebe ljudi sa različitim sposobnostima percepcije naučna istina treba da bude predstavljena u različitim formama koje treba posmatrati kao podjednako naučno validne bilo da se radi o robusnim modelima i živopisno obojenim fizičkim ilustracijama bilo o nematerijalnim simbolima"*<sup>4</sup>.

Zalažući se validnost matematičkog modela Maksvel je na neki način anticipirao probleme sa kojim se fizika srela na početku dvadesetog veka u nastojanju da modelira fenomene kvantne mehanike koji su daleko ispred praga osetljivosti naših čula. Otuda su sve slike i fizički modeli mogli samo da se koriste u cilju vizualizacije nekih fenomena u mikrosvetu koji se pod određenim uslovima mogu posmatrati kao poznati, odnosno uočljivi, fenomeni iz makrosveta. Traganje za matematičkim jednačinama koje bi opisale date fenomene takođe nije bilo jednostavno. Bilo je

<sup>1</sup> F. Capra, *The Web of Life*, Doubleday, New York, 1996.

<sup>2</sup> F. Capra, *The Tao of Physics*, Wildwood House, London, 1975.

<sup>3</sup> Dietrich, *"Is there theory of everything?"*, Bulletin of the IMA, 1994, Vol.30 (No.11/12), pp.166-70

<sup>4</sup> Prema navodu iz J:Gribbin; *The Scientists*; Random House; New York, 2002.

neophodno da se dođe do principa neodređenosti, do saznanja o neodvojivosti eksperimenta od posmatrača i do niza drugih stvari da bi se formirali odgovarajući matematički modeli. Suština je, međutim, u tome da ni jedno ni drugo sredstvo zapravo ne dopire do punog razotkrivanja mehanizma koji izaziva dati fenomen.

Svest o postojanju fenomena za koje je nemoguće uspostaviti direktnu korelaciju između matematičkih simbola i jezičkih koncepata nastalih na osnovu naših čula, otvorila je i pitanje adekvatnosti usvojene matematičke simbolike u teoriji automatskog upravljanja. Čovek zaključuje i donosi odluke na bazi oskudnih dokaza, maglovitih koncepata, heurističkih silogizama, prethodnih činjenica, "odokativnih" pravila, nedefinisanih intuicija, sumnji, verovanja, procena, pogađanja, ... a to je teško, ako ne i ne moguće, sažeti u jedan matematički model bilo koje složenosti. Ako se prihvati stanovište da se matematičkim modelom može opisati neki fenomen, ali ne i izraziti suština inherentnog mehanizma, onda relativan neuspeh u modeliranju mehanizma odlučivanja nije iznenađujući.

Gledano potpuno opšte problem upravljanja se rešava tako što se prikupe svi raspoloživi podaci o samom sistemu i na osnovu njih, kao i iskustva iz rešavanja sličnih problema, odabere se niz upravljačkih akcija koje se, eventualno, koriguju kroz povratnu spregu. Uprkos brojnim različitim rešenjima moglo bi se reći da se sva zasnivaju na tri osnovne pretpostavke:

- i. *sistem kojim se upravlja mora biti poznat, što znači da se može predvideti njegov odziv na dati ulaz. Na osnovu poznavanja sistema formira se njegov matematički model;*
- ii. *cilj upravljanja mora da bude jasno specificiran preko konciznih matematičkih relacija koje direktno povezuju promenljive sistema sa ocenom njegove performanse;*
- iii. *ponašanje sistema može se pratiti na osnovu merenja njegovih izlaza.*

Teorija upravljanja dalje nalaže da se u zavisnosti od mere u kojoj su ove pretpostavke ispunjene odabere jedna od mnogobrojnih metoda klasične ili savremene teorije upravljanja pomoću koje se određuju struktura i parametri kontrolera.

Već samo pominjanje "mere" ispunjenosti pojedinih pretpostavki ukazuje da će u praksi situacija često biti sasvim drugačija. Pre svega, mehanizam rada sistema je najčešće nedovoljno poznat, a čak i kada to nije slučaj, zahtev da matematički model bude dovoljno jednostavan za rešavanje sprečava uključivanje svih nelinearnosti ili nestacionarnosti sistema u model. Pored toga, cilj upravljanja se, najčešće iskazuje u formi "zadovoljavajućeg ponašanja", "male potrošnje energije", "velikog profita" i njegova matematička formulacija obično predstavlja kompromis između stvarnih zahteva i jednostavnosti relacije kojima se oni iskazuju. Konačno, merenja na procesu su često nedovoljno precizna, što znači da ni ocena performanse sistema, kao ni korekcija koja se ostvaruje kroz povratnu spregu ne mora biti adekvatna.

Zapravo, umesto jasno definisanog puta kojim se stiže do rešenja, praksa pokazuje da se "krećemo po zavejanom putu na kome izviruju samo pritke pobodene sa strane koje određuju gabarite u okviru kojih je dozvoljeno kretanje"<sup>1</sup>. Paradoksalno je, ali istinito, da se uprkos punom saznanju o krajnjoj nepreciznosti polaznih osnova, čitav niz godina traga za jasnim i preciznim matematičkim rešenjem problema. Kao što je već rečeno, ono se tražilo u povećanoj složenosti modela koji će osvetljavati sve aspekte ponašanja sistema ili u drugačijim algoritmima upravljanja koji će biti robusni u odnosu na nepreciznost modela. Sledeći ovaj pristup razvijen je čitav niz algoritama upravljanja u povratnoj sprezi, koji eventualno uključuju i dodatnu spregu za adaptaciju. Svaki od ovih algoritama namenjen je klasi problema za koju se u praksi pokazalo da daje zadovoljavajuća rešenja. U izvesnom smislu može se govoriti o proliferaciji rešenja krajnje ograničenog i neizvesnog dometa. Figurativno rečeno, uloženi su ogromni napor da se "razgrne sneg" i u potpunosti očisti put. Otuda i nije čudno što, kao i svaka druga "borba protiv realnosti", ni ova nije mogla da donese očekivane rezultate.

Navedenom pristupu u rešavanju problema upravljanja prvi se suprotstavio Lotfi Zadeh koji je još 1973 ustvrdio da "što se bliže posmatra realni problem, njegovo rešenje je sve neodređenije i naša sposobnost da o ponašanju sistema iskažemo relevantne činjenice je sve

<sup>1</sup> Prof. Miodrag Rakić, Regulacija, predavanja, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1967.

*manja i manja*<sup>1</sup>. Polazeći od ove tvrdnje Zadeh je predložio da se problemu modeliranja i upravljanja priđe kroz fundamentalno drugačiji pristup – prihvatimo realnost da je put zavejan i pogledajmo kako bi se po njemu moglo voziti. Ovakav pristup je zahtevao da se uvede potpuno novi i drugačiji koncept modeliranja sistema i shodno tome i projektovanja odgovarajućih kontrolera. Tako je nastala teorija fazi upravljanja sistemima. Možda je najtačnije reći da nas fazi koncept vraća ka početnoj premisi formiranja sistema koji će uspešno da oponaša čoveka. Suštinska razlika počiva na stavu da senzori koji čine sastavni deo ljudskih čula možda i mogu da budu zamenjeni mernom opremom, ali da interpretacija izmerenih vrednosti mora da bude drugačija. Polazeći od stanovišta da u osnovi procesa razmišljanja i odlučivanja ne leže brojevi i rešavanje diferencijalnih jednačina, već niz pojmova koji se izražavaju jezički i koji su većoj ili manjoj meri međusobno povezani i relevantni za donošenje odluke fazi modeliranje napušta koncept referentnih brojnih vrednosti. Umesto preslikavanja skupa dva skupa brojeva, fazi model se formira kao niz uzročno-posledičnih veza između pojmova koji opisuju pobudu i ishod. Tako se iz sveta brojeva u kome su "zarobljene" i klasična i savremena teorija upravljanja prešlo u svet pojmova koje čovek koristi u rasuđivanju i donošenju odluka.

Koliko god se ovaj koncept činio intuitivno prihvatljivim činjenica je da je on naišao na snažan otpor u zapadnom svetu u kome je još od renesanse i uvođenja eksperimenta kao ključne potvrde naučnog rezultata uvreženo ubeđenje da sposobnost da se neka pojava analizira sa kvantitativne tačke gledišta ujedno povlači i razumevanje suštine te pojave. Fazi pristup modeliranju proističe zapravo iz istočnjačke filozofije, tako da nije čudno što su se prvi fazi regulatori pojavili u Japanu. Tek kada je u Japanu razvijen čitav niz fazi sistema, ostali deo sveta je pokazao odgovarajući interes za taj pristup, tako da se danas fazi teorija nalazi ravnopravno među svim drugim pristupima u rešavanju problema upravljanja.

Istorija razvoja teorije upravljanja, odnosno raznorodnost prihvaćenih metodologija, svedoči i o tome u kojoj meri kulturno i civilizacijsko nasleđe utiče na sagledavanje problema, a samim tim i na koncept njegovog rešavanja. Nezavisno od toga, i uprkos obilju teorijskih rezultata, nema gotovih recepata koji bi jednoznačno vodili ka rešenju. Svaki konkretni sistem je zapravo novi problem koji se mora posebno analizirati i rešavati. Upravljanje i dalje ostaje "*veština izbora*".

---

<sup>1</sup> L.A.Zadeh, *Outline of a New approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Process*, IEEE trans. On systems, Man and Cybernetics, Vol.3, No.1, (Jan.1973), pp.28-44

*"Ono što posmatramo nije priroda sama, već priroda koju možemo spoznati metodom ispitivanja koju smo odabrali"*

W.Heisenberg, Physics and Philosophy

## 2 Modeliranje sistema

U ovom poglavlju čitalac će

- Razumeti potrebu za formiranjem matematičkog modela i njegovog odnosa prema realnom procesu
- Sagledati moguće pristupe formiranju matematičkog modela
- Razumeti značaj praktičnih problema pri eksperimentalnom snimanju sistema
- Razumeti suštinu linearizacije matematičkog modela
- Ovladati osnovama estimacije parametara linearnih modela i sagledati ključne probleme koji se pri tome javljaju
- Uočiti neke fenomene koji se sreću pri modeliranju sistema

### 2.1 Sistem i proces

*Utvrđivanje načina na koji se posmatra "svet"*

Sistem je skup realnih ili apstraktnih elemenata koji u međusobnoj interakciji ili relaciji kreiraju jednu organizovanu celinu. Unutar sistema odvijaju se procesi, koji kroz niz prirodnih ili veštački kreiranih akcija menjaju osobine ili atribute sistema. Sistemi mogu biti prirodni, nastali evolucijom tokom niza godina, kao što su biološki sistemi, subatomske sisteme, sunčani sistem, galaksija ili Univerzum. Veštački sistemi su ljudska kreacija i uključuju različite fizičke strukture, hibridne sisteme koji kombinuju prirodne i veštačke procese, konceptualno znanje itd. Ovi sistemi mogu biti električni, mehanički, ekonomski, politički itd.

Sama ideja uvođenja pojma sistema zasniva se na želji da se na jedan apstraktan način objedini niz organizovanih celina koje imaju slične karakteristike, koje se mogu analizirati u okviru jedinstvenog metodološkog pristupa – teorije sistema. Aktivnosti koje se odvijaju unutar pojedinih elemenata sistema se, u krajnjoj liniji mogu posmatrati kao razmena informacija između tih elemenata. Otuda se one posmatraju kao interni signali<sup>1</sup> koji se na neki način obrađuju unutar sistema.

Ova, na izgled, jednostavna definicija sistema krije u sebi nekoliko potencijalnih problema. Pre svega, polazeći od koncepcije sistema kao "međusobno povezanih elemenata", postavlja se pitanje gde su granice te povezanosti, odnosno koje sve interakcije i relacije treba uzeti u razmatranje da bi se opisao sistem. Nema nikakve sumnje da bi u nekoj kompletnoj analizi ovih veza svaki sistem mogao zapravo obuhvatiti ceo univerzum. I koliko god bi ta predstava odražavala realnost ona bi, sa praktične tačke gledišta, onemogućila analizu pojedinih sistema.



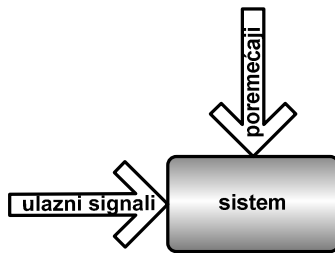
SL. 2-1 ŠEMATSKI PRIKAZ SISTEMA

Mogućnost spoznaje i ovladavanja sistemom zahtevala je da se posmatranju sistema pristupi na drugačiji način. Činjenica da su u svakom sistemu neke interakcije daleko jače od drugih, omogućila je da se izdvoji skup relativno čvrsto povezanih elemenata. Ovaj skup koji aproksimira posmatranu pojavu se označava kao sistem. Uobičajeno je da se ovako izdvojena celina predstavlja blok dijagramom (Sl. 2-1).

Sve zanemarene interakcije koje nisu uključene u sistem, a utiču na njegovo ponašanje aproksimiraju se odgovarajućim signalima pobude koji deluju na sistem i izazivaju neku promenu u njegovom ponašanju. Među njima se izdvaja jedna grupa signala koji će se menjati na neki određen način da bi se ostvarilo željeno ponašanje sistema ili da bi se ostvario neki drugi željeni efekat. Ti signali označavaju se kao ulazni signali. Preostali signali, koji utiču na ponašanje sistema,

<sup>1</sup> U teoriji signala i sistema, signal se definiše kao vremenski promenljiv fizički fenomen koji nosi neku informaciju.

ali se njihovom promenom ne upravlja označavaju se kao poremećaji (Sl. 2-2).



SL. 2-2 SIGNALI POBUDE: ULAZNI SIGNALI I POREMEĆAJI

Brojni su razlozi koji dovode do toga da se neka spoljna pobuda nađe u jednoj ili drugoj kategoriji. Kod nekih sistema sama funkcija koju sistem obavlja određuje i ovu podelu. Takav je, na primer, slučaj kod sistema za prenos signala na daljinu, gde signali koji se prenose prirodno čine grupu ulaznih signala, dok se sve druge pobude koje zapravo predstavljaju smetnje u prenosu posmatraju kao poremećaji.

Kod sistema upravljanja, izdvaja se jedna grupa signala čijom promenom se može i želi delovati na ponašanje procesa i istovremeno u zadovoljavajućoj meri eliminisati dejstvo svih drugih pobuda koje predstavljaju poremećaje. Ovi ulazni signali se često nazivaju upravljački signali. Za ovako odabrane ulaze u sistem se ugrađuju odgovarajući izvršni organi (aktuatori) pomoću kojih se ostvaruje promena ulaza. Tako se, na primer, da bi se ostvario željeni protok neke tečnosti u sistem ugrađuje ventil na čije otvaranje ili zatvaranje deluje upravljački signal. Isto tako, da bi se omogućilo željeno pomeranje nekog mehaničkog elementa u sistem može da se ugradi motor, čija pobuda će biti upravljački signal i tome slično.

U zavisnosti od načina konstrukcije izvršni organi mogu primati kontinualne ili diskretne sisteme. Međutim, priroda aktuatora ne diktira nužno i prirodu upravljačkih signala. Oni, naime, mogu biti bilo kontinualni, bilo diskretni. Jedino je važno da se, uz pomoć odgovarajućih pretvarača, signal prilagodi prirodi aktuatora.

Kao što je već istaknuto, svi preostali pobudni signali tretiraju se kao poremećaji. Pri tome je potrebno naglasiti da među poremećajima postoje i signali na koje je, teorijski, moguće uticati, ali se to iz nekog razloga ne želi (npr. veoma skupi izvršni organi, relativno mali uticaj na ponašanje procesa, sličan efekat se postiže nekim drugim spoljnim uticajem, itd.). Ovo zapravo znači, da izbor upravljačkih signala nije jednoznačan, čime se samo potvrđuje da je upravljanje veština odabiranja. Konačno, na niz spoljnih pobuda, kao što su atmosferski uslovi, vibracije i slično, i nije moguće uticati. Najveći broj ovakvih pobuda je stohastičke prirode.

Izdvajanjem celine koja čini sistem u užem smislu i predstavljanje preostalih interakcija pomoću pobudnih signala zaokružen je naš pogled na svet. Ostaje, međutim, otvoreno pitanje posmatranja onoga što se u tom svetu dešava.

Sve raspoložive informacije o ponašanju procesa, kao što su rezultati merenja, opservacije, ili neki drugi podaci označavaju se kao izlazni signali. Samo se po sebi razume da izbor skupa izlaznih signala zavisi od prirode sistema i od fenomena koji se žele posmatrati. Kod sistema za prenos signala, izlazni signali su zapravo signali koji se prenose na daljinu. Kod nekih drugih sistema, kao što su na primer sistemi upravljanja, izlazni signali se odabiraju tako da omogućе stvaranje kompletne slike o svim promenama u sistemu, vodeći pri tome računa da postoji mogućnost nabavke i ugradnje odgovarajuće merne opreme.

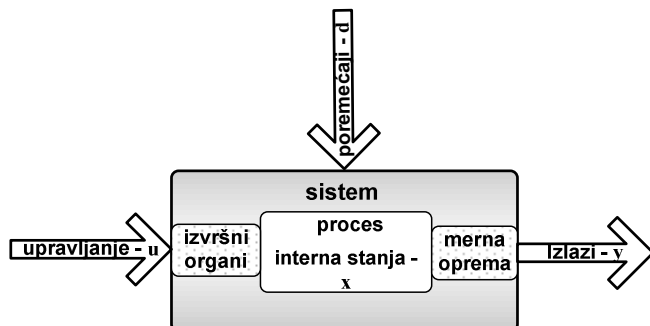
Sa gledišta kvantitativne analize sistema može se reći da su izlazi sistema određeni mernom opremom koja je instalirana na procesu. Izbor ove opreme vrši projektant sistema i ona zavisi od niza faktora, počev od cene same merne opreme, pa do efekata koji se žele meriti. Izvesno je jedino da izbor izlaza mora biti takav da se na osnovu izmerenih vrednosti može dobiti kompletna slika o svim elementima procesa koji su od značaja za ostvarivanje krajnjeg cilja.

Proces koji se odvija u sistemu može biti kontinualan ili diskretan. Ukoliko je proces diskretan odgovarajuća merna oprema mora, svakako, biti diskretna. Međutim, za posmatranje kontinualnih procesa moguće je koristiti i kontinualnu i diskretnu mernu opremu. To zapravo znači da, po svojoj prirodi, merni signali mogu biti kontinualni ili diskretni. Konačno, naglasimo, da iz nekog razloga (najčešće zbog mogućnosti korišćenja računara), može biti pogodno da se kontinualan merni signal diskretizuje.

Potrebno je zapaziti da se izdvajanjem signala ulaza, poremećaja i izlaza sam sistem predstavlja isključivo preko spoljnih manifestacija, dok se u potpunosti izostavljaju interakcije koje se odvijaju u samom sistemu. Kao što je već rečeno, ove interakcije se predstavljaju pomoću

internih signala. Minimalni skup takvih signala koji u potpunosti opisuje ponašanje celokupnog sistema označava se kao *stanje sistema*.

Izvršni organi, sam proces i merna oprema čine sistem<sup>1</sup>, celinu za koju se određuje



Sl. 2-3 ŠEMATSKI PRIKAZ SISTEMA

upravljanje (Sl. 2-3). Potreba za osmišljavanjem pobude sistema tako da se postigne željeni efekat, kao i za praćenjem ostvarenih rezultata dovela je do proširenja osnovnog sistema sa izvršnim organima i mernom opremom. Na taj način, izvorni sistem je, na izvestan način, ograničen. Sa jedne strane izbor izvršnih organa određuje podskup mogućih efekata koji se u sistemu mogu ostvariti. Sa druge strane, merna oprema određuje način na koji se ti efekti mogu pratiti. Dodajmo tome i činjenicu da nas

Hajzenbergov princip neodređenosti uči da posmatrač ne može biti odvojen od onoga što posmatra.

Samo se po sebi razume, da je izdvajanje celine koja se posmatra kao sistem nemoguće napraviti bez detaljnog poznavanja i razumevanja načina rada sistema i svrhe zbog koje se sistem definiše. Ovo razumevanje se najčešće izražava u formi modela sistema. Model se ocenjuje kao dobar ukoliko omogućava da se predvidi i objasni promena koja, pod dejstvom neke spoljne pobude, nastaje u sistemu.

## 2.2 Matematički model

*Između realnosti i upotrebljivosti*

Model sistema može biti dat u formi grafika koji predstavlja zavisnost izlaznih i ulaznih signala, kao fizički model koji predstavlja identični proces napravljen u nekoj razmeri, kao analogni model u okviru koga je proces zamenjen nekim električnim kolom ili mehaničkim sistemom čije ponašanje je analogno ponašanju procesa. Danas je, ipak, matematički model, prevlađujuća forma predstavljanja modela procesa.

U osnovi matematičkog modela leži činjenica da se svaki uređaj, proces (prirodni ili veštački) ili algoritam mogu posmatrati kao sistem koji ima jedan ili više ulaznih signala koji deluju kao pobuda sistema izazivajući neke promene u njegovom ponašanju. Efekti tih promena prate se preko jednog ili više izlaznih signala koji predstavljaju odziv sistema na pobudu koja deluje na njegovom ulazu. Sa matematičke tačke gledišta to znači da se svaki sistem može posmatrati kao preslikavanje skupa ulaznih signala ( $U$ ) u skup izlaznih signala ( $Y$ )

$$\mathcal{H}: U \rightarrow Y \quad (2.1)$$

Funkcija preslikavanja  $\mathcal{H}$  predstavlja matematički model sistema. U zavisnosti od toga da li su ulazni i izlazni signali kontinualni ili diskretni matematički model predstavlja kontinualni ili diskretni sistem.

Dodatna prednost koju pruža matematički model ogleda se u mogućnosti njegovog simuliranja na računaru, što u velikoj meri olakšava analizu ponašanja procesa u različitim hipotetičkim situacijama, pa čak i onim koje bi mogle izazvati havariju na realnom procesu.

Potrebno je istaći da je, za razliku od teorije upravljanja koju čini niz jasno definisanih koncepata i znanja podržanih odgovarajućim tehnikama, matematičko modeliranje u velikoj meri nedefinisano i primenjuje se u različitim oblicima u čitavom nizu disciplina. Tako se na primer, u prirodnim naukama, model najčešće koristi da bi se objasnio neki fenomen, kao što je to slučaj sa

<sup>1</sup> U teoriji upravljanja izraz "proces" se veoma često koristi i za označavanje celog sistema.

Borovim modelom atoma ili talasnom teorijom propagacije elektromagnetnih talasa. Ovakvi modeli se u svojoj suštini mogu posmatrati kao vizuelizacija određenih fenomena. Osnovna karakteristika ovih modela je da oni predstavljaju fizičke promenljive (signale). Otuda je prirodno da se oni formiraju kombinovanjem različitih, postojećih fizičkih fenomena. Sasvim drugačiji su, na primer, ekonomski modeli, često implicitni ili čak i fiktivni, kojima se predviđa stopa inflacije ili nezaposlenosti. Ovi modeli, u najboljem slučaju, vrše ekstrapolaciju uočenih tendencija ponašanja sistema u nekom proteklom periodu vremena.

Jedno od fundamentalnih pitanja koje se javlja u postupku modeliranja je i pitanje do koje mere se može tvrditi da je određena struktura modela ispravno usvojena. Koliko god paradoksalno izgledalo, u odgovoru na postavljeno pitanje ključni problem je zapravo značenje pojma "ispravno".

Brojni rezultati u oblasti prirodnih nauka, a pre svega u fizici pokazuju da je neka naučna teorija prihvaćena ne zato što je "istinita" (šta god to tačno podrazumevalo), već zato što daje rezultate i što je korisna. Ključnim eksperimentom se ne proverava, niti se može proveriti, ispravnost pretpostavljenog rezultata u nekom apsolutnom smislu, već samo da li usvojeni model neke fizičke pojave omogućava ispravnu predikciju ponašanja i da li je konzistentan sa drugim prihvaćenim naučnim rezultatima.

Često pominjan Ajnštajnov citat "*sve dotle dok zakoni matematike odražavaju realnost oni nisu pouzdani, i sve dotle dok su zakoni matematike pouzdani oni ne odražavaju realnost*"<sup>1</sup> imao je, zapravo za cilj da ukaže na ključnu razliku između matematičkih teorema i prirodnih zakona<sup>2</sup> koji se potvrđuju eksperimentom. Naime, svaka matematička teorema počinje i završava se u ljudskom umu, što zapravo znači da je za date početne premise, neophodna isključivo logika da bi se dobio konačan rezultat. Problem nastaje onda kada rezultat počiva, ne na aksiomima, već na podacima koji se dobijaju iz realnog sveta. Uočena pojava može, po pravilu, da se objasni pomoću više teorijskih pristupa i sam logika često nije dovoljna da se dobije finalni odgovor. U tom slučaju, dobro postavljeni eksperiment može da pokaže koja je od dve kontradiktorne teorije ispravna.

Jedna od dobrih ilustracija odnosa modela i fenomena koji se modelira je svetlost. Teorija o dualnoj, korpuskularnoj i talasnoj, prirodi svetlosti govori zapravo samo o tome da neke od uočenih fenomena možemo efikasno modelirati na jedan način, korišćenjem rezultata talasne teorije, a druge pak pomoću teorije čestica.

Pri formiranju matematičkog modela procesa treba imati na umu da su svi realni procesi veoma složeni. Stoga je svaki pokušaj da se proces egzaktno predstavi modelom najčešće neizvodljiv. Sa druge strane, čak iako je to moguće uraditi, model koji odražava sve, ili gotovo sve, aspekte ponašanja procesa, je, po pravilu, izuzetno kompleksan i značajno komplikuje analizu ponašanja procesa i projektovanje odgovarajućeg upravljanja. Prirodna alternativa je da se model formira tako da on odražava samo suštinske aspekte ponašanja jednog procesa. Izvesno je da, pri tome, postoji bojazan da suviše jednostavan model neće ispuniti svoju osnovnu svrhu u pogledu predviđanja ponašanja procesa.

U odmeravanju stepena kompleksnosti modela treba imati na umu da određenu ulogu igra i svrha za koju se model formira. Tako je, na primer, imajući u vidu da se upravljanje procesom projektuje u cilju ostvarivanja određenog cilja, logično očekivati da se može koristiti relativno jednostavan model, uz uslov da su njime obuhvaćene suštinske karakteristike procesa. Ovaj model<sup>3</sup> treba da opiše samo uzročno posledičnu vezu između spoljnih podsticaja i ponašanja procesa, bez zalaženja u detaljan opis internih fenomena. To zapravo znači da se interni fenomeni uzimaju u obzir samo u onoj meri u kojoj utiču na postizanje željene performanse procesa.

Samo se po sebi razume da se ovako formiran model neće moći koristiti za analizu sistema ili za njegovu simulaciju. U tu svrhu neophodno je da se formira model koji daje sveobuhvatniji

<sup>1</sup> A. Einstein, *Geometrija i iskustvo*

<sup>2</sup> Videti npr. Cormac, R.S., Mantek, N., *Doubts and certainty in statistics*, Jnl. Royal Society of Medecine, 1990., Vol.83 (No.3), pp.136-7

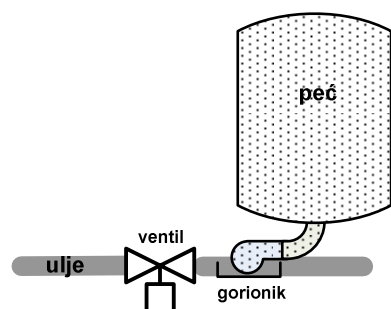
<sup>3</sup> Model formiran za potrebe projektovanja upravljanja se u literature često označava kao *nominalni model*



opis procesa, odnosno koji uključuje i karakteristike procesa koje nisu od značaja za projektovanje upravljanja, ali imaju direktni uticaj na ponašanje procesa. Ovaj model<sup>1</sup> se često posmatra kao "stvarni" opis procesa. Međutim, najčešće se i ovde radi samo o aproksimaciji, koja je istina manje gruba nego što je to slučaj kod nominalnog modela.

Razlika između kalibracionog i nominalnog modela predstavlja grešku modeliranja. Potrebno je zapaziti da greška modeliranja ne predstavlja odstupanje modela od samog sistema, već razliku dva modela. Ovo je prirodna posledica potrebe da se greška kvantitativno izrazi.

Koliko god se činilo da je određivanje nominalnog modela jednostavnije od određivanja kalibracionog modela, to ne mora biti tačno. Naime, ovde nije u pitanju sam stepen pojednostavljenja modela, već da li se njime opisuju svi fenomeni koji su bitni za realizaciju upravljanja.



SL. 2-4 ŠEMATSKI PRIKAZ INDUSTRIJSKE PEĆI

#### PR. 2-1

Posmatra se jedna izrazito velika industrijska peć koja se zagreva pomoću ulja (Sl. 2-4). Temperaturom u peći se upravlja pomoću ventila koji određuju protok ulja u gorioncima.

Izvesno je da model mora da uključi dinamiku procesa zagrevanja u peći. Imajući u vidu da su temperaturni procesi relativno spori, brzina sa kojom se ventili otvaraju ili zatvaraju neće bitno uticati na ponašanje procesa, što znači da se može izostaviti pri formiranju kalibracionog modela. Međutim, činjenica da ventili mogu ući u zasićenje (biti potpuno otvoreni) ili da se mogu zaglaviti, može značajno uticati na performansu procesa. Otuda se ovi fenomeni moraju uključiti u nominalni model.

Iako se upravljanje, po pravilu, projektuje na osnovu nominalnog modela, činjenica je da projektovani kontroler treba da radi na realnom procesu. Otuda se od projektanta zahteva da formira kontroler koji će na realnom procesu dati performansu koja se očekuje na osnovu nominalnog modela. Ukoliko se to postigne, onda se smatra da je kontroler robustan. Da bi se projektovao robustni kontroler, po pravilu, je neophodno da se raspolaže nekom granicom greške modeliranja.

Pred projektantom se, dakle, postavlja zadatak da, na neki način, formira model procesa koji će u dovoljnoj meri odražavati realnost, ali će istovremeno biti i pogodan za manipulaciju u toku projektovanja upravljanja. Postavljeni zadatak je utoliko važniji, što iskustvo pokazuje da dobro odabran model može značajno pojednostaviti projektovanje upravljanja, a posebno njegovu implementaciju na samom procesu. Ova činjenica je dovela do toga da je i samo modeliranje postalo ozbiljna oblast istraživanja. Bez želje da se detaljno izlažu rezultati teorije matematičkog modeliranja ukazaće se samo na osnovna pitanja koja se u toj oblasti sreću.

## 2.3 Mogući pristupi u izboru matematičkog modela

### *Od razumevanja do kvantifikacije*

U osnovi matematički model se može posmatrati kao skup jednačina koje izražavaju uticaj koji početni uslovi, upravljački signali i poremećaji imaju na interne signale u sistemu i na signale izlaza. Otuda, model izražava preslikavanje skupa spoljnih stimulansa (ulazi i poremećaji procesa – nezavisno promenljive) koji utiču na operaciju koja se u procesu progresivno odvija na skup veličina koje odražavaju uslove pod kojima proces radi i efekte koji se pri tome postižu (stanja sistema i izlazi procesa – zavisno promenljive). Ukoliko matematički model definiše preslikavanje

<sup>1</sup> Model koji daje sveobuhvatniji opis procesa se u literaturi označava kao *kalibracioni model*. Naziv potiče od činjenice da se model najčešće dobija tako što se u matematičkim jednačinama uvede niz parametara koji se zatim eksperimentalno određuju (kalibrišu) uz pomoć eksperimenata na samom procesu.

nezavisno promenljivih i na stanja i na izlaze sistema tada se govori o matematičkom modelu u prostoru stanja

$$\begin{aligned}\varphi : (u, d) &\rightarrow x \\ f : (u, d) &\rightarrow y\end{aligned}\tag{2.2}$$

Ukoliko se, međutim, modelom definiše isključivo preslikavanje nezavisno promenljivih na izlaz sistema, model se označava kao ulazno-izlazni mode (U/I).

$$f : (u, d) \rightarrow y\tag{2.3}$$

U zavisnosti od toga da li su ulazni i izlazni signali kontinualni ili diskretni, funkcija preslikavanja može biti kontinualna ili diskretna, pa se shodno tome govori o kontinualnim ili diskretnim modelima.

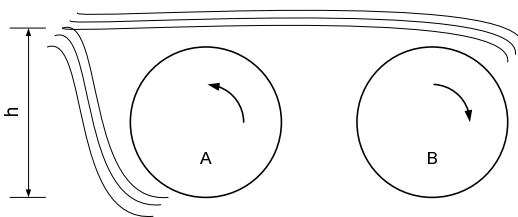
Ukoliko se svi elementi procesa mogu opisati tako da postoji samo jedna nezavisna promenljiva (najčešće vreme), tada se matematički model može izraziti pomoću običnih diferencijalnih ili diferentnih jednačina. Ukoliko u modelu postoji više nezavisno promenljivih, tada se model mora opisati pomoću parcijalnih diferencijalnih ili diferentnih jednačina.

Istorijski posmatrano, pri određivanju funkcije preslikavanja pošlo se od činjenice da u svakom realnom sistemu postoje osnovni fenomenološki zakoni koji određuju odnose između svih signala u sistemu. Ovi zakoni zavise od prirode sistema, odnosno oslanjaju se na teorijske rezultate fizike, hemije, ekonomije ili neke druge nauke.

Kod fizičkih sistema, svi fenomeni počivaju na zakonu o održanju mase, energije i momenta. Otuda se model dobija tako što se sve promenljive u sistemu povežu preko odgovarajućih zakona o održanju. U zavisnosti od tipa sistema, koriste se, naravno, odgovarajući izvedeni zakoni (Kirhholjevi zakoni za električna kola, Njutnovi zakoni za mehaničke sisteme, itd.)

Sa praktične taške gledišta ovaj pristup dovodi do dva osnovna problema. Sa jedne strane pokazuje se da postavljanje modela samo na osnovu fizičkih zakona ne daje nužno odgovor na pitanje o određenim aspektima sistema. Sa druge strane, uprkos činjenici da su osnovni zakoni održanja dati izuzetno jednostavnim relacijama, mnoštvo interakcija pojedinih elemenata u sistemu, po pravilu, dovodi da izuzetno glomaznih i kompleksnih modela.

#### PR. 2-2



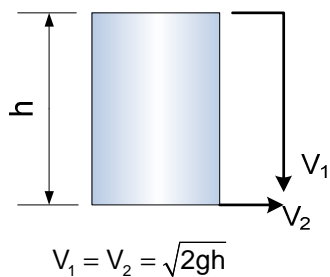
SL. 2-5 DVA NAČINA RADA VODENIČNOG TOČKA

Dobra ilustracija fenomena koji mogu nastati posmatranjem isključivo fizičkih zakonitosti je problem modeliranja vodeničnog točka koji je zaokupljao pažnju naučnika od kraja šesnaestog pa sve do sredine devetnaestog veka<sup>1</sup>. Naime, sve do pojave parne mašine (1835 god.) vodenični točak je predstavljao jedini uređaj koji je mogao da proizvede određenu snagu. Prema nekim izvorima, u sedamnaestom veku u zapadnoj Evropi broj uređaja koji su koristili vodenični točak prelazio je 20,000.

U principu vodenični točak može da radi tako što će mlaz vode udarati odozdo u lopatice točka (Sl. 2-5-A) ili se slivati odozgo na točak (Sl. 2-5-B). Prirodno se postavlja pitanje koji je od ova dva točka efikasniji, odnosno koji ima veći stepen iskorišćenja snage vodenog toka.

Tokom skoro dva i po veka, čitav niz vodećih naučnika tog vremena je razvijao različite načine procene ove efikasnosti. Dobijeni rezultati su značajno varirali, ali se većina zasnivala na Toričeljevim rezultatima vezanim za brzinu vodenog toka koji pada sa visine  $h$  i vode koja ističe iz rezervoara iste visine (Sl. 2-6). Polazeći od činjenice da je brzina vode ista, mnogi su bili skloni zaključku da je i efikasnost ista. Međutim, izvestan broj naučnika je pokušavao da eksperimentalno dokaže da to nije tačno. Tako je, na primer, predložen apstraktan eksperiment u kome bi se voda idealno, bez gubitaka, kap po kap puštala na

<sup>1</sup> Leigh, J. R , *Control Theory: A Guided Tour*, IEE, 2004.



**SL. 2-6 POREĐENJA BRZINE  
TEČNOSTI**

točak. Izvesno je da bi u tom slučaju točak B radio bez ikakvih gubitaka jer bi se sva energija kapi prenela u okretanje točka. Dakle njegova efikasnost bi bila 100%. U istom zamišljenom eksperimentu ta tvrdnja se nije mogla uspostaviti za točak A.

Dalji napredak u proceni efikasnosti napravljen je formiranjem modela koji je uključivao nepoznate parametre, odnosno korišćenjem jednačina izvedenih na osnovu teorijskih rezultata u kojima je figurisao određen broj nepoznatih konstanti. Ove konstante su određivane iz eksperimenata tako da se teorijski rezultat usaglasa sa eksperimentalnim.

Tek nekoliko decenija posle otkrića parne mašine, kada su vodenični točkovi već počeli da gube praktični značaj, problem je definitivno i teorijski rešen. Ne sporeći, naravno, tačnost Toričelijevog zakona o vodenom stubu, pokazalo se da je ključni problem nastao u tome što se nije posmatrao sam fizički proces koji dovodi do okretanja točka. Naime, u slučaju dejstva mlaza vode odozdo točak se pokreće na osnovu primljenog impulsa što znači da se deo energije gubi na predaji impulsa. Međutim, kada mlaz vode deluje odozgo točak se pokreće na osnovu težine (potencijalne energije) vode pa zbog toga ima veću efikasnost.

Brojni radovi svedoče o tome da je razumevanje značaja eksperimentalnih rezultata imalo uticaja na razmišljanje i o drugačijim pristupima modeliranju. Moguće je, međutim, i da su rezultati istraživanja u oblasti prirodnih nauka izvršili svojevrsan uticaj na kreiranje drugačije metodologije. Malo je verovatno da su se pragmatični inženjeri, zaokupljeni rastućim brojem složenih procesa koje je trebalo modelirati, bavili problemima uspešnosti nauke i kompresibilnosti univerzuma, ali se čini da je osnovano pretpostaviti da su ih svest o mogućnosti izražavanja složenih prirodnih pojava pomoću jednostavnih jednačina, o značaju eksperimenata u proveru teorijskih rezultata, kao i brojna praktična inženjerska rešenja koja su proizašla iz analogije sa prirodnim pojavama, doveli do zaključka da bi i matematički modeli mogli da budu daleko jednostavniji.

Šta god bio stvarni uzrok, činjenica je da se drugi mogući pristup u modeliranju zasniva na apriornom usvajanju strukture i kompleksnosti modela, odnosno funkcije preslikavanja, kao i pretpostavci da se svi fenomeni koji se odvijaju u procesu mogu detektovati na osnovu eksperimenata. Eksperimentat se formira tako da se sistem pobuđuje pomoću nekog niza odabranih ulaznih signala i da se snimaju odgovarajući odzivi sistema. Na osnovu eksperimentalnih rezultata i usvojene strukture modela određuju se njegovi parametri tako da odstupanje izlaza modela od izlaza procesa bude u dozvoljenim granicama. Pri tome se parametri mogu određivati na bazi heurističkog pogađanja ili na osnovu nekog utvrđenog algoritma. U ovom drugom slučaju se govori o identifikaciji matematičkog modela.

Ovaj pristup modeliranju u kome se ne razmatra priroda samog sistema, već se on posmatra kao zatvorena celina označava se kao model "*crne kutije*". Kao pandan, modeliranje koje počiva na posmatranju sistema označava se kao model "*bele kutije*". U praksi se, kao uostalom i u svim aspektima života, pokazuje da nijedan od ova dva ekstremna pristupa ne daje zadovoljavajuće rezultate.

Samo se po sebi razume da se ključni problem kod posmatranja sistema kao crne kutije ogleda u pitanju da li je eksperimentat izvršen tako da dobijeni odzivi odražavaju sve aspekte ponašanja sistema. Dodatni problem predstavlja, svakako i činjenica što parametri modela nemaju nikakvo fizičko značenje, pa se ne mogu odrediti ni gabariti u kojima bi njihove vrednosti mogle da se kreću. Osnovna prednost ovog pristupa ogleda se u mogućnosti zadavanja željene kompleksnosti samog modela.

Sa druge strane, nema nikakve sumnje da se sistem veoma jednostavno modelira ukoliko svaki njegov aspekt sledi iz nekog od osnovnih prirodnih zakona i ukoliko se vrednosti svih numeričkih parametara egzaktno poznaju. Realnost je, nažalost, često drugačija. Kompleksnost većine sistema dovodi do izuzetno složenih jednačina koje su krajnje nepodobne za dalju obradu. Otuda se, teorijski rezultati, primenjuju na idealizovani ekvivalent realnog procesa u kome je

zanemaren niz fenomena.

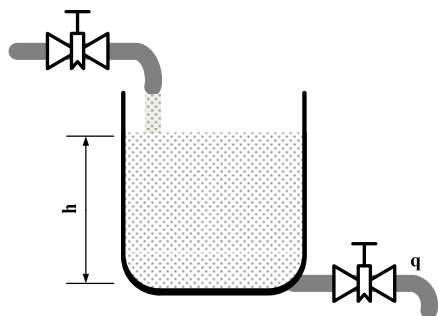
Najčešće korišćen pristup idealizaciji sistema je da se on predstavi tako da svaki elemenat ima samo jednu osobinu ili funkciju. Tako, se na primer neko telo određene mase, posmatra kao da je celokupna masa koncentrisana u jednoj tački, da je nestišljiva i neelastična, da nema trenja itd. Na isti način, električni kalem se posmatra kao da ima isključivo induktivne osobine. Ukoliko je, iz nekog razloga, neophodno da se razmatraju i otpornost i kapacitivnost kalema one se mogu posmatrati kao posebni elementi. Ovako dobijeni modeli, označavaju se kao modeli sa koncentrisanim parametrima. Prednost modela sa koncentrisanim parametrima sastoji se u tome što svaki elemenat ima samo jednu nezavisno promenljivu.

U formiranju modela sa koncentrisanim parametrima otvara se, prirodno, pitanje određivanja odgovarajućih numeričkih vrednosti. Neki od ovih parametara su univerzalne konstante čije su vrednosti egzaktno određene i poznate. Drugu grupu parametara čine oni čija se uloga, sa teorijske tačke gledišta, veoma dobro razume, ali čije vrednosti značajno variraju u zavisnosti od konfiguracije sistema i uslova u kojima sistem radi. Konačno trećoj grupi pripadaju parametri čije se vrednosti ne mogu odrediti na osnovu poznatih teorijskih rezultata.

Drugim rečima, i kod modela bele kutije, često se otvara pitanje vrednosti pojedinih parametara. Razlika je, međutim, u tome što se ovde poznaje priroda tih parametara i što je moguće osmisлити eksperiment pomoću koga se oni mogu odrediti.

U želji da se iskoriste prednosti i jednog i drugog pristupa, došlo se na ideju da se oba pristupa kombinuju tako da se dobije model "sive kutije". Fenomenološki uvid se koristi za utvrđivanje ključnih dinamičkih karakteristika, nelinearnosti, značajnih vremenskih kašnjenja i drugih relevantnih osobina. Na osnovu tih saznanja odredi se kompleksnost i struktura modela. Za tako određenu strukturu se, zatim, vrši eksperiment i korišćenjem metodologije crne kutije određuju parametri modela.

Pr. 2-3



SL. 2-7 ŠEMATSKI PRIKAZ REZERVOARA

Posmatra se cilindrični rezervoar vode, preseka  $S$ . Rezervoar se prazni pomoću odvodne cevi koja se nalazi na njegovom dnu. Na osnovu teorije dinamike fluida poznato je da se protok vode na izlazu iz rezervoara može izraziti kao

$$q(t) = K\sqrt{h(t)}, \quad (2.4)$$

gde je  $h(t)$  visina vode u rezervoaru. Konstanta  $K$  zavisi od dotoka vode u rezervoar kao i preseka odvodne cevi, i može se svakako izračunati na bazi fizičkih zakona. Međutim, jednostavnije je da se ona odredi eksperimentalnim putem.

Ako se visina vode  $h(t)$  merih svakih  $T$  sekundi, pri čemu se  $T$  odabere tako da je  $|h(t) - h(t - T)|$  malo, tada se zadovoljavajuća procena protoka može odrediti kao

$$\hat{q}(t) = \frac{|h(t) - h(t - T)|}{T} S, \quad (2.5)$$

gde je  $S$  površina poprečnog preseka rezervoara. Sada se poređenjem fizičkog modela za protok (2.4) i dobijene procene (2.5), korišćenjem neke metode, određuje konstanta  $K$ .

## 2.4 Određivanje parametara matematičkog modela

### Usaglašavanje predstave sa realnošću

U teoriji upravljanja sistemima potreba za matematičkim modelom javila se u nastojanju da se performansa sistema na neki način kvantitativno izrazi. Naime, polazeći od same suštine pojma izlaza sistema, prirodno bi bilo da se ponašanje svakog realnog sistema prati kroz posmatranje njegovog odziva na neku datu pobudu. Teorijski bi, prema tome, bilo moguće da se sistem pusti u rad i da se, na osnovu posmatranja njegovog odziva, utvrdi da li on radi na zadovoljavajući način. Problem, međutim nastaje onda kada se pokaže da sistem nema zahtevanu

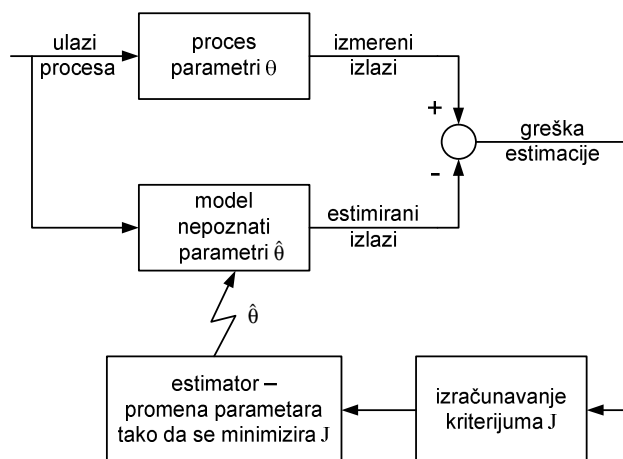
performansu.

Izvesno je da se performansa sistema može promeniti ako se promeni pobuda, ali je veoma teško, ako ne i nemoguće da se čisto heurističkim probanjem različitih pobuda dođe do one koja će rezultovati željenom performansom. Drugim rečima, da bi se došlo do bilo kog sistemskog pristupa u određivanju poželjne pobude sistema bilo je neophodno da se razviju metode analize sistema.

Analiza sistema je, u skladu sa našim sposobnostima percepcije, prirodno pošla od vremenskog domena u okviru koga su definisani pokazatelji ponašanja sistema pri nekoj standardizovanoj klasi pobudnih signala, od kojih se najčešće koristi jedinični odskočni odziv. Međutim, koliko god da se vremenski domen čini prirodnim za posmatranje rada sistema, toliko su dobijeni rezultati nepraktični sa gledišta projektovanja upravljanja. Otuda se težište posmatranja signala prenelo na frekvencijski i kompleksni domen u kojima je bilo moguće da se, korišćenjem relativno jednostavnog matematičkog aparata, formuliše čitav niz metoda za analizu i sintezu sistema.

Nezavisno od domena u kome se signali posmatraju, uvođenjem pojma jediničnog impulsnog odziva, analiza sistema je omogućila da se za svaki domen definiše odgovarajući matematički model, na osnovu koga se kvantitativno ocenjuju parametri performanse sistema. Ova činjenica je, prirodno, dovela je do ideje da se inverzijom tog pristupa, eksperimentalno određuje matematički model nepoznatog sistema. Tako se, na primer, snimanjem jediničnog odskočnog odziva, uz pretpostavljeni red i oblik funkcije prenosa sistema, mogu odrediti parametri te funkcije prenosa. Na isti način, snimanjem frekvencijskih karakteristika sistema i aproksimacijom tih karakteristika pomoću Bodeovih dijagrama, dobiće se polovi i nule funkcije prenosa linearizovanog modela posmatranog sistema. Matematički model se, takođe, može odrediti i na osnovu utvrđivanja korelacije između odabranog test ulaznog signala i snimljenog izlaza sistema.

Sve pobrojane metode, kao i niz drugih, se zapravo zasnivaju na ideji da se pretpostavi model procesa i da se onda izvrši estimacija njegovih parametara. Pri tome se, kao prvo, na osnovu teorijskih razmatranja fizičke suštine samog procesa i eventualno analizom fenomenoloških aspekata uočenih u toku rada procesa pretpostavi struktura modela u formi



SL. 2-8 BLOK DIJAGRAM POSTUPKA ESTIMACIJE PARAMETARA

iz modela objektivizira. U tom smislu definiše se skalarni kriterijum koji predstavlja neku meru odstupanja matematičkog modela od procesa. Uvođenjem kriterijuma, određivanje nepoznatih parametara je svedeno na problem određivanja minimuma.

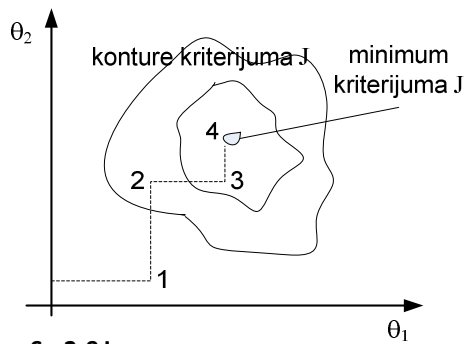
Minimiziranje datog kriterijuma se vrši različitim algoritmima za estimaciju parametara, koji se, neformalno, ali najčešće tačno, označavaju kao "metode penjanja ka vrhu"<sup>1</sup> (Sl. 2-9). Sa

skupa jednačina u kojima je određen broj parametara neodređen. Zatim se obavi niz eksperimenata na samom procesu. Merni podaci prikupljeni tokom eksperimenata koriste se kao osnova za određivanje nepoznatih vrednosti parametara. Ovi parametri se menjaju, primenom različitih metoda, sve dotle dok se ponašanje modela ne približi u dovoljnoj meri ponašanju realnog procesa (Sl. 2-8).

Neke od metoda za identifikaciju matematičkog modela uključuju i algoritam automatske promene parametara. Da bi se razvili ovi algoritmi bilo je neophodno da se poređenje mernih podataka, sa podacima dobijenim

<sup>1</sup> Bukvalni prevod engleskog izraza "hill climbing methods" (pri tome se pretpostavlja da je minimum jedne

matematičke tačke gledišta, može se reći da sve ove metode pokušavaju da nađu minimum u jednom višedimenzionalnom, bolesno uslovljenom, parametarskom prostoru. Ova bolesna uslovljenost odnosi se, pre svega na činjenicu da koordinatne ose nisu ortogonalne, kao i da kriterijumska funkcija najčešće ima veoma uske pikove, tako da se proces određivanja parametara lako može prekinuti i pre nego što se dostigne stvarni minimum.



SL. 2-9 ILUSTRACIJA ITERATIVNOG POSTUPKA  
ESTIMACIJE PARAMETARA KOD  
DVODIMENZIONALNOG SISTEMA

Potrebno je da se istakne da se adekvatni model gotovo nikad ne dobije sa prvom pretpostavljenom strukturom modela. Po pravilu, struktura modela se takođe menja, heuristički, ili na neki drugi način, sve dok se ne dobije model kod koga estimator daje zadovoljavajuću vrednost funkcije kriterijuma.

U toku procesa modeliranja prate se greške (neslaganje) između modela procesa i izmernih izlaza,

koje se nazivaju reziduali. U principu, reziduali ne treba da sadrže determinističke komponente i treba da imaju srednju vrednost nula. Ukoliko to nije slučaj, onda to znači da proces još uvek sadrži nemodelirane determinističke karakteristike i da one treba da se uključe u sledeću strukturu modela.

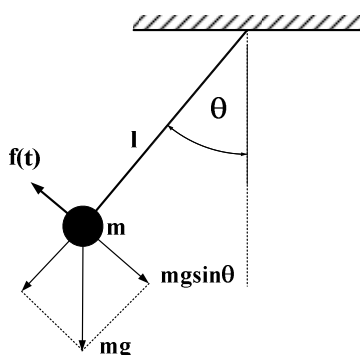
## 2.5 Linearizacija modela

*Od realnosti ka mogućnostima teorije upravljanja*

Podsetimo se da je sistem linearan ukoliko ima osobinu aditivnosti i homogenosti, odnosno ako važi principi superpozicije. Praksa pokazuje da veoma mali broj realnih sistema ispunjava ovaj uslov, posebno ako radi u različitim radnim uslovima. Sa druge strane teorija upravljanja pruža izuzetno moćan i efikasan aparat za rešavanje čitavog niza problema uz uslov da je model sistema linearan. Otuda je prirodan interes da se sistem modelira pomoću linearnog modela.

Osnovna ideja u dobijanju linearnog modela počiva na činjenici da se svaka nelinearna funkcija može predstaviti kao niz povezanih linearnih funkcija, od kojih je svaka različita od nule na nekom malom intervalu vremena. U tom smislu, čini se da se i model nekog sistema može predstaviti kao linearan, uz uslov da se promena njegovih promenljivih ograniči na neki relativno mali opseg. Ovaj postupak se označava kao linearizacija matematičkog modela.

### PR. 2-4



SL. 2-10 KLATNO – NELINEARAN  
SISTEM

U cilju ilustracije mogućnosti linearizacije posmatraće se klatno mase  $m$ , obešeno o neelastičnom koncu dužine  $l$ , na koje deluje sila  $f(t)$  (Sl. 2-10). Na ovu pobudu, klatno se odaziva menjajući ugao  $\theta$ . Jednačina kretanja klatna (matematički model) izvodi se iz ravnoteže sila koje deluju na masu. Pri tome, ako se zanemari trenje, jednačina kretanja je

$$m \frac{d^2 \theta}{dt^2} = f(t) - mg \sin \theta$$

Jednostavnom proverom može se utvrditi da za ovaj sistem ne važi princip superpozicije, što znači da je on nelinearan. Ne upuštajući se u detaljnu analizu same jednačine intuitivno je jasno da će promena ugla  $\theta$  (izlaz sistema) zavisiti od sile koja na klatno deluje i od početnog položaja ( $\theta_0$ ) u kome se klatno nalazi u trenutku

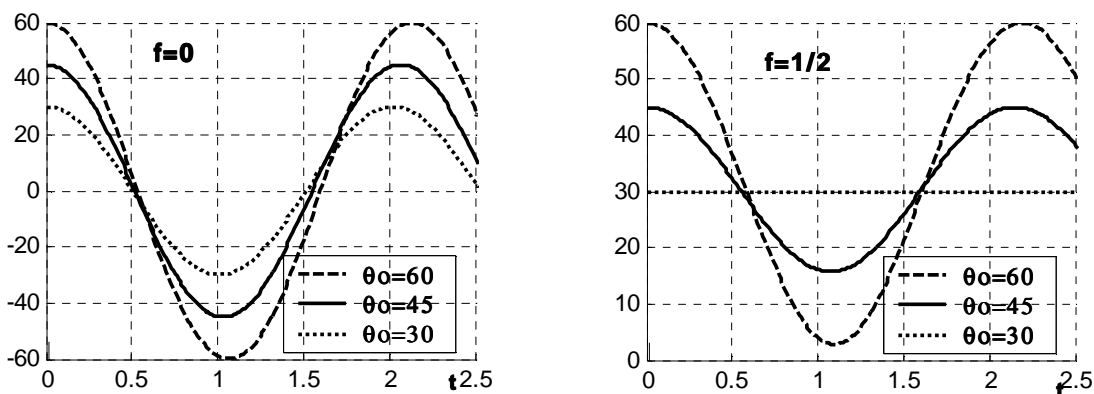
funkcije istovremeno i maksimum iste te negativne funkcije, tako da je u osnovi svejedno koji se od dva ekstremuma traži)

otpočinjanja dejstva sile.

U cilju analize ponašanja klatna, za vrednosti parametara:  $m=1/g$ ,  $l=0.1$  snimljena je promena odziva za tri vrednosti početnih uglova  $\theta_0 \in \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$ , u slučaju kada na klatno deluje konstantna sila  $f(t) \in \{0, 1/2\}$ .

Iz dobijenih rezultata (Sl. 2-11) se zapaža da amplituda oscilacija klatna zavisi od odnosa početnog položaja i sile koja na klatno deluje. Tako, na primer, kada na klatno koje se nalazi u početnom položaju pod uglom od  $30^\circ$ , deluje sila  $f=1/2$ , ono se uopšte neće pomerati. Razlog tome leži u činjenici da je ravnotežni položaj klatna za konstantnu silu  $f=1/2$  upravo ugao od  $30^\circ$

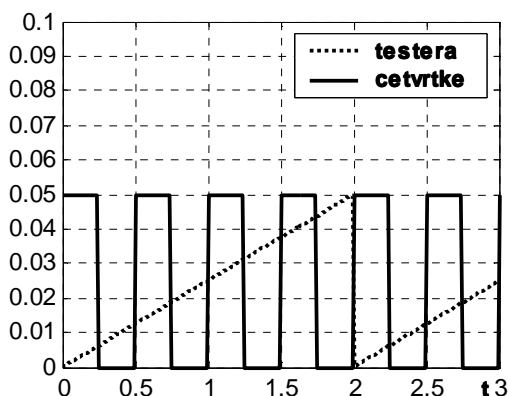
$$(2.7) \quad 0.1 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2} - \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$



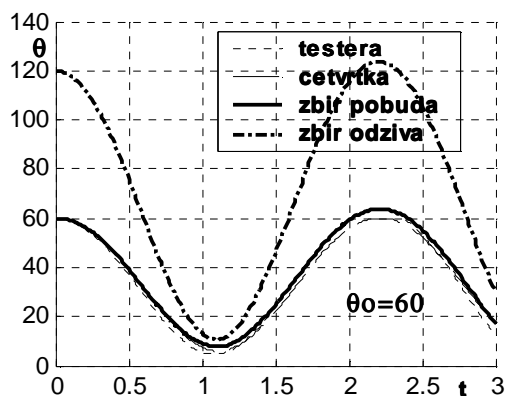
SL. 2-11 ODZIV KLATNA ZA RAZLIČITE POČETNE USLOVE I RAZLIČITE KONSTANTNE POBUDE

Da bi se ispitalo važenje principa superpozicije posmatrano je klatno koje, u odsustvu pobude, konstantna sila  $f_0=1/2$  održava u ravnotežnom položaju pod uglom od  $30^\circ$ . Na ovo klatno dovode se dva pobudna signala (Sl. 2-12):

- testerasti signal amplitude 0.05 i periode 2
- povorku pravougaonih impulsa amplitude 0.05 i periode 0.5



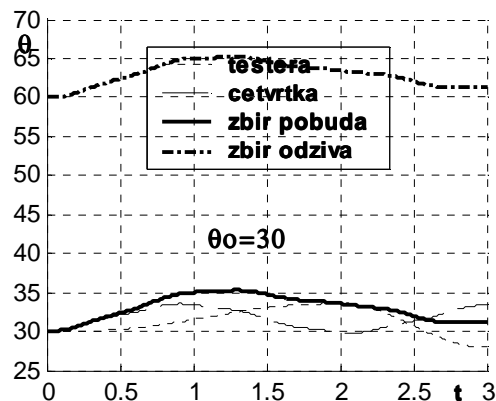
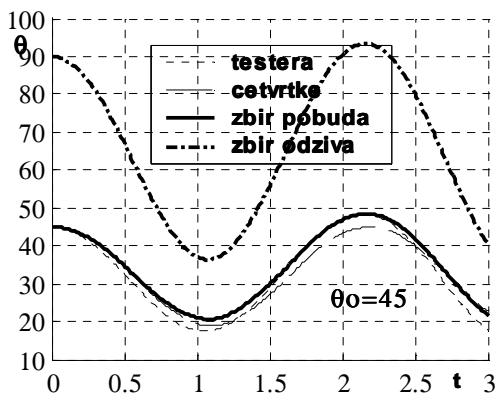
SL. 2-12 POBUDNI SIGNALI NA KLATNU



SL. 2-13 SPITIVANJE ADITIVNOSTI - ODZIVI KLATNA (UGAO  $\theta$ ) ZA  $\theta_0 = 60^\circ$

U skladu sa principom superpozicije snimani su pojedinačni odzivi na obe pobude, zbir odziva, kao i odziv na zbir pobuda, i to za klatna koja se nalaze pod početnim uglovima od  $\theta_0 = 30^\circ, 45^\circ$  i  $60^\circ$ .

Iz dobijenih rezultata (Sl. 2-13 i Sl. 2-14) vidi se da princip aditivnosti nije zadovoljen ni za jedan od posmatranih početnih položaja klatna. Međutim, vidi se još nešto, a to je da se sistem ne ponaša isto za različite početne položaje. Naime, kada sistem počinje da radi iz ravnotežnog položaja ( $\theta_0 = 30^\circ$ ) odziv na zbir pobuda i zbir pojedinačnih odziva su funkcije istog oblika koje se razlikuju samo po amplitudi. Situacija je potpuno drugačija kod druge dve početne vrednosti ugla.



SL. 2-14 ISPITIVANJE ADITIVNOSTI - ODZIVI KLATNA (UGAO  $\theta$ ) ZA  $\theta_0 = 45^\circ$  I  $\theta_0 = 30^\circ$

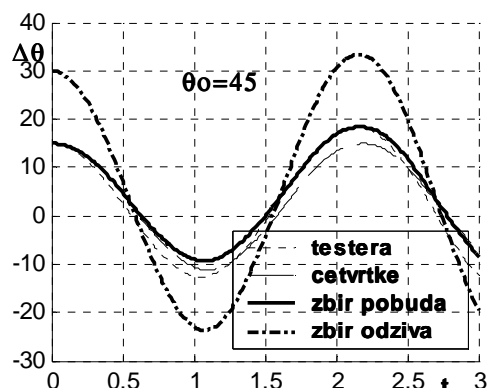
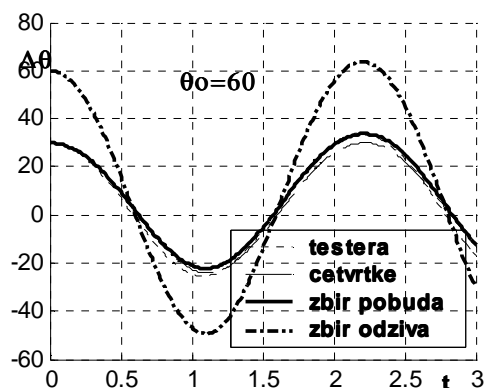
Da bi se ovaj fenomen jasnije uočio, posmatran je drugačiji model sistema. Naime usvojeno je da je

- ulaz sistema:  $\Delta f = f - f_0$  - odstupanje sile od sile  $f_0$  ( $f_0 = \frac{1}{2}$ ) koja klatno drži u ravnotežnom položaju  $\theta_0 = 30^\circ$
- izlaz sistema:  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  - odstupanje ugla od ravnotežnog položaja.

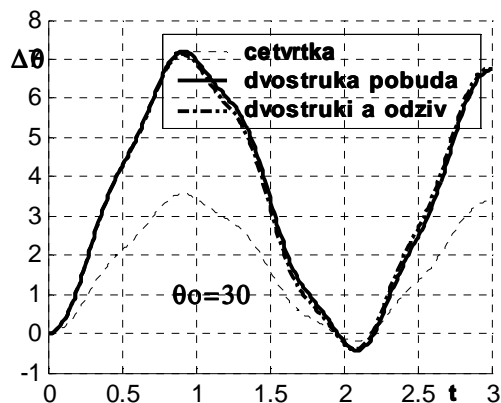
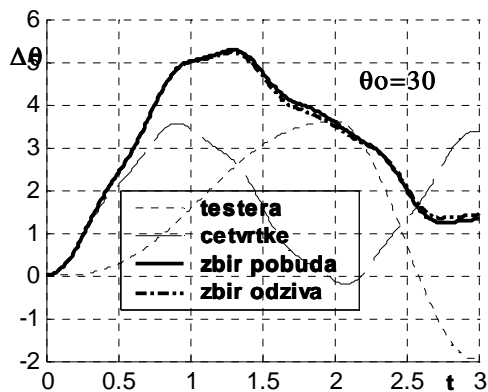
Sa ovako definisanim ulaznim i izlaznim signalima, jednačina kretanja klatna postaje

$$0.1 \frac{d^2(\Delta\theta + \theta_0)}{dt^2} = \Delta f + f_0 - \sin(\Delta\theta + \theta_0) \Rightarrow 0.1 \frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} = \Delta f + f_0 - \sin(\Delta\theta + \theta_0)$$

(2.8)



SL. 2-15 ISPITIVANJE ADITIVNOSTI - ODZIVI KLATNA (ODSTUPANJE UGLA  $\Delta\theta$ ) ZA  $\theta_0 = 60^\circ$  I  $\theta_0 = 45^\circ$

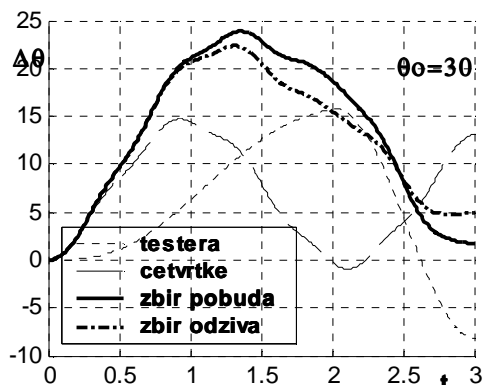


SL. 2-16 ISPITIVANJE ADITIVNOSTI I HOMOGENOSTI – ODZIVI KLATNA ZA  $\theta_0 = 30^\circ$

Iz snimljenih grafika odstupanja ugla  $\Delta\theta$  (Sl. 2-15 i Sl. 2-16) vidi se da samo za klatno koje počinje da



radi sa uglom koji odgovara ravnotežnom položaju važi princip aditivnosti. Pod istim uslovima, za ovo klatno važi i princip homogenosti, odnosno odziv na dvostruku pobudu jednak je dvostrukom odzivu na jediničnu pobudu (Sl. 2-16).



SL. 2-17 ISPITIVANJE ADITIVNOSTI - ODZIVI KLATNA (ODSTUPANJE UGLA  $\Delta\theta$ ) ZA  $\theta_0 = 30^\circ$ , PRI AMPLITUDI POBUDNIH SIGNALA OD 0.2

Interesantno je zapaziti da sa povećanjem amplituda pobudnih signala, dolazi i do povećanja odstupanja ugla  $\Delta\theta$  i da osobine aditivnosti i homogenosti prestaju da važe (Sl. 2-17).

Uočeno ponašanja klatna može se objasniti pomoću osobine sinusoidalne funkcije. Ako se sinusna funkcija razvije u red u okolini tačke  $\theta_0$  i, uz pretpostavku da je  $\Delta\theta$  malo, zadrži samo linearni član dobija se ,

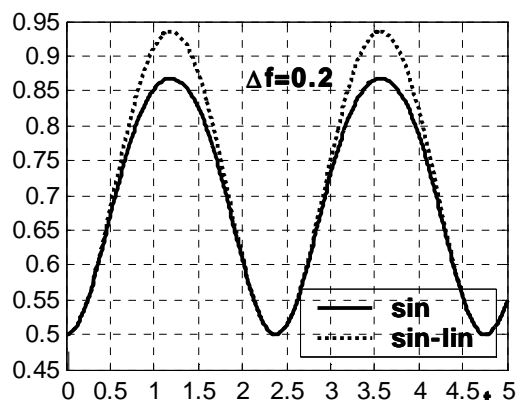
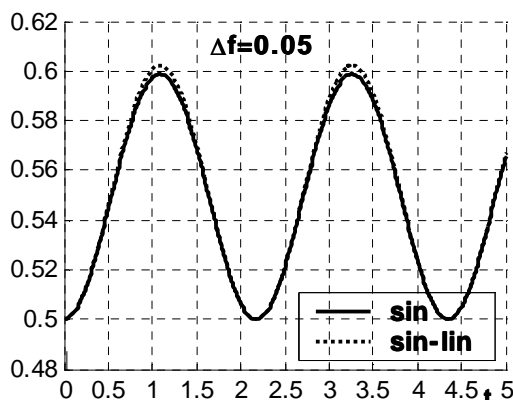
$$\sin(\Delta\theta + \theta_0) \approx \sin(\theta_0) + \cos(\theta_0)\Delta\theta$$

U tom slučaju, jednačina kretanja klatna (2.8) može se aproksimirati jednačinom koja je linearna po  $\Delta\theta$ , tako da se dobije.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\theta_0}{dt^2} = 0 \\ f_0 = \sin(\theta_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0.1 \frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} = \Delta f - \cos(\theta_0)\Delta\theta$$

(2.10)

Potrebno je zapaziti da ovaj model ima ograničeno važenje, odnosno da on predstavlja preslikavanje ulaza sistema na izlaz pod uslovom da je  $\Delta f$  dovoljno malo tako da izazove dovoljno malo  $\Delta\theta$  za koje je linearizacija sinusa validna (Sl. 2-18).



SL. 2-18 SINUSOIDALNA FUNKCIJA I LINEARIZOVANA SINUSOIDALNA FUNKCIJE ARGUMENTA  $\theta$  RAČUNATOG ZA RAZLIČITE VREDNOSTI SILE

Izloženi postupak predstavlja linearizaciju matematičkog modela, a tačka u čijoj okolini se model linearizuje se naziva radna tačka. Činjenica da je model validan samo za male perturbacije u okolini radne tačke može da predstavlja značajan ograničavajući faktor. Ovaj problem se može prevazići ako se sistem, umesto u okolini jedne radne tačke, linearizuje u okolini radne (nominalne) trajektorije koju treba da prati.

U cilju ilustracije opšteg postupka linearizacije posmatraće se model sistema u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t); \quad x, f \in \mathfrak{R}^{nx1}; \quad u \in \mathfrak{R}^{rx1} \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t); \quad y \in \mathfrak{R}^{mx1} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Neka je  $\{x_N(t), u_N(t), y_N(t); t \in \mathfrak{R}\}$  željena nominalna trajektorija koja zadovoljava jednačinu modela sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x}_N(t) &= f(x_N(t), u_N(t), t) \quad x_N(t_0) \text{ dato} \\ y_N(t) &= g(x_N(t), u_N(t), t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pri tome, ukoliko trajektorija  $\{x_N(t), u_N(t), y_N(t); t \in \mathfrak{R}\}$  odgovara ravnotežnom stanju, onda  $x_N(t)$ ,  $u_N(t)$  i  $y_N(t)$  nisu funkcije vremena i pri tome važi

$$\dot{x}_N(t) = f(x_N(t), u_N(t), t) = 0 \quad (2.13)$$

Pretpostavimo nadalje da se želi opisati trajektorija  $\{x(t), u(t), y(t); t \in \mathfrak{R}\}$  sistema koja je bliska nominalnoj trajektoriji. U tom slučaju se model može razviti u Tajlorov red u kome se, zbog bliskosti trajektorija, viši članovi reda mogu zanemariti

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\approx f(x_N(t), u_N(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_N(t) \\ u=u_N(t)}} (x(t) - x_N(t)) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_N(t) \\ u=u_N(t)}} (u(t) - u_N(t)) \\ y(t) &\approx g(x_N(t), u_N(t), t) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_N(t) \\ u=u_N(t)}} (x(t) - x_N(t)) + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_N(t) \\ u=u_N(t)}} (u(t) - u_N(t)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Oznaka  $\frac{\partial f}{\partial x}$  je upotrebljena da označi Jakobijan, odnosno matricu čiji je ij-ti element  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Ukoliko su nominalne trajektorije konstantne, onda su i svi elementi svih

Jakobijana konstantni, pa je dobijeni model linearan i stacionaran.

Potrebno je zapaziti da se linearizovani model može izraziti i u inkrementalnoj formi. Ako se definiše

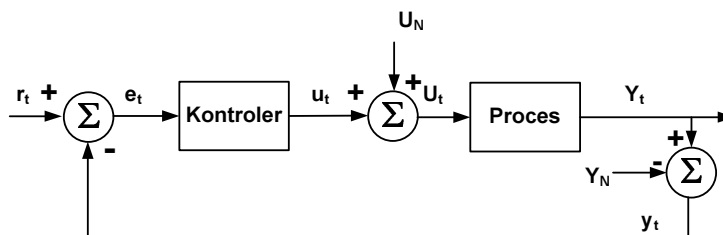
$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= x(t) - x_N(t) \\ \Delta u(t) &= u(t) - u_N(t) \\ \Delta y(t) &= y(t) - y_N(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

dobija se

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &\approx \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_N(t) \\ u=u_N(t)}} \Delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_N(t) \\ u=u_N(t)}} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &\approx \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_N(t) \\ u=u_N(t)}} \Delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_N(t) \\ u=u_N(t)}} \Delta u(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pri projektovanju upravljanja najčešće se koristi inkrementalni model (2.16). Pri tome je uobičajeno da se podrazumeva da sve promenljive predstavljaju odstupanje od nominalnih trajektorija, pa se oznaka " $\Delta$ ", po pravilu, izostavlja.

Ukoliko se upravljanje sistemom u zatvorenoj sprezi određuje na osnovu linearizovanog modela, potrebno je imati na umu da kontroler uvek radi sa inkrementalnim modelom, odnosno da on kao signal upravljanja daje vrednost koja predstavlja odstupanje od nominalne trajektorije upravljanja. Na isti način, kontroler kroz povratnu spregu treba da dobije samo inkrement (razliku) između izmerene vrednosti i nominalne trajektorije (Sl. 2-19).



SL. 2-19 REALIZACIJA UPRAVLJANJA ODREĐENOG NA OSNOVU LINEARIZOVANOG MODELA

## 2.6 Linearni prediktor

*Od opservirane prošlosti ka nepoznatoj budućnosti*

Model kauzalnog dinamičkog sistema može da se posmatra i kao "pravilo" koje omogućava da se na osnovu posmatranja prethodnog ponašanja sistema zaključuje o budućem ponašanju sistema. U tom kontekstu matematički model procesa se može predstaviti u obliku

$$\hat{y}(t|\theta) = g_M(\theta; t, z^{t-1}) \quad (2.17)$$

gde je

$\theta$  - vektor parametara modela

$z^{t-1}$  –skup merenja ulaznih i izlaznih signala definisan kao

$$\begin{aligned} z^{t-1} &= \begin{bmatrix} y(t-1) & y(t-2) & \dots & y(0) \\ u(t-1) & u(t-2) & \dots & u(0) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} y^{t-1} \\ u^{t-1} \end{bmatrix} = [z(t-1) \dots z(0)] ; \quad z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$\hat{y}(t|\theta)$  - predikcija izlaza procesa u trenutku vremena  $t$ , na osnovu merenja prikupljenih do trenutka  $t-1$ , uz pretpostavku da su parametri modela određeni sa  $\theta$ .

Gledano potpuno opšte, pretpostavlja se da je funkcija modela  $g_M$  poznata, a da su vrednosti parametara modela nepoznate i da ih je potrebno na neki način odrediti (estimirati). Pri tome se za određivanje parametara koriste dva moguća pristupa.

- OFF-LINE ESTIMACIJA PARAMETARA – pretpostavlja se da su pre otpočinjanja estimacije parametara prikupljena sva merenja. To zapravo znači da se svi podaci mogu posmatrati kao jedinstveni blok informacija i da nema nikakvih posebnih vremenskih ograničenja u pogledu realizacije samog procesa estimacije.
- ON-LINE (REKURZIVNA) ESTIMACIJA PARAMETARA – pretpostavlja se da se proces estimacije odvija paralelno sa procesom prikupljanja podataka. U svakom trenutku odabiranja, kada se dobiju nova merenja, obavlja se ažuriranje estimiranih vrednosti parametara.

Realizacija rekurzivnih algoritama implicira potrebu da se skup merenja  $z^{t-1}$ , koji zapravo raste sa vremenom, kondenzuje u neku veličinu fiksne dimenzije  $S(t)$ , tako da se parametri estimiraju prema sledećim relacijama

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= F[\hat{\theta}(t-1), S(t), z(t)] \\ S(t) &= H[\hat{\theta}(t-1), S(t-1), z(t)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

gde su  $F$  i  $H$  funkcije koje zavise od konkretnog algoritma estimacije.

### 2.6.1 PREDIKTOR LINERANOG MODELA – GREŠKA IZLAZA I GREŠKA JEDNAČINE

U cilju ilustracije jednog niza fenomena koji su vezani za implementaciju metoda estimacije parametara posmatraće se U/I model linearnog, stacionarnog diskretnog sistema

$$A(q^{-1})y_t = B(q^{-1})u_t \quad (2.20)$$

gde su polinomi  $A$  i  $B$  definisani kao

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n} = 1 + \bar{A}(q^{-1}) \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_mq^{-m} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Rešavajući jednačinu (2.20) po  $y_t$  dobija se

$$y_t = -a_1y_{t-1} - a_2y_{t-2} \dots - a_ny_{t-n} + b_0u_t + b_1u_{t-1} \dots + b_mu_{t-m} = \theta^T \varphi_t \quad (2.22)$$

gde su

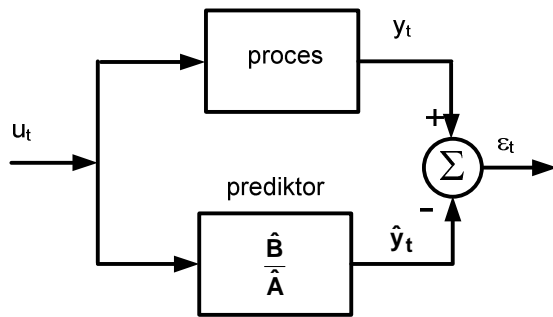
$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m]^T \text{ - vektor parametara procesa} \quad (2.23)$$

$$\Phi_t = [-y_{t-1} -y_{t-2} \dots -y_{t-n} \ u_t \ u_{t-1} \dots u_{t-m}]^T \text{ - vektor merenja.} \quad (2.24)$$

Jednačina (2.22) se često označava kao model procesa u prediktorskoj formi. Potrebno je zapaziti da je ovaj model linearan po vektoru parametara.

Implementacija datog modela podrazumeva da je u nekom trenutku vremena  $t$  poznato  $n$  prethodnih vrednosti izlaznih signala, trenutna vrednost ulaza i  $m$  prethodnih vrednosti ulaza<sup>1</sup>. Otuda se neminovno postavlja pitanje započinjanja procesa simulacije modela. Samo se po sebi razume da je logično pretpostaviti da su svi prethodni ulazi jednaki nuli. Što se tiče prethodnih izlaza, međutim, moguće je da sistem nije relaksiran i da su na neki način određena početna stanja modela. U tom slučaju ona se, svakako, uvrštavaju u vektor merenja. Ukoliko se početna stanja ne poznaju i za njih je neophodno usvojiti neke vrednosti. U odsustvu informacija, najčešće se usvaja da su sve nepoznate početne vrednosti jednake nuli.

U praksi se često koristi i drugačiji pristup zasnovan na činjenici da će vektor merenja tek posle prvih  $n$  koraka imati vrednosti prikupljene u toku eksperimenta. Otuda se zapravo taj trenutak vremena označi kao "nulti" trenutak ( $t_0$ ) od koga započinje posmatranje procesa. Potrebno je naglasiti da izbor početnog trenutka nema nekih suštinskih posledica po ponašanje modela. Radi se zapravo samo o konvenciji, no neophodno je znati koji od mogućih pristupa je odabran.



SL. 2-20 PREDIKTOR NA BAZI MODELA GREŠKE IZLAZA

Pretpostavimo sada da je poznata struktura modela sistema (redovi polinoma  $A$  i  $B$ ), ali da su parametri sistema nepoznati. U tom slučaju, čini se da je prirodno da se matematički model sistema, na osnovu koga će se vršiti estimacija parametara (prediktor), predstavi na sledeći način (Sl. 2-20)

$$\hat{A}(q^{-1})\hat{y}_{t|\hat{\theta}} = \hat{B}(q^{-1})u_t \quad (2.25)$$

Ako se vektor nepoznatih parametara koje je potrebno estimirati definiše kao

$$\hat{\theta} = [\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \dots \ \hat{a}_n \ \hat{b}_0 \ \hat{b}_1 \ \dots \ \hat{b}_m]^T \quad (2.26)$$

a skup vrednosti izlaza i ulaza dobijen simulacijom modela sa nepoznatim parametrima predstavi kao

$$\Phi_{t,\hat{\theta}} = [-\hat{y}_{t-1|\hat{\theta}} \ -\hat{y}_{t-2|\hat{\theta}} \ \dots \ -\hat{y}_{t-n|\hat{\theta}} \ u_t \ u_{t-1} \ \dots \ u_{t-m}]^T \quad (2.27)$$

tada se model sistema sa nepoznatim parametrima može izraziti u prediktorskoj formi kao

$$\hat{y}_{t|\hat{\theta}} = \hat{\theta}^T \Phi_{t,\hat{\theta}} \quad (2.28)$$

Ukoliko je proces zaista linearan i može se opisati nekim vektorom parametara  $\theta$  i ukoliko se ista vrednost parametara uvrsti u model prediktora dobiće se potpuno slaganje izlaza procesa i prediktora. Ukoliko to nije slučaj, izlaz prediktora odstupaće od izlaza procesa u zavisnosti od toga koliko se pretpostavljena vrednost parametara razlikuje od stvarne. U svakom slučaju, kod ovako formiranog modela prediktora greška parametara se odražava na razliku izlaza procesa i izlaza modela prediktora

$$\epsilon_{t,\hat{\theta}} = y_t - \hat{y}_{t|\hat{\theta}} \quad (2.29)$$

pa se ovaj model prediktora označava kao *model greške izlaza*.

Dobijena jednačina prediktora (2.28) ima isti oblik kao i jednačina modela sistema (2.22).

<sup>1</sup> Potrebno je da se naglasi da je pretpostavka o trenutnom prenošenju dejstva ulaza u trenutku vremena  $t$ , na izlaz u tom istom trenutku, zapravo teorijske prirode. U praksi uvek postoji neko kašnjenje u sistemu, što znači da se efekti dejstva ulaza, na izlazu vide tek kasnije.

Međutim, između ove dve jednačine postoji suštinska razlika. Naime, vektor merenja  $\varphi_t$  se dobija merenjem na samom procesu, pa u skladu sa time on nije funkcija parametara  $\theta^1$ . Nasuprot tome, vektor  $\Phi_{t,\hat{\theta}}$  se dobija iz jednačine (2.28) pa je on prema tome funkcija parametara  $\hat{\theta}$ . Otuda je model sistema linearan, dok je model prediktora nelinearan po parametrima.

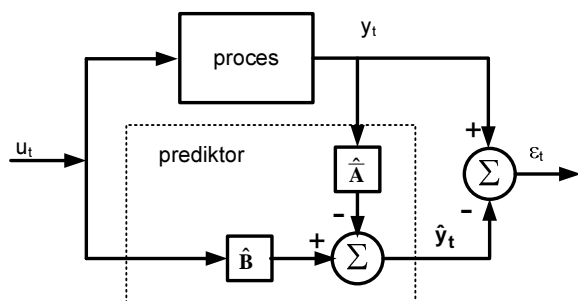
Na osnovu brojnih rezultata teorije sistema, ima osnova da se očekuje da će linearnost modela po parametrima pružati izvesne pogodnosti pri formiranju estimacionog algoritma. Otuda se nametnula ideja da se formira još jedan model prediktora i to tako da on bude linearan po parametrima. U tom cilju vektor  $\Phi_{t,\hat{\theta}}$  u jednačini (2.28) se zamenjuje vektorom merenja  $\varphi_t$  tako da se dobija model prediktora

$$\hat{y}_{t|\hat{\theta}} = \hat{\theta}^T \varphi_t \tag{2.30}$$

Sada se prirodno postavlja pitanje značenja greške kod ovako formiranog modela prediktora (Sl. 2-21). Budući da je

$$\varepsilon_{t,\hat{\theta}} = y_t - \hat{y}_{t|\hat{\theta}} = \theta^T \varphi_t - \hat{\theta}^T \varphi_t = (\theta - \hat{\theta})^T \varphi_t \tag{2.31}$$

greška zapravo predstavlja odstupanje jednačine prediktora (2.30) od jednačine procesa (2.22). Otuda se ovaj model prediktora označava kao *model greške jednačine*.



SL. 2-21 PREDIKTOR NA BAZI MODELA GREŠKE JEDNAČINE

Linearni model prediktora (2.30) se može dalje poopštiti na taj način što će se dozvoliti da vektor merenja  $\varphi_t$  predstavlja bilo koji niz funkcija koje zavise od poznatih promenljivih, odnosno koji se dobija merenjem

$$\varphi_t^T = [\varphi_{1,t} \ \varphi_{2,t} \ \dots \ \varphi_{n,t}]$$

pri čemu se pretpostavlja da u modelu postoji n nepoznatih parametara

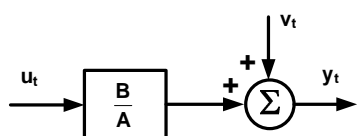
$$\theta^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n] \tag{2.33}$$

Model sistema

$$y_t = \theta^T \varphi_t \tag{2.34}$$

označava se kao regresioni model, dok se promenljive  $\varphi_{i,t}$  označavaju kao regresori.

### 2.6.2 MODEL LINEARNOG PROCESA SA NEMODELIRANIM POREMEĆAJEM



SL. 2-22 MODEL GREŠKE IZLAZA

$$y_t = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t + v_t \tag{2.35}$$

ili kao model greške jednačine

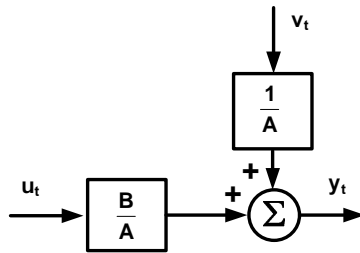
$$A(q^{-1})y_t = B(q^{-1})u_t + v_t \tag{2.36}$$

pa će odgovarajući prediktor modela greške izlaza biti

$$\hat{y}_{t|\hat{\theta}} = \hat{\theta}^T \Phi_{t,\hat{\theta}}, \tag{2.37}$$

dok je prediktor na bazi modela greške jednačine oblika

<sup>1</sup> Izlazi svakako zavise od samog procesa, pa implicitno i od parametara, međutim oni se dobijaju eksperimentalno, dok jednačina (2.22) predstavlja samo model sistema i kao takva se ne koristi za generisanje vrednosti izlaza procesa



SL. 2-23 MODEL GREŠKE JEDNAČINE

$$\hat{y}_t|\hat{\theta} = \hat{\theta}^T \phi_t \quad (2.38)$$

Ako se sada ova dva modela posmatraju sa gledišta poremećaja, onda se vidi da model greške jednačine pretpostavlja da i sam proces i poremećaj imaju istu dinamiku definisanu polinomom A (polovi procesa), što kod modela greške izlaza nije slučaj. Izvesno je da ova pretpostavka nije realna. Uprkos tome, ovaj model se, zbog pogodnosti koje pruža linearnost prediktora, veoma često koristi.

Napomenimo još da se pri formiranju modela procesa sreću i modeli sa modeliranim šumom. Pri tome se šum može modelirati kao MA (moving average), AR (autoregressive) ili ARMA proces.

## 2.7 Model linearne regresije i metod najmanjih kvadrata

*Metoda najmanjih kvadrata je kao salivena za modele linearne regresije*

Imajući u vidu da različitim vrednostima parametara odgovaraju različiti modeli nekog sistema, jasno je da se postavlja pitanje ocene valjanosti pojedinog modela. Kao što je već rečeno, valjanost se iskazuje funkcijom kriterijuma, koja predstavlja meru odstupanja pojedinog modela od sistema. U odnosu na definisanu meru, najbolji model je svakako onaj za koji je funkcija kriterijuma minimalna.

Polazeći od navedene ocene valjanosti modela, uočava se da je, pre svega, neophodno da se ustanovi u kom cilju se formira model i da se u skladu sa postavljenim ciljem odabere funkcija kriterijuma. Nesumnjivo je da ovaj izbor nije jednoznačan, no najčešće se funkcija kriterijuma zasniva na odstupanju izlaza modela (prediktora) od izlaza sistema, ili na odstupanju parametara modela od parametara samog sistema. Ovaj drugi pristup je posebno interesantan kod stohastičkih sistema kod kojih se polazi od pretpostavke da su parametri slučajne promenljive korelisane sa merenjima.

Različiti izbori modela u kombinaciji sa različitim kriterijumima performanse doveli su do čitavog niza estimacionih algoritama. Identifikacija parametara matematičkih modela je vremenom postala zasebna disciplina. Razvijeno je mnoštvo različitih estimacionih algoritama od kojih svaki daje zadovoljavajuća rešenja u jednoj klasi problema<sup>1</sup>. Njihovo detaljno izlaganje bi zahtevalo veoma mnogo i vremena i prostora i svakako bi izašlo izvan okvira predstavlja osnovnih ideja u upravljanju industrijskim procesima.

U želji da se bar u konceptualnom smislu ukaže na moguće pristupe estimaciji i stvori osnova za dalje proučavanje različitih metoda ovde će se posmatrati samo model linearne regresije. Ovaj izbor uslovljen je činjenicom da se korišćenjem različitih metoda dobija, u osnovi isti, algoritam estimacije. Pored toga, dobijeno rešenje omogućava da se istaknu i tipični problemi praktične implementacije estimacionih algoritama.

### 2.7.1 MINIMIZACIJA FUNKCIJE GREŠKE IZLAZA - METOD NAJMANJIH KVADRATA

Posmatra se model procesa sa jednim ulazom i jednim izlazom u formi linearne regresije

$$y_t = \theta^T \phi_t + v_t \quad (2.39)$$

gde je

$$\phi_t^T = [\phi_{1,t} \ \phi_{2,t} \ \dots \ \phi_{n,t}], \text{ vektor merenja}$$

$$\theta^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n], \text{ vektor nepoznatih parametara}$$

<sup>1</sup> Interesantno je napomenuti da se, za linearne modele, svi algoritmi mogu obuhvatiti jednim opštim oblikom algoritma, videti npr. L.Ljung, T.Söderström, "Theory and Practice of Recursive Identification", The M.I.T. Press, Cambridge, Ma., 1986.

Odgovarajući prediktor formiran kao model greške izlaza je oblika

$$\hat{y}_{t|\hat{\theta}} = \hat{\theta}^T \varphi_t \quad (2.40)$$

Ako se pođe od interpretacije modela prediktora, onda je prirodno da se kao mera njegove valjanosti usvoji greška predikcije

$$e_{t|\hat{\theta}} = y_t - \hat{y}_{t|\hat{\theta}} \quad (2.41)$$

Iz izraza (2.39) se vidi da se greška u trenutku vremena  $t$  određuje na osnovu podataka prikupljenih do tog trenutka vremena.

Metod najmanjih kvadrata zasniva se na određivanju parametara prediktora tako da se minimizira funkcija kriterijuma

$$J_t(\hat{\theta}) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k e_{k|\hat{\theta}}^2 = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k \left[ y_k - \hat{\theta}^T \varphi_k \right]^2 \quad (2.42)$$

gde je  $\{\alpha_k\}$  niz pozitivnih brojeva koji određuje težinu (značaj) koje imaju vrednosti greške u pojedinim trenucima vremena.

Diferenciranjem funkcije kriterijuma po parametrima  $\theta$  dobija se

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_t(\hat{\theta})}{\partial \theta} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k \left[ y_k - \hat{\theta}^T \varphi_k \right]^2 \right) = \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k \left[ y_k - \hat{\theta}^T \varphi_k \right] \varphi_k^T = \\ &= \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k y_k \varphi_k^T - \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k \hat{\theta}^T \varphi_k \varphi_k^T = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{\theta}^T \left( \sum_{k=1}^t \alpha_k \varphi_k \varphi_k^T \right) = \sum_{k=1}^t \alpha_k y_k \varphi_k^T \Rightarrow \left( \sum_{k=1}^t \alpha_k \varphi_k \varphi_k^T \right) \hat{\theta} = \sum_{k=1}^t \alpha_k \varphi_k y_k \end{aligned} \quad (2.43)$$

Uz uslov da matrica

$$\bar{R}_t = \left( \sum_{k=1}^t \alpha_k \varphi_k \varphi_k^T \right) \quad (2.44)$$

nije singularna, funkcija kriterijuma je minimalna ukoliko se parametri odrede prema relaciji

$$\hat{\theta} = \left( \sum_{k=1}^t \alpha_k \varphi_k \varphi_k^T \right)^{-1} \sum_{k=1}^t \alpha_k \varphi_k y_k = \bar{R}_t^{-1} \sum_{k=1}^t \alpha_k \varphi_k y_k \quad (2.45)$$

Pitanju uslova pod kojima je matrica (2.44) invertibilna biće kasnije posvećeno više pažnje. Intuitivno je jasno da je u svakom slučaju neophodno da se, pre nego što se pristupi određivanju vrednosti parametara prema relaciji (2.45), prikupi dovoljan broj merenja.

Potrebno je da se istakne da se metod najmanjih kvadrata može koristiti i kada sistem ima više izlaza, odnosno kada je greška predikcije vektorska veličina. U tom slučaju kriterijum najmanjih kvadrata se definiše kao

$$J_t(\hat{\theta}) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t e_{k|\hat{\theta}}^T A_k e_{k|\hat{\theta}} \quad (2.46)$$

Dalje proširenje ovog pristupa dobija se ukoliko se kao mera greške predikcije uvede neka skalarna funkcija  $\ell(t, \theta, e_{t|\theta})$ , tako da odgovarajuća funkcija kriterijuma postaje

$$J_t(\hat{\theta}) = \frac{1}{t} \sum_{t=1}^t \ell(t, \theta, e_{t|\theta}) \quad (2.47)$$

## 2.7.2 NORMALNE JEDNAČINE

Rešenje metode najmanjih kvadrata često se izražava i u formi takozvanih normalnih

jednačina. Ako se definišu vektori izlaznih signala procesa i prediktora

$$Y_t = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_t]^T \quad (2.48)$$

$$\hat{Y}_{t|\hat{\theta}} = \left[ \hat{y}_{1|\hat{\theta}} \ \hat{y}_{2|\hat{\theta}} \ \dots \ \hat{y}_{t|\hat{\theta}} \right]^T \quad (2.49)$$

kao i matrica merenja

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} \Phi_1^T \\ \Phi_2^T \\ \vdots \\ \Phi_t^T \end{bmatrix}, \text{ gde je } \Phi_k^T = [\phi_{1,k} \ \phi_{2,k} \ \dots \ \phi_{n,k}] \quad (2.50)$$

tada je vektor greške

$$E_{t|\hat{\theta}} = \left[ e_{1|\hat{\theta}} \ e_{2|\hat{\theta}} \ \dots \ e_{t|\hat{\theta}} \right]^T = Y_t - \hat{Y}_{t|\hat{\theta}} = Y_t - \Phi_t \hat{\theta} \quad (2.51)$$

U skladu sa time funkcija kriterijuma se može izraziti kao

$$J_t(\hat{\theta}) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k e_{k|\hat{\theta}}^2 = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k \left[ y_k - \hat{\theta}^T \phi_k \right]^2 = \frac{1}{t} E_{t|\hat{\theta}}^T \Lambda_t E_{t|\hat{\theta}}, \quad (2.52)$$

gde je  $\Lambda_t = \text{diag}[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_t]$

Minimizacija funkcije kriterijuma može se ponovo odrediti izjednačavanjem parcijalnog izvoda po parametrima sa nulom. Moguće je, međutim, odrediti rešenje i pomoću algebarske transformacije funkcije kriterijuma.

Polazeći od izraza za grešku

$$\begin{aligned} E_{t|\hat{\theta}}^T \Lambda_t E_{t|\hat{\theta}} &= (Y_t - \Phi_t \hat{\theta})^T \Lambda_t (Y_t - \Phi_t \hat{\theta}) = \\ &= Y_t^T \Lambda_t Y_t - Y_t^T \Lambda_t \Phi_t \hat{\theta} - \hat{\theta}^T \Phi_t^T \Lambda_t Y_t + \hat{\theta}^T \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \hat{\theta} \end{aligned} \quad (2.53)$$

vidi se da se ona može svesti na zbir dve kvadratne forme

$$\begin{aligned} E_{t|\hat{\theta}}^T \Lambda_t E_{t|\hat{\theta}} &= Y_t^T \Lambda_t Y_t - Y_t^T \Lambda_t \Phi_t \hat{\theta} - \hat{\theta}^T \Phi_t^T \Lambda_t Y_t + \hat{\theta}^T \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \hat{\theta} + \\ &+ \underbrace{Y_t^T \Lambda_t \Phi_t \left( \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \right)^{-1} \Phi_t^T \Lambda_t Y_t - Y_t^T \Lambda_t \Phi_t \left( \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \right)^{-1} \Phi_t^T \Lambda_t Y_t}_{\text{dopuna do kvadratne forme}} = \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$= Y_t^T \left( \Lambda_t - \Lambda_t \Phi_t \left( \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \right)^{-1} \Phi_t^T \Lambda_t \right) Y_t +$$

$$+ \left( \hat{\theta} - \left( \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \right)^{-1} \Phi_t^T \Lambda_t Y_t \right)^T \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \left( \hat{\theta} - \left( \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \right)^{-1} \Phi_t^T \Lambda_t Y_t \right)$$

Budući da su oba člana zbira u relaciji (2.54) pozitivne kvadratne forme i budući da prvi član ne zavisi od parametara, očigledno je da se minimum funkcije kriterijuma dobija ako se vektor parametara usvoji tako da je drugi član zbira jednak nuli

$$\hat{\theta} = \left( \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \right)^{-1} \Phi_t^T \Lambda_t Y_t \quad (2.55)$$

Samo se po sebi razume da je dobijeno rešenje (2.55) identično rešenju koje daje jednačina (2.45), jer se ovde radi samo o drugačijem načinu predstavljanja jednačina. U tom smislu može se uočiti i da važi

$$\bar{R}_t = \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \quad (2.56)$$

Jednačine iz kojih se dobija rešenje parametara

$$\Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t \hat{\theta} = \Phi_t^T \Lambda_t Y_t \quad (2.57)$$

nazivaju se *normalne jednačine*.



### 2.7.3 MOGUĆE INTERPRETACIJE FUNKCIJE KRITERIJUMA

Na ovom mestu bilo bi prirodno da se postavi pitanje zašto se parametri prediktora određuju uz uslov da se minimizira suma kvadrata grešaka? Naime, u svakodnevnoj praksi, mera odstupanja dve veličine se izražava njihovom razlikom, ili ukoliko se radi o više izmerenih veličina, čija razlika nema nužno isti predznak, zbirom apsolutnih vrednosti razlike. To zapravo znači da bi srednja vrednost apsolutnih vrednosti grešaka predstavljala prirodnu meru valjanosti observacije, odnosno da bi funkcija kriterijuma trebalo da se definiše kao

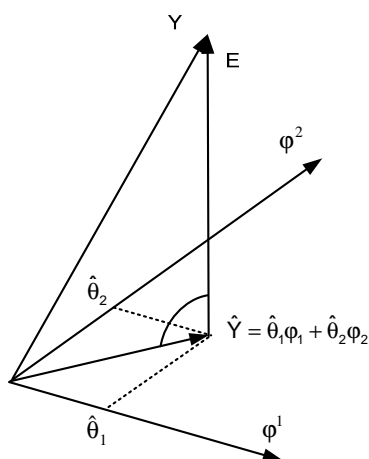
$$J_t(\hat{\theta}) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t e_{k|\hat{\theta}}^2 = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t |y_k - \hat{y}_k| \quad (2.58)$$

Sa praktične tačke gledišta, korišćenje ovako definisanog kriterijuma otvara pitanje određivanja minimuma. Rešenje se teško može dobiti u zatvorenoj formi i izuzetno je komplikovano za implementaciju. Za razliku od toga, kada se kao kriterijum definiše kvadrat greške rezultujući algoritam je veoma jednostavan.

Ideja da se apsolutna vrednost zamenjuje kvadratnom funkcijom nije nepoznata u rešavanju niza matematičkih problema. Otuda se, u analitičkom smislu, ova dva kriterijuma možda i mogu posmatrati kao ekvivalentni. Problem se, međutim, javlja ako se oni interpretiraju sa fizičke tačke gledišta. Naime, priroda nelinearnosti kvadratne funkcije je takva da ona umanjuje male vrednosti, a povećava velike vrednosti. To znači da kvadratni kriterijum, za razliku od

apsolutnih vrednosti, neće tretirati sve vrednosti greške na isti način. Ova činjenica se donekle može ublažiti uvođenjem težinskog faktora ( $\alpha_k$ ) koji treba da obezbedi uravnoteženi tretman svih vrednosti greške. Samo se po sebi razume da se time zapravo otvara pitanje načina izbora težinskih faktora.

Imajući u vidu sve što je rečeno o funkciji kriterijuma logično je postaviti pitanje kako se zapravo došlo do ove funkcije? Drugim rečima, da li je ona nastala samo kao rezultat pragmatične inženjerske potrebe da se prirodni pristup postavlci problema zameni onim koji vodi kao matematičkoj jednostavnosti? U traženju odgovora na postavljeno pitanje može da pomogne geometrijska interpretacija metode najmanjih kvadrata.



**SL. 2-24 IZLAZ PREDIKTORA ODREĐEN KAO ORTOGONALNA PROJEKCIJA IZLAZA SISTEMA**

Estimacija parametara prediktora vrši se na osnovu prikupljenih merenja izlaza procesa koja čine svojevrsnu "bazu znanja" o procesu. U geometrijskom smislu, matrica merenja, odnosno njene kolone, predstavljaju koordinatne ose prostora merenja. Prediktor je u tom prostoru predstavljen vektorom čije

su koordinate estimirani parametri.

$$\hat{Y} = \Phi \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \cdots & \varphi_{1,n} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \cdots & \varphi_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{t,1} & \varphi_{t,2} & \cdots & \varphi_{t,n} \end{bmatrix} \hat{\theta} = \varphi^1 \hat{\theta}_1 + \varphi^2 \hat{\theta}_2 + \cdots + \varphi^n \hat{\theta}_n \quad (2.59)$$

To nadalje znači da se određivanje vektora prediktora  $\hat{Y}$  može interpretirati i kao predstavljanje vektora izlaza  $Y$  u prostoru definisanom koordinatnim osama  $\varphi^i$  (Sl. 2-24). Sa geometrijske tačke gledišta ova aproksimacija će biti najbolja ukoliko je rastojanje između vektora izlaza i vektora prediktora najmanje. U skladu sa time, prediktor se dobija kao ortogonalna projekcija vektora izlaza na hiperravan koju čine koordinatne ose merenja. Uslov ortogonalnosti projekcije zahteva da vektor greške ( $E$ ) bude ortogonalan na svim vektorima merenja. Otuda se parametri prediktora dobijaju kao

$$\begin{aligned} (\phi_t^i)^T E &= 0; \quad i=1,2,\dots,n \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi_t^T (Y_t - \Phi_t \hat{\theta}) &= 0 \Rightarrow \hat{\theta} = (\Phi_t^T \Phi_t)^{-1} \Phi_t^T Y_t \end{aligned} \quad (2.60)$$

Dobijeno rešenje je identično relaciji (2.55) u kojoj je težinska matrica jednaka jediničnoj matrici.

Potrebno je zapaziti da se ovde problem određivanja parametara estimatora posmatra sa aspekta rastojanja u prostoru merenja. Budući da se rastojanje, u geometrijskom smislu, izražava kvadratnom funkcijom, prirodno je da se ta funkcija usvoji kao funkcija kriterijuma.

Kada se pogleda istorija razvoja metode najmanjih kvadrata vidi se da je ona nastala iz principa koji je krajem osamnaestog veka formulisao Gaus. Pri tome, Gaus je određivao orbite kretanja planeta, pa je prirodno da se njegov princip zasnivao da geometrijskom posmatranju celog problema. Težinski faktori, koji se javljaju u originalno formulisanom principu najmanjih kvadrata, izražavaju meru preciznosti observacije.

Na osnovu svega izloženog, logično je pretpostaviti da je Gausov princip najmanjih kvadrata prvobitno bio primenjivan na rešavanje sličnih problema koji su bili posmatrani kroz geometrijsku interpretaciju. To zapravo znači da se, bar u izvornom smislu, kriterijum najmanjih kvadrata može posmatrati i kao prirodni kriterijum. Jednostavnost dobijenog rešenja je samo još jedna potvrda teze o jednostavnosti matematičkog aparata kojim se opisuju kompleksne pojave. Vremenom su se menjali procesi koji se modeliraju, što je nužno dovelo i do drugačijeg modela prediktora, oblika funkcije kriterijuma, značenja pojma greške, pa i interpretacija težinskih faktora. U svim tim pristupima zajednički je bio samo zahtev da se minimizira suma kvadratnih funkcija.

## 2.8 Stohastički pristup estimaciji

*Utvrđivanje šta izlaz procesa "govori" o parametrima*

### 2.8.1 MOGUĆI IZBORI FUNKCIJE KRITERIJUMA

Rešavanju problema estimacije parametara modela može se pristupiti i polazeći od činjenice da su merenja i parametri korelisani. Naime, ako se pretpostavi da postoje dva korelisana slučajna vektora  $\theta$  i  $Y$ , onda se problem svodi na estimaciju vektora  $\theta$  iz merenja  $Y$ . Ovaj pristup ima svoje opravdanje u činjenici da znanje o merenjima sadrži i informaciju o parametrima. Otuda je logično očekivati da prikupljanjem i analizom novih i novih merenja korelacija između izlaza i parametara trebalo da postane izraženija. To znači da bi estimacija parametara zasnovana na merenjima vremenom trebalo da bude pouzdanija, odnosno da bi neizvesnost u pogledu vrednosti parametara trebalo da se smanjuje.

Ideja utvrđivanja funkcije korelacije razvijana je kroz primenu stohastičke teorije sistema. Ne upuštajući se u detaljno izlaganje ovog pristupa, intuitivno je jasno da se estimacija parametara zasniva na minimizaciji (ili maksimizaciji) odabrane funkcije kriterijuma.

#### ▪ MAP – ESTIMATOR MAKSIMALNE APOSTERIORNE GUSTINE VEROVATNOĆE

Pri izboru funkcije kriterijuma pošlo se od pitanja šta se na osnovu poznavanja slučajne promenljive  $Y$  može aposteriori (nakon obavljenog merenja) zaključiti o slučajnoj promenljivoj  $\theta$ . Odgovor na ovako postavljeno pitanje daje funkcija uslovne raspodele gustine verovatnoće  $p(\theta|Y)$ , koja ima maksimalnu vrednost za kada je parametar  $\theta$  tačno određen. U cilju pojednostavljenja algoritma umesto funkcije uslovne raspodele, kao funkcija kriterijuma koristi se njen logaritam

$$J = \ln p(\theta|Y), \quad (2.61)$$

Pošto je logaritamska funkcija rastuća izvesno je da će ona imati maksimum za maksimalnu vrednost argumenta. Sa druge strane pomoću nje se pojednostavljuje Bajesovog pravilo<sup>1</sup> koje se koristi za određivanje uslovne gustine verovatnoće koja se veoma teško direktno određuje

<sup>1</sup> Ovi estimatori se u literaturi često označavaju i kao *Bajesovski estimatori*,

$$p(\theta | Y) = p(Y | \theta) \frac{p(\theta)}{p(Y)} \Rightarrow \ln p(\theta | Y) = \ln p(Y | \theta) + \ln p(\theta) - \ln p(Y) \quad (2.62)$$

Sam estimator određuje se maksimiziranjem funkcije kriterijuma odnosno rešavanjem jedanačine

$$\frac{d}{d\theta} [\ln p(\theta | Y)] = \frac{d}{d\theta} [\ln p(Y | \theta) + \ln p(\theta)] = 0 \quad (2.63)$$

Konkretno rešenje postavljenog problema zavisi od usvojenih modela funkcije apriorne raspodele parametara  $p(\theta)$  i funkcije verodostojnosti  $p(Y | \theta)$  koja predstavlja uslovnu verovatnoću da za datu vrednost parametara  $\theta$  merenja budu  $Y$ . (Za razliku od uslovne gustine raspodele funkcija verodostojnosti se može direktno odrediti).

Potrebno je zapaziti da postojanje raspodele parametara u relaciji (2.63) omogućava da se u estimator ugrade i apriorne informacije o parametrima, što je od posebnog značaja ukoliko se želi koristiti model "sive kutije". Ukoliko se, međutim, ne raspolaže podacima o ovoj raspodeli onda se može pretpostaviti i da su parametri determinističke promenljive ( $p(\theta) = 1$ ). Na ovaj način se, zapravo, dobija estimator maksimalne verodostojnosti.

▪ MLE – ESTIMATOR MAKSIMALNE VERODOSTOJNOSTI

Funkcija kriterijuma

$$J = \ln p(Y | \theta) \quad (2.64)$$

izražava uslovnu verovatnoću da se za neku vrednost parametara dobije merenje  $Y$ . Maksimiziranjem ove funkcije postavlja se, prema tome, zahtev da se parametri odaberu tako da estimirano merenje bude što verodostojnije observiranom ishodu (merenju).

Estimator se određuje rešavanjem jednačine

$$\frac{d}{d\theta} [\ln p(\theta | Y)] = \frac{d}{d\theta} [\ln p(Y | \theta)] = 0 \quad (2.65)$$

Samo se po sebi razume da se različiti algoritmi dobijaju za različito usvojene oblike funkcije verodostojnosti.

▪ MVE - ESTIMATOR MINIMALNE VARIJANSE

Svi do sada razmatrani algoritmi zasnovani su na odstupanju izmerenih i očekivanih vrednosti izlaza. Sa druge strane, polazeći od činjenice da estimator treba da odredi parametre modela, čini se da bi prirodno bilo da se funkcija kriterijuma zasniva na razlici stvarnih i estimiranih vrednosti parametara. Osnovni problem u ovom pristupu je u nepoznavanju stvarnih vrednosti parametara, što znači da se greška ne može eksplicitno izračunati. Međutim, ukoliko se poznaju ili pretpostavljaju statističke osobine parametara funkcija kriterijuma se može izraziti preko gustine raspodele varijanse razlike stvarnih i očekivanih vrednosti. Pošto se ova raspodela teško određuje u praksi se često koristi nekoliko prvih momenata (srednja vrednost, varijansa itd.).

Polazeći od izložene ideje, estimator može da se formira tako da se na osnovu observiranih merenja, minimizira varijansa razlike između stvarne i estimirane vrednosti parametara. U skladu sa tim funkcija kriterijuma se definiše kao

$$J = E \left\{ \left\| \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right\|^2 \right\} = E \left\{ \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right)^T \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right) \right\}, \quad (2.66)$$

gde je  $\theta^0$  "prava" vrednost parametara.

Razvijanjem izraza funkcije kriterijuma (2.66) uz korišćenje uslovnog matematičkog očekivanja dobija se

$$J = E \left\{ \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right)^T \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right) \right\} = E_Y \left\{ E_{\theta} \left\{ \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right)^T \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right) | Y \right\} \right\} \quad (2.67)$$

Uslov da funkcija kriterijuma bude minimalna daje

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = E_Y \left\{ E_{\theta} \left\{ 2(\hat{\theta}(Y) - \theta^0) | Y \right\} \right\} = 2E_Y \left\{ \hat{\theta}(Y) - E_{\theta} \left\{ \theta^0 | Y \right\} \right\} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}(Y) = E_{\theta} \left\{ \theta^0 | Y \right\} \quad (2.68)$$

pri čemu je korišćena činjenica da je za dati vektor merenja  $Y$ , vektor procene parametara  $\hat{\theta}(Y)$  deterministička promenljiva, što znači da je

$$E_{\theta} \left\{ \hat{\theta}(Y) \right\} = \hat{\theta}(Y) \quad (2.69)$$

Iz izraza za estimator minimalne varijanse (2.68) vidi se da je osnovni problem u određivanju matematičkog očekivanja  $E_{\theta} \left\{ \theta^0 | Y \right\}$ . Ovaj problem se može rešiti usvajanjem odgovarajuće strukture modela estimatora.

### 2.8.2 LINEARNI ESTIMATOR MINIMALNE VARIJANSE

Jedno moguće rešenje za estimator minimalne varijanse zasniva se na pretpostavci da je model parametara linearan po vektoru izlaza

$$\hat{\theta}(Y) = KY + \rho; K \in \mathfrak{R}^{t \times t}, \rho \in \mathfrak{R}^{t \times 1} \quad (2.70)$$

Problem se u tom slučaju svodi na određivanje parametara matrice  $K$  i vektora  $\rho$ . Dobijeni estimator označava se kao linearni estimator minimalne varijanse ili diskretni Wiener-Hoff-ov estimator.

U cilju formiranja linearnog estimatora minimalne varijanse posmatraće se matrica kovarijanse parametara

$$P = \text{cov} \left\{ \hat{\theta}(Y) \hat{\theta}(Y)^T \right\} = E \left\{ \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right) \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right)^T \right\}. \quad (2.71)$$

čiji je trag jednak funkciji kriterijuma

$$\text{tr}P = J = E \left\{ \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right)^T \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right) \right\}. \quad (2.72)$$

Otuda se minimizacija kriterijuma minimalne varijanse svodi na minimizaciju traga matrice  $P$ . U cilju određivanja minimuma uvrstićemo jednačinu estimatora u matricu kovarijanse

$$P = E \left\{ \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right) \left( \hat{\theta}(Y) - \theta^0 \right)^T \right\} = E \left\{ \left( KY + \rho - \theta^0 \right) \left( KY + \rho - \theta^0 \right)^T \right\} \quad (2.73)$$

Množenjem izraza u zagradi i odgovarajućim proširivanjem jednačine (2.73) za matricu kovarijanse parametara se dobija

$$P = K \text{cov} \left\{ YY^T \right\} K^T - K \text{cov} \left\{ Y \theta^0 \right\} - \text{cov} \left\{ \theta^0 Y^T \right\} + \text{cov} \left\{ \theta^0 \theta^0 \right\} + \left[ \rho - E \left\{ \theta^0 \right\} + KE \left\{ Y \right\} \right] \left[ \rho - E \left\{ \theta^0 \right\} + KE \left\{ Y \right\} \right]^T \quad (2.74)$$

Odaberimo matrice  $S$  i  $D$  tako da je

$$P_{YY} = \text{cov} \left\{ YY^T \right\} = SS^T; \quad P_{\theta Y} = \text{cov} \left\{ \theta^0 Y^T \right\} = DS^T \quad (2.75)$$

Tada se jednačina (2.74) može izraziti kao

$$\begin{aligned} P &= KSS^T K^T - KSD^T - KDS^T + \text{cov} \left\{ \theta^0 \theta^0 \right\} \\ &+ \left[ \rho - E \left\{ \theta^0 \right\} + KE \left\{ Y \right\} \right] \left[ \rho - E \left\{ \theta^0 \right\} + KE \left\{ Y \right\} \right]^T = \\ &= (KS - D)(KS - D)^T + \left[ \rho - E \left\{ \theta^0 \right\} + KE \left\{ Y \right\} \right] \left[ \rho - E \left\{ \theta^0 \right\} + KE \left\{ Y \right\} \right]^T + \\ &+ \text{cov} \left\{ \theta^0 \theta^0 \right\} - DD^T \end{aligned} \quad (2.76)$$

Potrebno je zapaziti da su svi izrazi u jednačini (2.76) pozitivno semidefinitne matrice, pri

čemu poslednja dva izraza ne zavise od vektora parametara  $\hat{\theta}(Y)$ . To znači da važi sledeća ekvivalencija

$$\min(\text{tr}P) \Leftrightarrow \min\left(\text{tr}(KS-D)(KS-D)^T + \text{tr}\left[\rho - E\{\theta^0\} + KE\{Y\}\right]\left[\rho - E\{\theta^0\} + KE\{Y\}\right]^T\right) \quad (2.77)$$

Budući da je trag svake pozitivno semidefinitne matrice jednak ili veći od nule, izvesno je da će izraz (2.77) biti minimalan ukoliko su oba traga jednaka nuli, odnosno

$$\min(\text{tr}P) \Rightarrow KS-D=0 \quad \text{i} \quad \rho - E\{\theta^0\} + KE\{Y\}=0 \quad (2.78)$$

Otuda se parametri estimatora dobijaju rešavanjem sledećih jednačina

$$KS-D=0 \Rightarrow KSS^T = DS^T \Rightarrow KP_{YY} = P_{\theta Y} \Rightarrow K = P_{\theta Y}P_{YY}^{-1} \quad (2.79)$$

$$\rho = E\{\theta^0\} - KE\{Y\} \quad (2.80)$$

Na osnovu dobijenih rešenja jednačina linearnog estimatora minimalne varijanse je

$$\hat{\theta}(Y) = P_{\theta Y}P_{YY}^{-1}(Y - E\{Y\}) + E\{\theta^0\} \quad (2.81)$$

Budući da je

$$E\{\hat{\theta}(Y)\} = P_{\theta Y}P_{YY}^{-1}(E\{Y\} - E\{Y\}) + E\{\theta^0\} = E\{\theta^0\} \quad (2.82)$$

ovaj estimator daje nepomerene ocene parametara. Nadalje se vidi da je greška ortogonalna na merenjima, odnosno da važi

$$\begin{aligned} E\left\{\left[\hat{\theta}(Y) - \theta^0\right]Y^T\right\} &= E\left\{P_{\theta Y}P_{YY}^{-1}YY^T - P_{\theta Y}P_{YY}^{-1}E\{Y\}Y^T + E\{\theta^0\}Y^T - \theta^0Y^T\right\} = \\ &= P_{\theta Y}P_{YY}^{-1}\left(E\{YY^T\} - E\{Y\}E\{Y^T\}\right) + E\{\theta^0\}E\{Y^T\} - E\{\theta^0Y^T\} = P_{\theta Y}P_{YY}^{-1}P_{YY} - P_{\theta Y} = 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Konačno, minimum funkcije kriterijuma je

$$J^* = \text{tr}\left\{\text{cov}\left\{\theta^0\theta^{0T}\right\} - DD^T\right\} = \text{tr}P^*, \text{ gde je} \quad (2.84)$$

$$P^* = \text{cov}\left\{\theta^0\theta^{0T}\right\} - DD^T \quad (2.85)$$

Kako je

$$DD^T = DS^T(SS^T)^{-1}SD^T = P_{\theta Y}P_{YY}^{-1}P_{Y\theta} \quad (2.86)$$

to se ocena performanse (2.85) može izraziti kao

$$P^* = \text{cov}\left\{\theta^0\theta^{0T}\right\} - P_{\theta Y}P_{YY}^{-1}P_{Y\theta} \quad (2.87)$$

Samo se po sebi razume da je za realizaciju estimatora (2.81) neophodno da se poznaju kovarijanse, koje zavise od usvojenog modela sistema i statističkih osobina šuma merenja i parametara. Interesantno je napomenuti da kada su i poremećaj i parametri gausovski procesi i estimator maksimalne verodostojnosti i maksimalne aposteriorne verovatnoće daju isti rezultat kao i linearni estimator minimalne varijanse.

Pretpostavimo sada da je proces opisan modelom linearne regresije (2.39), da je šum merenja gausovski sa srednjom vrednošću nula i poznatom varijansom

$$\begin{aligned} \{v_t\} &= N(0, \sigma_t^2); v_t = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_t]^T \Rightarrow \\ P_{VV} &= \text{diag}\left[\sigma_1^2 \quad \sigma_2^2 \quad \dots \quad \sigma_t^2\right] \end{aligned} \quad (2.88)$$

i da je raspodela parametara takođe normalna opisana sa

$$\theta^0 = N(\theta_0, P_0) \quad (2.89)$$

Ako se model procesa izrazi u formi normalnih jednačina tada je

$$Y_t = \Phi_t\theta^0 + v_t \Rightarrow E\{Y_t\} = \Phi_tE\{\theta^0\} + E\{v_t\} = \Phi_t\theta_0 \quad (2.90)$$

Iz jednačine (2.75) sledi da je matrica kovarijanse izlaza

$$\begin{aligned}
&= \Phi_t E\{\theta^0 \theta^{0T}\} \Phi_t^T + \Phi_t E\{\theta^0 v_t^T\} + E\{v_t \theta^{0T}\} \Phi_t^T + E\{v_t v_t^T\} - \Phi_t \theta^0 \theta^{0T} \Phi_t^T = \\
&= \left( \Phi_t E\{\theta^0 \theta^{0T}\} \Phi_t^T - \Phi_t \theta^0 \theta^{0T} \Phi_t^T \right) + E\{v_t v_t^T\} = \Phi_t P_0 \Phi_t^T + P_{vv}
\end{aligned} \tag{2.91}$$

dok je

$$\begin{aligned}
P_{\theta Y} &= E\left\{ \theta^0 \left( \Phi_t \theta^0 + v_t \right)^T \right\} - E\{\theta^0\} E\left\{ \left( \Phi_t \theta^0 + v_t \right)^T \right\} = \\
&= E\{\theta^0 \theta^{0T}\} \Phi_t^T + E\{\theta^0 v_t^T\} - E\{\theta^0\} E\{\theta^{0T}\} \Phi_t^T - E\{\theta^0\} E\{v_t^T\} = P_0 \Phi_t^T
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Na osnovu dobijenih relacija sledi da je estimator minimalne varijanse za model linearne regresije određen sledećom jednačinom

$$\hat{\theta}(Y_t) = \theta_0 + P_0 \Phi_t^T \left( \Phi_t P_0 \Phi_t^T + P_{vv} \right)^{-1} (Y - \Phi_t \theta_0) \tag{2.93}$$

pri čemu se, uz korišćenje leme o inverziji<sup>1</sup>, ocena performanse može izraziti kao

$$\begin{aligned}
P^* &= P_t = \text{cov}\left\{ \theta^0 \theta^{0T} \right\} - P_{\theta Y} P_{YY}^{-1} P_{Y\theta} = \\
&= P_0 - P_0 \Phi_t^T \left( \Phi_t P_0 \Phi_t^T + P_{vv} \right)^{-1} \Phi_t P_0 = \left( P_0^{-1} + \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t \right)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Dobijena relacija se može sada iskoristiti za dalju transformaciju jednačine estimatora (2.93), uz još jednu primenu leme o inverziji

$$\begin{aligned}
\left( \Phi_t P_0 \Phi_t^T + P_{vv} \right)^{-1} &= P_{vv}^{-1} - P_{vv}^{-1} \Phi_t \left( P_0^{-1} + \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t \right)^{-1} \Phi_t^T P_{vv}^{-1} = \\
&= P_{vv}^{-1} - P_{vv}^{-1} \Phi_t P_t \Phi_t^T P_{vv}^{-1}
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(Y_t) &= \theta_0 + P_0 \Phi_t^T \left( P_{vv}^{-1} - P_{vv}^{-1} \Phi_t P_t \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \right) (Y_t - \Phi_t \theta_0) = \\
&= \theta_0 + P_0 \left( I - \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t P_t \right) \Phi_t^T P_{vv}^{-1} Y_t + P_0 \left( I - \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t P_t \right) \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t \theta_0
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Budući da je

$$\begin{aligned}
\Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t &= P_0^{-1} + \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t - P_0^{-1} \Rightarrow \\
\Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t P_t &= \underbrace{\left( P_0^{-1} + \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t \right)}_{P_t^{-1}} P_t - P_0^{-1} P_t = I - P_0^{-1} P_t \Rightarrow
\end{aligned} \tag{2.97}$$

$$P_0 \left( I - \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t P_t \right) = P_0 \left( I - I + P_0^{-1} P_t \right) = P_t$$

estimator (2.96) se može prikazati kao

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(Y_t) &= \theta_0 + P_t \Phi_t^T P_{vv}^{-1} Y_t - P_t \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t \theta_0 = \\
&= \left( I - P_t \Phi_t^T P_{vv}^{-1} \Phi_t \right) \theta_0 + P_t \Phi_t^T P_{vv}^{-1} Y_t = P_t P_0^{-1} \theta_0 + P_t \Phi_t^T P_{vv}^{-1} Y_t
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Otuda, imajući u vidu da je matrica  $P_{vv}$  dijagonalna, konačno sledi

$$\hat{\theta}(Y_t) = P_t \left( P_0^{-1} \theta_0 + \Phi_t^T P_{vv}^{-1} Y_t \right) = P_t \left( P_0^{-1} \theta_0 + \sum_{k=1}^t \sigma_k^{-2} \phi_k Y_k \right) \tag{2.99}$$

<sup>1</sup>  $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B \left[ DA^{-1} B + C^{-1} \right]^{-1} DA^{-1}$

gde su dimenzije matrica A, B, C i D određene tako da gornji izraz ima smisla.

Tačnost leme o inverziji može se pokazati utvrđivanjem da proizvod desne strane relacije (inverzija matrice) i originalne matrice na levoj strani relacije daju jediničnu matricu.

Interesantno je napomenuti da se ova lema pokazuje kao veoma korisna pri razmatranju implementacije rešenja čitavog niza problema.

Primitimo da je dobijena relacija sličnog oblika kao i relacija (2.45). Naime ako se usvoji da je  $P_t = \bar{R}_t^{-1}$  i da je  $\alpha_t = \sigma_t^{-2}$ , onda se relacije razlikuju samo po članu  $P_0^{-1}\theta_0$  koji, zapravo, definiše statističke osobine parametara. O daljim mogućim interpretacijama ovog člana biće kasnije više reči.

## 2.9 Rekurzivni algoritmi

*"Kako ste bankrotirali? Postepeno, a onda odjedanput"<sup>1</sup>*

### 2.9.1 REKURZIVNI ALGORITAM NAJMANJIH KVADRATA

Rešenje kojim se minimizira kvadrat greške (2.45) dobija se u jednom koraku ("off-line" metoda). Kao što je već istaknuto taj "jedan" korak može se izvesti tek kada se prikupi dovoljan broj merenja. Sa praktične tačke gledišta, čini se da bi bilo pogodnije da se parametri modela estimiraju "on-line" u toku prikupljanja merenja. Sa porastom broja merenja, estimacija bi se postepeno poboljšavala dok se ne dostignu odgovarajuće vrednosti parametara. Ovo je posebno značajno ukoliko se pretpostavi da se u toku rada sistema parametri menjaju, tako da je potrebno da se vrši dodatna procena parametara i na odgovarajući način ažurira estimirani model. Iz navedenih razloga postavlja se pitanje formiranja rekurzivne metode estimacije.

U cilju formiranja postupka rekurzivne estimacije parametara pretpostavlja se da postoji i da je poznat vektor parametara  $\hat{\theta}_{t-1}$  koji minimizira kriterijum  $J_{t-1}$ , pa se na osnovu te pretpostavke i prikupljenih merenja u trenutku vremena  $t$  određuje vrednost parametara  $\hat{\theta}_t$  za koju je kriterijum  $J_t$  minimalan.

Ukoliko vektor parametara  $\hat{\theta}_{t-1}$  minimizira funkciju kriterijuma  $J_{t-1}$  tada je

$$\frac{\partial J_{t-1}(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.100)$$

U skladu sa relacijom (2.45), to znači da je

$$\bar{R}_{t-1} \hat{\theta}_{t-1} = \sum_{k=1}^{t-1} \alpha_k \phi_k y_k \quad (2.101)$$

Ako se, nadalje, vrednost parametara  $\hat{\theta}_t$  odredi tako da se minimizira kriterijum  $J_t$ , onda mora da bude zadovoljena sledeća relacija

$$\bar{R}_t \hat{\theta}_t = \sum_{k=1}^t \alpha_k \phi_k y_k = \sum_{k=1}^{t-1} \alpha_k \phi_k y_k + \alpha_t \phi_t y_t = \bar{R}_{t-1} \hat{\theta}_{t-1} + \alpha_t \phi_t y_t \quad (2.102)$$

Iz izraza (2.44) vidi se da važi

$$\bar{R}_t = \sum_{k=1}^t \alpha_k \phi_k \phi_k^T = \bar{R}_{t-1} + \alpha_t \phi_t \phi_t^T \Rightarrow \bar{R}_{t-1} = \bar{R}_t - \alpha_t \phi_t \phi_t^T \quad (2.103)$$

tako da se relacija (2.102) može predstaviti u obliku

$$\bar{R}_t \hat{\theta}_t = (\bar{R}_t - \alpha_t \phi_t \phi_t^T) \hat{\theta}_{t-1} + \alpha_t \phi_t y_t = \bar{R}_t \hat{\theta}_{t-1} + \alpha_t \phi_t (y_t - \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) \quad (2.104)$$

Iz relacije (2.104) sledi da se nova vrednost parametara dobija kao

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \underbrace{\bar{R}_t^{-1} \alpha_t \phi_t (y_t - \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1})}_{\text{apriorna greška}} \quad (2.105)$$

Izraz

$$e_t | \hat{\theta} = y_t - \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1} = y_t - \hat{y}_t | \hat{\theta}_{t-1} \quad (2.106)$$

označava se kao apriorna greška estimacije, čime se ukazuje da je to greška procene u trenutku  $t$ , dobijena na bazi prethodnih merenja. Za razliku od nje, greška

<sup>1</sup> E. Hemingvej, *Sunce se ponovo rađa*

$$\bar{e}_t | \hat{\theta} = y_t - \phi_t^T \hat{\theta}_t \quad (2.107)$$

dobijena a posteriori, na osnovu procene parametara koja uključuje i merenja u trenutku  $t$ , označava se kao a posteriori greška estimacije.

Sa praktične tačke gledišta korišćenje izraza (2.105) za rekurzivno određivanje parametara u realnom vremenu stvaraće izvesne teškoće zbog neophodnosti da se u svakom trenutku odabiranja vrši inverzija matrice. Da bi se ovaj problem izbegao potrebno je preformulisati dobijeni rezultat.

Neka je

$$P_t = \bar{R}_t^{-1} \quad (2.108)$$

tada je

$$\bar{R}_t^{-1} = \left[ \bar{R}_{t-1} + \alpha_t \phi_t \phi_t^T \right]^{-1} \Rightarrow P_t = \left[ P_{t-1}^{-1} + \phi_t \alpha_t \phi_t^T \right]^{-1} \quad (2.109)$$

Na izraz (2.109) može se primeniti Lema o inverziji

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B \left[ DA^{-1}B + C^{-1} \right]^{-1} DA^{-1}$$

(2.110)

Usvajajući da je

$$A = P_{t-1}^{-1}, B = \phi_t, C = \alpha_t^{-1}, D = \phi_t^T \quad (2.111)$$

dobija se

$$P_t = P_{t-1} - P_{t-1} \phi_t \left[ \phi_t^T P_{t-1} \phi_t + 1 / \alpha_t \right]^{-1} \phi_t^T P_{t-1} \quad (2.112)$$

U skladu sa time rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata može se formulisati na sledeći način

$$\boxed{\begin{aligned} P_t &= P_{t-1} - \frac{P_{t-1} \phi_t \phi_t^T P_{t-1}}{1 / \alpha_t + \phi_t^T P_{t-1} \phi_t} \\ L_t &= \alpha_t P_t \phi_t = \frac{P_{t-1} \phi_t}{1 / \alpha_t + \phi_t^T P_{t-1} \phi_t} \\ \hat{\theta}_t &= \hat{\theta}_{t-1} + L_t (y_t - \hat{\theta}_{t-1}^T \phi_t) \end{aligned}} \quad (2.113)$$

## 2.9.2 INICIJALIZACIJA REKURZIVNOG ALGORITMA

Implementacija rekurzivnog algoritma najmanjih kvadrata, kao uostalom i svakog drugog rekurzivnog algoritma, pretpostavlja da se definišu početni uslovi. U konkretnom slučaju (2.113) potrebno je da se definiše početna vrednost parametara  $\theta_0$  i matrice  $P_0$ .

### ▪ PRAVA INICIJALIZACIJA ALGORITMA

Podsetimo se da je rekurzivni algoritam izveden uz pretpostavku da je u nekom trenutku vremena poznata vrednost parametara koja minimizira posmatrani kriterijum. Otuda se čini prirodnim, da se upravo na taj način odaberu i početne vrednosti samog algoritma.

Ako se pretpostavi da postoji neko vreme  $t_0$  pri kome postoji inverzija matrice (2.44), onda se algoritam implementira tako što se proces pobudi nekim ulaznim signalom i prikupljaju se merenja izlaza do trenutka  $t_0$ . Na osnovu prikupljenih merenja formira se niz vektora merenja i iz njih se prema relacijama (2.44) i (2.45) izračunavaju početne vrednosti

$$P_{t_0} = \left[ \sum_{k=1}^{t_0} \alpha_k \phi_k \phi_k^T \right]^{-1} \Rightarrow \hat{\theta}_{t_0} = P_{t_0} \sum_{k=1}^{t_0} \alpha_k \phi_k y_k \quad (2.114)$$

### ▪ SLOBODAN IZBOR POČETNIH VREDNOSTI $\theta_0$ I $P_0$

U praksi se često koristi i drugačiji način inicijalizacije u okviru koga se početne vrednosti



parametara i matrice  $P_0$  slobodno biraju.

Izbor početne vrednosti parametara vrši se na osnovu analize fizičkih fenomena na procesu. Ukoliko, iz nekog razloga, nije moguće da se parametri procene na osnovu analize, onda se usvaja proizvoljna vrednost. U praksi se, u odsustvu drugih informacija, ova vrednost najčešće postavlja na nulu.

Iz samog rekurzivnog algoritma se vidi početna vrednost matrice  $P_0$  ne sme biti nula. U principu je moguće usvojiti bilo koju vrednost, ali se najčešće se usvaja da je

$$P_0 = cI \quad (2.115)$$

Ako se počne od ovako slobodno usvojenih početnih vrednosti onda je izvesno da rekurzivni algoritam više neće minimizirati srednje kvadratnu grešku. Prirodno se, međutim, postavlja pitanje, da li se u tom slučaju uopšte nešto minimizira. U traženju odgovora na ovo pitanje posmatraće se nekoliko sukcesivnih rekurzija izraza (2.103) i (2.104)

$$\begin{aligned} P_t^{-1} \hat{\theta}_t &= P_{t-1}^{-1} \hat{\theta}_{t-1} + \alpha_t \phi_t y_t \\ P_t^{-1} &= P_{t-1}^{-1} + \alpha_t \phi_t \phi_t^T \end{aligned} \quad (2.116)$$

dobijenih na osnovu slobodnog izbor početnih uslova.

$t=1$

$$\begin{aligned} P_1^{-1} &= P_0^{-1} + \alpha_1 \phi_1 \phi_1^T \\ P_1^{-1} \hat{\theta}_1 &= P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \alpha_1 \phi_1 y_1 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \left[ P_0^{-1} + \alpha_1 \phi_1 \phi_1^T \right]^{-1} \left[ P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \alpha_1 \phi_1 y_1 \right] \end{aligned}$$

$t=2$

$$\begin{aligned} P_2^{-1} &= P_1^{-1} + \alpha_2 \phi_2 \phi_2^T = P_0^{-1} + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \phi_i \phi_i^T \\ P_2^{-1} \hat{\theta}_2 &= \\ &= P_1^{-1} \hat{\theta}_1 + \alpha_2 \phi_2 y_2 = \underbrace{\left( P_0^{-1} + \alpha_1 \phi_1 \phi_1^T \right)}_{P_1^{-1}} \times \underbrace{\left[ \left( P_0^{-1} + \alpha_1 \phi_1 \phi_1^T \right)^{-1} \left( P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \alpha_1 \phi_1 y_1 \right) \right]}_{\hat{\theta}_1} + \alpha_2 \phi_2 y_2 = \\ &= P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \phi_i y_i \Rightarrow \hat{\theta}_2 = \underbrace{\left[ P_0^{-1} + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \phi_i \phi_i^T \right]}_{P_2}^{-1} \left[ P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \phi_i y_i \right] \end{aligned}$$

Na osnovu dobijenih izraza može se zaključiti da se opšti oblik izraza za inverziju matrice  $P_t$  i vektor parametara  $\theta_0$  mogu formirati prema sledećim jednačinama

$$P_t^{-1} = P_0^{-1} + \sum_{i=1}^t \alpha_i \phi_i \phi_i^T \quad (2.117)$$

$$\hat{\theta}_t = P_t \left[ P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \sum_{k=1}^t \alpha_k \phi_k y_k \right] = \left[ P_0^{-1} + \sum_{k=1}^t \alpha_k \phi_k \phi_k^T \right]^{-1} \left[ P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \sum_{k=1}^t \alpha_k \phi_k y_k \right] \quad (2.118)$$

tačnost navedenog zaključka se može dokazati matematičkom indukcijom.

Iz relacije (2.117) se vidi da postepenim prikupljanjem merenja drugi član zbira postaje dominantan. To zapravo znači da uticaj početnog izbora matrice  $P_0$  opada sa vremenom.

Konačno ako se definiše funkcija kriterijuma

$$\tilde{J}_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k \left[ y_k - \hat{\theta}^T \phi_k \right]^2 + (\theta - \hat{\theta}_0)^T P_0^{-1} (\theta - \hat{\theta}_0) \quad (2.119)$$

onda se njenom minimizacijom dobija rešenje koje je jednako relaciji (2.118)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{J}_t}{\partial \hat{\theta}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left( \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k \left[ y_k - \hat{\theta}^T \phi_k \right]^2 + (\hat{\theta} - \hat{\theta}_0)^T P_0^{-1} (\hat{\theta} - \hat{\theta}_0) \right) = \\
&= \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k y_k \phi_k^T - \frac{2}{t} \sum_{k=1}^t \alpha_k \hat{\theta}^T \phi_k \phi_k^T + 2(\hat{\theta} - \hat{\theta}_0)^T P_0^{-1} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \hat{\theta}_t &= \left[ P_0^{-1} + \sum_{k=1}^t \alpha_k \phi_k \phi_k^T \right]^{-1} \left[ P_0^{-1} \hat{\theta}_0 + \sum_{k=1}^t \alpha_k \phi_k y_k \right]
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da se proizvoljnom inicijalizacijom rekurzivnog algoritma, zapravo dobija rešenje koje minimizira funkciju kriterijuma definisanu jednačinom (2.119). Pri tome, da bi funkcija kriterijuma bila nenegativna funkcija i imala minimum kada je greška jednaka nuli neophodno je da drugi član funkcije kriterijuma bude pozitivna kvadratna forma, odnosno da matrica  $P_0$  bude pozitivno definitna.

Zapazimo, takođe, da se pored minimiziranja kvadrata greške ovde minimizira i odstupanje početne vrednosti parametara od tačne vrednosti.

### 2.9.3 IZBOR POČETNE VREDNOSTI MATRICE $P_0$

Estimator minimalne varijanse izveden za model linearne regresije (2.99) ima identičan oblik sa estimatorom najmanjih kvadrata kod koga se slobodno biraju početni uslovi (2.118) uz uslov da se težinski faktori definišu kao

$$\alpha_t = \frac{1}{\sigma_t^2} \tag{2.121}$$

To znači da u osnovi i estimator najmanjih kvadrata i estimator minimalne varijanse razvijeni za model linearne regresije imaju isti algoritam. Suštinska razlika ogleda se u tome što estimator minimalne varijanse omogućava da se u algoritam ugradi apriorno znanje o statističkim osobinama parametara i poremećaja. Naime, i estimator najmanjih kvadrata omogućava da se definišu težinski faktori, ali se ne vidi jasno značenje težinskih faktora. Na isti način i rekurzivni algoritam može da se inicijalizuje sa nekom početnom vrednošću parametara i matrice  $P$ , ali se iz samog algoritma i dalje ne vidi jasno značenje ovih veličina.

Imajući u vidu da je matrica  $P_t$  kod estimatora minimalne varijanse srazmerna kovarijansi parametara, početna vrednost matrice  $P_0$  može se shvatiti i kao mera početne kovarijanse parametara. Ukoliko je razlika procene početnih vrednosti parametara u odnosu na stvarnu vrednost mala, onda matrica  $P_0$  odnosno konstanta  $c$  u izrazu (2.115) treba da bude mala. Time će se, u skladu sa relacijom (2.113) obezbediti mala promena parametara u toku rekurzije. Nasuprot tome, ukoliko postoji uverenje da je početno pogađanje parametara udaljeno od stvarnih vrednosti parametara onda se izborom velike vrednosti za konstantu  $c$  dobija značajna promena parametara u toku rekurzije. Na taj način matrica  $P_0^{-1}$  izražava meru poverenja u tačnost početne procene parametara.

### 2.9.4 REKURZIVNI ALGORITAM MINIMALNE VARIJANSE - KALMANOV FILTAR

Problem estimacije parametara modela linearne regresije može da se interpretira i kao formiranje Kalmanovog filtra<sup>1</sup> za proces

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{t+1} &= \hat{\theta}_t \\
y_t &= \phi_t^T \hat{\theta}_t + v_t
\end{aligned} \tag{2.122}$$

pri čemu se pretpostavlja da je šum merenja gausovski signal srednje vrednosti 0 i varijanse  $\sigma_t^2$

Za dati proces Kalmanov filter je

<sup>1</sup> O uslovima pod kojima je izveden Kalmanov filter biće kasnije više reči

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + L_t (y_t - \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1}) \quad (2.123)$$

gde se matrica pojačanja  $L_t$  određuje kao

$$L_t = \frac{P_{t-1} \phi_t}{\sigma_t^2 + \phi_t^T P_{t-1} \phi_t} \quad (2.124)$$

$$P_t = P_{t-1} - L_t \phi_t^T P_{t-1} \quad (2.125)$$

Imajući u vidu da je Kalmanov filter, uz uslov da su ispunjeni određeni uslovi u pogledu statističkih osobina signala i poremećaja, zapravo estimator minimalne varijanse, dobijeni rezultat predstavlja rekurzivni estimator minimalne varijanse.

U skladu sa činjenicom da je jednokoračni estimator minimalne varijanse identičan sa estimatorom najmanjih kvadrata u kome su težinski faktori odabrani kao  $\alpha_t = \sigma_t^{-2}$ , prirodno je da je dobijeni rezultat identičan sa rekurzivnim algoritmom najmanjih kvadrata (2.113).

### 2.9.5 METOD STOHAŠTIČKE APROKSIMACIJE

Svi do sada pomenuti stohastički algoritmi zasnivaju se na usvajanju pretpostavki o stohastičkim osobinama sistema. Ukoliko su ove pretpostavke opravdane, ovi algoritmi daju izuzetno dobre rezultate. Postavlja se, međutim pitanje, šta može da se uradi kada statističke osobine signala nisu poznate. Mogući odgovor na ovo pitanje daje metod stohastičke aproksimacije<sup>1</sup>.

Pretpostavimo da je funkcionalna zavisnost između niza merenja  $\{z_t\}$  i nepoznate veličine  $x_0$  data relacijom

$$z_t = h(x_0, \phi_t) + v_t \quad (2.126)$$

gde je

$\{\phi_t\}$  – niz merenja (slučajan signal sa nepoznatom raspodelom)

$\{v_t\}$  – šum merenja

Potrebno je da se formira algoritam pomoću koga će se iz niza merenja estimirati nepoznata veličina.

Teorija numeričke analize pokazuje da se postavljeni problem može rešiti određivanjem korena jednačine

$$\tilde{g}(x, \phi_k) = 0 \quad (2.127)$$

gde je

$$\tilde{g}(x, \phi_k) = h(x_0, \phi_k) - h(x, \phi_k) \quad (2.128)$$

uz pomoć rekurzivnog algoritma oblika

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \gamma_k \tilde{g}(\hat{x}_k, \phi_k) \quad (2.129)$$

Sa praktične tačke gledišta, međutim, ovaj algoritam je neprimenljiv zato što se, usled nepoznavanja vrednosti  $x_0$  funkcija  $\tilde{g}(x, \phi_k)$  ne može izračunati. Suočeni sa ovim problemom Robins i Monro su predložili da se u algoritmu (2.129) umesto nepoznate funkcije koristi funkcija

$$g(x, e_k) = z_k - h(x, \phi_k) = \tilde{g}(x, \phi_k) + v_k; \quad e_k = [z_k \quad \phi_k]^T \quad (2.130)$$

tako da algoritam određivanja parametara postaje

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \gamma_k g(\hat{x}_k, e_k) \quad (2.131)$$

Sušтина predloženog postupka je zapravo veoma jednostavna. Nepoznata funkcija  $\tilde{g}(x, \phi_k)$  se zamenjuje funkcijom  $g(x, \phi_k)$  koja se može odrediti na osnovu merenja. Ipak, činjenica je da ovaj algoritam, pod određenim uslovima daje sasvim zadovoljavajuće rezultate.

#### PR. 2-5

Potrebno je estimirati gausovsku slučajnu promenljivu  $x_0$ , koja ima srednju vrednost  $\mu_0$  i varijansu

<sup>1</sup> Metod su predložili Robins i Monro 1951. godine

$\sigma_0$  a koja se observira pomoću linearnog merenja

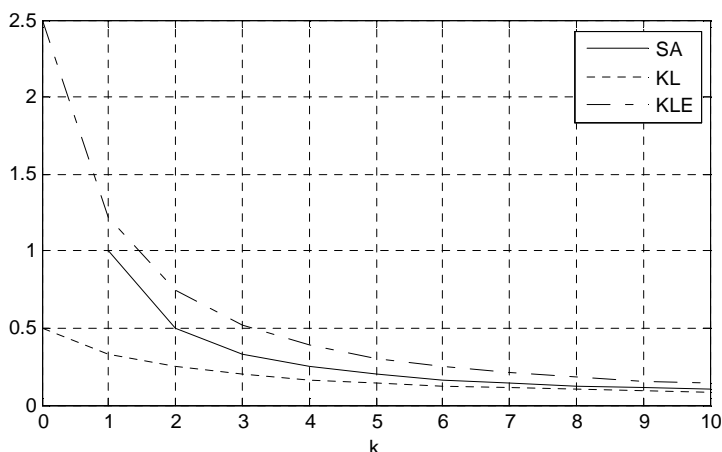
$$z_k = x_0 + v_t$$

gde je šum merenja  $\{v_t\}$  nezavisni gausovski signal varijanse  $\sigma$ . Ako se za rešavanje ovog problema primeni algoritam stohastičke aproksimacije sa opadajućim pojačanjem

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \frac{1}{k}(z_k - \hat{x}_k)$$

tada je srednje kvadratna greška aproksimacije

$$E\left[(\hat{x}_k - x_0)^2\right]_{SA} = \frac{\sigma^2}{k}$$



**Sl. 2-25 PROMENA GREŠKE ESTIMACIJE PRI KORIŠĆENJU KALMANOVOG FILTRA (KL), STOHAŠTIČKE APROKSIMACIJE (SA) I KALMANOVOG FILTRA SA POGREŠNO PROCENJENOM VARIJASOM (KLE), ZA SLUČAJ KADA JE**

$$\sigma_0^2 = 0.5\sigma^2 ; \Delta\sigma_0^2 = 2\sigma^2$$

onda je greška estimacije

$$E\left[(\hat{x}_k - x_0)^2\right]_{KLE} = \frac{\sigma^2}{k + \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}} + \frac{\Delta\sigma_0^2}{\left(1 + k \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)^2}$$

veća od greške koju daje algoritam stohastičke aproksimacije (Sl. 2-25).

Interesantno je zapaziti da se algoritam stohastičke aproksimacije može interpretirati i kao metod za određivanje nule jednačine

$$E\{\tilde{g}(x, e_k)\} = 0 \tag{2.132}$$

gde je oblik funkcije  $\tilde{g}(x, \phi_k)$  nepoznat. Naime, ako se pretpostavi da je šum merenja beo i da ima srednju vrednost nula tada je

$$E\{g(x, e_k)\} = E\{\tilde{g}(x, \phi_k) + v_k\} = E\{\tilde{g}(x, \phi_k)\} \tag{2.133}$$

Otuda, ako je  $x_0$  rešenje jednačine  $g(x, \phi_k) = 0$  sledi i

$$g(x_0, e_k) = 0 \Rightarrow E\{g(x_0, e_k)\} = 0 \Rightarrow E\{\tilde{g}(x_0, e_k)\} = 0 \tag{2.134}$$

Ova ideja je uspešno primenjena u razvoju algoritama kojima se metod najmanjih kvadrata generalizuje na modele koji ne pripadaju klasi modela oblika linearne regresije.

### 2.9.6 REKURZIVNI PROJEKSIONI ALGORITMI

Pokušaj da se određivanju estimatora (2.40) za model linearne regresije (2.39) priđe sa

Lako se pokazuje da je ova greška veća od greške koju bi dao Kalmanov filter projektovan na osnovu poznatih statističkih osobina nepoznate vrednosti i šuma merenja

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \frac{1}{k + \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}}(z_k - \hat{x}_k);$$

$$\sigma_0^2 = E\left[(x_0 - \mu_0)^2\right]; \mu_0 = E[x_0]$$

čija je greška estimacije.

$$E\left[(\hat{x}_k - x_0)^2\right]_{KL} = \frac{\sigma^2}{k + \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}}$$

Međutim, ako se sada pretpostavi da je pri proceni varijanse nepoznate veličine napravljena greška, tako da je stvarna varijansa jednaka

$$E\left[(x_0 - \mu_0)^2\right] = \sigma_0^2 + \Delta\sigma_0^2$$

aspekta minimizacije odstupanja parametara od stvarne vrednosti doveo je do klase algoritama poznatih kao projekcioni algoritmi. U suštini kod ove klase algoritama parametri se posmatraju kao vektori pa se funkcija kriterijuma definiše kao norma, odnosno kvadrat razlike ovih vektora

$$J = \|\hat{\theta} - \theta_0\| = (\hat{\theta} - \theta_0)^2 \quad (2.135)$$

Budući da se vektor stvarnih vrednosti parametara ne poznaje, minimizacija ove funkcije se svodi na problem rešavanja nelinearne jednačine primenom iterativnog postupaka. Ne upuštajući se u detaljno izlaganje rezultata numeričke analize, suština ovih postupaka sastoji se u sukcesivnoj promeni parametara uz očekivanje da je svaka sledeća vrednost bliža stvarnoj vrednosti.

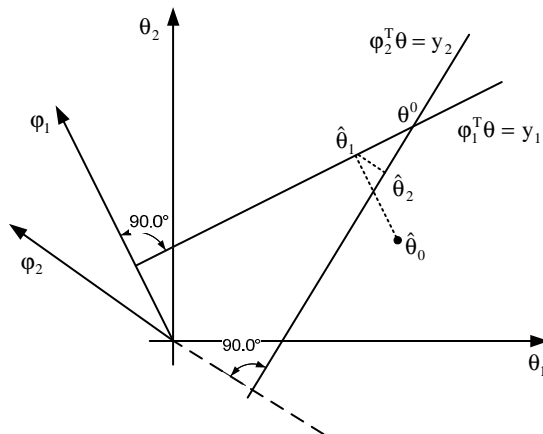
Jedan mogući metod promene parametara zasniva se na geometrijskoj interpretaciji problema. Pretpostavlja se da je poznata estimacija parametara  $\hat{\theta}_{t-1}$  u nekom trenutku vremena  $t-1$ , i da se raspolože novim merenjem  $y_t$ . Na osnovu ovih podataka potrebno je odrediti sledeću estimaciju  $\hat{\theta}_t$ .

Ako se raspoloživa merenja posmatraju sa geometrijske tačke gledišta, izvesno je da sve moguće vrednosti naredne estimacije parametra  $\theta$  koje zadovoljavaju model procesa moraju da leže u hiperravni

$$H = \{\theta : y_t = \phi_t^T \theta\} \quad (2.136)$$

U tom smislu, problem sledeće estimacije se svodi na pitanje kako odabrati jednu tačku u toj hiperravni. Činjenica da će, kada se u okviru iterativnog postupka dostigne stvarna vrednost, parametri prestati da se menjaju dovela je do ideje da se promena izvrši tako da se na svakom koraku minimizira odstupanje naredne vrednosti od prethodne.

Ovaj postupak ilustrovaćemo na primeru dvodimenzionalnog modela (Sl. 2-26). Ako se pretpostavi da je usvojena neka početna vrednost parametara  $\hat{\theta}_0$ , i da je određeno merenje  $y_1$



SL. 2-26 ILUSTRACIJA PROJEKCIONOG ALGORITMA

onda se prva aproksimacija parametara mora nalaziti na pravoj  $\phi_1^T \theta = y_1$ . Tačka na toj pravoj koja je najbliža početnoj vrednosti parametara dobija se ortogonalnom projekcijom početne vrednosti na pravu  $\phi_1^T \theta = y_1$ . To nadalje znači da je  $\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_0$  paralelno sa  $\phi_1$  pa se prva aproksimacija dobija kao

$$(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_0) \parallel \phi_1 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_0 + \gamma_1 \phi_1 \quad (2.137)$$

Budući da ova aproksimacija mora istovremeno da zadovolji model sistema sledi da je

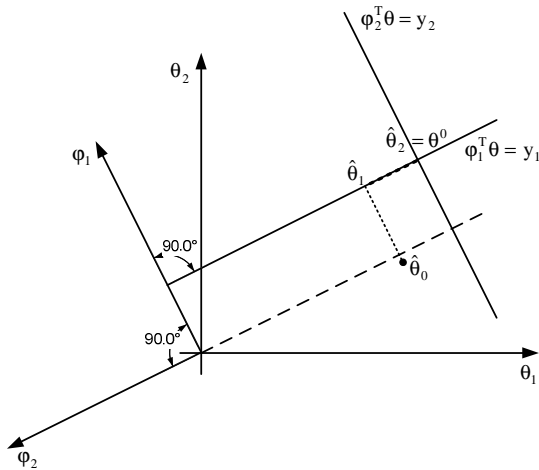
$$\begin{aligned} y_1 &= \phi_1^T \hat{\theta}_1 = \phi_1^T \hat{\theta}_0 + \gamma_1 \phi_1^T \phi_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \gamma_1 &= \frac{y_1 - \phi_1^T \hat{\theta}_0}{\phi_1^T \phi_1} = \frac{y_1 - \hat{y}_1 |_{\hat{\theta}_0}}{\phi_1^T \phi_1} \end{aligned} \quad (2.138)$$

Na isti način, druga aproksimacija se dobija projektujući  $\hat{\theta}_1$  na pravu  $\phi_2^T \theta = y_2$  tako redom. Primenom matematičke indukcije se može pokazati da je opšti oblik rekursivnog algoritma

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \frac{y_t - \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1}}{\phi_t^T \phi_t} \phi_t \quad (2.139)$$

Sa gledišta praktične implementacije relacije (2.139) postoji potencijalni problem deljenja sa nulom. Da bi se to izbeglo Kacmarz je predložio modifikaciju i tako je formiran *Kacmarzov*

projekcioni algoritam



SL. 2-27 ORTogonalnost Vektora Merenja

algoritam ortogonalne projekcije, kod koga se svako sledeće merenje  $\phi_t$  množi matricom  $P_{t-1}$  koja je određena tako da rezultujući vektor bude ortogonalan na svim prethodnim merenjima  $\phi_{t-i}$ . To nadalje znači da je neophodno da vektor  $\hat{\theta}_t - \hat{\theta}_{t-1}$  bude paralelan sa  $P_{t-1}\phi_t$ , odnosno da se sledeća estimacija parametara određuje iz izraza

$$(\hat{\theta}_t - \hat{\theta}_{t-1}) \parallel \phi_t \Rightarrow \hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \gamma_t P_{t-1} \phi_t \quad (2.141)$$

Parametar  $\gamma_t$  se određuje iz uslova da estimacija mora da zadovolji i model prediktora

$$y_t = \phi_t^T \hat{\theta}_t = \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1} + \gamma_t \phi_t^T P_{t-1} \phi_t \Rightarrow \gamma_t = \frac{y_t - \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1}}{\phi_t^T P_{t-1} \phi_t} \quad (2.142)$$

Konačno iz uslova ortogonalnosti vektora  $P_{t-1}\phi_t$  na prethodne vektore merenja dobija se

$$P_{t-1}\phi_t \perp \phi_i; i=1,2,\dots,t-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow P_t = P_{t-1} - \frac{P_{t-1}\phi_t\phi_t^T P_{t-1}}{1/\alpha_t + \phi_t^T P_{t-1}\phi_t} \quad (2.143)$$

Ispravnost relacije (2.143) može se proveriti matematičkom indukcijom.

Na isti način kao i ranije, eventualno deljenje sa nulom može se izbeći modifikacijom jednačine (2.143). U tom slučaju algoritam promene matrice  $P$  postaje

$$P_t = P_{t-1} - \frac{P_{t-1}\phi_t\phi_t^T P_{t-1}}{1/\alpha_t + \phi_t^T P_{t-1}\phi_t} \quad (2.144)$$

Potrebno je zapaziti da je dobijeni algoritam identičan sa relacijama izvedenim za rekurzivni algoritam najmanjih kvadrata (2.113), odnosno rekurzivnim algoritmom

minimalne varijanse (2.123). Radi se zapravo o jednom istom algoritmu, kome se, sa različitih polaznih tačaka gledišta mogu dati različite interpretacije. Ovim se svakako ne želi reći da su svi izloženi metodološki pristupi identični, jer rezultat bitno zavisi i od pretpostavljenog modela procesa i prediktora. Izvesno je da je istovetnost rezultata, zapravo uslovljena jednostavnošću modela linearne regresije i modeliranjem prediktora na bazi modela jednačine greške. Usvajanjem

SL. 2-28 ALGORITAM ORTogonalne PROJEKCIJE

drugačijih modela procesa ili prediktora dobiće se rešenja koja se međusobno razlikuju.

Činjenica da različiti metodološki pristupi, bar u jednom slučaju, imaju isti ishod omogućava da se u opštem slučaju dođe do interpretacije značenja pojedinih elemenata generalisanog algoritma estimatora.

## 2.10 Perzistentno pobuđujući signali

*Šta je potrebno da bi nekoga stvarno upoznali?*

Svi algoritmi estimacije zasnovani su na pretpostavci da će merenja na izlazu sistema nositi informaciju o procesu koji se u sistemu odvija. Na osnovu ove informacije određuju se parametri modela. Iako je ova pretpostavka nesumnjivo tačna, postavlja se pitanje da li je taj informatički sadržaj dovoljno bogat da bi se sagledalo kompletno ponašanje sistema i na osnovu toga odredio adekvatan model. Izvesno je da informacija koju nosi izlaz u velikoj meri zavisi od signala pobude.

Sušтина postavljenog pitanja, se u izvesnom smislu, može sagledati ako se pogleda kako teče proces upoznavanja među ljudima. Na prvi pogled o nekoj osobi steći će se jedan utisak. Posle kraćeg razgovora taj utisak će se dopuniti. Ako se sa njom proboravi neko vreme utisak će verovatno biti još potpuniji. Međutim, izvestan deo slike svakako zavisi i od izbora tema o kojima se razgovara. U zavisnosti od tema steći će se utisak o različitim pogledima, shvatanjima, usvojenom sistemu vrednosti. Po mnogim mišljenjima, pravo upoznavanje ličnosti dolazi tek nakon prve ozbiljne rasprave.

Sledeći izloženu analogiju izboru pobudnih signala mora se posvetiti posebna pažnja. Ako se, na primer, sistem pobuđuje konstantnim signalom pobude onda će, u najvećoj meri slučajeva, i njegov odziv biti konstantan, te se može steći utisak da se on može modelirati i kao čisto pojačanje. Drugim rečima, pobudni signal mora biti odabran tako da eksitira sve elemente procesa i da se rezultati tih eksitacija vide u njegovom odzivu.

Sa matematičke tačke gledišta, postavljeno pitanje se svodi na problem egzistencije rešenja estimatora. Nezavisno od pristupa izvođenju algoritma, vidi se je da je egzistencija rešenja uslovljena invertibilnošću matrice

$$\bar{R}_t = \left( \sum_{k=1}^t \alpha_k \phi_k \phi_k^T \right) = \Phi_t^T \Lambda_t \Phi_t = P_t^{-1} \quad (2.145)$$

Budući da ključnu ulogu u pogledu osobina matrice (2.145) igra ulazni signal, posmatraće se MA model procesa

$$\hat{y}_t = \Phi_t^T \theta; \quad \Phi_t = [u_t \ u_{t-1} \ \dots \ u_{t-n}]^T; \quad \theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]^T \quad (2.146)$$

U skladu sa relacijom (2.50) matrica merenja za ovaj model je

$$\Phi = \begin{bmatrix} u_n & u_{n-1} & \dots & u_0 \\ u_{n+1} & u_n & \dots & u_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_t & u_{t-1} & \dots & u_{t-n} \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

tako da je

$$\Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} \sum_n^t u_k^2 & \sum_n^t u_k u_{k-1} & \dots & \sum_n^t u_k u_{k-n} \\ \sum_n^t u_k u_{k-1} & \sum_n^t u_{k-1}^2 & \dots & \sum_n^t u_{k-1} u_{k-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_n^t u_k u_{k-n} & \sum_n^t u_{k-1} u_{k-n} & \dots & \sum_n^t u_{k-n}^2 \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

Budući da je matrica  $\Lambda_t$  dijagonalna ona neće uticati na invertibilnost, pa se bez gubitka

opštosti može usvojiti da je  $\Lambda_t = I$ . Preostaje, znači, da se ispita invertibilnost matrice (2.148).

Zapazimo, pre svega da se za dovoljno veliko  $t$  ivični efekti u svim elementima matrice mogu zanemariti, odnosno da se može smatrati da sve sume idu od 1 do  $t$ . Na taj način se dobija

$$C_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_0 \end{bmatrix} \quad (2.149)$$

gde je

$$c_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u_i u_{i-k} \quad (2.150)$$

empirijska kovarijansa ulaznog signala. Iz relacije (2.149) se vidi da je, za dugački niz podataka, pozitivna definitnost matrice  $C_n$  uslov za egzistenciju rešenja estimatora najmanjih kvadrata. Kaže se da je ulazni signal perzistentno pobuđujući ukoliko je matrica  $C_n$  pozitivno definitna.

Dobijeni rezultat se može poopštiti i na drugačije modele. U opštem slučaju ulazni signal koji dovodi do invertibilnosti matrice (2.145), odnosno koji obezbeđuje određivanje  $n$  parametara modela, naziva se perzistentno pobuđujući signal reda  $n$ . Za takav signal odgovarajuća matrica  $C_n$  mora biti pozitivno definitna.

Utvrđivanje pozitivne definitnosti matrice  $C_n$  može se izvršiti i na osnovu sledeće teoreme.

*Signal  $u$  je perzistentno pobuđujući reda  $n$  ako i samo ako za sve nenulte polinome reda manjeg ili jednakog od  $n-1$  važi*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^t A(q)u_k \right)^2 > 0 \quad (2.151)$$

*Dokaz:* Neka je polinom  $A$  definisan kao

$$A(q) = a_0 q^{-1} + a_1 q^{-2} \cdots + a_{n-1} q^{-n} \quad (2.152)$$

Tada je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^t A(q)u_k \right)^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^t a_0 u_{k+n-1} + a_1 u_{k+n-2} + \cdots + a_{n-1} u_k \right)^2 = a^T C_n a \quad (2.153)$$

gde su  $a = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{n-1}]^T$  i  $C_n$  matrica definisana sa (2.149). Ukoliko je matrica  $C_n$  pozitivno definitna, izraz na desnoj strani jednačine (2.153) je pozitivan, a samim tim je ispunjen i uslov (2.151).

Dobijeni rezultat je svakako zanimljiv sa algebarske tačke gledišta, međutim iz njega se zapravo malo može reći o osobinama perzistentno pobuđujućih signala. Kao što je poznato, priroda jednog signala se u velikoj meri odražava u njegovom spektru, pa je otuda logično da se postavljene uslove interpretira i sa te tačke gledišta.

Ako je  $u_t$  kvazi stacionarni signal čija je spektralna gustina snage  $\Phi(\omega)$ , tada prema Parsevalovoj teoremi važi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^t A(q)u(k) \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) d\omega \quad (2.154)$$

Analizom relacije (2.154) mogu se utvrditi uslovi pod kojima njena vrednost neće biti jednaka nuli. Budući da je polinom  $A(q)$  polinom  $n-1$  reda, on može imati najviše  $n-1$  realnih nula. Otuda polinom  $A(q)$  može anulirati podintegralnu funkciju u jednačini (2.154) za najviše  $n-1$  različitih vrednosti  $\omega$ .

Posmatrajmo sada funkciju  $\Phi_u(\omega)$  na intervalu  $(-\pi, \pi)$ . Teorijski i ona može imati određeni broj nula. Međutim, ukoliko ona nije nula u bar  $n$  tačaka, to znači da postoji makar jedna vrednost



učestanosti  $\omega$  za koju podintegralna funkcija nije jednaka nuli, što je dovoljno da bi uslov iz relacije (2.151) bio ispunjen.

Na osnovu izvršene analize sledi da se suština zahteva da leva strana jednačine (2.154) ne bude jednaka nuli zapravo odnosi na oblik spektra pobudnog signala. Spektar perzistentno pobuđujućeg signala mora imati dovoljno nenulih komponenti da bi sistem u potpunosti mogao da bude pobuđen, odnosno da se sve njegove osobine reflektuju u izlaznom signalu. Zapazimo da je signal čija je spektralna gustina snage kontinualna funkcija na nekom intervalu perzistentno pobuđujući proizvoljnog reda.

U svetlu tumačenja ove osobine signala interesantno je ispitati neke od karakterističnih pobudnih signala.

▪ IMPULSNI SIGNAL –  $u_t = \delta_t$

Budući da za svako  $n$  matrica  $C_n$  teži ka nuli impulsni signal nije perzistentno pobuđujući ni za jedno  $n$ .

▪ ODSKOČNI SIGNAL –  $u_t = H_t$

Posmatrajmo polinom prvog reda  $A(q) = q - 1$

$$A(q)h_t = (q - 1)h_t = h_{t+1} - h_t = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^t (q - 1)u_k \right)^2 = 0 \quad (2.155)$$

Činjenica da postoji polinom prvog reda za koji uslov (2.151) nije ispunjen, implicira da odskočni signal može biti perzistentno pobuđujući najviše prvog reda. Da bi to proverili posmatraćemo matricu

$$C_1 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t h_i^2 = 1 > 0 \quad (2.156)$$

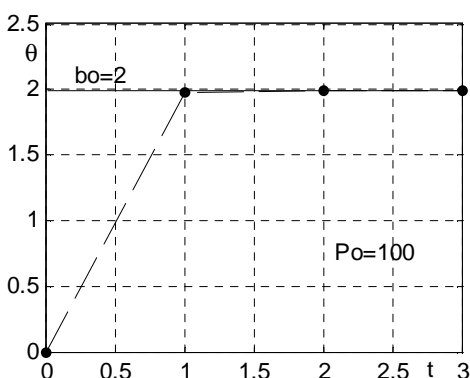
Iz pozitivnost matrice  $C_1$  sledi da je odskočni signal perzistentno pobuđujući prvog reda.

**PR. 2-6**

Posmatra se proces sa jednim nepoznatim parametrom opisan sa

$$y_t = b_0 u_t + v_t$$

Ako se za ovaj proces formira estimator na bazi modela linearne regresije



$$\hat{y}_t = \Phi_t^T \hat{\theta} = \hat{\theta}_1 u_t ; \Phi_t = [u_t], \hat{\theta} = [\hat{\theta}_1]$$

tada se, usvajajući odskočni signal kao pobudni signal, parametar modela može odrediti iz normalne jednačine (2.57)

$$\Phi = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \Rightarrow$$

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = \frac{1}{t} \sum_0^t y_i$$

Očigledno je, prema tome, da se jedan nepoznati parametar može odrediti ako se proces pobudi odskočnim signalom.

Samo se po sebi razume da se isti rezultat može dobiti i primenom rekursivnog algoritma (2.113). Na Sl. 2-29 prikazana je promena parametra dobijena pomoću rekursivnog algoritma sa

**Sl. 2-29 REKURZIVNA ESTIMACIJA JEDNOG PARAMETRA POMOĆU ODSKOČNE POBUDE**

početnim vrednostima  $\hat{\theta}_0 = 0, i P_0 = 100$ .

**PR. 2-7**

Posmatra se proces sa dva nepoznata parametrom opisan sa

$$y_t = b_0 u_t + b_1 u_{t-1} + v_t$$

Ako se za ovaj proces formira estimator na bazi modela linearne regresije

$$\hat{y}_t = \varphi_t^T \hat{\theta} = \hat{\theta}_1 u_t + \hat{\theta}_2 u_{t-1}; \quad \varphi_t = [u_t \ u_{t-1}], \quad \hat{\theta} = [\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2]$$

tada se, usvajajući odskočni signal kao pobudni signal, dobija

$$\Phi = \begin{bmatrix} u_1 & u_0 \\ u_2 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ u_t & u_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^t u_k^2 & \sum_{k=2}^t u_k u_{k-1} \\ \sum_{k=2}^t u_k u_{k-1} & \sum_{k=2}^t u_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 & t-1 \\ t-1 & t-1 \end{bmatrix}$$

Budući da je ova matrica singularna, očigledno je da se ne može dobiti rešenje za nepoznate parametre. Ovaj rezultat je očekivan zato što odskočni signal nije perzistentno pobuđujući drugog reda.

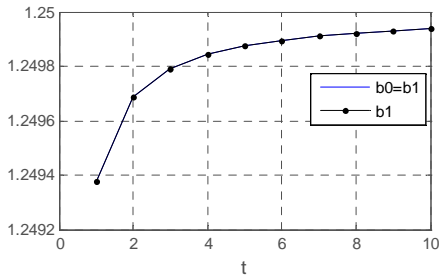
Uprkos ovoj teorijskoj analizi rekurzivni algoritam može da se ponaša drugačije (Sl. 2-30).

Neka su parametri procesa  $b_0=2$ ,  $b_1=0.5$  i neka su početna pogađanja parametara postavljena na nulu. Ako se želi prava inicijalizacija algoritma onda se on pušta u rad tek u trenutku  $t=1$  kada je formiran početni vektor merenja  $\varphi_1^T = [u_1 \ u_0]$ . U tom slučaju algoritam prekida rad jer nije u stanju da invertuje singularnu matricu  $P_0$ . Ako se, nadalje problem singularnosti pokuša prevazići tako što se početna matrica  $P_0$  inicijalizuje kao dijagonalna algoritam će divergirati. To zapravo znači da sistem nije dovoljno pobuđen, odnosno da vektor merenja koji se sastoji iz dva identična elementa ( $u_t=u_{t-1}=1$ ) ne nosi dovoljno informacija. Sa druge strane ako se algoritam odmah pusti u rad sa usvojenim nultim početnim vrednostima parametara i dijagonalnom matricom  $P_0$  algoritam konvergira u jednom koraku. Početni vektor merenja  $\varphi_0^T = [u_0 \ u_{-1}] = [1 \ 0]$  je očigledno dovoljan da naruši singularnost matrice merenja. Posle prva dva prikupljena vektora merenja, matrica merenja

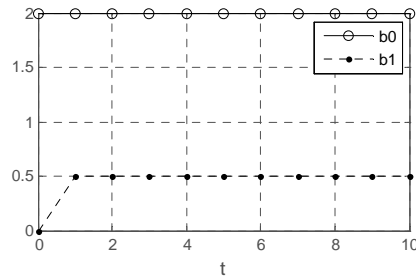
$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_0^T \\ \varphi_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & u_{-1} \\ u_1 & u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nije singularna i njena inverzija vodi direktno ka rešenju.

Izloženi primer ne treba shvatiti kao opšti princip rešavanja problema neperzistentne eksitiranosti pobudnog signala, već samo kao ilustraciju efekata koji inicijalizacija može imati na rekurzivni algoritam.



Početni trenutak  $t_0=1$ ,  $\varphi_1 = [1 \ 1]$



Početni trenutak  $t_0=0$ ,  $\varphi_0 = [1 \ 0]$

**SL. 2-30 REKURZIVNA ESTIMACIJA DVA PARAMETRA POMOĆU ODSKOČNE POBUDE -**

$$\hat{\theta}_0 = 0, P_0 = 1000I_2 : \text{ proces: } y_t = 2u_t + 0.5u_{t-1}$$

▪ PERIODIČNI SIGNALI –  $U_T = U_{T+N}$

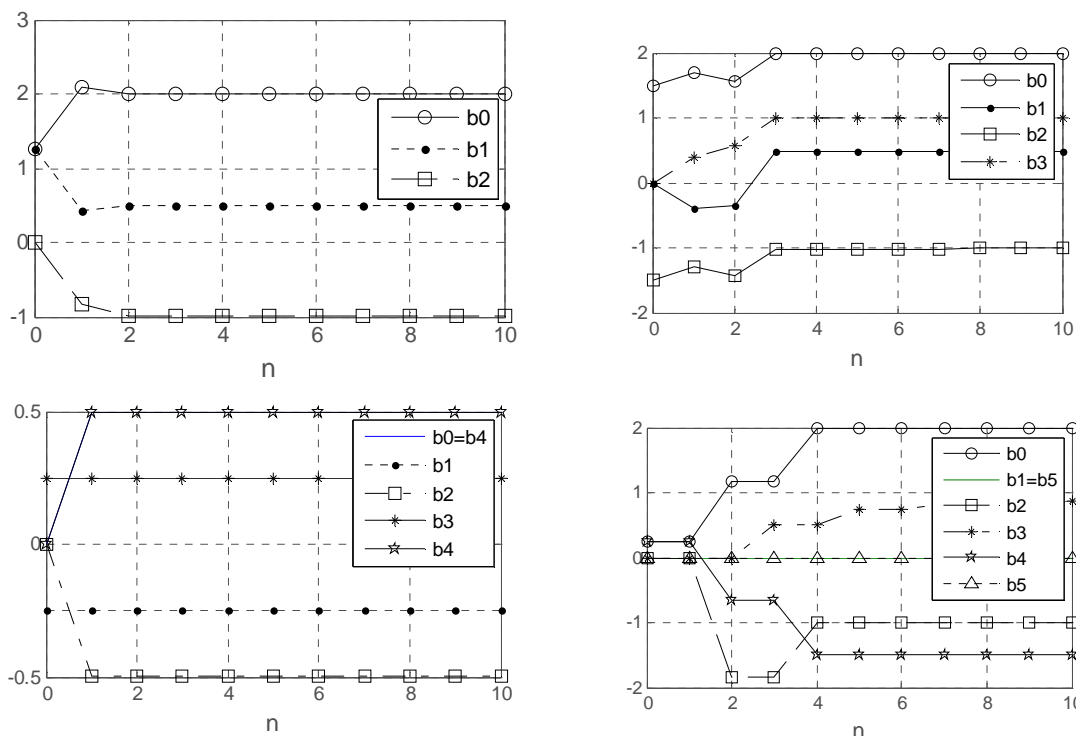
Budući da za polinom n-tog reda  $A(q)=q^n-1$  važi

$$A(q)u_t = (q^n - 1)u_t = u_{t+n} - u_t = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left( \sum_{i=1}^t (q^n - 1)u_k \right)^2 = 0 \tag{2.157}$$

periodični signal sa periodom n, može biti perzistentno pobuđujući najviše n-tog reda.

**PR. 2-8**

Parametri sistema određivani su pobuđivanjem sinusoidalnim signalom  $u(t) = \sin(0.5\pi t)$  koji je diskretizovan periodom  $T$ . Ispitivani su sistemi čiji su modeli filtri sa konačnim impulsnim odzivom i koji maju 3, 4, 5 i 6 nepoznatih parametara.



**SL. 2-31 REKURZIVNA ESTIMACIJA PARAMETAR POMOĆU DISKRETNE SINUSOIDE  $u(nT) = \sin(0.5\pi nT)$**

$$\hat{\theta}_0 = 0, P_0 = 1000I_n : \text{ proces } : y_t = \sum_{k=0}^n b_k u_{t-k}; n = 3, 4, 5, 6$$

Rezultati (prikazani na slici) pokazuju da su za sisteme sa 3 i 4 parametara dobijeni su korektni rezultati, dok za sisteme sa 5 i 6 parametara nisu dobijeni tačni rezultati. Tek po završetku eksperimenata konstatovano je da je na apscisnoj osi nanet broj odbiraka, a ne vreme.

Potrebno je odrediti periodu odabiranja  $T$ .

**Rešenje**

Pošto je korektno određen model 4. reda, a nije model 5. reda očigledno je da diskretna sinusoida ima periodu 4, odnosno da važi

$$u(nT) = \sin(0.5\pi nT) = \sin(0.5\pi(nT + 4T)) \Rightarrow 0.5\pi 4T = 2\pi \Rightarrow T = 1$$

▪ **SLUČAJNI SIGNALI**

Pošto ergodični stohastički proces ima, u nekom intervalu učestanosti, kontinualni spektar on je perzistentno pobuđujući proizvoljnog reda.

**2.10.1 ESTIMACIJA U ZATVORENOJ SPREZI**

Poseban problem u estimaciji predstavlja činjenica da se ona veoma često vrši u uslovima kada sistem radi u zatvorenoj sprezi. To ne samo da onemogućava izbor pobudnih signala koji su perzistentno pobuđujući određenog reda, već često dovodi i do formiranja linearne zavisnosti u kolonama matrice (2.145).

**PR. 2-9**

Posmatra se sistem

$$y_t = ay_{t-1} + bu_{t-1} + v_t$$

u kome je zatvorena linearna povratna sprega tako da se upravljanje generiše kao

$$u_t = -ky_t$$

Jednačina sistema sa zatvorenim povratnom spregom je, prema tome,

$$y_t = (a - kb)y_{t-1} + v_t$$

Odgovarajući model prediktora dobija se kao

$$\hat{y}_t = \Phi_t^T \theta = -\theta_1 y_{t-1} + \theta_2 u_{t-1} = -\theta_1 y_{t-1} - \theta_2 k y_{t-1}$$

$$\Phi_t = [-y_{t-1} \ u_{t-1}] = [-y_{t-1} \ -ky_{t-1}] \ ; \ \theta = [\theta_1 \ \theta_2]$$

U skladu sa time odgovarajuća matrica (2.145) je

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y_0 & -ky_0 \\ -y_1 & -ky_1 \\ \vdots & \vdots \\ -y_t & -ky_t \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} \sum_0^t y_k^2 & \sum_0^t ky_k^2 \\ 0 & \sum_2^t k^2 y_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{bmatrix} \sum_0^t y_k^2$$

Budući da je matrica singularna, jasno je da se oba parametra ne mogu estimirati. Zapazimo da se ovaj problem može uočiti i iz same jednačine sistema u zatvorenoj sprezi iz koje se vidi da se zapravo radi o AR modelu procesa u kome postoji samo jedan parametar (a-kb).

U principu, problem linearne zavisnosti koja nastaje kao posledica zatvaranja povratne sprege može se prevazići promenom povratne sprege. U posmatranom primeru povratna sprega bi mogla, na primer, da se formira kao

$$u_t = -k_1 y_t - k_2 y_{t-1} \text{ ili } u_t = -k_t y_t$$

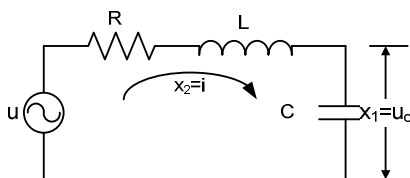
## 2.11 Modeliranje u prostoru stanja

*Pokušaj da se pronikne u skrivenu kompleksnost sistema*

### 2.11.1 STANJE SISTEMA

Pod pretpostavkom da su izlazni signali procesa odabrani tako da nose sve bitne informacije o ponašanju procesa, kao i da su ulazni signali perzistentno eksitirajući odgovarajući matematički model, formiran na osnovu ulazno/izlaznih relacija, i dalje ne može da otkrije sve promene koje se u sistemu dešavaju. Da bi se to postiglo, neophodno je da se model formira na osnovu fizičkih zakonitosti koje opisuju sve dinamičke promene u sistemu. U traganju za takvom formom modeliranja došlo se do *modela u prostoru stanja*.

Za dobijanje modela neophodno je da se, kao prvo, utvrdi minimalni skup informacija potreban u nekom trenutku vremena da bi se jednoznačno moglo da odredi buduće ponašanje sistema pod dejstvom bilo kojih poznatih upravljačkih signala. Taj skup informacija, odnosno signala, označava se kao *vektor stanja* sistema. U principu, kao stanja sistema usvajaju se one veličine koje mogu da nose informaciju o tome šta se sa sistemom dešavalo u prošlosti, a koja će svakako uticati i na njegovo ponašanje pod dejstvom budućih ulaza. U matematičkom smislu to znači da ove veličine određuju početne uslove diferencijalnih ili diferentnih jednačina koje opisuju ponašanje sistema.



#### PR. 2-10

Za dato električno kolo formirati jednačine koje u potpunosti opisuju njegovo ponašanje.

*Rešenje 1*

Iz teorije električnih kola je poznato da se ponašanje kola može u potpunosti odrediti uz uslov da su u nekom početnom trenutku vremena  $t_0$  poznati napon na kondenzatoru ( $u_c$ ) i struja kroz induktivni kalem ( $i$ ). Otuda, ove dve veličine mogu da se odaberu kao stanja sistema.

Dinamičke jednačine koje opisuju dato kolo su

$$C \frac{du_c(t)}{dt} = i(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{u}_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} = -u_c(t) - Ri(t) + u(t)$$

Dobijena relacija predstavlja matematički model električnog kola u prostoru stanja. Iz nje se vidi da poznavanje struje kalema i napona kondenzatora u nekom početnom trenutku vremena  $t_0$  omogućava da se ponašanje kola jednoznačno odredi.

Ako se pretpostavi da se u ovom kolu meri struja, onda je odgovarajuća jednačina izlaza

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

### Rešenje 2

U rešavanju postavljenog problema može se početi od jediničnog impulsnog odziva datog kola

$$g(t) = ae^{-\alpha t} - be^{-\beta t}; \alpha = \frac{R + \sqrt{R^2 - 4/C^2}}{2L}, \beta = \frac{R - \sqrt{R^2 - 4/C^2}}{2L}, a = \frac{1}{\beta - \alpha} = -b$$

tako da se izlaz kola odredi primenom konvolucije

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} g(t-\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Iz ove relacije se vidi da je buduće ponašanje kola jednoznačno određeno relacijom

$$\int_{-\infty}^{t_0} g(t-\tau)u(\tau)d\tau = ae^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{t_0} e^{\alpha\tau}u(\tau)d\tau + be^{-\beta t} \int_{-\infty}^{t_0} e^{\beta\tau}u(\tau)d\tau = ae^{-\alpha t}c_1 + be^{-\beta t}c_2$$

To zapravo znači da konstante

$$c_1 = \int_{-\infty}^{t_0} e^{\alpha\tau}u(\tau)d\tau; c_2 = \int_{-\infty}^{t_0} e^{\beta\tau}u(\tau)d\tau$$

takođe mogu da predstavljaju stanje sistema.

Iz datog primera može se zaključiti da izbor stanja sistema nije jednoznačan. To znači da različiti pristupi u analizi nekog sistema mogu dovesti do različitog izbora stanja, a time i do drugačijih matematičkih modela.

Pored toga, posmatrani primer omogućava da se uoči još jedna bitna odlika stanja sistema a to je da ona mogu, ali i ne moraju da imaju jasno fizičko značenje. Ključna implikacija ove činjenice tiče se merljivosti stanja. Samo se po sebi razume da stanja koja nemaju jasno fizičko značenje ne mogu biti ni merljiva. Međutim, postavlja se pitanje, da li je u suprotnom slučaju merenje moguće. Na prvi pogled, čini se da je odgovor pozitivan. Zaista se ne vidi razlog zašto stanja koja su odabrana tako da predstavljaju fizičke signale ne bi bila dostupna merenjima.

Odgovor na postavljeno pitanje leži zapravo u definiciji izlaza sistema. Podsetimo se da su izlazni signali definisani kao merni signali, odnosno kao signali čijim merenjem se dobija informacija o ponašanju sistema. Dakle, ako bi sva stanja bila merena, onda bi ona istovremeno predstavljala i izlaze sistema. Tako formiran model bi istovremeno predstavljao i ulazno/izlazni model. Otuda za njega važi i sve što je do sada rečeno o U/I modelima.

U skladu sa izloženim, realno je pretpostaviti da u praktičnim realizacijama sva stanja sistema nisu merljiva. Bilo zato što ne predstavljaju fizičke signale, bilo zato što iz ekonomskih ili nekih drugih razloga nije postavljena odgovarajuća merna oprema. Polazeći od ove pretpostavke, prirodno se postavlja pitanje smisla razvijanja modela u prostoru stanja. Mogući odgovor leži u pokušaju da se analizom pojedinačnih delova pronikne u suštinu samog sistema, što bi svakako pomoglo i u nastojanju da se njime upravlja.

### 2.11.2 LINEARNI MODEL U PROSTORU STANJA

Razumevajući matematički model kao funkciju preslikavanja logično je da matematički model u prostoru stanja definiše preslikavanje ulaznih veličina ( $u$ ) u stanje sistema ( $x$ ). Otuda se, kao što je već rečeno on može predstaviti u formi jednačine (2.2). Linearizacijom funkcija

preslikavanja dobija se linearni model u prostoru stanja definisan linearnim sistemom diferencijalnih ili diferentnih jednačina prvog reda

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= Ax_t + Bu_t \quad \text{ili} \quad x_{t+1} = Ax_t + Bu_t; \\ x &\in \mathbb{R}^{n \times 1}, u \in \mathbb{R}^{r \times 1}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{r \times n} \end{aligned} \quad (2.158)$$

pri čemu, u zavisnosti od toga da li je model stacionaran ili nestacionaran, matrice A, B, C i D mogu biti konstantne ili vremenski promenljive.

Ovim jednačinama se, po pravilu, pridružuje i jednačina izlaza sistema

$$\begin{aligned} y_t &= Cx_t + Du_t \\ y &\in \mathbb{R}^{m \times 1}; C \in \mathbb{R}^{m \times n}; D \in \mathbb{R}^{m \times r} \end{aligned} \quad (2.159)$$

#### OČEKIVANA STRUKTURA MATRICA

Teorijski gledano elementi matrica modela u prostoru stanja mogu imati bilo koje vrednosti. Međutim, ako se pažljivije pogleda njihovo značenje vidi se da kod najvećeg broja realnih sistema mogu da se očekuju izvesne zakonitosti u pogledu ovih vrednosti.

Pre svega, matrica A određuje međusobnu direktnu zavisnost pojedinih stanja sistema. Iako je nesumnjivo da je najveći broj stanja sistema na neki način uzročno-posledično povezan ipak je najveći broj tih veza indirektan. Otuda, matrica A, po pravilu, ima čitav niz elementa čija je vrednost jednaka nuli.

Matricom B se definiše uticaj pojedinih ulaznih signala na stanja. Realno je očekivati da ulazni signali dopiru direktno samo do jednog broja komponenti vektora stanja i to onih koje se nalaze bliže ulazu sistema, dok se ostala stanja menjaju pod uticajem promene tih ulaznih komponenti. U tom smislu, matrica B, takođe ima veći broj elemenata čija je vrednost jednaka nuli. Ista situacija je i sa matricom C kroz koju se vide ona stanja koja se nalaze bliže merenim izlazima. Šta više, ukoliko se neka od tih stanja na izlazu direktno mere, onda su odgovarajući elementi matrice C jednaki jedinici.

Konačno, matrica D predstavlja direktnu trenutnu reakciju izlaza sistema na promenu ulaza. Budući da svi prirodni sistemi uvek imaju neku inerciju, odnosno da se promena ulaza na izlaz prenosi sa nekim kašnjenjem, ova matrica je, po pravilu, jednaka nuli. Izuzetak su oni sistemi koji imaju veoma malu inerciju tako da se kašnjenje u prenosu može zanemariti.

Postavlja se, na kraju i pitanje kako se određuju parametri ovih matrica. U principu, ukoliko je model formiran na osnovu fizičkih zakonitosti koje vladaju u sistemu, onda se parametri mogu odrediti i eksperimentalno. Kao što je već rečeno, to podrazumeva da su i sva stanja merljiva, pa se na identifikaciju ovih modela primenjuje ista metodologija koja je razvijena za identifikaciju modela opisanih U/I jednačinama.

Češći je slučaj, međutim, da stanja nemaju fizičko značenje ili da su nemerljiva. U tom slučaju, parametri matrica modela određuju se na osnovu odgovarajućih U/I modela dobijenih uz pomoć identifikacije. Razvijen je čitav niz algoritama za prevođenje U/I modela u modele u prostoru stanja. Napomenimo i da, budući da model u prostoru stanja ima uvek više parametara od U/I modela, ovo prevođenje nije jednoznačno.

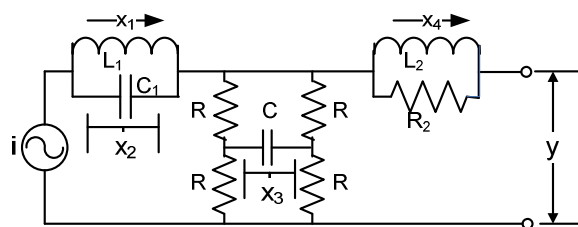
#### KONTROLABILNOST I OBSERVABILNOST MODELA

Formiranje modela sistema u prostoru stanja omogućilo je i da se odgovori na pitanje njegove upravljivosti. Naime, ako se modeliranje sistema shvati kao među korak koji treba da omogući projektovanje kontrolera koji će proizvoditi upravljačke signale tako da sistem ostvari željeno ponašanje, onda je prirodno da se, pre nego što se pristupi formiranju kontrolera utvrdi da li je uopšte moguće da se odrede upravljački signali koji će u konačnom vremenskom intervalu sistem prevesti iz nekog datog stanja u neko željeno stanje. Ukoliko je to moguće kaže se da je model kontrolabilan.

Polazeći od činjenice da stanje sistema nosi kompletnu informaciju o ponašanju sistema, a da se pri tome mere isključivo izlazni signali, postavlja se i pitanje u kojoj meri izmereni podaci reflektuju ono što se u sistemu dešava. Ova osobina, označena kao observabilnost sistema se,

zapravo svodi na mogućnost detekcije početnih stanja na osnovu signala izlaza prikupljenih merenjima na konačnom vremenskom intervalu.

Ne upuštajući se u detaljno razmatranje osobina kontrolabilnosti i observabilnosti, bitno je da se istakne da se ovde prevashodno radi o osobinama modela, a ne samog sistema. Drugim rečima, ove dve osobine omogućavaju prvenstveno da se ispita u kojoj meri je odabrani model



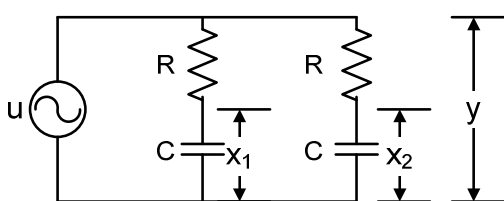
SL. 2-32 NEKONTROLABILNO I NEOBSERVABILNO ELEKTRIČNO KOLO

adekvatan, odnosno da li se na osnovu njega može realizovati željeno upravljanje sistemom, a ne govore zapravo mnogo o sistemu kao takvom.

Nesumnjivo je da postoje sistemi kod kojih su neka stanja nekontrolabilna. Takav je, na primer, slučaj sa električnim kolom na slici Sl. 2-32, kod koga je izvesno da se na promenu struje kroz kalem  $L_2$  ne može uticati promenom strujnog signala izvora. Na isti način, napon na kondenzatoru  $C_1$  je neobservabilan, jer će se, nezavisno od njegove vrednosti, na izlazu kola

$L_1 C_1$  dobiti ista pobudna struja ( $i$ ). Konačno, naponom kondenzatora koji se nalazi u simetričnom mostu na sredini kola ne može se ni upravljati, niti se on može observirati.

Ovim primerom se, na izvestan način otvara i pitanje smisla ovog pristupa modeliranju. Naime, sa gledišta definicije pojma stanja, nesumnjivo je da sve označene veličine ispunjavaju uslove da budu usvojene kao stanja sistema. Međutim, svaka od njih karakteriše jedan lokalni deo



SL. 2-33 PREDIMENZIONIRAN MODEL ELEKTRIČNOG KOLA

kola čiji efekti ostaju izolovani. To znači da oni zapravo ne utiču na ponašanje kola kao celine. Sa druge strane, ako se ovo električno kolo želi posmatrati kao jedna celina onda je od interesa njegovo globalno ponašanje. U tom smislu, ono zapravo nema nijedno stanje, već je izlaz kola multipl ulaza ( $y= Ri$ ).

Daleko češći je slučaj, međutim, da se pri formiranju model predimenzionira, odnosno da se kao promenljive stanja usvoje signali koji su međusobno zavisni, pa se njihove vrednosti ne mogu nezavisno menjati promenom ulaznog signala. Ukoliko se, recimo u električnom kolu prikazanom na Sl. 2-33 kao stanja usvoje naponi na oba kondenzatora dobiće se nekontrolabilan i neobservabilan model zato što su naponi na njima međusobno zavisni. Lako se pokazuje da su, ukoliko su početni uslovi na oba kondenzatora jednaki i naponi na njima identični nezavisno od promene pobudnog napona. Ukoliko se želi dobiti kontrolabilan i observabilan model ovog kola neophodno je usvojiti da model ima samo jedno stanje.

## 2.12 Eksperimentalno snimanje podataka

### *Između želja i mogućnosti*

Nezavisno do toga da li se određuje nelinearni ili linearizovani matematički model, činjenica je da se estimacija parametara vrši na osnovu eksperimentalno snimljenih podataka. Drugim rečima, polazi se od pretpostavke da se na svakom sistemu može izvesti niz eksperimenata. Ova pretpostavka, sama po sebi, ne bi bila vredna pomena kada različite tehnike formiranja modela ne bi bile zasnovane i na pretpostavci da postoje idealni uslovi za izvođenje eksperimenata. Stvarnost je, kao i obično, sasvim drugačija.

Pre svega se usvaja da je za obavljanje eksperimenata sistem na raspolaganju i da ne postoji ograničenje na broj podataka koji se može prikupiti. Međutim, na realnim, industrijskim procesima se najčešće ne mogu obavljati eksperimenti. Ponašanje realnih sistema se može posmatrati isključivo u toku njihovog regularnog rada. Da bi se ovaj problem prevazišao grade se pilot postrojenja ili laboratorijski fizički modeli sistema koji se želi modelirati. Nažalost, ponašanje

ovih sistema se, po pravilu, razlikuje od realnih sistema, pri čemu je izuzetno teško da se te razlike kvantitativno izraze. Otuda, se često pristupa simulaciji sistema. Međutim, simulacija podrazumeva i postojanje adekvatnog matematičkog modela. I tako se na izvestan način zatvara krug. Uobičajeni postupak je da se matematički model formira na osnovu eksperimenata na pilot postrojenju, a onda se on doteruje u toku simulacije normalnog režima rada, u okviru koje se podaci dobijeni simulacijom porede sa podacima prikupljenim na realnom procesu.

Budući da se eksperiment zasniva na pobudi sistema nizom odabranih pobudnih signala, pretpostavlja se da sistem nije izložen uticaju bilo kojih drugih signala, izuzev onih kojima se pobuđuje u samom eksperimentu. Kako realni sistemi ne rade u vakuumu izvesno je da će oni, pored eksperimentalno zadanih test signala, biti izloženi i uticaju regularnih pobuda i različitih nemerljivih poremećaja. Naime, ako se eksperiment vrši na realnom procesu, onda se test signali zadaju kao relativno mali signali koji se superponiraju na regularne pobude procesa. Otuda se nužno postavlja pitanje da li je odnos signal/šum kod izmerenih podataka takav da omogućava identifikaciju matematičkog modela sa zahtevanom tačnošću. Tome treba dodati i činjenicu da, realni sistemi, ukoliko se na njima uopšte može eksperimentisati, postavljaju čitav niz dodatnih problema u pogledu načina obavljanja eksperimenta. Praksa pokazuje da najveći broj realnih sistema može da radi isključivo u zatvorenoj povratnoj sprezi. Ova činjenica može značajno komplikovati određivanje matematičkog modela, zato što pobudni signal postaje zavisn od signala izlaza. Svojevrsan ograničavajući faktor u koncipiranju eksperimenta predstavlja i činjenica da čitav niz sistema ima osobinu da u toku rada, usled habanja materijala ili iz nekog drugog razloga, značajno menja nominalni nivo rada. Konačno, kada se radi o šaržnim sistemima, onda problem predstavlja i to što je performansa okarakterisana isključivo kvalitetom finalnog proizvoda. Otuda bi eksperimentalno određivanje modela zahtevalo da se proizvede i prati veliki broj proizvoda.

Teorijske postavke u razvoju algoritama estimacije parametara zasnivaju se na pretpostavci da se model neće koristiti izvan radnog opsega koji je obuhvaćen eksperimentom, kao i da je sistem na kome se vrše eksperimenti jedini sistem od interesa. U praksi se međutim često zahteva da se sistem prevede iz jedne radne tačke u drugu. Samo se po sebi razume, da usled nelinearnosti sistema, model koji je određen u okolini jedne radne tačke, ne mora biti, a najčešće i nije, validan u okolini druge radne tačke. Pored toga se model, a na osnovu njega i upravljanje, projektuje najčešće za jednu klasu sistema. Otuda se postavlja pitanje u kojoj meri se eksperimenti obavljeni na jednom uzorku te klase mogu smatrati reprezentativnim za celu klasu.

Eksperimentalan pristup određivanju parametara, takođe, polazi od pretpostavke da fizički fenomeni koji se odvijaju u procesu nisu od posebnog interesa. Razvijeni algoritmi estimacije zasnovani su na postupcima određivanja ekstremuma funkcije kriterijuma, što znači da rezultujući parametri ne odražavaju fizičku suštinu samog procesa. Otuda se, po pravilu, dobijeni model ne može koristiti za analizu efekata strukturnih promena modela. Naime, izmenjenoj strukturi će odgovarati potpuno drugačiji parametri. Izuzetak su modeli rešetkaste strukture (lattice) koji, kada se red modela povećava, zadržavanja vrednosti svih parametara modela nižih redova.

Eksperiment se dodatno komplikuje ukoliko se pretpostavi da se sistem može, sa prihvatljivom tačnošću, aproksimirati linearnim, stacionarnim modelom. Naime, kada je reč o linearnosti, realni sistemi pokazuju gotovo svaki mogući oblik neželjenog ponašanja. Da bi se ovo uočilo treba se samo podsetiti na efekte histerezisa, asimetričnosti ili odsustvo ponovljivosti. Potrebno je da se istakne da, čak i ukoliko sistem pokazuje osobine linearnosti pri malim pobudnim signalima, povećanje amplitude signala izvesno dovodi do narušavanja ove osobine. Opseg amplitude signala u kome važi osobina linearnosti može biti toliko mali da se na izlazu procesa ne mogu uočiti nikakvi efekti pobude. Otuda se izboru signala pobude mora posvetiti posebna pažnja.

Konačno izvesno je da je sa gledišta ponavljanja eksperimenata i primene odgovarajuće metode identifikacije modela, veoma pogodno ako se jedan eksperiment može obaviti u razumno kratkom intervalu vremena. To najčešće nije slučaj kod relativno sporih industrijskih



procesa. Ovo je poseban problem kod identifikacionih metoda koje zahtevaju višestruku obradu nizova sukcesivno snimljenih eksperimentalnih podataka.

Imajući u vidu sve što je rečeno, jasno je da formiranje matematičkog modela na osnovu eksperimentalno snimljenih podataka predstavlja ozbiljan izazov. Postavljanje eksperimenta tako da on da validne i upotrebljive rezultate je svojevrsna umetnost sama po sebi.



" Sve deluje kao da je Tvorac imao na raspolaganju samo nekoliko jednostavnih matematičkih jednačina pomoću kojih je formalizovao enormni broj kompleksnih fenomena koji se uočavaju u univerzumu"<sup>1</sup>

E. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences

### 3 Klasična teorija projektovanja sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom

U OVOM POGLAVLJU ČITALAC ĆE

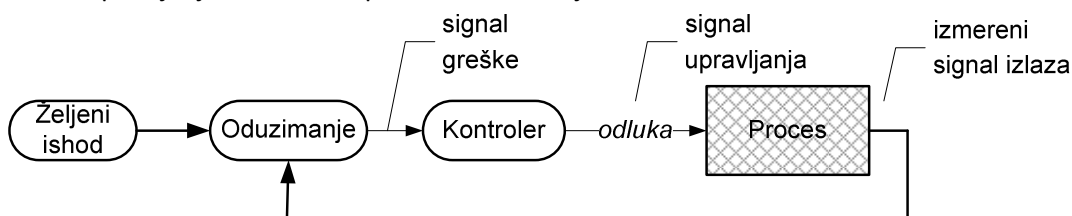
- Rekapitulirati osnovne probleme koji se javljaju pri projektovanju kontrolera
- Produbiti razumevanje intuitivnog pristupa projektovanju kontrolera
- Uspostaviti vezu između intuitivnog pristupa i prateće klasične teorije projektovanja
- Sagledati ograničenja koja postavlja klasična teorija
- Razumeti razloge za razvoj savremene teorije upravljanja i uočiti prirodne pravce njenog razvoja

#### 3.1 Linearni zakoni upravljanja

*Sadašnjost, prošlost i budućnost*

Može se slobodno reći da je razvoj prvih kontrolera zasnovan na ideji zatvaranja povratne sprege po izlazu bio u jednakoj meri intuitivno eksperimentalan kao i teorijski. Čini se čak da je intuitivna ideja prvo bila eksperimentalno potvrđena, a onda se postepeno uobličavala i klasična teorija upravljanja koja je omogućila da se svi uočeni fenomeni, analitički iskažu. Teorijski rezultati su zatim korišćeni za formulisanje sistemskog pristupa problemu projektovanja.

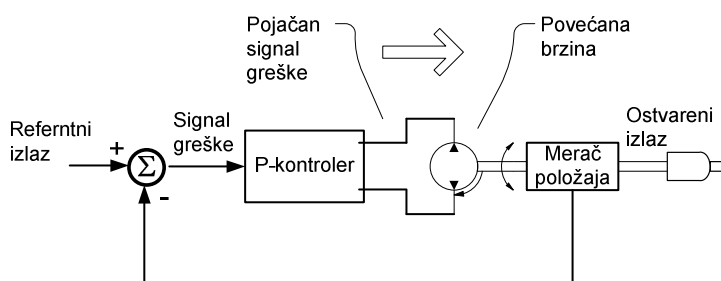
Kada se pogleda zamišljena struktura sistema upravljanja i postavi pitanje koje su to informacije koje bi kontroler mogao da u cilju određivanja signala upravljanja, vidi se da su na raspolaganju isključivo trenutna i prethodne vrednosti signala greške. Otuda nije ni čudno da su prvi zakoni upravljanja zasnovani upravo na korišćenju ovih vrednosti.



SL. 3-1 SISTEM UPRAVLJANJA SA ZATVORENOM POVRATNOM SPREGOM

#### PROPORCIONALNO DEJSTVO

Kao što je već istaknuto od kontrolera koji radi u sistemu automatskog upravljanja sa

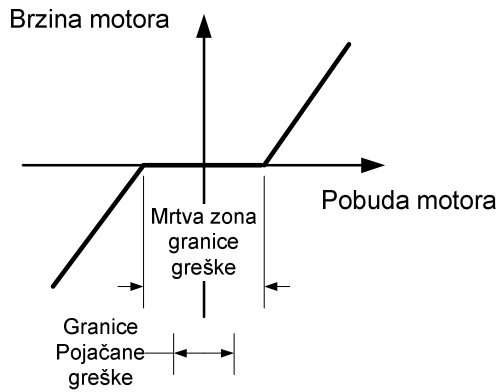


SL. 3-2 POZICIONI SERVOMEHANIZAM SA P DEJSTVOM

zatvorenom povratnom spregom, odnosno koji na svom ulazu ima signal greške, očekuje se da proizvede signal upravljanja koji će voditi ka smanjivanju i eventualno potpunoj eliminaciji signala greške. Tako se, na primer, kod pozicionog servomehanizma koji ima zadatak da postavi izlaznu osovinu u neki unapred zadani položaj i da je u

<sup>1</sup> Wigner, E. *The unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences*, John Wiley, N.Y. Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol.13 (No.1), 1960

njemu održava nezavisno do dejstva spoljnih poremećaja, signal greške dovodi na ulaz motora koji pokreće osovinu (Sl. 3-2). Izvesno je da će se motor okretati sve dok postoji pobuda, odnosno sve dotle dok se osovina ne dovede u željeni položaj. Takođe je jasno da će se motor okretati brže ako je signal greške veći, a sporije ako je manji. Ukoliko bi se želelo da se i pri manjim signalima greške dobije veća brzina motora, a time i brže prilaženje zadanoj poziciji neophodno je da signal greške pojača čime bi se osnažilo njegovo dejstvo na pokretanje motora. Budući da ovo pojačanje generiše signal koji je proporcionalan signalu greške, kontroler koji sadrži pojačavač se označava

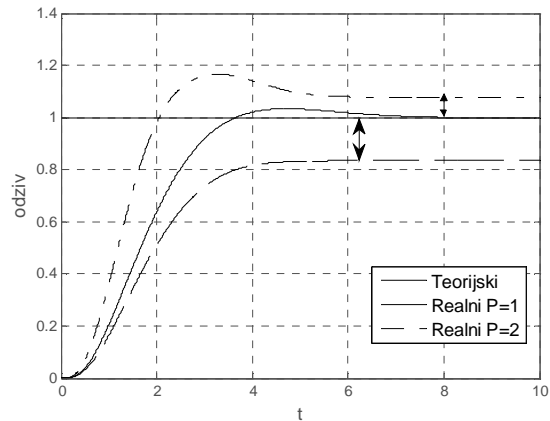
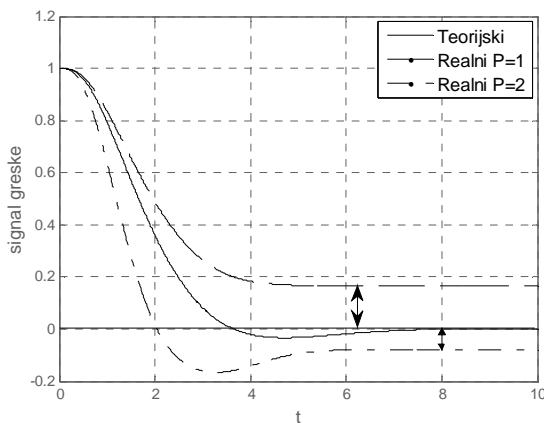


SL. 3-3 SMANJIVANJE EFEKTA MRTVE ZONE

kao kontroler sa *proporcionalnim dejstvom* (P-kontroler). Kao što se vidi P-kontroler reaguje jednostavno na trenutnu vrednost svog ulaza povećavajući pobudu motora.

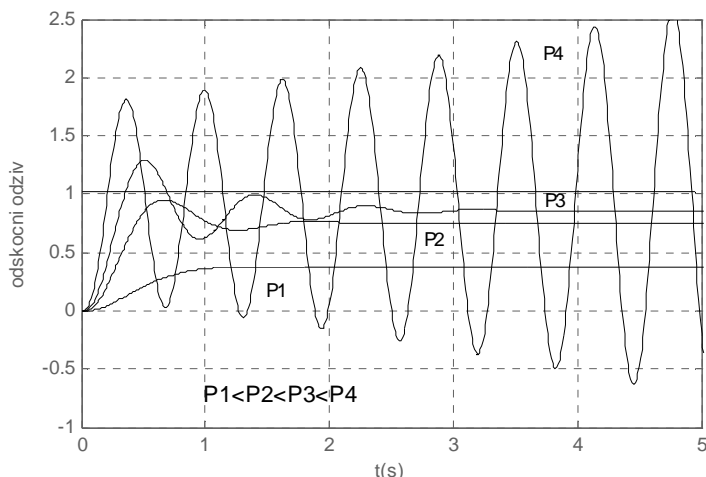
Postoji još jedan intuitivni motiv za uvođenje P-dejstva. Naime, tvrdnja da će se motor okretati sve dok postoji signal pobude je validna samo sa teorijske tačke gledišta. Svaki fizički uređaj ima neku mrtvu zonu, što znači da on neće biti u stanju da reaguje kada vrednost signala greške padne ispod granice zone. Otuda će sistem raditi sa nekom malom greškom u odnosu na zadanu poziciju. Međutim, ako se u sistem ubaci P-dejstvo onda ono ima za efekat smanjivanje granica zone u odnosu na signal greške. Drugim rečima, pojačanje signala greške rezultuje

većim signalom koji deluje na izvršni organ a samim tim smanjuje opseg vrednosti u kome sistem neće detektovati postojanje signala greške (Sl. 3-3).



SL. 3-4 SIGNAL GREŠKE I ODZIV SISTEMA: TEORIJSKI, BEZ P-DEJSTVA (P=1) I SA P-DEJSTVOM (P=2)

Na Sl. 3-4 prikazani su signal greške i odziv sistema koji teorijski treba tačno da dostigne zadanu vrednost odziva (vrednost greške nula). Međutim kada se realni sistem pusti u rad on, zbog postojanja mrtve zone ima određenu grešku. Ubacivanjem P-kontrolera pojačanja P=2 greška se značajno smanjuje. Postavlja se pitanje da li bi se daljim povećanjem pojačanja greška mogla u potpunosti eliminisati. Kod nekih sistema je to teorijski moguće, ali kod nekih će doći do rastućih oscilacija odziva, odnosno oni će postati nestabilni. Naime, intuitivno je jasno da bi veliko pojačanje, usled inercije sistema, dovodi do velikog prekoračenja zadane vrednosti. Kako greška menja smer, ona će snažno pokrenuti sistem u suprotnom smeru i zbog toga opet prouzrokovati prekoračenje. U zavisnosti od strukture samog procesa ove oscilacije mogu biti prigušene, što znači da će se sistem posle nekog vremena umiriti u zadanom položaju, ali i rastuće tako da se sistem nikada ne umiri. Kao što se vidi iz datog primera (Sl. 3-5) u kome je referentni izlaz definisan kao 1, sa povećanjem proporcionalnog dejstva greška se smanjuje, ali se i oscilacije odziva povećavaju. Greška, pri tome, kod ovog sistema ne može da dostigne vrednost 0.

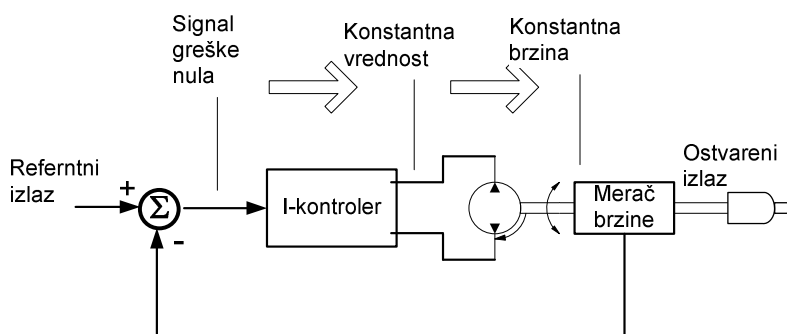


SL. 3-5 ILUSTRACIJA ODZIVA USLED P DEJSTVA

Pokazuje se da i sa praktične tačke gledišta postoji ograničenje u pogledu maksimalne veličine proporcionalnog dejstva. Izvesno je da ona nije neograničeno, jer svaki izvršni organ ima, takođe i svoje zasićenje, odnosno maksimalno dejstvo koje je u stanju da proizvede. Tako, na primer, nezavisno od veličine signala pobude motor može da ostvari neku maksimalnu brzinu. Otuda se daljim povećanjem pojačanja ne može proizvesti nikakav efekat.

### INTEGRALNO DEJSTVO

Postoji niz sistema kod kojih se željeni efekat ne može postići pomoću proporcionalnog pojačanja.



SL. 3-6 BRZINSKI SERVOMECHANIZAM SA I-DEJSTVOM

Dobra ilustracija ove tvrdnje je brzinski servomehanizam koji ima zadatak da obezbedi konstantnu brzinu obrtanja osovine na izlazu sistema (Sl. 3-6). Samo se po sebi razume da je ovo sistem kod koga se, bez neke dodatne intervencije, ne može obezbediti da signal greške padne na nulu, jer će u tom slučaju motor prestati da se okreće, čime će signal greške automatski ponovo dobiti maksimalnu moguću vrednost.

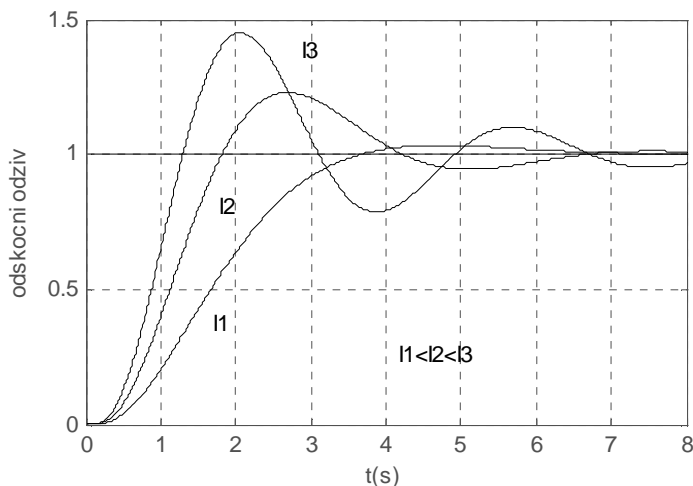
Sa druge strane, sama veličina greške se može smanjiti uvođenjem P-dejstva, jer će se željena pobuda motora, a time i zahtevana brzina, zahvaljujući pojačanju ostvariti sa manjom vrednošću signala greške.

Problem svođenja greške na nulu kod ove klase sistema može se rešiti samo pomoću nekog kontrolera koji bi zadržavao konstantan izlaz i kada mu ulaz, (signal greške) padne na nulu. Drugim rečima, ovakav kontroler mora biti u stanju da, na neki način, akumulira energiju i da, u odsustvu signala pobude, koristi tu akumuliranu energiju. Od kontrolera se, prema tome, traži da ne reaguje na trenutnu vrednost signala greške već da svoj izlaz određuje na osnovu informacija koje je prikupio u periodu od dejstva spoljne pobude do sadašnjeg trenutka. Da bi mogao da ostvari postavljeni zadatak kontroler treba da ima memoriju. Nema nikakve sumnje da je sam pojam memorije u izvesnoj meri neodređen. Kontroler može pamti sve vrednosti signala greške ili sve vrednosti signala upravljanja koje je generisao, ili svaku n- tu vrednost tih signala i tako redom. Isto tako se postavlja pitanje i na koji način će kontroler koristiti te memorisane vrednosti.

Budući da je pristup projektovanju kontrolera nametao što jednostavnije rešenje intuitivno se došlo do ideje da kontroler sabira sve prethodne signale greške. Na taj način sve dok postoji greška, signal na izlazu kontrolera će se povećavati, a kada greška padne na nulu on će prestati dalje da raste i održavaće izlaz na toj ostvarenoj konstantnoj vrednosti. Sa matematičke

taške gledišta sabiranja vrednosti kontinualnog signala je zapravo operacija integracije. Tako se dolazi do *integralnog dejstva*, odnosno do kontrolera koji predstavlja jedan integrator.

Prihvatajući ovaj način razmišljanja, neće biti čudno, da je opruga kao mehanički akumulator energije, našla svoje mesto u realizaciji sistema upravljanja, čak mnogo pre nego što je Hook<sup>1</sup> postavio jednačine kojima se ona modelira. Do razumevanja ovog dejstva kao integralnog i formiranju odgovarajućih analitičkih izraza, prošlo je zatim još nekoliko vekova.



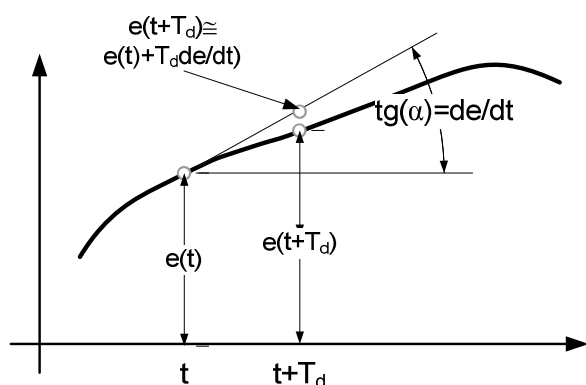
SL. 3-7 ILUSTRACIJA ODZIVA USLED I DEJSTVA

i do značajnog prekoračenja željenih vrednosti, što će imati za dugotrajne oscilacije oko željene vrednosti. To zapravo znači da integralno dejstvo nužno doprinosi destabilizaciji sistema i to utoliko više što je integralno dejstvo jače (Sl. 3-7).

Da bi se izbeglo usporavanje odziva pri promeni signala greške, integralno dejstvo se nikada ne koristi samo, već isključivo u kombinaciji sa proporcionalnim dejstvom, kao PI-regulator. Podešavanjem P i I dejstva može se postići izvesno poboljšanje odziva sistema pri čemu se pravi kompromis između brzine odziva i veličine preskoka.

#### DIFERENCIJALNO DEJSTVO

Čitav niz upravljačkih problema može se uspešno rešiti pomoću PI kontrolera. Nedostatak je što on lako dovode do prekoračenja željenih vrednosti, a time i do oscilacija odziva oko željenog



SL. 3-8 DIFERENCIJALNO DEJSTVO KAO PREDIKTOR GREŠKE

položaja. Ovo je prirodna posledica činjenice da kontroler koristi samo trenutnu i prethodne vrednosti signala greške. Drugim rečima, nijedno od ovih dejstava ne vodi računa o tome da se sistem kreće u dobrom smeru smanjujući grešku, te da bi ga trebalo postepeno zaustavljati i pre nego što se greška svede na nulu. To bi, zapravo, bio jedini način da se sistem zaustavi kada dostigne željeni položaj. Otuda se od kontrolera na neki način očekuje da ima sposobnost da na neki način izvrši predikciju svog budućeg stanja i da u skladu sa time određuje trenutno ponašanje. Pošto bi čovek zahtevanu predikciju izvršio na osnovu informacije o brzini i smeru promene signala greške, i pošto se ta informacija zapravo sadrži u prvom izvodu signala nije iznenađujuće što se pristupilo formiranju kontrolera koji ima

Intuitivno je jasno da će integralni kontroler dovesti do početno sporije reakcije sistema, zato što je potrebno izvesno vreme da bi se u njemu akumulirala potrebna energija. Posle toga, kontroler će stalno izazivati neke promene na sistemu sve dok postoji signal greške koji doprinosi daljem akumuliranju energije. Na taj način integralno dejstvo može u potpunosti da prevaziđe problem postojanja mrtve zone kod izvršnog organa. Međutim, kombinacija zakasnelog, usporenog dejstva i akumulirane energije može dovesti

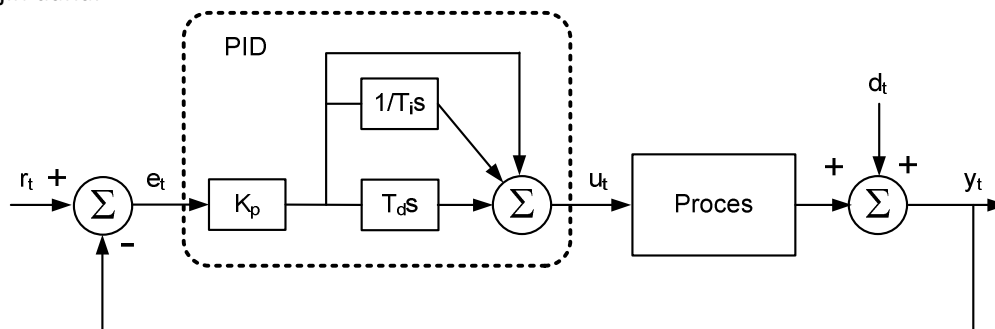
<sup>1</sup> Robert Hook, britanski fizičar postavio je zakone kretanja opruge 1676 godine.

*diferencijalno dejstvo*. U skladu sa izloženim D-regulator se može interpretirati i kao P-regulator koji umesto stvarne vrednosti signala greške u nekom trenutku vremena  $t$ , koristi predikciju te vrednosti u trenutku vremena  $t+T_d$  (Sl. 3-8). Na taj način on u izvesnoj meri poništava efekte dinamike, odnosno inercije procesa.

Praktična implementacija diferencijalnog dejstva zahtevala je da se konstruiše uređaj koji na odgovarajući način aproksimira funkciju diferenciranja, koja je po svojoj prirodi nekauzalna, te se kao takva ne može fizički ostvariti. Interesantno je napomenuti da se još od najranijih vremena problem prekoračenja zadanih vrednosti rešavao promenom mase sistema u toku kretanja. Mnogo godina kasnije, sa formulisanjem osnovnih zakona mehanike pokazano je da je sila inercije, koja zapravo zavisi od mase, mera promene brzine kretanja, odnosno diferencijal brzine.

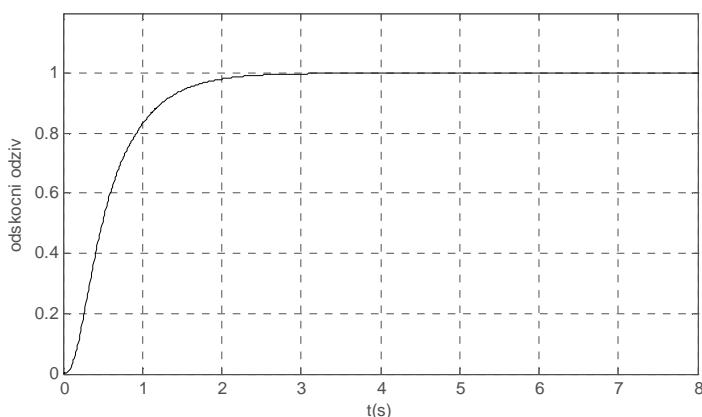
#### PID KONTROLER

Kada se danas analiziraju prvi mehanički kontroleri nastali još u praistorijskom dobu automatike vidi se su oni koristili tri elementarna svojstva mehaničkih sistema: trenje, elastičnost i inerciju. Tek u dvadesetom veku ovo rešenje je dobilo i odgovarajuće analitičko tumačenje, na osnovu koga su konstruisani i električni uređaji koji generišu upravljačke signale na osnovu proporcionalno-integralnog-diferencijalnog dejstva (PID). S obzirom na oblik matematičkog modela PID-a ovi zakoni upravljanja se označavaju kao *linearni* (Sl. 3-9). Jednostavnost i robusnost PID kontrolera učinila ih je nezamenljivim uređajima u čitavom nizu industrijskih aplikacija sve do današnjih dana.



SL. 3-9 PID KONTROLER

Samo se po sebi razume da su linearni zakoni upravljanja, kao intuitivno najprirodnije



SL. 3-10 ODSKOČNI ODZIV SA PODEŠENIM PARAMETRIMA PIDA

rešenje, prvi zakoni upravljanja koji su razmatrani i sa gledišta ocene performanse. Budući da je ona zavisila od kombinacije tri dejstva, i da se drastično menjala promenom njihovog intenziteta postavilo se pitanje određivanja procedure za definisanje ovog intenziteta (parametara PIDa) u svakom konkretnom slučaju. Naime, i pored toga što se, bar u principu, poznaje efekat svakog od odgovarajućih dejstava, imajući u vidu da su efekti međusobno zavisni, jasno je da

se vrednosti parametara ne mogu odrediti bez nekih dodatnih informacija o samom procesu.

U toj ranoj fazi, dok još nisu bile razvijene metode projektovanja kontrolera na osnovu matematičkog modela, jedino rešenje bilo je da se dođe do metoda za eksperimentalno podešavanje parametara na samom procesu. Prvu eksperimentalnu metodu predložili Ziegler i

Nichols još davne 1942. godine. Od onda, tokom čitavih pedeset godina ona se na različite načine poboljšava i dopunjava, ali ni danas ne prestaje da zaokuplja pažnju istraživača. Naime, praksa je pokazala da vrednosti parametara koje se određuju primenom neke od eksperimentalnih metoda predstavljaju zapravo dobre početne vrednosti za dalje eksperimente na samom procesu. Drugim rečima, pokazuje se da se na procesu dodatnim "finim" doterivanjem parametara, po pravilu, može u izvesnoj meri popraviti performansa. Međutim, ukoliko se podešavanje performanse pokuša bez postavljanja početnih vrednosti određenih korišćenjem eksperimentalnih metoda, onda je gotovo nemoguće doći do odgovarajućeg rezultata. Na Sl. 3-10 prikazan je odskočni odziv istog procesa koji je razmatran i u prethodnim slučajevima sa podešenim parametrima PIDa.

Često se gubi iz vida da su Ziegler i Nichols do tablica parametara PIDa došli posle niza eksperimenata u kojima su menjali parametre PIDa i posmatrali dobijene odzive. Pri tome su kao kriterijum valjanosti odziva koristili zahtev da drugi preskok u odzivu iznosi 25% od prvog preskoka. To zapravo znači da regulatori projektovani na ovaj način nužno dovode do prigušenog periodičnog odziva. Ukoliko se, međutim, želi neki drugačiji oblik odziva onda je neophodno da se parametri dodatno podešavaju.

Konačno, potrebno je da se istakne da jednostavnost PID kontrolera predstavlja i njihov osnovni nedostatak, jer postavlja granice njihove primenljivosti. Postoji, naime, veliki broj nestabilnih sistema kojima se ne može upravljati pomoću ove vrste kontrolera. Otuda je i bilo neophodno da se razviju drugačiji pristupi projektovanja kontrolera.

### 3.2 Ocena performanse

#### *Kvantifikacija zahteva*

Predstavljanje sistema pomoću matematičkog modela omogućilo je da se definiše čitav niz kvantitativnih pokazatelja njegovog ponašanja, što je otvorilo mogućnost da se na sistematičan način izvrši analiza rada sistema pod različitim uslovima. Time je ujedno i otvoreno pitanje pronalazanja metodologije projektovanja kontrolera koji će omogućiti da se to ponašanje popravi, tako da sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi imati željene karakteristike.

Pri izboru kvantifikatora performanse pošlo se od činjenice da svaki dinamički sistem, prirodni ili veštački ima neku inerciju, što znači da će uvek biti neophodno da prođe neko vreme dok se na izlazu sistema ne registruje reakcija na pobudu. To vreme se označava kao *prelazni proces*. Po njegovom okončanju sistem, ako je kontroler ispravno projektovan, ulazi u *stacionarno stanje* u kome, prati zadano (željeno) ponašanje.

Neophodno je da se istakne da je zapravo postojanje stacionarnog stanja prvi i osnovni uslov projektovanja svakog sistema upravljanja. Ono, naime, ukazuje na činjenicu da li je sistem *stabilan* ili ne. U najširem smislu stabilnost sistema podrazumeva da će on imati ograničen odziv na ograničenu pobudu. Time se, naravno, ne želi reći da će nestabilni sistemi posle dovoljno dugog vremena od dejstva pobude imati neograničeno velike signale na svojim izlazima. Samo se po sebi razume da se to neće dogoditi, jer bi to podrazumevalo da je energija sistema postala beskonačno velika. U realnosti izlaz sistema će verovatno ući u neko zasićenje ili probiti zaštitu koja je instalirana da spreči njegov raspad. Otuda definiciju stabilnosti zapravo treba shvatiti u matematičkom smislu. Izlaz matematičkog modela nestabilnog sistema će zaista postati beskonačno velik. Kod realnih sistema, međutim, nestabilnost se manifestuje tako što na ograničenu pobudu njihov odziv raste do zasićenja izlaza

Pored stabilnosti, kao potrebnog uslova bez koga i nema smisla govoriti o oceni performanse, još jedan bitan pokazatelj vezan za stacionarno stanje je veličina odstupanja ostvarenog ishoda od željenog. Ovo odstupanje predstavlja *grešku stacionarnog stanja*. Samo se po sebi razume da je zadatak kontrolera da, ukoliko je to ikako moguće ovu grešku svede na nulu.

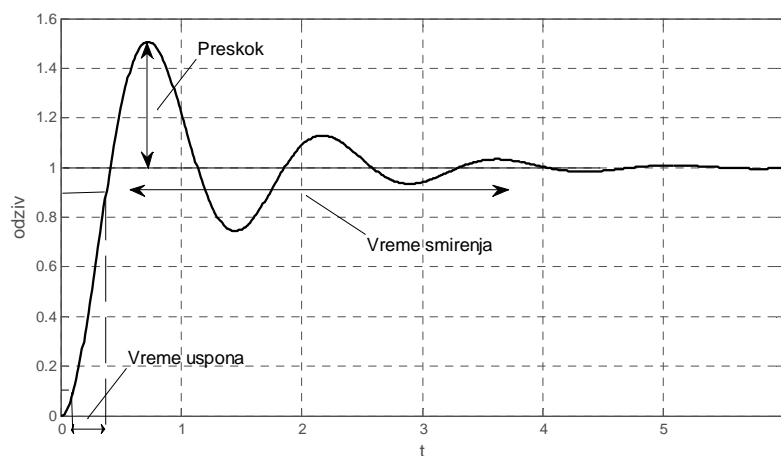
Ako se, nadalje, pretpostavi da postoji više kontrolera koji dovode do istog ponašanja sistema u stacionarnom stanju, onda se prirodno postavlja pitanje koji je od njih bolji. Sa gledišta ostvarivanja željenog ishoda jedan mogući odgovor bi bio da je to onaj kod koga prelazni proces kraće traje. Međutim, to ne mora uvek biti tačno. Izvesno je da će se kod najvećeg broja sistema



željeni ishod najbrže dobiti ukoliko se u sistem uloži veoma mnogo energije, čime se zapravo povećavaju troškovi realizovanog upravljanja. Drugim rečima, specifikacija performanse zahteva i da se uspostavi neki odnos između trajanja prelaza procesa i troškova dobijenog rešenja.

Izloženim primerom se svakako ne iscrpljuje lista faktora koji se moraju uzeti u obzir pri određivanju rešenja. Primera radi, ako se brod snažno pokrene prema zadatom kursu realno je očekivati da će usled inercije on prekoračiti željenu tačku. Tada se mora pokrenuti na drugu stranu, sve dok se postepenim oscilacijama ne dovede na željeni pravac. Činjenica da postoji *preskok* zadanog cilja u slučaju broda ne mora da bude od značaja, ali će recimo kod podešavanja položaja noža na strugu ova pojava dovesti do potpunog uništenja predmeta koji treba da se obradi. Otuda se i postojanje i veličina preskoka moraju takođe uzeti u obzir.

Svi do sada navedeni pokazatelji performanse sistema odnose se na oblik signala odziva u vremenskom domenu. Nesumnjivo je da je to delimično posledica činjenice da se zapravo radi o rešenju diferencijalnih jednačina kojima je modeliran dinamički sistem. Međutim, izvesno je da je na to uticala i činjenica da se pri samom formulisanju željenog ishoda intuitivno razmišlja o načinu na koji pojedine veličine treba da se menjaju u vremenu.



SL. 3-11 TIPIČAN JEDINIČNI ODSKOČNI ODZIV SA POKAZATELJIMA PERFORMANSE

Klasična teorija upravljanja se poglavito bavila problemom regulacije sistema sa jednim ulazom i izlazom. To je zapravo značilo da se definiše jedna referentna vrednost koju izlaz sistema treba da dostigne. Ako se ova referentna vrednost shvati kao odskočni signal onda se zapravo ponašanje sistema svodi na posmatranje njegovog odziva na odskočni signal. Analiza niza postojećih sistema pokazala je da oni imaju veoma sličan oblik odskočnog odziva koji se može karakterisati preko niza veličina kao što su *vreme uspona*, *veličina preskoka*, *vreme smirenja*, *faktor relativnog prigušenja* itd (Sl. 3-11). Samo se po sebi razume da svi ovi pokazatelji nisu nezavisni. Izvesno je, na primer, da se kod manjeg vremena uspona može očekivati veći preskok, koji će sa svoje strane dovesti do većeg vremena smirenja.

Kada se posmatra linearni model sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom onda se vidi da se svi parametri performanse mogu egzaktno izračunati za sistem drugog reda čija je funkcija prenosa oblika

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.1)$$

U tom smislu se može reći da se zahtevi u pogledu performanse sistema definišu tako da njegov odskočni odziv u što je moguće većoj meri odgovara nekom zadanom odskočnom odzivu sistema drugog reda.

Vremenom je relativna komplikovanost matematičkog aparata neophodnog za analizu ovih sistema, uslovala da se korišćenjem odgovarajućih transformacija vremenski promenljive funkcije preslikaju u frekvencijski i kompleksni domen.

### 3.3 Grafo-analičke metode projektovanja

#### *Vizuelizacija kao pomoć intuiciji*

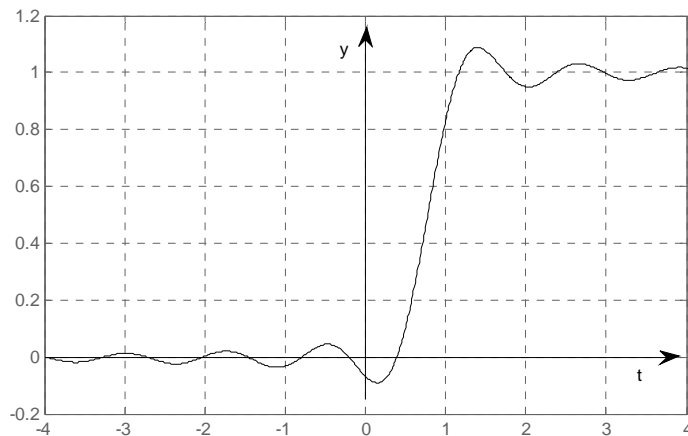
#### 3.3.1 PROJEKTOVANJE U FREKVENCIJSKOM DOMENU

Svest da vremenski signal predstavljen u frekvencijskom domenu daje drugačije informacije dovela je do ideje da se projektovanju kontrolera pristupi sa gledišta tog novog uvida u ponašanje sistema. Dodatni motiv da se ovom pitanju posveti pažnja pretstavljala je i činjenica da se kod sistema čije ponašanje je blisko linearnom frekvencijska funkcija prenosa mogla i eksperimentalno da odredi jednostavnim snimanjem amplitude i faze odziva sistema koji bi bio pobuđivan nizom sinusoida različitih učestanosti<sup>1</sup>.

Polazeći od činjenice da je signal predstavljen u frekvencijskom domenu okarakterisan zapravo svojim spektrom postavilo se pitanje na koji način bi se željena performansa sistema mogla okarakterisati preko frekvencijskog sadržaja signala. U idealnom slučaju kontroler bi trebalo da bude takav da sistem u zatvorenoj sprezi prenosi bez ikakve promene kompletan frekvencijski sadržaj referentnog ulaznog signala. Pri tome, budući da se radi o elektromehaničkim sistemima koji po svojoj prirodi imaju ograničenje u pogledu maksimalne moguće brzine promene, izvesno je da nema potrebe da se zahteva da sistem prenosi kompletan spektar mogućih učestanosti. Umesto toga logično je da se definiše jedan opseg učestanosti koje bi sistem trebalo da prenese bez ikakvih promena. Izloženim zahtevom je upravo opisan *idealni nisko propusni filter*.

Budući da je idealni filter fizički neostvarljiv zadatak projektovanja kontrolera može se interpretirati kao zahtev da se formira sistem čija će funkcija prenosa u zatvorenoj sprezi da u što je moguće većoj meri odgovara karakteristikici idealnog filtra određenog propusnog opsega. To znači da ona za učestanosti koje su manje od propusnog opsega treba da bude što ravnija i što bliža amplitudi 1 (odnosno 0dB), a za učestanosti koje su veće od propusnog opsega da što strmije pada ka amplitudi 0.

Osnovu svih metoda za projektovanje kontrolera u frekvencijskom domenu čine rezultati Nikvista<sup>2</sup> i Bodea<sup>3</sup>. Oni se zapravo svode na metode za jednostavno aproksimativno grafičko predstavljanje frekvencijskih funkcija prenosa sistema. Pored, propusnog opsega kao osnovne karakteristike sistema oni su uveli i meru relativne stabilnosti izraženu preko *preteka faze* i *preteka pojačanja*.



SL. 3-12 JEDINIČNI ODSKOČNI ODZIV IDEALNOG FILTRA

Kada je specificiran osnovni zahtev u pogledu funkcije prenosa sistema u zatvorenoj sprezi i kada su definisani i parametri koji ukazuju na relativnu stabilnost sistema, postavilo se pitanje da li se može uspostaviti veza između njih i veličina kojima je okarakterisana performansa u vremenskom domenu. U tom cilju izračunat je jedinični odskočni odziv idealnog filtra. Pokazalo se da on zapravo po obliku odgovara odzivu sistema drugog reda (Sl.

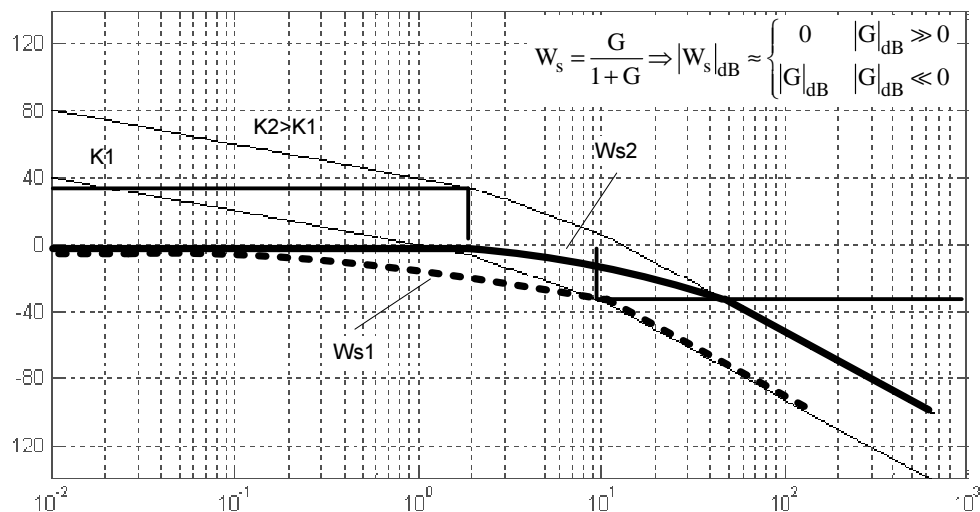
<sup>1</sup> Potrebno je napomenuti da se ovim podrazumeva da je ispitivani sistem stabilan jer u protivnom on i ne može biti opisan frekvencijskom funkcijom prenosa

<sup>2</sup> Harold Nyqvst je 1932. primenom Košijeve (Cauchy) teoreme definisao postupak dobijanja frekvencijskih dijagrama (Nikvistovi dijagrami) pomoću kojih se mogu oceniti svi relevantni pokazatelji ponašanja sistema.

<sup>3</sup> Hendrik Wade Bode je 1945. godine predložio aproksimativan metod za grafičko prikazivanje amplitudne i fazne karakteristike sistema (Bodeove karakteristike). I Nyqvst i Bode su svoje rezultate razvili radeći u Bell Labs

3-12). Na osnovu toga se došlo na ideju da se umesto frekvencijske funkcije idealnog filtra posmatra frekvencijska funkcija prenosa sistema drugog reda sa zatvorenim povratnim spregom za koju se veoma lako mogu izračunati sve karakteristične veličine. Potrebno je ipak da se istakne da su ove veze i intuitivno jasne. Tako je na primer izvesno da vreme uspona sistema mora da bude obrnuto proporcionalno propusnom opsegu. Razlog leži u činjenici da malo vreme uspona zapravo znači da sistem reaguje na pobudu izuzetno brzo. Otuda je takav sistem u stanju da prati promenu veoma brzog signala, odnosno signala visoke učestanosti. Na sličan način se može zaključiti i da je pretek faze proporcionalan prigušenju sistema, a time i vremenu smirenja. Naime, ako sistem ima veliku meru stabilnosti to znači da su oscilacije u njegovom odzivu izuzetno prigušene. Sve ovo ukazuje na to da je projektovanje u frekvencijskom domenu zapravo autonomna metodologija koja ne zahteva da se na bilo koji način vraća u vremenski domen.

Sušтина metoda zasnovanih na Nikvistovim ili Bodeovim dijagramima zasniva se na ideji da je moguće formirati jednostavne kontrolore koji bi bili sastavljeni od filtera prvog reda, odnosno od ćelija koje sadrže po jedan pol i jednu nulu. Raspoređivanjem ovih polova i nula jednostavno se preoblikuje Nikvistov ili Bodeov dijagram frekvencijske funkcije prenosa postojećeg sistema tako da se dobije željeni oblik.



SL. 3-13 APROKSIMATIVNO ODREĐIVANJE AMPLITUDE FUNKCIJE SPREGNUTOG PRENOSA

U osnovi oblikovanja frekvencijskih dijagrama leže dve osnovne činjenice. Kao prvo, amplitudska karakteristika sistema sa zatvorenim spregom može se aproksimirati karakteristikom sistema u otvorenoj sprezi uz uslov da je amplituda dovoljno velika ili dovoljno mala. U tom kontekstu, da bi amplitudska karakteristika, bar u izvesnoj meri odgovarala karakteristici idealnog filtra, projektovanje treba obaviti tako da amplitudska karakteristika sistema u otvorenoj sprezi ostane izvan određenih gabarita u domenu niskih i visokih učestanosti (Sl. 3-13). Ukoliko je ona dovoljno visoko u domenu niskih učestanosti, onda će funkcija prenosa u zatvorenoj sprezi imati pojačanje blisko jedinici, odnosno idealnom filteru. Sa druge strane ukoliko je dovoljno mala u domenu visokih učestanosti, onda će sistem u zatvorenoj sprezi imati frekvencijsku karakteristiku blisku karakteristici sistema u otvorenoj sprezi, što znači da će imati veliko slabljenje izvan propusnog opsega.

Druga važna činjenica pri projektovanju sistema je da se zahtevi u pogledu ponašanja sistema u stacionarnom stanju i prelaznom procesu mogu jasno razdvojiti na domen niskih i domen srednjih učestanosti. Pored toga, treba imati na umu da se

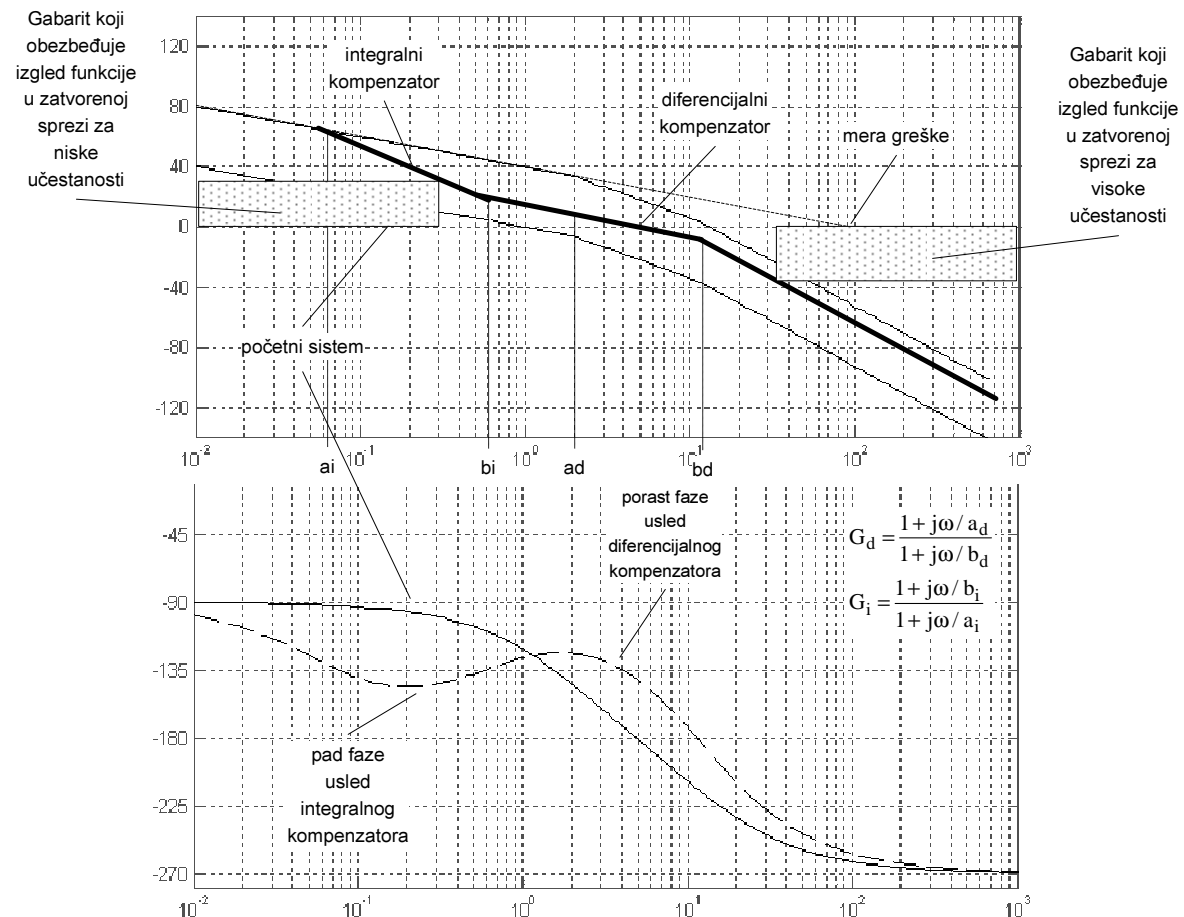
#### PODEŠAVANJE STATIČKE GREŠKE - PROMENLJIVO POJAČANJE

Kao što je poznato, nagib i položaj prve asimptote u Bodeovom amplitudskom dijagramu direktno određuje vrstu ulaznog signala za koji će sistem imati statičku grešku, kao i veličinu te

greške. Pri tome, što je ta asimptota na svom početku udaljenija od apscisne ose to je greška manja.

Nagib prve asimptote određen je samim sistemom, odnosno stepenom astatizma sistema. Ukoliko se on ne želi promeniti neophodno je da kompenzator u sebi ne sadrži integrator. Položaj prve asimptote određen je isključivo ukupnim pojačanjem koje ima projektovani sistem. To znači, da je povećanje pojačanja sistema jedini način da se u sistemu smanji statička greška. Drugim rečima, ukoliko je pri projektovanju sistema zadana neka željena vrednost statičke greške, onda je time direktno određeno i ukupno pojačanje projektovanog sistema, a time i pojačanje kontrolera. Problem, međutim, nastaje u tome što se dodavanjem pojačanja, zajedno sa prvom asimptomom podiže i ceo amplitudski dijagram čime se značajno povećava propusni opseg, a često i sistem čini nestabilnim.

Imajući u vidu izloženi problem izvesno je da je neophodno da se pronađe kontroler koji će biti u stanju da omogući da sistem ima veliko pojačanje na malim učestanostima, a malo pojačanje na velikim. Na taj način bi se omogućilo da prva asimptota bude dovoljno visoko, a da ostatak Bodeovog dijagrama ima oblik koji odgovara zahtevanom propusnom opsegu. Ovaj zahtev se može ostvariti korišćenjem nisko-propusnog filtra, odnosno *integralnog kompenzatora*. Uzimajući u obzir činjenicu da ovaj kompenzator u jednom opsegu učestanosti ima negativnu fazu, on se mora postaviti dovoljno daleko od željenog propusnog opsega, čime se izbegava njegov uticaj na stabilnost sistema.



SL. 3-14 ILUSTRACIJA GRAFIČKOG PROJEKTOVANJA KOMPENZATORA

Prihvatajući predloženu metodologiju za ostvarivanje željene statičke greške, sledeće pitanje je šta je to zapravo "dovoljno daleko". Pošto integralni kompenzator ne obara samo fazu već i amplitudu karakteristike preti opasnost da on, ako se stavi na isuviše niskim učestanostima, pokvari karakteristiku sistema sa zatvorenim spregom (odnosno uvede dijagram unutar

zabranjene oblasti). Iz tog razloga se integralni kompenzator pomera što je moguće bliže učestanosti propusnog opsega, vodeći pri tome računa da se ne ugrozi faza sistema. Lako je ustanoviti da je ovaj zahtev ispunjen ako se nula integralnog kompenzatora pomeri oko jedne dekade ispod date učestanosti (Sl. 3-14).

Potrebno je da se istakne da je postupak projektovanja integralnog kontrolera u potpunosti grafički, odnosno da nema potrebe za nekim složenim analitičkim izračunavanjima. Izvesno je da je to delimično posledica činjenice da su u vreme kada je on razvijen računari kao sredstvo za izračunavanje bili tek u povoju. Međutim, takođe je važno da se uoči da je samo projektovanje u velikoj meri i intuitivno jer počiva na interpretaciji ponašanja sistema preko odgovarajućih frekvencijskih karakteristika.

Posebna odlika izložene metode je razumevanje integralnog kompenzatora kao uređaja koji omogućava da sistem radi sa dve vrednosti pojačanja. Drugim rečima, sistem snažno pojačava signale niskih učestanosti, dok znatno slabije pojačava signale srednjih i visokih učestanosti. Na izvestan način ovaj kompenzator predstavlja preteču jedne posebne metodologije projektovanja kontrolera sa promenljivim pojačanjem (gain scheduling). Ovi kontroleri se primenjuju kod izrazito nelinearnih sistema kod kojih se pokazuje da se upravljanje može realizovati ako se u različitim domenima rada koriste kontroleri koji imaju drugačije pojačanje, ili promenjenu vrednost nekog drugog parametra.

#### PODEŠAVANJE PROPUSNOG OPSEGA

Kada je rešeno pitanje statičke greške, preostalo je još da se oblikuje deo Bodeove karakteristike koji odgovara domenu srednjih i visokih učestanosti. Za formiranje ovog dela karakteristike uobičajeno je da se definišu učestanost i veličina preteka faze, kao i slabljenje pri višim učestanostima. Time je implicitno definisan i propusni opseg sistema sa zatvorenom povratnom spregom. Polazeći od činjenice da frekvencijske karakteristike direktno odslikavaju dinamiku sistema ovaj zadatak se može obaviti u velikoj meri intuitivno.

Pre svega, iz veze između amplitudnih i faznih karakteristika vidi se da se može očekivati da sistem ima zadani pretek faze pri nekoj datoj učestanosti ukoliko amplitudska karakteristika u toj učestanosti seče apscisnu osu pod nagibom od  $-20\text{dB}$  po dekadi. Da bi se ovo postiglo po pravilu je potrebno da se u tom domenu učestanosti smanji nagib amplitudske karakteristike sistema kojim se upravlja. Ovo se može postići visokopropusnim filtrom, odnosno *diferencijalnim kompenzatorom*, koji ima jedan pol i jednu nulu. Posle opsega u kome deluje diferencijalni kompenzator, amplitudska karakteristika nastavlja da pada sa većim nagibom i time se obezbeđuje dobro slabljenje sistema u zatvorenoj sprezi.

Ilustracija efekata integralnog i diferencijalnog kompenzatora pri projektovanju kontrolera prikazana je na Sl. 3-14.

#### 3.3.2 PROJEKTOVANJE U KOMPLEKSNOJ DOMENU

Metodologija projektovanja sistema u kompleksnoj domenu zasniva se primeni Laplasove transformacije, kojom se određuje funkcija prenosa sistema kojim se upravlja. Raspored polova i nula ove funkcije omogućava da se na jednostavan grafički način odredi položaj polova sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi. Pri tome se, pokazuje da svi polovi ne utiču podjednako na ponašanje sistema. U tom smislu, izdvajaju se takozvani *dominantni polovi* koji presudno određuju oblik vremenske karakteristike odziva. Otuda se projektovanje kontrolera svodi na raspoređivanje polova i nula integralnog i diferencijalnog kompenzatora tako da se dođe do zadanih dominantnih polova sistema u zatvorenoj sprezi koji će rezultovati zahtevanom veličinom preskoka, uspona ili drugih parametara.

I ova metoda je poglavito grafička i veoma jednostavna za primenu. Njeno ograničenje je svakako u tome što se ne mogu podesiti svi polovi sistema. Sa druge strane razumevanje značaja polova dobijeno primenom ove metodologije uslovalo je kasniji razvoj kontrolera na bazi zahteva da sistem sa zatvorenom povratnom spregom ima skup tačno utvrđenih polova.

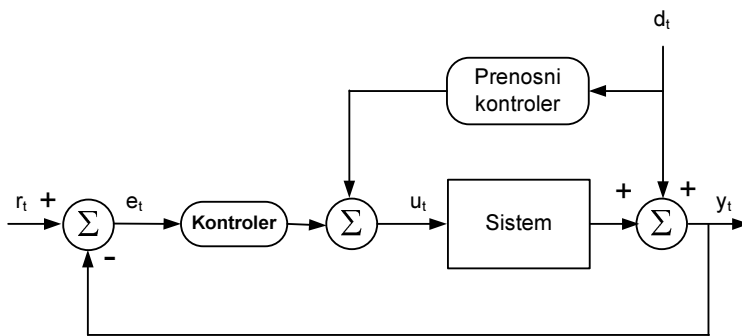
### 3.3.3 KOMPENZACIJA POREMEĆAJA – PRENOSNO UPRAVLJANJE

Pri projektovanju kontrolera klasičnim metodama po pravilu se ne uzima u obzir dejstvo poremećaja. Očekuje se, naime, da će efekti poremećaja biti eliminisani dejstvom povratne sprege. Ovo je u skladu sa samom idejom korišćenja povratne sprege. Podsetimo se da je ideja zatvaranje povratne sprege, zapravo, potekla od činjenice da izlaz procesa neće biti jednak izlazu modela procesa. Razlika potiče delom od nesavršenosti modela u smislu zanemarivanja izvesnih delova njegove dinamike, a delom i zbog dejstva poremećaja koji uopšte nisu uzeti u obzir u fazi modeliranja. Budući, dakle da se dejstvo poremećaja nužno vidi na izlazu sistema koji se preko povratne sprege vraća u kontroler ima osnova da se očekuje da će kontroler biti u stanju da se izbori sa ovim poremećajima.

Ovo očekivanje je prilično realno kada se radi o poremećajima koji nastaju usled merenja. Pripadajući domenu visokih učestanosti, ovi poremećaji će u kontroleru, koji je po svojoj prirodi nisko propusni biti isfiltrirani, odnosno eliminisani.

Nešto drugačija situacija može se očekivati kod poremećaja koji nastaju na samom procesu. U principu, ovde se, pre svega, pokušava sa eliminacijom izvora poremećaja pri izgradnji samog sistema. Tako se, na primer, uvođenjem efikasnog miksera izbegava varijacija u sastavu smeše koja se uvodi u reaktor u kome se upravlja nekom hemijskom reakcijom, ili se korišćenjem kvalitetnijih ležajeva smanjuje trenje pri obrtanju osovine, itd.

Ukoliko izvori poremećaja ne mogu da se eliminišu, i ukoliko je njihovo dejstvo i dalje izraženo nakon zatvaranja povratne sprege, moguće je projektovanje posebne lokalne povratne sprege. Ova sprega bi uzimala signal iz sistema koji se nalazi neposredno iza dejstva poremećaja, što znači da nosi punu informaciju o njemu. Pri projektovanju ove sprege koristi se u osnovi ista



SL. 3-15 PRENOSNO UPRAVLJANJE

metodologija kao kod glavne povratne sprege. Samo se po sebi razume, da realizacija ove ideje podrazumeva da poremećaj deluje na sistem na jasno lokalizovan način i da je promenljiva koja nosi informaciju o njemu dostupna merenju.

Sledeća ideja u tretiranju poremećaja je takođe intuitivna. Pošlo se, naime, od toga da se za poremećaje koji su merljivi mogu dosta tačno predvideti efekti koji će oni imati na ponašanje

sistema. U tom slučaju se projektuje poseban *prenosni kontroler*<sup>1</sup> koji proizvodi akciju koja je suprotna efektu poremećaja (Sl. 3-15). Osnovna prednost ovog pristupa, u odnosu na povratnu spregu sastoji se u tome što se korektivna akcija preduzima i pre nego što je poremećaj delovao na proces. U tom smislu, dejstvo poremećaja se predupređuje, umesto da se naknadno eliminiše.

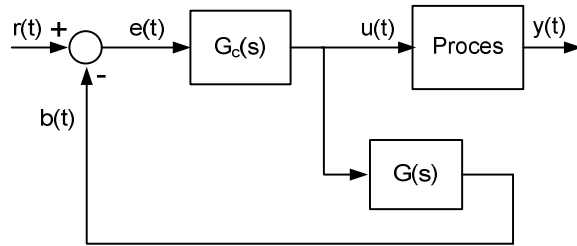
Glavni nedostatak prenosnog upravljanja ogleda se u činjenici da je to upravljanje sa otvorenom povratnom spregom. Otuda je neophodno da se raspolaže veoma dobrim modelom sistema. Ukoliko to nije moguće, ili ukoliko sam poremećaj nije merljiv, onda se njegov efekat mora na neki način predvideti. Budući da se klasične metode analize i projektovanja sistema nisu pokazale efikasne u pogledu predikcije, rešenje ovog problema postalo je moguće tek sa razvojem savremene metodologije digitalnog upravljanja.

### 3.3.4 SMITOV PREDIKTOR

U početno vreme nijedna od pomenutih klasičnih tehnika projektovanja nije uzimala u

<sup>1</sup> U anglosaksonskoj literaturi ova vrsta upravljanja poznata je pod nazivom "feedforward control".

obzir čisto transportno kašnjenje koje je karakteristika niza realnih procesa. Iz teorije analize sistema bilo je poznato da prisustvo transportnog kašnjenja smanjuje fazu sistema ne menjajući amplitudsku karakteristiku. Otuda se smanjuje stepen stabilnosti sistema što može u velikoj mери



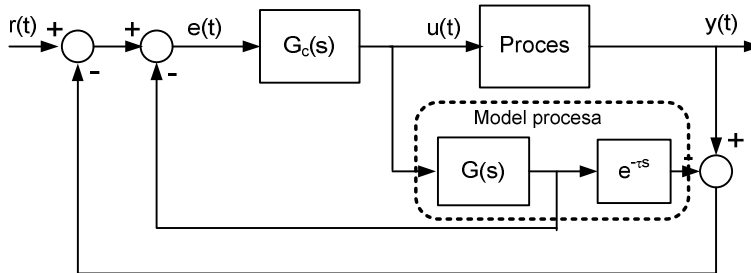
SL. 3-16 UPRAVLJANJE NA OSNOVU MODELIRANOG IZLAZA PROCESA BEZ KAŠNJENJA

otežati njegovo upravljanje. Praktične implementacije potvrđivale su ovaj teorijski rezultat ali, budući da se modeliranjem kašnjenja u sistem unosi nelinearnost, dugo vremena nije bilo predloga kako da se ovaj teorijski rezultat iskoristi u projektovanju kontrolera.

Neka je proces koji ima čisto transportno kašnjenje opisan kontinualnom funkcijom prenosa

$$G_p(s) = G(s)e^{-ts} \quad (3.2)$$

i neka je funkcija prenosa kontrolera  $G_c(s)$  određena projektovanjem kontrolera primenom Bodeove metode ili metode geometrijskog mesta korena na proces čija je funkcija prenosa  $G(s)$ , tako da se zadovolje neki zadani parametri performanse. U tom smislu, povratna sprega se ne ostvaruje po stvarnom izlazu procesa, već po modeliranom izlazu procesa koji nema transportno kašnjenje. Ključni nedostatak kontrolera koji bi bio formiran na ovaj način (Sl. 3-16) bila bi svakako



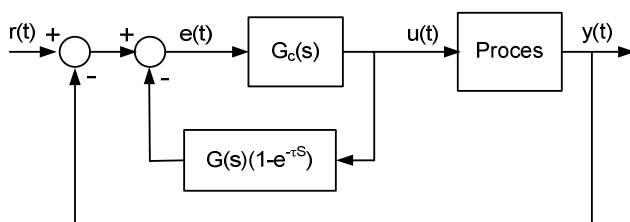
SL. 3-17 SMITOV PREDIKTOR

činjenica da ne postoji povratna sprega po stvarnom izlazu procesa. Razumljivo je da se pri implementaciji kontrolera ona može zatvoriti po procesu (umesto po modelu  $G(s)$ ), ali se ni u tom slučaju ne mogu dobiti zadovoljavajući rezultati zato što kontroler nije projektovan za tu vrstu povratne sprege.

U cilju otklanjanja ovog nedostatka, Smit je predložio da se u povratnu spregu uvede i greška modeliranja, odnosno razlika između modeliranog izlaza procesa sa transportnim kašnjenjem i stvarnog izlaza procesa (Sl. 3-17).

Da bi se jasnije sagledalo šta u stvari radi Smitov prediktor pogodno je da se struktura kontrolera izrazi na drugačiji način. Sa slike Sl. 3-18 se vidi da je zakon upravljanja određen sledećom relacijom

$$U(s) = G_c(s)E(s) = G_c(s) \left[ R(s) - Y(s) - \underbrace{G(s)U(s)}_{e^{ts}Y(s)} + \underbrace{G(s)e^{-ts}U(s)}_{Y(s)} \right] = G_c(s) \left[ R(s) - e^{ts}Y(s) \right] \quad (3.3)$$



SL. 3-18 EKVALENTNA ŠEMA SMITOVOG PREDIKTORA

To znači da kontroler obrađuje razliku između referentnog signala i predikcije budućeg odziva procesa, odnosno da formira upravljački signal vodeći računa o efektu koji će on imati na budući odziv procesa.

Interesantno je zapaziti da je ovo, u osnovi, intuitivno rešenje problema transportnog kašnjenja, puno teorijsko objašnjenje dobilo tek kasnije sa razvojem

digitalnog prediktivnog upravljanja.

### 3.4 Projektovanje kontrolera u prostoru stanja

*Sistematizacija u potrazi za univerzalnim rešenjem*

#### 3.4.1 PODEŠAVANJE POLOVA

Sve metode projektovanja kontrolera na osnovu podešavanja karakterističnih veličina odskočnog odziva ograničene su u pogledu broja karakterističnih veličina koje se mogu podesiti. Ovo je prirodna posledica intuitivnog pristupa u njihovom projektovanju. Intuitivni pristup ima još jedno obeležje a to je da je rezultujući kontroler izuzetno jednostavan. Naime, nesumnjivo je da bi se daljim dodavanjem polova i nula kontroleru mogle promeniti različite karakteristične veličine, no kako su one bar u nekoj meri međusobno povezane, teško je da se intuitivno sagledaju svi efekti do kojih bi dovela kompleksna struktura kontrolera.

Sa druge strane, poznato je da je ponašanje sistema u potpunosti određeno rasporedom polova njegove funkcije prenosa, pa je izvesno da bi se proizvoljan efekat mogao postići ukoliko bi se formirao kontroler koji će na neki unapred zadan način rasporediti polove sistema. U rešavanju ovako postavljenog zadatka projektantima intuicija više nije bila dovoljna. Pribegli su zato rešenju koje se samo od sebe nametalo. Ako se pođe od činjenice da vektor stanja sistema sadrži minimalan skup veličina koje u potpunosti opisuju ponašanje sistema, onda je logično da se i kontroler koji bi zadovoljio sve zahteve potraži preko modela u prostoru stanja. Inženjerska praksa nametala je pri tome i zahtev da dobijeno rešenje bude jednostavno. Otuda se došlo do ideje da se kontroler formira kao linearna sprega po stanjima sistema, odnosno da zakon upravljanja bude dat u obliku

$$u_t = r_t - Kx_t \quad (3.4)$$

gde je  $r_t$  referentni ulazni signal, a  $K$  vektor parametara kontrolera koji se određuje tako da sistem sa kontrolerom ima zadane sopstvene vrednosti (polove funkcije prenosa).

Za ovako formiran kontroler model u zatvorenoj povratnoj sprezi je oblika<sup>1</sup>

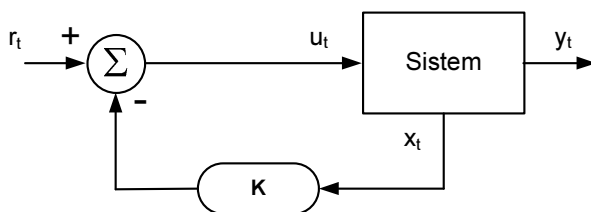
$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t \\ u_t &= r_t - Kx_t \end{aligned} \Rightarrow x_{t+1} = (A - BK)x_t + Br_t \quad (3.5)$$

Iz ove relacije se vidi da se elementi vektora  $K$  određuju izjednačavanjem karakterističnog polinoma sistema

$$\det(sI - (A - BK)) \quad (3.6)$$

sa polinomom koji ima željene nule.

Primenom rezultata teorije kontrolabilnosti pokazuje se da je za svaki kontrolabilni model moguće odrediti jednoznačnu vrednost vektora  $K$  tako da sistem ima unapred zadane veličine svih



SL. 3-19 UPRAVLJANJE POMOĆU POVROTNE SPREGE PO STANJU

sopstvenih vrednosti. Istovremeno se pokazuje da to nije moguće učiniti ukoliko bi se kontroler formirao kao linearna funkcija izlaza sistema. Razlog tome je jednostavno u činjenici da je za podešavanje  $n$  sopstvenih vrednosti sistema čiji vektor stanja je dimenzije  $n$  neophodno projektovati kontroler koji ima  $n$  parametara. Ukoliko bi se, međutim, kontroler formirao preko povratne sprege po izlazu, tada bi broj njegovih parametara bio jednak broju

izlaza, a to znači manji od  $n$ .

<sup>1</sup> Za razumevane samog kontrolera nebitno je da li se posmatra kontinualni ili diskretni model sistema



### 3.4.2 IMPLEMENTACIJA KONTROLERA

Primena kontrolera razvijenog na osnovu modela u prostoru stanja podrazumeva da je moguće da se formira povratna sprega po stanjima sistema (Sl. 3-19). Sa praktične tačke gledišta to znači da je neophodno da se sva stanja sistema mere, što u praksi nije slučaj. Otuda se sam linearni regulator javlja kao optimalno, ali neprimenljivo rešenje. Ovaj problem se može prevazići projektovanjem nekog sistema koji bi mogao da, na osnovu poznavanja merenja, određuje vrednosti stanja. Ovaj uređaj igrao bi ulogu observera ili estimatora stanja.

U principu, budući da je upravljanje razvijeno na osnovu pretpostavljenog modela sistema, jedan od mogućih pristupa rešavanju navedenog problema bio bi da se isti model koristi za procenu stanja. To znači da bi se stanje moglo estimirati preko relacija

$$\hat{x}_{t+1} = A\hat{x}_t + Bu_t \quad (3.7)$$

gde  $\hat{x}$  predstavlja procenjenju vrednost stanja.

Teorijski gledano greška procene određena je jednačinom

$$e_{t+1} = x_{t+1} - \hat{x}_{t+1} = Ae_t \Rightarrow e_t = A^t(x_0 - \hat{x}_0) \quad (3.8)$$

što znači da ona zavisi od tačnosti pretpostavljene vrednosti početnog stanja. Nadalje se vidi da će, ukoliko je sistem stabilan, nezavisno od početnog pogađanja greška težiti ka nuli.

Na prvi pogled bi se moglo zaključiti da je problem estimacije stanja rešen. Međutim, ako se ima u vidu da model predstavlja samo aproksimaciju sistema, teško je očekivati da bi predloženi estimator mogao da radi na zadovoljavajući način. Nelogično je, naime, pretpostaviti da je estimacija stanja u potpunosti nezavisna od izmerenog izlaza sistema koji nosi jedinu objektivnu informaciju o tome šta se u sistemu zapravo dešava. Otuda se čini da bi estimator trebalo formirati tako da on obrađuje i informaciju dobijenu sa izlaza sistema.

Polazeći od ove ideje razvijene su dve klase estimatora. Kao i kod estimatora parametara modela jedna od ovih klasa polazi od determinističkog modela sistema, a druga od pretpostavljenih stohastičkih karakteristika signala i sistema.

### 3.4.3 LUENBERGEROV OBSERVER IDENTITETA

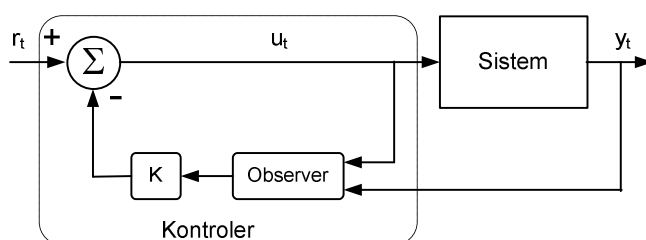
U razumevanju Luenbergerovog observera identiteta može se poći od jednačine (3.7). U izvesnom smislu ova jednačina opisuje observer u otvorenoj sprezi. Kao što je već rečeno njen nedostatak je što se ne uzima u obzir stvarno ponašanje procesa. Intuitivno, traženi efekat bi se mogao postići tako što bi se jednačina observera u otvorenoj sprezi modifikovala tako da uključi meru greške estimacije. Teorijski gledano tačna mere greške određena je razlikom između stvarne i procenjene vrednosti stanja, tako da bi relacija observera mogla da se predstavi kao

$$\hat{x}_{t+1} = A\hat{x}_t + Bu_t + G(x_t - \hat{x}_t) \quad (3.9)$$

gde matrica  $G$  određuje težinu koja se daje korektivnom članu. Ova relacija, je međutim fizički neostvarljiva jer se stanje sistema ne poznaje. Imajući, međutim, u vidu da se poznaje izlaz procesa, prva sledeća aproksimacija mere greške bila bi razlika izmerenog izlaza sistema i izlaza izračunatog na osnovu procenjene vrednosti stanja. Primenom ove ideje dobija se Luenbergerov observer identiteta

$$\hat{x}_{t+1} = A\hat{x}_t + Bu_t + G(y_t - C\hat{x}_t) = (A - GC)\hat{x}_t + Bu_t + Gy_t \quad (3.10)$$

Iz relacije (3.10) se vidi da je observer dinamički sistem dimenzije  $n$ , što znači da on donosi



novih  $n$  sopstvenih vrednosti, tako da će ceo sistem imati ukupno  $2n$  sopstvenih vrednosti. Sa tim u vezi postavlja se pitanje šta će se, posle uvođenja observera, dogoditi sa onih  $n$ , početno podešenih sopstvenih vrednosti. Izvesno je, da bi ukoliko bi one bile promenjene ceo postupak projektovanja izgubio svaki smisao.

SL. 3-20 IMPLEMENTACIJA UPRAVLJANJA POMOĆU POVRATNE SPREGE PO STANJU

Da bi se dobio odgovor na postavljeno pitanje potrebno je posmatrati model celog ovako projektovanog sistema

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t \\ u_t &= r_t - K\hat{x}_t \\ \hat{x}_{t+1} &= (A - GC)\hat{x}_t + Bu_t + GCx_t \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ \hat{x}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ GC & A - BK - GC \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r_t \quad (3.11)$$

Analiza ovog modela pokazuje da su sopstvene vrednosti sistema određene sledećom karakterističnom jednačinom

$$\det(zI - (A - BK)) \det(zI - (A - GC)) = 0 \quad (3.12)$$

što znači da prethodno podešene sopstvene vrednosti ostaju nepromenjene, dok se njima samo dodaju sopstvene vrednosti observera.<sup>1</sup>

Funkcija prenosa kontrolera može se odrediti na sledeći način.

$$\hat{x}_{t+1} = (A - GC)\hat{x}_t + Bu_t + Gy_t \Rightarrow$$

$$\hat{x}_t = (zI - (A - GC))^{-1} (Bu_t + Gy_t) = \frac{\text{adj}(zI - (A - GC))}{\det(zI - (A - GC))} (Bu_t + Gy_t) \Rightarrow$$

$$u_t = r_t - K\hat{x}_t = r_t + \frac{P(z)}{A_0(z)} u_t - \frac{Q(z)}{A_0(z)} y_t; \quad (3.13)$$

$$A_0(z) = \det(zI - (A - GC)),$$

$$P(z) = -K \text{adj}(zI - (A - GC)) B, \quad Q(z) = K \text{adj}(zI - (A - GC)) G$$

Rešavajući jednačinu (3.13) po upravljanju dobija se relacija oblika

$$R(z)u_t = T(z)r_t - S(z)y_t \quad (3.14)$$

Interesantno je zapaziti da ovako formiran sistem ima zapravo kontroler koji je dvostruko veće dimenzije od samog sistema. Ova činjenica će se pokazati kao veoma značajna pri traženju opšteg rešenja kontrolera za praćenje referentnog modela zasnovanog na U/I modelima.

Konačno potrebno je da se istakne da iako se iz interpretacije Luenbergerovog observera čini da se radi o čisto teorijskom modelu, teorija observera nastala je pri čisto intuitivnom rešavanju jednog praktičnog problema<sup>2</sup>. Uviđajući da korišćenjem klasičnog integro-diferencijalnog kompenzatora nije u stanju da podesi upravljanje jednog elektro magnetnog sistema Luenberger je počeo da zatvara različite dodatne povratne sprege za koje mu se činilo da bi mogle da doprinesu poboljšanju odziva sistema. Tek kada je sistem na kraju proradio, pristupio je teorijskoj analizi dobijenog rešenja i shvatio da dodatne povratne sprege zapravo dovode do estimacije stanja modela sistema kojim se upravlja<sup>3</sup>.

#### 3.4.4 KALMANOV FILTER

Alternativa korišćenju observera je estimator stanja zasnovan na opštijem modelu procesa u prostoru stanja definisanom kao<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t + Fw_t; \quad x_0 - \text{slučajan vektor} \\ y_t &= Cx_t + v_t \end{aligned} \quad (3.15)$$

gde su

$w_t$  – poremećaj procesa (slučajan signal)

$v_t$  – šum merenja (slučajan signal)

<sup>1</sup> Ova osobina kombinacije kontrolera i observera označava se kao princip separacije polova

<sup>2</sup> Iz razgovora sa Davidom Luenbergerom u Kaliforniji 1985. godine

<sup>3</sup> Ovaj pristup je kasnije poopšten uvođenjem opšte transformacije stanja, kao i formiranjem redukovano observera koji estimira samo ona stanja koja se ne mogu direktno da mere.

<sup>4</sup> U opštem obliku estimator je izveden i za nelinearni model, kao i za linearni nestacionarni model.

Usvajanjem stacionarnog linearnog modela dobija se najjednostavnije rešenje koje i dalje omogućava da se istaknu bitne odlike ovog pristupa

Polazeći od ovog modela Kalman je pokazao da se estimator stanja može formirati prema relaciji

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t-1} + G_t(y_t - C\hat{x}_{t-1}); \quad \hat{x}_{-1} - \text{dato} \quad (3.16)$$

Pre nego što se ova relacija analizira sa teorijske tačke gledišta potrebno je zapaziti da ona ima smisla i sa intuitivne tačke gledišta. Naime, ako se pretpostavi da je estimacija stanja  $\hat{x}_{t-1}$  najbolje što smo u stanju da odredimo na osnovu merenja prikupljenih do trenutka t-1, onda se čini logičnim da se ona, nakon dobijanja sledećeg merenja ( $y_t$ ), u odsustvu mere greške stanja koriguje multiplom greške izlaza, odnosno odstupanja između izmerenog i pretpostavljenog izlaza sistema. Nadalje, prirodno je pretpostaviti da će vektor  $G_t$  biti opadajući zato što će, ako estimacija konvergira, vremenom greška izlaza poticati zapravo prevashodno od šuma merenja, što znači da je treba odbaciti.

Kalman je pokazao da je, pod određenim uslovima, moguće jednoznačno odrediti matricu pojačanja  $G_t$ , kao i početno stanje estimatora tako da estimator minimizira varijansu greške stanja. Uslovi koji vode ka datom rešenju mogu se formulisati na sledeći način

- Slučajni procesi  $\{x_t\}$  i  $\{y_t\}$  su Gausovski procesi što znači da se mogu okarakterisati pomoću srednje vrednosti i varijanse
- Slučajni procesi  $\{w_t\}$  i  $\{v_t\}$  su nekorelisani Gausovski procesi čija je srednja vrednost jednaka nuli, a varijansa poznata
  - $E\{w_t\} = \bar{w}_t = 0; \quad E\{(w_t - \bar{w}_t)(w_k - \bar{w}_k)\} = q_t^w \delta_{tk}$
  - $E\{v_t\} = \bar{v}_t = 0; \quad E\{(v_t - \bar{v}_t)(v_k - \bar{v}_k)\} = q_t^v \delta_{tk}$
- Početno stanje je nezavisno od poremećaja procesa i šuma merenja
- Poremećaj procesa i šum merenja su nekorelisani signali
- $E\{w_t v_k\} = E\{w_t\} E\{v_k\}$

Postavljanje se pitanje u kojoj meri se može očekivati da u realnim sistemima ovi uslovi budu ispunjeni.

Uslov da srednje vrednosti poremećaja i šuma merenja budu jednake nuli uvodi se poglavito u cilju pojednostavljenja samih relacija. Ovaj uslov se može relaksirati zahtevom da srednje vrednosti budu poznate. Na sličan način, zahtev da poremećaji i šum merenja budu nekorelisani mogu biti relaksirani.

Uslov da je početno stanje nezavisno od poremećaja procesa je realističan za mnoge sisteme kod kojih je mehanizam generisanja početnog uslova nezavistan od mehanizma kojim se proizvode poremećaji procesa, ali se u praksi sreću i slučajevi kod kojih to nije ispunjeno. Tako je na primer sasvim logično pretpostaviti da su slučajni poremećaji koji deluju u navigacionom sistemu supersoničnih letilica (prouzrokovani nesavršenošću žiroskopa, merača ubrzanja i prateće elektronske opreme) nezavisni od početnih koordinata objekta koje se unose u navigacioni sistem neposredno pre lansiranja. Međutim, ako se posmatra odnos slučajnih naleta vetra pri poletanju i vazdušnog talasa izazvanog izduvnim gasovima vidi se da će oni zavisiti od početnih koordinata objekta.

Za razliku od moguće korelisanosti početnog stanja i poremećaja procesa, zahtev da početno stanje bude nekorelisano sa šumom merenja je potpuno realističan. Ovo je posledica činjenice da je sistem merenja postavljen eksterno u odnosu na dinamiku samog procesa.

Konačno, ima osnova da se očekuje da su mehanizmi koji proizvode poremećaje i šum merenja potpuno nezavisni iako to zavisi od načina na koji je montirana merna oprema. Tako se, na primer, kod zemaljskog radara za praćenje objekta, pozicioni senzor veoma često, pomoću odgovarajućeg reduktora, spreže sa osovinom na kojoj se nalazi antena. U tom slučaju, slučajni naleti vetra ne predstavljaju samo poremećaj procesa već istovremeno utiču i na šum merenja pozicije.

Izvršena analiza ima za cilj da ukaže da i ovaj estimator kao i svaki drugi ima svoja ograničenja o kojima se mora voditi računa pri njegovoj implementaciji. Ukoliko su uslovi ispunjeni, ovaj estimator je, van svake sumnje, daleko superiorniji od drugih.

*“Kada izgovorim neku reč”, reče Hampty Dampiti, “ona označava samo ono što sam ja odabrao da ona znači - ni manje ni više.”*

*“Pitanje je”, reče Alisa, “da li je moguće učiniti da reči označavaju toliko mnogo različitih stvari?”*

*“Pitanje je”, reče Hampti Dampiti, “ko je gospodar - i to je sve?”*

LUIS CAROL, Alisa u zemlji ogledala

## 4 Optimalno upravljanje

U OVOM POGLAVLJU ČITALAC ĆE

- razumeti osnovni koncept optimalnog upravljanja
- sagledati moguće pristupe u definisanju problema optimalnog upravljanja i specifikacije odgovarajućih kriterijuma performanse
- razumeti fundamentalni Belmanov princip optimalnosti
- ovladati tehnikom dinamičkog programiranja i uočiti praktične probleme u implementaciji rešenja
- sagledati mogućnosti optimalnog upravljanja linearnim stacionarnim sistemima
- uočiti neke fenomene i ograničenja koja se javljaju pri implementaciji optimalnih kontrolera

### 4.1 Optimalno rešenje problema

*Brže, bolje, više*

Nijedan inženjerski problem nema jedinstveno rešenje. Šta više, u najvećem broju slučajeva postoji bezbroj mogućih rešenja. Ukoliko se sva rešenja procenjuju na osnovu neke definisane mere performanse, svako rešenje će, bar u principu, dovesti do drugačije vrednosti ove mere. Rešenje kome odgovara najmanja (ili najveća) vrednost usvojene mere performanse naziva se optimalno rešenje.

Potrebno je odmah istaći da se pod izrazom "optimalno" često pogrešno tumači da je odabrano rešenje najbolje od svih mogućih rešenja. Pri tome se gubi iz vida da se do njega došlo minimizacijom (maksimizacijom) mere performanse. Drugim rečima, dobijeno rešenje je samo najbolje u okviru postavljenog kriterijuma. To nadalje znači da optimalno rešenje dobijeno na osnovu pogrešno postavljenog kriterijuma ne samo da ne mora biti najbolje, već može dovesti do izuzetno lošeg ponašanja sistema.

Gledano potpuno opšte, do optimalnog rešenja nekog problema moglo bi se doći i tako što bi se odredila sva moguća rešenja koja bi se međusobno poredila. Samo se po sebi razume da je ovaj pristup neobično zametan i veoma teško ostvarljiv. Ipak, određeni teorijski rezultati, omogućavaju da se ovo iscrpno pretraživanje mogućih rešenja u znatnoj meri pojednostavi primenom odgovarajućih strategija koje direktno dovode do optimalnog rešenja.

Potrebno je da se istakne da se teorijski rezultati određivanja optimalnih strategija primenjuju na daleko širu klasu problema od onih obuhvaćenih linearnim sistemima. Šta više, sa praktične tačke gledišta kod linearnih sistema se, zapravo, retko direktno implementiraju optimalne upravljačke strategije. Osnovni razlog što se, uprkos toga, razmatraju osnovi optimalnog upravljanja linearnih sistema leži u činjenici da se na tom primeru mogu veoma jasno sagledati svi osnovni principi određivanja optimalnih strategija.

U načelu, formulacija problema optimalnog upravljanja linearnim sistemima, a time i njegovo rešavanje, zahteva da se prethodno utvrdi matematički model sistema kojim se upravlja, fizička ograničenja koja postoje na procesu, kao i kriterijum performanse

#### 4.1.1 MATEMATIČKI MODEL SISTEMA

Kao što je već rečeno određivanje optimalnog upravljanja zasniva se na poređenju mogućih rešenja. Pri tome je intuitivno jasno da se ovo poređenje neće vršiti tako što se sva

moguća rešenja realizuju i zatim isprobaju u eksperimentima na samom procesu. Otuda se zapravo radi o svojevrsnom apstraktnom poređenju efekta koji će na sistem imati različiti mogući upravljački signali. Da bi ovo poređenje bilo moguće neophodno je raspolagati odgovarajućim matematičkim modelom koji će generisati predikcije izlaza sistema na različite upravljačke signale na njegovom ulazu.

Različiti pristupi određivanja optimalnih upravljačkih strategija zasnivaju se u najvećem broju slučajeva na modelu procesa u prostoru stanja. Ukoliko se ograničimo na determinističke modele, odnosno zanemarimo merni šum, kao i poremećaja koji deluju na proces onda se u najopštijem slučaju posmatraju sledeća dva modela.

▪ KONTINUALNI MODEL PROCESA U PROSTORU STANJA<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= a(x(t), u(t), t) \Leftrightarrow \dot{x}_t = a(x_t, u_t, t) \\ y(t) &= c(x(t), u(t), t) \Leftrightarrow y_t = c(x_t, u_t, t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

▪ DISKRETNI MODEL PROCESA U PROSTORU STANJA

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a(x_t, u_t, t) \\ y_t &= c(x_t, u_t, t)\end{aligned}\tag{4.2}$$

gde su

$x \in \mathfrak{R}^n$  - vektor stanja

$u \in \mathfrak{R}^m$  - vektor upravljanja

$y \in \mathfrak{R}^p$  - vektor izlaza procesa (merni signali)

Za ovako odabran model specificiraju se granični uslovi kojima se određuje početno i krajnje stanje sistema. Pri tome se pretpostavlja da je

- početno vreme ( $t_0$ ) i početno stanje ( $x_0$ ) određeno i poznato
- krajnje vreme ( $t_f$ ) zadano ili proizvoljno, stanje ( $x_f$ ) zadano, proizvoljno ili definisano relacijom  $f(x_f, t_f) \leq 0$

#### 4.1.2 FIZIČKA OGRANIČENJA

Klasični pristup projektovanja kontrolera polazi od unapred definisane strukture kontrolera za koju se u toku projektovanja određuju parametri. Pri tome se ne vodi računa o eventualnim fizičkim ograničenjima koja mogu doći do izražaja u implementaciji kontrolera. Eksperimentima na samom procesu proverava se da li dati izvršni organi u očekivanim režimima rada mogu da obave one funkcije koje se zahtevaju upravljačkim signalima koje daje kontroler. Ukoliko je to moguće, kontroler se smatra adekvatnim, a eventualni ulasci izvršnih organa u zasićenje se rešavaju posebnim tehnikama.

Za razliku od klasičnog pristupa, pri rešavanju problema optimalnog upravljanja struktura kontrolera se ne precizira eksplicitno. Naime, samo rešavanje problema optimalnog upravljanja se svodi na određivanje analitičkog izraza kontrolera koji minimizira ili maksimizira dati kriterijum performanse. To zapravo znači da je struktura kontrolera implicitno specificirana definisanjem funkcije kriterijuma. Otuda je izuzetno važno da se unapred obezbedi da dobijeni kontroler može da postigne očekivane efekte. Iz tog razloga, modelu sistema se pridružuju i fizička ograničenja.

Pre svega, priroda i vrsta odabranih izvršnih organa, zajedno sa eventualnim drugim zahtevima koji se postavljaju u pogledu implementacije rešenja mogu postaviti izvesna ograničenja na upravljačke signale.

Pored toga, u određenim slučajevima moguće je da se izvesno ograničenje postavi i u pogledu dužine intervala upravljanja.

<sup>1</sup> Radi jednostavnijeg označavanja i kontinualni i diskretni vremenski promenljiv signal  $s$  označavaće se sa  $s_t$ , pri čemu se podrazumeva da u prvom slučaju ova oznaka izražava kontinualnu funkciju  $s(t)$ , a u drugom slučaju odabirak signala uzet u trenutku vremena  $t$

Konačno, upravljački signal koji deluje na model može imati za posledicu proizvoljnu promenu svih stanja sistema. Međutim, sama priroda procesa i/ili očekivano ponašanje procesa često ne dozvoljavaju da stanja uzmu bilo koju vrednost. To zapravo znači da je realno očekivati i da postoje određena ograničenja samih stanja.

U skladu sa izloženim pri formulisanju zadatka optimalnog upravljanja definiše se

- INTERVAL UPRAVLJANJA – određen početnim vremenom  $t_0$  i krajnjim vremenom  $t_f$
- DOZVOLJENO UPRAVLJANJE -  $u \in U$ , gde je  $U$  skup svih dozvoljenih upravljačkih signala  $u$  na intervalu  $[t_0, t_f]$
- DOZVOLJENE TRAJEKTORIJE STANJA -  $x \in X$ , gde je  $X$  skup svih dozvoljenih trajektorija stanja na intervalu  $[t_0, t_f]$ .

Veoma često se željeni efekti mogu postići ukoliko se sistem  $u$  nekom intervalu vremena dovede u neku oblast prostora stanja. Ovi zahtevi se izražavaju definisanjem skupa cilja -  $S$  koji određuje  $n+1$  dimenzioni prostor (stanje plus vreme). Ukoliko su krajnje stanje i vreme potpuno određeni, skup cilja se svodi na tačku  $n+1$  dimenzionog prostora.

#### 4.1.3 KRITERIJUM PERFORMANSE

Klasična teorija upravljanja se u suštini zasniva na korišćenju različitih analitičkih i grafo-analitičkih metoda pomoću kojih se, u skladu sa nekim postavljenim zahtevima, određuju parametri kontrolera. Činjenica je da se ove metode uspešno primenjuju za projektovanje lineranih sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom i nultim početnim uslovima. Njihov osnovni nedostatak je zahtev da se istovremeno zadovolji više kriterijuma koji nisu baš uvek kompatibilni. Tako se, na primer, ako se posmatra specifikacija sistema u vremenskom domenu, od projektanta zahteva da kako zna i ume "ugura" odziv procesa unutar zadanih granica određenih željenim odskočnim odzivom. Budući da je to, po pravilu, nemoguće dobijaju se različita rešenja od kojih jedno ima manje vreme uspona, drugo manji preskok, treće kraće vreme smirenja i tako redom. Nesumnjivo je da se ova rešenja teško mogu porediti.

Izloženi problem bi se mogao prevazići ako bi se definisao jedan kriterijum koji bi objedinio sve relevantne pokazatelje u jednu brojnu vrednost. Drugim rečima, to znači da bi se u kontekstu specifikacije performanse sistema u vremenskom domenu o najboljem rešenju moglo govoriti ako bi definisali kriterijum performanse u obliku

$$J = k_1 \times (\text{VREME USPONA}) + k_2 \times (\text{VREME SMIRENJA}) + k_3 \times (\text{PRESKOK}) + k_4 \times (\text{GREŠKA USTALJENOG STANJA}) + \dots$$

gde bi parametri  $k_i$  predstavljali težinske faktore svakog od pokazatelja.

Slična situacija je i pri specifikaciji karakteristika u frekvencijskom domenu gde bi logičan izbor funkcije kriterijuma bio

$$J = k_1 \times (\text{PRESEČNA UČESTANOST}) + k_2 \times (\text{PRETEK FAZE}) + k_3 \times (\text{PRETEK POJAČANJA}) + k_4 \times (\text{GREŠKA USTALJENOG STANJA}) + \dots$$

Koliko god opisani kriterijumi imali svoju fizičku logiku, pokazuje se da su oni u praksi neprimenljivi, odnosno da se na osnovu njih ne može naći analitičko rešenje postavljenog problema.

Zahtev za poređenjem rešenja koja se mogu dobiti primenom precizno definisanih analitičkih metoda doveo je do ideje da se formiranju kriterijuma performanse pristupi sa aspekta željenog globalnog ponašanja sistema.

Pri razmatranju globalnog ponašanja sistema mora se početi od činjenice da svaki upravljački signal  $u(t)$  koji na intervalu  $[t_0, t_f]$  deluje na sistem čije je početno stanje  $x(t_0)$  prouzrokuje kretanje sistema duž trajektorije  $x(t)$ . Sama ideja pronalaženja najboljeg rešenja u okviru postavljenog kriterijuma implicira da kriterijum performanse svakoj od ovih trajektorija mora da pridruži jedan jedinstven realni broj kojim se na neki način meri ponašanje sistema. Nadalje treba imati na umu da se željeno ponašanje sistema može iskazati zahtevom da se postigne neko zadano krajnje stanje, pri čemu je apsolutno nebitno kako se sistem ponašao u procesu prelaza do tog stanja, ali

se isto tako može i zahtevati da sistem celo vreme u najvećoj mogućoj meri prati neku zadanu trajektoriju. Pored toga, moguće je i da je pri oceni ponašanja sistema od izuzetne važnosti kolika će energija biti utrošena pri dostizanju krajnjeg cilja. Otuda je izvesno je da je potrebno da se napravi razlika između mere performanse dostizanja krajnjeg stanja i prelaza od početnog do krajnjeg stanja..

- MERA DOSTIZANJA KRAJNJEG STANJA – izražava odstupanje krajnjeg stanja  $x_f$  od željenog krajnjeg stanja, što znači da mora biti oblika

$$h(x_f, t_f) \quad (4.3)$$

gde je  $h$  proizvoljna skalarna funkcija.

- MERA PRELAZNOG PERIODA OD  $x_0$  DO  $x_f$  – mora zavisiti od trajektorije stanja koja nosi kompletnu informaciju o sistemu, ali i od upravljanja koje zapravo određuje veličinu energije koja se troši pri prelazu sistema iz jednog stanja u drugo. Budući da sistem obavlja prelaz na intervalu vremena, izvesno je da ova mera mora da obuhvati celokupno ponašanje sistema na tom intervalu. Otuda se ona može izraziti kao

$$\int_{t_0}^{t_f} g(x_t, u_t, t) dt - \textit{kontinualni sistemi} \quad (4.4)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_f} g(x_t, u_t, t) - \textit{diskretni sistemi} \quad (4.5)$$

gde je  $g$  proizvoljna skalarna funkcija.

U skladu sa izloženim opšti oblik kriterijuma performanse može da se predstavi na sledeći način.

$$J = h(x_{t_f}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x_t, u_t, t) dt - \textit{kontinualni sistemi} \quad (4.6)$$

$$J = h(x_{t_f}, t_f) + \sum_{t=t_0}^{t_f} g(x_t, u_t, t) - \textit{diskretni sistemi} \quad (4.7)$$

Potrebno je da se istakne da krajnje vreme  $t_f$  može, ali i ne mora da bude specificirano. Isto tako, sam oblik funkcija  $h$  i  $g$  je neki put određen samom prirodom problema, a neki put nije. Tako je na primer, ukoliko se zahteva da se sistem prevede iz tačke A u tačku B u najkraćem mogućem vremenu očigledno da funkcija kriterijuma treba da se definiše kao  $J = t_f - t_0$ . Međutim, zahtev da se brzina i položaj održavaju u blizini nule uz malu potrošnju energije ne sugeriše baš eksplicitno oblik funkcije kriterijuma.

#### 4.1.4 FORMULACIJA PROBLEMA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Pri formulaciji problema optimalnog upravljanja pretpostavlja se da su poznati matematički model sistema, granični uslovi, fizička ograničenja upravljanja i trajektorije stanja, kao i kriterijum performanse. Pod tim uslovima, potrebno je odrediti dopustivo upravljanje  $u^*$  koje prouzrukuje da sistem prati dopustivu trajektoriju  $x^*$  koja minimizira kriterijum performanse  $J$  (ili maksimizira negativnu vrednost kriterijuma). Ovo upravljanje se označava kao optimalno upravljanje, a odgovarajuća trajektorija je optimalna trajektorija. Samo se po sebi razume da se za rešenje traži globalni, a ne lokalni, ekstremum.

Ovako jednostavno formulisan problem može biti izuzetno kompleksan za rešavanje. Rešenje se najčešće dobija u algoritamskoj formi, dok se u relativno malom broju slučajeva ono može dobiti u analitičkoj formi. Dodatno opterećenje predstavlja i činjenica da ne postoji opšti pristup za utvrđivanje egzistencije rešenja. Otuda se u praksi, najčešće, direktno pokušava pronalaženje rešenja, umesto da se prethodno utvrdi njegova egzistencija. Konačno, treba imati na umu da rešenje ne mora biti jedinstveno. U tom slučaju izbor rešenja zavisi od troškova



realizacije, pouzdanosti i sličnih faktora.

#### 4.1.5 IMPLEMENTACIJA REŠENJA

Rešenje optimalnog upravljanja po pravilu podrazumeva raspoloživost svih stanja procesa, što nužno poskupljuje implementaciju u pogledu neophodne merne opreme (ukoliko su sva stanja merljiva) ili povećava kompleksnost rešenja ako se stanja estimiraju pomoću observera. Ako se pri tome uzme u obzir i da je dobijeno optimalno rešenje najbolje samo u svetlu postavljenog kriterijuma onda se neminovno postavlja pitanje da li se celokupni napor isplati da bi se realizovao sistem koji je nabolji samo u nekom uskom smislu. Ovome svakako treba dodati i činjenicu da se sistem upravljanja retko projektuje sa idejom da treba da obavi jedan jasno specificiran zadatak, već više sa željom da zadovoljavajuće reaguje u nizu situacija u kojima se može naći u toku rada.

Imajući u vidu sve što je rečeno čini se da je razumljivo da se u praksi mnogo češće pristupa traženju nekog suboptimalnog rešenja. U tom smislu, optimalno rešenje može se posmatrati više kao krajnji reper a ne kao kao krajnji cilj. Drugim rečima, ovo rešenje se u praksi često koristi kao mera kvaliteta različitih suboptimalnih rešenja koja su jednostavnija i ekonomičnija za realizaciju.

Međutim, čak i u onim slučajevima gde se optimalno rešenje implementira kao takvo, treba imati na umu da je ono zasnovano na predikciji ponašanja sistema koja sasvim izvesno odstupa od realnog ponašanja. Naime, funkcija kriterijuma obuhvata interval vremena. Ako se početni trenutak posmatra kao sadašnjost, onda se optimalno upravljanje zasniva na proceni budućeg ponašanja sistema pri dejstvu određenih ulaznih signala. Ova procena zavisi svakako od valjanosti modela, ali i od poremećaja koji će u realnosti delovati na sistem.

U zavisnosti od funkcije kriterijuma rešavanje problema optimalnog upravljanja može da dovede do kontrolera koji radi u otvorenoj ili u zatvorenoj sprezi. Nesumnjivo je da kontroler u zatvorenoj sprezi ima sve prednosti koje pri upravljanju procesima donosi zatvaranje povratne sprege.

## 4.2 Kriterijum performanse sistema

*Formulisati šta se želi je često teže od pronalaženja načina da se to i ostvari*

### 4.2.1 OSOBINE FUNKCIJE KRITERIJUMA

Kao što je već istaknuto, kriterijum performanse predstavlja meru (ocenu) kvaliteta ponašanja sistema. Samo se po sebi razume, da je izbor kriterijuma izuzetno značajan, jer on u najvećoj meri određuje prirodu optimalnog rešenja.

Već je rečeno da kriterijum performanse mora da obuhvati jedan interval vremena, odnosno da bude oblika (4.6) odnosno (4.7). Izbor funkcija  $g$  i  $h$  ostavlja međutim neobično mnogo slobode. Ipak, nezavisno od konkretnog izbora ovih funkcija, izvesno je da kriterijum performanse, da bi mogao da se koristi kao mera kvaliteta, mora da zadovolji i neke opšte uslove.

#### ▪ SELEKTIVNOST

Kriterijum mora biti tako definisan da se optimalno rešenje jasno razlikuje od neoptimalnog. To znači da funkcije  $g$  i  $h$  moraju biti odabrane tako da reflektuju one fizičke veličine koje se žele optimizirati i da se značajno menjanju sa promenom ovih veličina.

#### ▪ EGZISTENCIJA MINIMUMA (MAKSIMUMA)

Budući da se rešavanje problema optimalnog upravljanja svodi na traženje globalnog ekstremuma, jasno je da kriterijum treba da bude formulisan tako da ovaj ekstremum postoji.

#### ▪ POZITIVNOST

Intuitivno je jasno da kriterijum performanse mora u svakom pojedinačnom slučaju da daje jednu pozitivnu brojnu vrednost. Izuzetno, ukoliko ne postoji nikakvo odstupanje performanse sistema od željenog ponašanja ova vrednost treba da bude jednaka nuli. To zapravo znači da

funkcije  $g$  i  $h$  treba da budu nenegativne funkcije.

▪ IZRAČUNLJIVOST

Sa praktične tačke gledišta izvesno je da kriterijum performanse mora biti jednostavan za izračunavanje i to bilo analitički bilo eksperimentalno.

Koliko god postavljeni uslovi delovali logično potrebno je da se istakne da u praktičnom izboru kriterijuma često dolazi do konflikta između fizičkog značenja samog kriterijuma i analitičkih mogućnosti za njegovo rešavanje. Naime, priroda samog problema zahtevala bi da se kriterijum specifikira sa tačke gledišta efekta koji se u sistemu želi ostvariti. Međutim, mogućnost rešavanja problema u skladu sa definisanim kriterijumom često zahteva da se napravi kompromis između željene fitičke mere performanse i raspoloživog analitičkog aparata.

U cilju ilustracije problema do kojih može da dođe pri izboru kriterijuma performanse posmatračemo ocenu ponašanja sistema izraženu preko signala greške  $e_t$  koji predstavlja meru odstupanja izlaza sistema od zadanog referentnog signala. Po logici stvari, budući da su pozitivna i negativna odstupanja podjednako nepoželjna, kriterijum performanse bi trebalo da koristi apsolutnu vrednost greške odnosno da bude oblika<sup>1</sup>

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |e(t)| dt \quad (4.8)$$

Iako je ovaj kriterijum prilično logičan sa gledišta mere koja se želi uspostaviti, pokazuje se da se njegovom primenom rešenje, najčešće ne može dobiti. U cilju prevazilaženja analitičkih problema koje postavlja funkcija modula, prirodno se nameće korišćenje kvadrata greške, kod koga se pozitivne i negativne greške i dalje tretiraju na isti način. Otuda se definiše kriterijum<sup>2</sup>

$$J = \int_{t_0}^{t_f} e^2(t) dt \quad (4.9)$$

koji zaista omogućava da se veoma jednostavno dođe do rešenja. Problem međutim nastaje u nelinearnosti kvadratne funkcije. Naime, ovako formulisan kriterijum biće izuzetno "blag" prema malim greškama (manjim od 1), a izuzetno "strog" prema većim greškama iako se za to ne vidi nikakav fizički razlog.

Poseban problem kod oba kriterijuma predstavlja i činjenica da su oni slabo selektivni i da je na početku rada sistema greška po pravilu velika, tako da optimalni kontroler u nastojanju da smanji ovako veliku grešku često dovodi do odziva koji je oscilatoran i ima malu relativnu stabilnost.

Imajući u vidu da je velika početna greška prirodna posledica činjenice da sistem miruje u okolini usvojene radne tačke i da mu se u jednom trenutku ispostavlja neki zahtev, ne vidi se razlog zašto bi ključni napor kontrolera trebalo da bude usmeren ka naglom smanjivanju te početne greške. Zapravo, za performansu sistema je mnogo značajnije da se spreči pojavljivanje većih grešaka kasnije u toku rada sistema. Sledeći ovu logiku, čini se da bi u kriterijum trebalo da se uključi i vreme i to tako da se greškama na početku rada sistema daje manja težina, dok se kasnije nastalim greškama daje veća težina. Ovo se može postići množenjem greške sa vremenom, tako da bi kriterijum koji izražava ovako postavljeni zahtev trebalo da bude oblika<sup>3</sup>

$$J = \int_{t_0}^{t_f} t |e(t)| dt \quad (4.10)$$

Prirodno je da će se optimalno upravljanje za ovako postavljeni kriterijum biti još teže

<sup>1</sup> budući da za razumevanje problema nema nikakve razlike između kontinualnih i diskretnih sistema, posmatraće se samo kriterijum za kontinualne sisteme

Ovako formulisan kriterijum se često označava skraćenicom IAE (integral absolute error)

<sup>2</sup> ISE (integral squared-error)

<sup>3</sup> ITAE (integral time multiplied absolute error)

odrediti, pa se opet, zbog mogućnosti analitičkog određivanja rešenja koristi kvadratni kriterijum<sup>1</sup>

$$J = \int_{t_0}^{t_f} te^2(t)dt \quad (4.11)$$

Iako ovako formulisani kriterijumi imaju bolju selektivnost, a i više odslikavaju fizičku suštinu problema, oni su i dalje veoma limitirani u pogledu stvarne mere kvaliteta odziva. Tako se na primer ni na koji način ne ograničava mogući preskok ili vreme smirenja ili čitav niz drugih karakteristika vremenskog odziva. To je naravno cena koja se plaća za jednostavnost analitičkog rešenja.

Naglasimo, na kraju, da je pokazano da korišćenje kvadratnog kriterijuma kod linearnih stacionarnih sistema dovodi do linearnog optimalnog kontrolera. Jednostavnost kontrolera nametnula je ovaj pristup u rešavanju optimalnog problema uprkos očiglednoj manjkavosti koju ima kvadratna funkcija.

#### 4.2.2 KONTROLABILNOST SISTEMA

U najvećem broju slučajeva funkcija kriterijuma uključuje i meru odstupanja stanja sistema od nekih zadanih referentnih vrednosti. Budući da osobina kontrolabilnosti sistema zapravo izražava mogućnost prevođenja sistema iz nekog proizvoljnog stanja u neko zadano stanje, čini se da bi kontrolabilnost trebalo da bude potreban uslov za egzistenciju rešenja.

Pokazuje se, međutim da, sve dotle dok je interval vremena na kome se vrši optimizacija konačan, kontrolabilnost sistema nije potreban uslov za egzistenciju rešenja. Naime, činjenica je da se kod nekontrolabilnih sistema, kakvo god bilo upravljanje, na deo funkcije kriterijuma koji zavisi od nekontrolabilnih stanja neće moći uticati, ali će doprinos odstupanja nekontrolabilnih stanja uvek biti konačan. To zapravo znači da se on može uzeti u obzir pri određivanju optimalnog rešenja. Tek ukoliko krajnje vreme teži beskonačnosti, odstupanje nekontrolabilnih stanja dovešće i do beskonačne vrednosti kriterijuma, tako da nikakvo poređenje više neće biti moguće.

#### 4.2.3 SPECIFIKACIJA PROBLEMA I ODGOVARAJUĆIH KRITERIJUMA PERFORMANSE

##### MINIMIZACIJA UTROŠENOG VREMENA

ZADATAK: prevesti sistem iz proizvoljnog početnog stanja  $x_0$  u specificirani skup cilja  $S$  za najkraće moguće vreme  $t_f$ .

KRITERIJUM PERFORMANSE:

$$J = t_f - t_0 \quad (4.12)$$

gde je  $t_f$  prvi trenutak vremena u kome trajektorija stanja uđe u oblast cilja.

##### *Praktični aspekti*

Sam problem ima fizičkog smisla samo ako je sistem kontrolabilan. U protivnom stanje sistema neće nikada ući u oblast cilja, što znači da ne postoji traženo vreme  $t_f$ .

Sa tačke gledišta implementacije postavljeni problem nema nikakvog smisla ukoliko se ne postave ograničenja u pogledu upravljačkih promenljivih  $|u(t)| \leq M$ . Naime, izvesno je da će svaki sistem, bar teorijski, doći u željeno stanje u beskonačno kratkom intervalu vremena, ako se na njegov ulaz dovede beskonačno veliko upravljanje. Međutim, isto je tako izvesno da to neće biti fizički ostvarljivo. Potrebno je, takođe, zapaziti da postavljanje ograničenja na upravljanje dovodi u pitanje i egzistenciju rešenja, jer se kontrolabilnost, kao osobina sistema, definiše samo uz pretpostavku odsustva ograničenja na upravljačkim signalima. To nadalje znači, da se postavljanjem ograničenja može narušiti osobina kontrolabilnosti.

U najvećem broju slučajeva rešenje ovog problema svodi se na takozvano "bang-bang" uoravljanje, kod koga upravljački signali na celom intervalu upravljanja uzimaju ili najmanju ili najveću dozvoljenu vrednost. Ovo je prirodna posledica činjenice da se minimum utrošenog vremena ostvaruje uz najveću moguću uloženu energiju.

<sup>1</sup> ITSE (integral time multiplied squared error)

## TERMINALNI PROBLEM

ZADATAK: minimizirati odstupanje krajnjeg stanja  $x_{t_f}=x_f$  od željene vrednosti  $r_{t_f}=r_f$

UOBIČAJENI OBLIK KRITERIJUMA:

$$J = h(x_f, t_f) = [x_f - r_f]^T H [x_f - r_f] = \|x_f - r_f\|_H^2 \quad (4.13)$$

gde je  $H$  je realna, simetrična pozitivno semidefinitna matrica.

Potrebno je uočiti razliku između ovako definisanog kriterijuma kojim se izražava želja da se minimizira odstupanje krajnjeg stanja od zadanog i uslova da krajnje stanje ima neku unapred zadanu vrednost

$$x_f = r_f \quad (4.14)$$

Ovako postavljen zahtev predstavlja, zapravo, granične uslove pri rešavanju problema i nije deo funkcije kriterijuma.

*Praktični aspekti*

Postavlja se pitanje koje je fizičko značenje matrice  $H$ . Naime, izvesno je da se njenim uvođenjem poopštava postavljeni problem, odnosno da se on može rešiti sve dok ova matrica ispunjava naveden uslove. Drugim rečima, ako se ceo problem posmatra čisto analitički, onda je prirodno da se on formuliše na najopštiji mogući način. To je svakako, logički matematički pristup postavljenom problemu.

Pitanje je, međutim kako se (i da li se) postavljeni kriterijum može interpretirati sa praktične, inženjerske tačke gledišta. U načelu moglo bi se reći da izbor elemenata matrice  $H$  omogućava specifikaciju težine (značaja) koji ima odstupanje pojedinih stanja. Ovo je posebno značajno ako stanja predstavljaju fizičke veličine čije se vrednosti po svojoj prirodi značajno razlikuju. Takav je, na primer, slučaj kod navođenja objekata kod kojih se kao stanja javljaju rastojanje, koje se meri i izražava u stotinama ili hiljadama kilometara i uglovi elevacije i azimuta koji se mere delovima radijana. Evidentno je da se za tako definisan stanja ne može posmatrati samo odstupanje, već je neophodno da se izvrši odgovarajuće skaliranje (normiranje) kojim će se sva odstupanja dovesti do istog reda veličina.

Potrebno je zapaziti da se izložena interpretacija matrice  $H$  odnosi na dijagonalne elemente. Teorijski, međutim, ova matrica ne mora biti dijagonalna. Ostaje pri tome nejasno kakvo bi fizičko značenje mogli da imaju nedijagonalni elementi. Ovo je još jedan primer neusaglašenosti matematičkih mogućnosti rešavanja problema i fizičkog smisla tog istog problema.

## MINIMIZACIJA POTROŠNJE

*Zadatak:* prevesti sistem iz proizvoljnog početnog stanja  $x_{t_0}=x_0$  u specificirani skup cilja  $S$  uz najmanji utrošak upravljanja.

*Uobičajeni oblik kriterijuma:*

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u_t^T R_t u_t dt = \int_{t_0}^{t_f} \|u_t\|_{R_t}^2 dt \quad (4.15)$$

$$J = \sum_{t=t_0}^{t_f} u_t^T R_t u_t = \sum_{t=t_0}^{t_f} \|u_t\|_{R_t}^2 \quad (4.16)$$

gde je  $R_t$  realna, simetrična, vremenski promenljiva pozitivno definitna matrica.

Kao i kod terminalnog problema i ovde je potrebno da se zapazi da se kriterijumom ne postavljaju eksplicitna ograničenja na upravljanje, već se samo zahteva da potrošnja bude što je moguće manja.

Ukoliko je neophodno da se, zbog prirode aktuatora, ograniči maksimalna vrednost upravljačkog signala ili da se, zbog konačnosti dostupnog izvora energije, ograniči ukupna potrošnja onda se to mora posebno specificirati definisanjem odgovarajućih graničnih uslova, kao što su na primer

$$|u_t| \leq M; \quad \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \leq M; \quad \sum_{t=t_0}^{t_f} |u_t| \leq M$$

### Praktični aspekti

Iz teorije signala je poznato da norma  $\|u_t\|_{Rt}^2$  predstavlja snagu signala upravljanja, dok integral, odnosno suma, predstavljaju energiju signala upravljanja. Kod nekih pobudnih signala, međutim, utrošena energija bi bila adekvatnije izražena apsolutnom vrednošću. Kao što je već rečeno, usvajanje kvadratnog kriterijuma je zapravo cena koja se plaća na račun analitičke jednostavnosti.

U pogledu izbora matrice  $R_t$  situacija je slična kao i kod matrice  $H$ . Dijagonalni elementi imaju jasno značenje u smislu težine koja se želi dati utrošku pojedinog ulaznog signala. Za preostale elemente se ne vidi baš direktno značenje. Takođe je teško zamisliti primer u kome bi imalo potrebe da se elementi matrice  $R$  menjaju sa vremenom. Pored toga, ne vidi se nijedan fizički razlog koji bi sprečavao da matrica  $R$  bude pozitivno semidefinitna. Kao i ranije, opšti oblik vremenski promenljive matrice  $R$  je ponovo rezultat najopštijeg rešenja koje se može dobiti. Uslov njene pozitivne definitnosti sledi iz uslova egzistencije rešenja.

Potrebno je zapaziti da kada interval vremena teži beskonačnosti, postavljeni kriterijum ima smisla samo ako upravljački signali teže ka nuli. U protivnom bi za sve vrste upravljačkih signala kriterijum bio beskonačan, pa bi poređenje bilo onemogućeno. Zahtev da vreme bude konačno svakako ima smisla kada se radi o sistemima sa ograničenom količinom energije kao što su, naprimer letilice. Za neke druge sisteme ovaj zahtev, međutim, nema nikakvo fizičko opravdanje.

### PROBLEM PRAĆENJA

*Zadatak:* održati stanja i izlaze sistema što je bliže moguće zadanim trajektorijama stanja  $r_{xt}$  i izlaza  $r_{yt}$ .

#### Uobičajeni oblici kriterijuma

Praćenje stanja

$$e_t = x_t - r_{x_t}, \quad J = \int_{t_0}^{t_f} e_t^T Q_t e_t dt = \int_{t_0}^{t_f} \|x_t - r_{x_t}\|_{Q_t}^2 dt \quad (4.17)$$

$$e_t = x_t - r_{x_t}, \quad J = \sum_{t=t_0}^{t_f} e_t^T Q_t e_t = \sum_{t=t_0}^{t_f} \|x_t - r_{x_t}\|_{Q_t}^2 \quad (4.18)$$

gde je  $Q_t$  realna, simetrična, vremenski promenljiva pozitivno semidefinitna matrica

Praćenje izlaza

$$\varepsilon_t = x_t - r_{y_t}, \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_t^T Q_{y_t} \varepsilon_t dt = \int_{t_0}^{t_f} \|y_t - r_{y_t}\|_{Q_{y_t}}^2 dt \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_t = x_t - r_{y_t}, \quad J = \sum_{t=t_0}^{t_f} \varepsilon_t^T Q_{y_t} \varepsilon_t = \sum_{t=t_0}^{t_f} \|y_t - r_{y_t}\|_{Q_{y_t}}^2 \quad (4.20)$$

gde je  $Q_{y_t}$  realna, simetrična, vremenski promenljiva pozitivno semidefinitna matrica.

### Praktični aspekti

U principu praćenje izlaza je opštije formulisan problem, jer se model sistema uvek može formirati tako da je izlaz identički jednak stanju.

Uvođenje vremenski promenljivih težinskih matrica treba da omogući da se problem u izvesnoj meri postavi što realističnije. Tako se, na primer, već pominjani problem velikog početnog odstupanja može prevazići malim početnim vrednostima težinske matrice. Inače, u pogledu osobina težinske matrice i izbora elemenata važe sve ranije načelne primedbe.

Iako ovako formulisan kriterijum u potpunosti odgovara postavljenom zadatku, on ipak ne dovodi do zadovoljavajućih rešenja. Naime, kriterijum ne uključuje nikakve uslove u pogledu

upravljačkih signala, pa ne bi trebalo ni da bude čudno što dobijena rešenja često izlaze izvan opsega fizičke ostvarljivosti ili realnih očekivanja. Sa jedne strane rezultujući upravljački signali su često izuzetno veliki, oblika impulsa, ili njihovih izvoda. Ovo je prirodni rezultat težnje da se, u odsustvu drugih ograničenja, postojeće odstupanje minimizira na najefikasniji način. Ovaj problem bi se mogao prevazići postavljanjem ograničenja na upravljačke signale ( $|u(t)| \leq M$ ).

Moguća je, međutim i drugačija situacija. Pretpostavimo da kontroler ima zadatak da održava sistem u radnoj tački, što znači da su referentne trajektorije nula. U tom slučaju i rezultujući upravljački signali će biti jednaki nuli i sistem neće biti u stanju da reaguje na poremećaje koji deluju na proces. U ovom slučaju optimalno rešenje se zapravo dobija kao odgovor na postavljeni zadatak, ali je problem u tome što je zadatak pogrešno ili nepotpuno formulisan. Tako se, na primer, na pitanje koji je najbolji i najsigurniji način da brod ne potone, kao odgovor nameće konstatacija da on ne bi trebalo nikada ni da isplovi. Jedino je onda nejasno čemu bi služio.

Uzimajući u obzir probleme koji nastaju u pogledu upravljačkih signala došlo se do zaključka da se formulacija zadatka praćenja mora proširiti tako da uključi i optimizaciju potrošnje. Otuda se kriterijum performanse proširuje izrazima (4.15), odnosno (4.16). Dodatna prednost ovako formulisanih kriterijuma sastoji se u tome što oni vode ka linearnom optimalnom kontroleru u slučaju da je model procesa linearan.

Konačno, sa gledišta performanse sistema može biti od posebnog značaja i da se postigne neki željeni krajnji cilj. Ovo se može ostvariti daljim proširivanjem kriterijuma performanse tako da on uključi i relaciju (4.13).

U skladu sa svim aspektima koji mogu biti od interesa pri rešavanju problema praćenja izvesno je da se sam zadatak praćenja mora preformulisati.

#### GENERALISANI PROBLEM PRAĆENJA

ZADATAK: održati stanja i izlaze sistema što je bliže moguće zadanim trajektorijama stanja  $r_{xt}$  i izlaza  $r_{yt}$  vodeći računa o utrošenoj energiji i ostvarivanju krajnjeg cilja

##### UOBIČAJENI OBLICI KRITERIJUMA

Praćenje stanja

$$J = \|x_{t_f} - r_{xt_f}\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \|x_t - r_{xt}\|_{Q_t}^2 + \|u_t\|_{R_t}^2 \right\} dt \quad (4.21)$$

$$J = \|x_{t_f} - r_{xt_f}\|_H^2 + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \left\{ \|x_t - r_{xt}\|_{Q_t}^2 + \|u_t\|_{R_t}^2 \right\} \quad (4.22)$$

gde su

$H$  – konstantna realna simetrična pozitivno semidefinitna matrica

$Q_t$  – vremenski promenljiva, realna simetrična pozitivno semidefinitna matrica

$R_t$  – vremenski promenljiva, realna simetrična pozitivno definitna matrica

Praćenje izlaza

$$J = \|y_{t_f} - r_{yt_f}\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \|y_t - r_{yt}\|_{Q_t}^2 + \|u_t\|_{R_t}^2 \right\} dt \quad (4.23)$$

$$J = \|y_{t_f} - r_{yt_f}\|_H^2 + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \left\{ \|y_t - r_{yt}\|_{Q_t}^2 + \|u_t\|_{R_t}^2 \right\} \quad (4.24)$$

gde su

$H_v$  – konstantna realna simetrična pozitivno semidefinitna matrica

$Q_{yt}$  – vremenski promenljiva, realna simetrična pozitivno semidefinitna matrica

$R_t$  – vremenski promenljiva, realna simetrična pozitivno definitna matrica.

U zavisnosti od načina definisanja referentnih trajektorija razlikuje se nekoliko problema

praćenja.

- Regulacija stanja (izlaza) – referentna trajektorija je identički jednaka nuli

$$r_{x_t} \equiv 0, r_{y_t} \equiv 0$$

- Servo problem - željena trajektorija pripada klasi funkcija koje se generišu sistemom sa nultim ulazom

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= f(r_{x_t}, t) = Fr_{x_t}, & r_{x_{t+1}} &= f(r_{x_t}, t) = Fr_{x_t} \\ \dot{y}_t &= l(r_{y_t}, t) = Lr_{y_t}, & r_{y_{t+1}} &= l(r_{y_t}, t) = Lr_{y_t} \end{aligned} \quad (4.25)$$

- Praćenje modela (model following) – željena trajektorija se generiše kao stanje ili izlaz nekog referentnog modela

$$\begin{aligned} \dot{x}_t(t) &= f(r_{x_t}, v_t, t) = Fr_{x_t} + Nv_t, & r_{x_{t+1}} &= f(r_{x_t}, v_t, t) = Fr_{x_t} + Nv_t \\ \dot{y}_t(t) &= l(r_{y_t}, v_t, t) = Lr_{y_t} + Nv_t, & r_{y_{t+1}} &= l(r_{y_t}, v_t, t) = Lr_{y_t} + Nv_t \end{aligned} \quad (4.26)$$

- Praćenje trajektorije (tracking) – željena trajektorija je definisana unapred na celom intervalu  $[t_0, t_f]$

Zapazimo da se u ovako opšte postavljen problem praćenja može uključiti i problem minimizacije utrošenog vremena. Ovo se postiže jednostavnim proširivanjem vektora stanja

$$\hat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ t \end{bmatrix} \quad \dot{\hat{x}}_t = a(x(t), u(t), t) \quad x_{t+1} = a(x_t, u_t, t) \quad \hat{x}_{n+1} = 1 \quad ; \quad \hat{x}_{n+1, t+1} = t + 1 \quad (4.27)$$

i specificiranjem n+1-ve komponente željene trajektorije kao

$$r_{n+1} = t_f \quad (4.28)$$

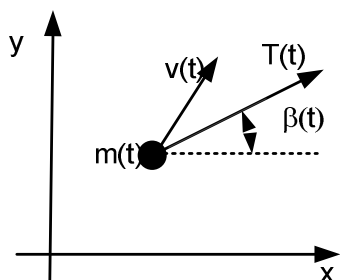
Ukoliko se pri tome usvoji da je

$$H = 0, \quad R_t = 0, \quad \hat{Q}_t = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

dobija se identičan kriterijum kao i kod minimizacije vremena prelaza (4.12).

#### PR. 4-1

Na slici je prikazana raketa aproksimirana materijalnom tačkom mase  $m(t)$ . Trenutna brzina rakete je  $v(t)$ , sila potiska je  $T(t)$ , a ugao pod kojim ona deluje je  $\beta(t)$ . Ako se zanemare gravitaciona i aerodinamička sila, matematički model rakete može se formirati na sledeći način



$$\begin{aligned} x_1 &= x; & \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ x_2 &= \dot{x}; & \dot{x}_2(t) &= \frac{u_1(t) \cos u_2(t)}{x_5(t)}; & u_1 &= T, u_2 = \beta \\ x_3 &= y; & \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ x_4 &= \dot{y}; & \dot{x}_4(t) &= \frac{u_1(t) \sin u_2(t)}{x_5(t)} \\ x_5 &= m; & \dot{x}_5(t) &= -\frac{1}{k} u_1(t) \end{aligned}$$

- Odrediti skup mogućih fizičkih ograničenja promenljivih

$$x_1(t) \geq 0; x_3(t) \geq 0; m_{\min} \leq x_5 \leq m_{\max};$$

$$0 \leq u_1 \leq T_{\max}; -\pi \leq u_2 \leq \pi$$

- Definisati kriterijum performanse i eventualna dodatna ograničenja ukoliko se želi optimalno upravljanje tako da se za konačno vreme  $t_f$  ostvare sledeći ciljevi

- $y(t_f)=3\text{km}$ , minimalni utrošak energije, za dato  $t_f$

- Rešenje: granični uslov  $x_3(t_f) = 3$ , kriterijum  $J = \int_0^{t_f} u_1^2(t) dt$

- $y(t_f)$  što bliže visini od 3km, trajektorija što bliža nagibnom signalu pod uglom od  $45^\circ$ , za dato  $t_f$

- Rešenje  $J = |x_3(t_f) - 3| + \int_0^{t_f} |x_1(t) - x_3(t)| dt$

- $y(t_f)=3\text{km}$ , maksimalno  $x(t_f)$ , za dato  $t_f$

- Rešenje: granični uslov  $x_3(t_f) = 3$ , kriterijum  $J = -x_1(t_f)$

- $y(t_f)=3\text{km}$ ,  $x(t_f)=500\text{km}$ , minimalni utrošak energije, najkraće vreme  $t_f$

- Rešenje: granični uslov  $x_3(t_f) = 3$ ,  $x_1(t_f) = 500$ , kriterijum  $J = t_f + \int_0^{t_f} u_1^2(t) dt$

- $y(t_f)=3\text{km}$ ,  $x(t_f)=500\text{km}$ , za vreme  $t_f=2.5\text{min}$ , najmanja potrošnja mase (goriva)

- Rešenje: granični uslov  $x_3(2.5) = 3$ ,  $x_1(2.5) = 500$ ,

Kriterijum  $J = \int_0^{2.5} u_1(t) dt$  ili  $J = -x_5(2.5)$

#### PR. 4-2

Promena ugla  $\theta(t)$  letilice čiji je pogonski momenat  $m(t)$  može se aproksimirati jednačinom

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = m(t)$$

- Usvajajući da je upravljački signal  $u(t)=m(t)/J$ , i da je prvo stanje sistema jednako uglu ( $x_1(t)=\theta(t)$ ) formirati model letilice u prostoru stanja.
- Pretpostavljajući da je potrebno da se ugao letilice iz nekog proizvoljnog početnog položaja promeni tako da dobije vrednost  $\theta(t)=200$ , sa tačnošću od 1%, i to tako da se taj manevar obavi za vreme  $t_f=25$  sec uz minimum utrošak goriva, odrediti ograničenja stanja i upravljanja, kao i kriterijum performanse.
- Pretpostavljajući da letilica polazi iz položaja u kome je ugao jednak nuli, formirati kriterijum performanse kojim se zahteva da krajnja vrednost ugla bude što je moguće bliža vrednosti od 200, da trajektorija kretanja bude što je moguće više linearna i da se minimizira utrošak goriva. Manevar je potrebno obaviti u što je moguće kraćem vremenu.

Rešenje

- Matematički model u prostoru stanja

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = \theta(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = u(t) \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- Granični uslovi

$$19,8^0 \leq x_1(t_f) \leq 20,2^0; \quad |u(t)| \leq u_{\max}$$

Kriterijum  $J = \int_0^{30} |u(t)| dt$

- Budući da je u modelu ugao  $\theta$  izražen u radianima, zadano krajnje stanje je  $x_1(t_f) = 0.35\text{rad}$ . Linearna trajektorija koja odgovara ovoj krajnjoj tački ima nagib od  $\theta_r = \text{tg}20^0 = 0.364$

Kriterijum  $J = t_f + |x_1(t_f) - 0.35| + \int_0^{t_f} \left[ (x_1(t) - \theta_r)^2 + u(t)^2 \right] dt$ .



### 4.3 Rešavanje problema optimalnog upravljanja

*Dobro postavljen problem je upola rešen problem*

Na osnovu svega što je rečeno o mogućim formulacijama zadataka optimalnog upravljanja i specifikaciji odgovarajućih kriterijuma performanse čini se da je rešavanje problema optimalnog upravljanja zadatak koji se može rešiti jednostavnim određivanjem ekstremuma. Međutim, ako se pažljivo pogleda kriterijum performanse (4.6), odnosno (4.7) vidi se da se njegova minimizacija ne može izvršiti baš tako jednostavno. Naime, ovaj kriterijum zavisi od početnog stanja i vremena, trajektorije stanja, upravljačkih signala na datom intervalu vremena, kao i krajnjeg stanja i vremena. Budući da su početno stanje i vreme dati, i da je trajektorija stanja funkcija upravljanja izvesno je da je kriterijum performanse funkcija od upravljanja koje je, najčešće, samo po sebi funkcija vremena<sup>1</sup>.

$$J = J(u) \quad (4.30)$$

To zapravo znači da se kriterijum performanse može posmatrati kao "funkcija od funkcije", odnosno funkcional. Podsetimo se da se realna funkcija  $f$  definiše kao preslikavanje koje svakom elementu  $t$  u nekom skupu  $\mathfrak{X}$  pridružuje jedinstven element  $f(t)$  skupa realnih brojeva  $\mathfrak{R}$

$$f : t \rightarrow f(t), \quad f = \{(t, f(t)) : t \in \mathfrak{X}, f(t) \in \mathfrak{R}\} \quad (4.31)$$

Za razliku od funkcije, funkcional  $J$  se definiše kao preslikavanje koje svakoj funkciji  $f$  iz neke klase funkcija  $\Omega$  pridružuje jedinstven realni broj

$$J : f \rightarrow J(f), \quad J = \{(f, J(f)) : f \in \Omega, J(f) \in \mathfrak{R}\} \quad (4.32)$$

S obzirom na svojstvo kriterijuma performanse izvesno je da se za njegovu minimizaciju ne mogu koristiti metode matematičke analize. Umesto toga, za analizu funkcionala razvijen je posebni aparat koji se naziva varijacioni račun.

Polazeći od navedenih činjenica vidi se da je pre nego što se pristupi minimizaciji kriterijuma performanse neophodno da se jasno ustanovi priroda samog sistema odnosno da se utvrdi da li je kriterijum funkcija ili funkcional. Ovo razgraničenje dovelo je do dva tipa problema optimalnog upravljanja: statičkog i dinamičkog.

#### 4.3.1 STATIČKO OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Kod određenog broja sistema zahteva se da se oni održavaju u radnoj tački, čime se zapravo njihov model svodi na algebarsku jednačinu.

$$x(t) = x^0 \Rightarrow \dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) = 0 \Rightarrow a(x^0, u^0) = 0 \quad (4.33)$$

$$x_t = x^0 \Rightarrow x_{t+1} = a(x_t, u_t, t) = x^0 \Rightarrow a(x^0, u^0) = x^0$$

Ova jednačina se može rešiti po konstantnom upravljanju  $u^0$  koja će sistem održavati u zahtevanoj radnoj tački.

Budući da su i upravljanje i stanja konstantne veličine i promena kriterijuma performanse mora bit konstantna veličina.

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ h(x^0, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x^0, u^0) dt \right\} = g(x^0, u^0) = \text{const.} \quad (4.34)$$

$$J_{t_f+1} - J_{t_f} = \left\{ h(x^0, t_f) + \sum_{t=t_0}^{t_f+1} g(x^0, u^0) \right\} - \left\{ h(x^0, t_f) + \sum_{t=t_0}^{t_f} g(x^0, u^0) \right\} = \\ = g(x^0, u^0) = \text{const.} \quad (4.35)$$

S obzirom da kriterijum performanse raste sa konstantnim koeficijentom, optimalno rešenje će biti ono za koje je koeficijent rasta najmanji, jer to znači da će ukupna vrednost

<sup>1</sup> Ovde je implicitno predpostavljeno da je krajnje vreme takođe dato, jer ono ne utiče na ključnu osobinu kriterijuma

kriterijuma na datom intervalu biti najmanja.

U skladu sa izloženim problem optimalnog upravljanja se svodi na određivanje konstantne vrednosti upravljačkog signala  $u^0$  (a ne funkcije upravljanja) koji minimizira funkciju  $g(x^0, u^0)$  uz ograničenje (4.33). Iako je problem statičkog optimalnog upravljanja znatno jednostavniji od dinamičkog, već samom činjenicom što se traži minimizacija funkcije, a ne funkcionala, on je ipak daleko od toga da se može smatrati trivijalnim.

Naglasimo na kraju da striktno gledano nijedan problem nije u potpunosti statičan. U praksi se, međutim, pokazuje da se svi slučajevi u kojima se radna tačka veoma sporo menja i u kojima je potrebno da se sistem održava u radnoj tački mogu posmatrati kao problem statičke optimizacije. Tipičan primer je recimo problem optimizacije proizvodnje električne energije gde je osnovni cilj da se proizvodnja izjednači sa zahtevima potrošača i gde se može smatrati da se zahtevi potrošača veoma sporo menjaju, odnosno da su konstantni na jednom dužem vremenskom intervalu.

#### 4.3.2 DINAMIČKO OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Kao što je već rečeno problem dinamičkog optimalnog upravljanja obuhvata one slučajeve u kojima je kriterijum performanse funkcional upravljanja. u izvesnom smislu, statička optimizacija se može interpretirati kao zahtev da se stoji mirno na vrhu jednog brda, dok je u istoj analogiji, dinamička optimizacija jednaka zahtevu da se hoda po najvećim vrhovima planinskog grebena.

U osnovi su razvijene tri metode za rešavanje problema dinamičke optimizacije.

- PONTIJAGINOV PRINCIP MINIMUMA – zasniva se na primeni rezultata varijacionog računa. Osnovna ideja je da se problem optimalnog upravljanja interpretira na način koji omogućava konzistentnu primenu matematičkog aparata razvijenog u varijacionom računu. Otuda, ovaj pristup najčešće dovodi i do potrebnih uslova za egzistenciju rešenja
- METOD DINAMIČKOG PROGRAMIRANJA – zasniva se na Belmanovom principu optimalnosti. U osnovi ovo je intuiivni pristup koji počiva na ideji dobijanja upravljanja u povratnoj sprezi.
- MATEMATIČKO PROGRAMIRANJE – koristi iterativne tehnike numeričke analize za rešavanje jednačina koje proističu iz primene varijacionog računa i često ne garantuje egzistenciju rešenja.

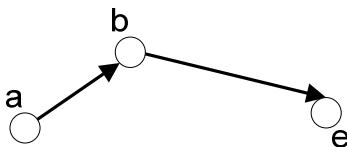
Sa gledišta uočavanja osnovnih aspekata optimalnog upravljanja nebitno je koja je metodologija korišćena za dobijanje rešenja. U tom smislu čini se da je najefikasnije posmatrati metodu dinamičkog programiranja koja ne zahteva uvođenje novog matematičkog aparata i omogućava rešavanje problema na jednoj široj klasi sistema.

### 4.4 Dinamičko programiranje

*Za prosutim mlekom ne vredi plakati*

#### 4.4.1 BELMANOV PRINCIP OPTIMALNOSTI

Belmanov princip optimalnosti zasniva se na ideji da se svaka upravljačka strategija može u svakom trenutku popraviti. Belman je ovu činjenicu formulisao kao princip "optimalna strategija ima osobinu da bez obzira na to kakvo je bilo početno stanje i kakve su bile početne odluke, preostale odluke moraju da predstavljaju optimalnu strategiju u odnosu na stanje koje je nastalo kao rezultat početne odluke".

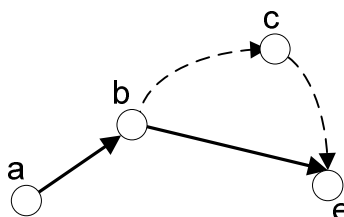


SL. 4-1 OPTIMALNA PUTANJA  
VIŠEKORAČNOG PROCESA

Da bi formalizovali Belmanov princip pretpostavimo da je optimalna putanja u nekom višekoračnom procesu odlučivanja  $a-b-e$  (Sl. 4-1), i da je optimalna mera performanse  $J_{ae}^*$ . Pretpostavimo nadalje da je prva odluka (učinjena u  $a$ ) rezultovala u segmentu  $a-b$  (sa merom  $J_{ab}$ ) dok sledeće odluke daju segment  $b-e$  (sa merom  $J_{be}$ ). To znači da je optimalna mera performanse

$$J_{ae}^* = J_{ab} + J_{be} \tag{4.36}$$

Na osnovu Belmanovog principa optimalnosti sledi da ako je  $a-b-e$  optimalna putanja od  $a$  do  $e$  onda ona mora imati osobinu da je i deo  $b-e$  koji predstavlja "preostale odluke u odnosu na stanje koje je proisteklo iz početnih odluka" optimalna putanja od  $b$  do  $e$ , što znači da je  $J_{be}$  minimilana mera performanse od  $b$  do  $e$ .



Dokaz prethodne tvrdnje se jednostavno izvodi kontradikcijom. Pretpostavimo da je  $b-c-e$  optimalna putanja od  $b$  do  $e$  (Sl. 4-2). U tom slučaju bi moralo da važi

$$J_{bce} < J_{be} \Rightarrow J_{ab} + J_{bce} < J_{ab} + J_{be} = J_{ae}^* \tag{4.37}$$

SL. 4-2 MOGUĆE ALTERNATIVNE PUTANJE

što je u suprotnosti sa tvrdnjom da je  $a-b-e$  optimalna putanja od  $a$  do  $e$ .

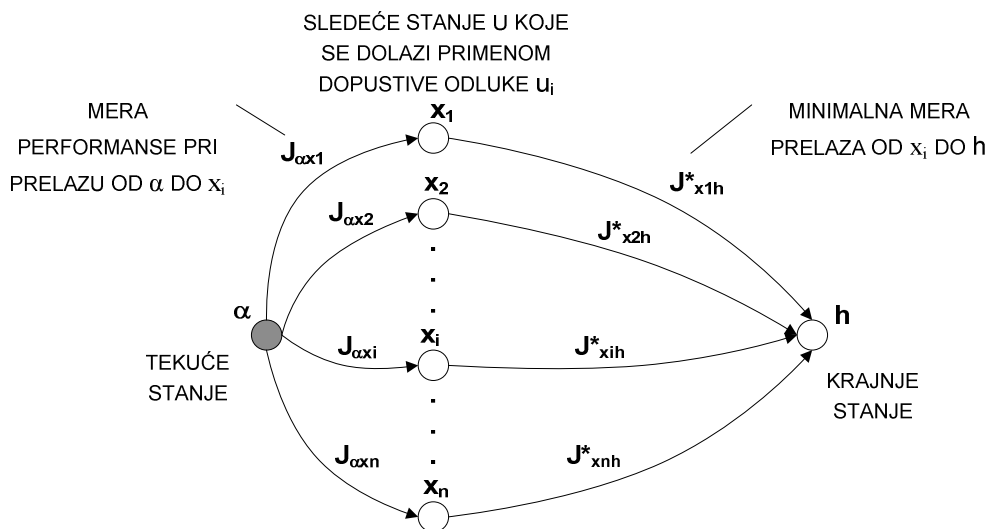
Da bi se jasnije razumela osnovna ideja rešavanja optimalnog problema koja sledi iz Belmanovog principa zamislimo nekog studenta koji je iz nekog razloga propustio prva dva meseca predavanja i obreo se, najednom, u sred meseca decembra shvativši da nešto mora da promeni ako misli da završi tu godinu studija. Postavlja se naravno pitanje šta bi on sad trebalo da uradi pa da datu godinu, pod datim uslovima, završi sa najboljim mogućim uspehom. Odgovor je sam po sebi jasan mora da počne da uči odmah i to najviše što može. Drugim rečima, ono što je propušteno se ne može promeniti i ima neku svoju cenu koja se mora platiti, ali će ukupna cena izvesno biti najmanja ako se u budućnosti ponašamo optimalno.

Koliko god ovaj princip bio intuitivno jasan i predstavljao sastavni deo čitavog niza svakodnevnih odluka svakog čoveka, činjenica je da ga je tek Belmanova formulacija učinila kamenom temeljcom teorije dinamičkog programiranja kao metode za određivanje optimalne strategije. Dinamičko programiranje je zapravo računaska tehnika koja primenjuje ovaj princip da bi se odredio niz koraka koji definišu optimalnu strategiju.

Osnovna ideja koja se koristi u traženju optimalne strategije je da se rešavanje problema počne od njegovog kraja. Tako se kao prvo utvrdi koji je poslednji korak pred samim ciljom, koji čini sastavni deo optimalne strategije. U izvesnom smislu ovde je na delu stara poslovice koja kaže "da posle bitke svako može da bude general".

#### 4.4.2 DINAMIČKO PROGRAMIRANJE

Kao što je već rečeno dimaničko programiranje je zapravo jedan algoritam koji omogućava da se definiše optimalna strategija za rešavanje nekog problema.



SL. 4-3 ILUSTRACIJA ALGORITMA DINAMIČKOG PROGRAMIRANJA

Pretpostavimo da je u nekom stanju  $\alpha$  moguće doneti  $n$  različitih odluka  $u_i$  (Sl. 4-3). Svaka od ovih odluka dovešće sistem u naredno stanje  $x_i$ . Pretpostavimo, nadalje, da nam je poznata optimalna putanja od svakog od tih stanja do krajnjeg stanja  $h$ .

Ako je putanja  $x_i - h$  optimalna putanja od  $x_i$  do  $h$ , onda je, na osnovu principa optimalnosti, minimalna mera performanse na putu od  $\alpha$  do  $h$  preko  $x_i$  jednaka

$$C_{\alpha x_i h}^* = J_{\alpha x_i} + J_{x_i h}^* \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4.38)$$

U skladu sa time optimalna odluka u stanju  $\alpha$ ,  $u^*(\alpha)$  je ona koja daje minimalnu meru od svih mera definisanih relacijom (4.38).

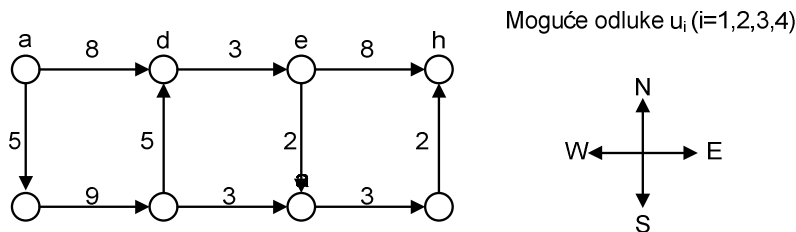
$$J_{\alpha h}^* = \min \{ C_{\alpha x_1 h}^*, C_{\alpha x_2 h}^*, \dots, C_{\alpha x_n h}^* \} \quad (4.39)$$

Poslednje dve relacije definišu algoritam dinamičkog programiranja koji se može formulisati na sledeći način.

- o Poći od stanja koja su najbliža krajnjem stanju ( $\alpha=x_i, i=1,2,\dots,n$ ) (samo jedan korak do  $h$ )
- o Izračunati sve mere performanse  $J_{x_i h}^*$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). (Budući da od svakog stanja  $x_i$  do krajnjeg stanja vodi samo jedna putanja, ona je samim tim optimalna, istovremeno važi i  $C_{x_i h}^* = J_{x_i h}^*$ )
- o Pomeriti se jedan korak u nazad, postaviti  $\alpha=y_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ), gde je  $y_i$  prethodno stanje (samo jedan korak do bilo kog stanja  $x_j$ ).
- o Za svako  $j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) izračunati  $J_{y_j x_i}$ , meru prelaza od  $y_j$  do  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), i minimalnu meru prelaza od  $y_j$  do  $h$  preko  $x_i$  -  $C_{y_j x_i h}^* = J_{y_j x_i} + J_{x_i h}^*$
- o Za svako  $j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) odrediti minimalnu meru prelaza od  $y_j$  do  $h$  preko bilo kog dopustivog stanja  $x_i$   $J_{y_j h}^* = \min \{ C_{y_j x_1 h}^*, C_{y_j x_2 h}^*, \dots, C_{y_j x_n h}^* \}$ . (Ako je to npr.  $C_{y_j x_k h}^*$  onda je optimalna putanja od  $y_j$  do  $h$   $y_j-x_k-h$ )
- o Pomeriti se jedan korak unazad i nastavi isti postupak dok se ne dostigne početno stanje

**PR. 4-3**

Pretpostavimo da neki vozač ima izbor mogućih putanja kao što je to prikazano na Sl. 4-4, pri čemu je uz svaku deonicu puta označen dozvoljen smer kretanja kao i troškovi njenog prelazanja. Mogući pravci kretanja ( $u_i$ ) su istok, zapad, sever, jug. Vozač želi da ustanovi koji su minimalni troškovi kretanja od bilo koje od raskrsnica do krajnjeg cilja ( $h$ ).



**SL. 4-4 MAPA PUTA KOJOM SE VOZAČ MOŽE KRETATI DO KRAJNJE TAČKE H**

Postavljeni zadatak se može rešiti primenom dinamičkog programiranja na sledeći način.

NAJBЛИŽE STANJE STANJU H JE G (SAMO JEDAN KORAK DO H)

$$J_{gh} = J_{gh}^* = 2 \text{ (samo jedan put do h; } u=N) \Rightarrow \text{ ako je } \alpha=g, u^*(h)=N$$

KORAK UNAZAD OD G KA F (SAMO JEDNA PUTANJA OD F DO G)

$$J_{fg} = 3 \text{ (} u=E) \Rightarrow C_{fgh}^* = J_{fg} + J_{gh}^* = 5 \Rightarrow J_{fh}^* = 5 \text{ ako je } \alpha=f, u^*(f) = E$$

KORAK UNAZAD OD F KA E (DVE MOGUĆE PUTANJE OD E)

$$J_{eh} = 8 \text{ (} u=E) \Rightarrow C_{eh}^* = 8$$

$$J_{ef} = 2 \quad (u=S) \Rightarrow C^*_{efh} = J_{ef} + J^*_{fh} = 2+5=7$$

$$J^*_{eh} = \min\{C^*_{eh}, C^*_{efh}\} = \min\{8,7\}=7 \Rightarrow u^*(e)=S$$

KORAK UNAZAD OD E KA D (SAMO JEDNA PUTANJA OD D DO E)

$$J_{de} = 3 \quad (u=E) \Rightarrow J^*_{dh} = C^*_{deh} = J_{de} + J^*_{eh} = 3+7=10 \Rightarrow u^*(d)=E$$

KORAK UNAZAD OD F KA C (DVE PUTANJE OD C)

$$J_{cf} = 3 \quad (u=E) \Rightarrow C^*_{cfh} = J_{cf} + J^*_{fh} = 3+5=8$$

$$J_{cd} = 5 \quad (u=N) \Rightarrow C^*_{cdh} = J_{cd} + J^*_{dh} = 5+10=15$$

$$J^*_{ch} = \min\{C^*_{cfh}, C^*_{cdh}\} = \min\{8,15\}=8 \Rightarrow u^*(c)=E$$

KORAK UNAZAD OD C KA B (SAMO JEDNA PUTANJA OD B)

$$J_{bc} = 9 \quad (u=E) \Rightarrow J^*_{bh} = C^*_{bch} = J_{bc} + J^*_{ch} = 9+8=17, \Rightarrow u^*(b)=E$$

KORAK UNAZAD OD B KA A (DVE PUTANJE OD A)

$$J_{ab} = 5 \quad (u=S) \Rightarrow C^*_{abh} = J_{ab} + J^*_{bh} = 5+17=22$$

$$J_{ad} = 8 \quad (u=E) \Rightarrow C^*_{adh} = J_{ad} + J^*_{dh} = 8+10=18$$

$$J^*_{ah} = \min\{C^*_{abh}, C^*_{adh}\} = \min\{22,18\} = 18 ; u^*(a)=E$$

Rešenje se, po pravilu, prikazuje u tabelarnoj formi. Samo se po sebi razume da se ono i traži popunjavanjem odgovarajuće tabele (T. 4-1).

Primitimo da ovako formirana tabela omogućava da se u svakoj tački, čak i ako se u nju stiglo van optimalne putanje, odredi optimalna putanja koja od te tačke vodi do cilja.

tekuće stanje $\alpha$	odluka u	buduće stanje $x_i$	$\alpha$ do h preko $x_i$ $C^*_{\alpha x_i h} = J_{\alpha h} + J^*_{x_i h}$	$\alpha$ do h $J^*_{\alpha h}$	optimalno upravljanje $u^*(\alpha)$
g	N	h	2+0=2	2	N
f	E	g	3+2=5	5	E
e	E	h	8+0=8		
	S	f	2+5=7	7	S
d	E	e	3+7=10	10	E
c	N	d	5+10=15		
	E	f	3+5=8	8	E
b	E	c	9+8=17	17	E
a	E	d	8+10	18	E
	S	b	5+17	22	

**T. 4-1 TABELARNO REŠAVANJE OPTIMALNOG KRETANJA PRIMENOM METODE DINAMIČKOG PROGRAMIRANJA**

Iz dobijenog rešenja se takođe vidi da se kratkoročni dobiti često ne isplate. Tako se, na primer, može učiniti da je iz tačke a isplativije ići prema tački b (troškovi su 5), umesto prema tački d za koju su troškovi 8. Međutim, ukupni troškovi do krajnjeg cilja su ipak manji ako se kreće preko d.

Konačno, potrebno je da se istakne da se posmatrani problem mogao rešiti i kompletnim pretraživanjem svih mogućih putanja. U tom slučaju bi, međutim, umesto posmatranih 7 kombinacija bilo neophodno da se ispita ukupno sledećih 17 putanja.

a-h	b-h	c-h	d-h	e-h	f-h	g-h
a-b-c-d-f-g-h	b-c-f-g-h	c-d-e-h	d-e-h	e-h	f-g-h	g-h
a-b-c-d-e-h	b-c-d-e-h	c-d-e-f-g-h	d-e-f-g-h	e-f-g-h		
a-b-c-d-f-g-h	b-c-d-f-g-h	c-f-g-h				
a-d-e-h						
a-d-e-f-g-h						

#### 4.4.3 OPTIMALNO UPRAVLJANJE DINAMIČKIM SISTEMOM

Posmatra se stacionaran dinamički sistem opisan diskretnim modelom

$$x_{t+1} = a(x_t, u_t) \quad (4.40)$$

Potrebno je odrediti optimalno upravljanje koje minimizira meru performanse

$$J_{0,N} = h(x_N) + \sum_{t=0}^{N-1} g(x_t, u_t) \quad (4.41)$$

Budući da se kretanje diskretnog sistema može posmatrati kao više koraci problem, pri čemu se na svakom koraku  $t$  određuje upravljanje  $u_t$  koje sistem vodi ka sledećem stanju, nesumnjivo je da se za rešavanje datog problema može koristiti dinamičko programiranje. Ako se, dakle, ceo proces shvati kao proces od  $N$  koraka, onda je za primenu algoritma dinamičkog programiranja neophodno da se na osnovu date mere performanse utvrdi kolika je mera prelaza između dva sukcesivna stanja, odnosno da se kriterijum performanse prikaže u obliku

$$J_{0,N} = \sum_{t=0}^{N-1} J_{t,t+1}(x_t, u_t) \quad (4.42)$$

#### MERA PRELAZA IZMEĐU SUKCESIVNIH KORAKA

Nesumnjivo je da prvi član indeksa performanse (4.41) predstavlja meru zadovoljenja uslova u pogledu krajnjeg stanja, dok je drugi član mera prelaznog procesa, odnosno kretanja sistema od početne do krajnje tačke.

Ako se pretpostavi da proces nalazi u stanju  $x_{N-1}$  i da pod dejstvom upravljanja  $u_{N-1}$  prelazi u stanje  $x_N$  tada je u skladu sa relacijama (4.42) i (4.41) mera performanse

$$\begin{aligned} J_{N-1,N} &= h(x_N) + \sum_{t=N-1}^{N-1} g(x_t, u_t) = h(x_N) + g(x_{N-1}, u_{N-1}) = \\ &= h(a(x_{N-1}, u_{N-1})) + g(x_{N-1}, u_{N-1}) = J_{N-1,N}(x_{N-1}, u_{N-1}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Iz relacije (4.43) vidi se da mera performanse zavisi isključivo od stanja  $x_{N-1}$  i upravljanja  $u_{N-1}$  koje deluje na sistem koji se nalazi u stanju  $x_{N-1}$ .

Ako se nadalje pretpostavi da se proces nalazi u stanju  $x_{N-2}$  i da ga upravljanje  $u_{N-2}$  prevodi u stanje  $x_{N-1}$ , odakle ga upravljanje  $u_{N-1}$  prevodi u krajnje stanje  $x_N$ , tada je, u skladu sa (4.41), mera performanse

$$\begin{aligned} J_{N-2,N} &= h(x_N) + \sum_{t=N-2}^{N-1} g(x_t, u_t) = \underbrace{h(x_N) + g(x_{N-1}, u_{N-1})}_{J_{N-1,N}} + g(x_{N-2}, u_{N-2}) = \\ &= J_{N-1,N}(x_{N-1}, u_{N-1}) + J_{N-2,N-1}(x_{N-2}, u_{N-2}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Budući da je

$$x_{N-1} = a(x_{N-2}, u_{N-2}) \quad (4.45)$$

mera performanse dvokoračnog procesa zavisi samo od početnog stanja  $x_{N-2}$  i od dva sukcesivna upravljanja koja deluju na sistem ( $u_{N-2}$  i  $u_{N-1}$ ). Otuda sledi da je

$$\begin{aligned} J_{N-2,N} &= J_{N-2,N}(x_{N-2}, u_{N-2}, u_{N-1}) = \\ &= J_{N-2,N-1}(x_{N-2}, u_{N-2}) + J_{N-1,N}(x_{N-2}, u_{N-2}, u_{N-1}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ako se opisana procedura nastavi uz pretpostavku da se proces nalazi u stanju  $x_{N-3}$ ,  $x_{N-4}$ , i tako redom vidi se da  $g(x_t, u_t)$ , uz uslov da  $x_{t+1}$  nije krajnje stanje, predstavlja meru performanse pri prelazu iz stanja  $x_t$  u stanje  $x_{t+1}$  pod dejstvom upravljanja  $u_t$ ,

$$J_{t,t+1}(x_t, u_t) = g(x_t, u_t); \quad t = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.47)$$

kao i da je mera prelaza od stanja  $x_{N-t}$  do krajnjeg stanja  $x_N$  funkcija stanja  $u$  kome se proces nalazi i svih upravljanja koja se od tog stanja primenjuju. Pri tome se ova mera može izraziti i kao zbir mere prelaza od stanja  $x_{N-t}$  do stanja  $x_{N-t+1}$  pri upravljanju  $u_{N-t}$  i prelaza od stanja  $x_{N-t+1}$  do krajnjeg stanja  $x_N$  uz sekvencu upravljanja  $u_{N-t+1}, u_{N-t+2}, \dots, u_{N-1}$

$$\begin{aligned}
J_{N-t,N} &= J_{N-t,N}(x_{N-t}, u_{N-t}, u_{N-t+1}, u_{N-t+2}, \dots, u_{N-1}) = \\
&= \underbrace{J_{N-t,N-t+1}(x_{N-t}, u_{N-t})}_{x_{N-t} \xrightarrow{u_{N-t}} x_{N-t+1}} + \underbrace{J_{N-t+1,N}(x_{N-t+1}, u_{N-t+1}, u_{N-t+2}, \dots, u_{N-1})}_{x_{N-t+1} \xrightarrow{u_{N-t+1}, u_{N-t+2}, \dots, u_{N-1}} x_N}; t = 1, 2, \dots, N \quad (4.48)
\end{aligned}$$

#### REKURZIVNA RELACIJA DINAMIČKOG PROGRAMIRANJA

Polazeći od činjenice da indeks performanse pri prelazu od stanja  $x_0$  do stanja  $x_N$  zavisi isključivo od početnog stanja i sekvence upravljanja izvesno je da se optimalni indeks performanse može dobiti minimizacijom po sekvenci upravljanja

$$J_{N-t+1,N}^*(x_{N-t+1}) = \min_{u_{N-t+1}, u_{N-t+2}, \dots, u_{N-1}} \{J_{N-t+1,N}(x_{N-t+1}, u_{N-t+1}, u_{N-t+2}, \dots, u_{N-1})\} \quad (4.49)$$

Algoritam dinamičkog programiranja omogućava da se ova minimizacija izvrši rekurzivno.

Imajući u vidu da algoritam pretpostavlja kretanje u nazad neophodno je da se prvo razmatra poslednji prelaz od stanja  $x_{N-1}$  do stanja  $x_N$ . Na osnovu (4.43) mera prelaza u poslednjem koraku je

$$\begin{aligned}
J_{N-1,N}(x_{N-1}, u_{N-1}) &= h(x_N) + g(x_{N-1}, u_{N-1}) = \\
&= h(a(x_{N-1}, u_{N-1})) + g(x_{N-1}, u_{N-1}) \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Najmanja mera prelaza iz pretposlednjeg stanja  $x_{N-1}$  se, očigledno, dobija minimizacijom relacije (4.50) po upravljanju  $u_{N-1}$

$$J_{N-1,N}^*(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \{J_{N-1,N}(x_{N-1}, u_{N-1})\} \quad (4.51)$$

Rešavanjem jednačine (4.51) može se odrediti optimalno upravljanje  $u_{N-1}^*$  koje sistem iz stanja  $x_{N-1}$  prevodi u krajnje stanje  $x_N$ . Ako se sad pređe za jedan korak u nazad u stanje  $x_{N-2}$  i ako se u tom stanju primeni proizvoljno upravljanje  $u_{N-2}$ , tada je u skladu sa relacijom (4.46) mera performanse

$$J_{N-2,N} = J_{N-2,N-1}(x_{N-2}, u_{N-2}) + J_{N-1,N}(x_{N-2}, u_{N-2}, u_{N-1}) \quad (4.52)$$

Budući da je upravljanje  $u_{N-2}$  proizvoljno, na veličinu mere  $J_{N-2,N-1}$  se ne može uticati. Međutim, u skladu sa principom optimalnosti ukupna mera će, pod datim uslovima biti optimalna, ako se u stanju  $x_{N-1}$  primeni optimalno upravljanje  $u_{N-1}^*$ . To zapravo znači da je minimalna mera performanse na putanji  $x_{N-2} - x_{N-1} - x_N$  uz uslov da u stanju  $x_{N-2}$  deluje upravljanje  $u_{N-2}$

$$\begin{aligned}
C_{N-2,N}^*(x_{N-2}, u_{N-2}) &= \min_{u_{N-1}} \{J_{N-2,N-1}(x_{N-2}, u_{N-2}) + J_{N-1,N}(x_{N-2}, u_{N-2}, u_{N-1})\} = \\
&= J_{N-2,N-1}(x_{N-2}, u_{N-2}) + J_{N-1,N}^*(x_{N-1}) \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Optimalni indeks performanse dobija se minimzacijom poslednje relacije po  $u_{N-2}$

$$\begin{aligned}
J_{N-2,N}^*(x_{N-2}) &= \min_{u_{N-1}, u_{N-2}} \{J_{N-2,N}(x_{N-2}, u_{N-1}, u_{N-2})\} = \\
\min_{u_{N-2}} \{C_{N-2,N}^*(x_{N-2}, u_{N-2})\} &= \min_{u_{N-2}} \{J_{N-2,N-1}(x_{N-2}, u_{N-2})\} + J_{N-1,N}^*(x_{N-1}) \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Rešavanjem ove jednačine dobija se optimalno upravljanje  $u_{N-2}^*$ .

Sledeći izloženi postupak može se odrediti sekvenca optimalnih upravljanja

$$u_{N-t+1}^*, u_{N-t+2}^*, \dots, u_{N-1}^* \quad (4.55)$$

koja prevodi sistem iz stanja  $x_{N-t+1}$  u krajnje stanje  $x_N$ , pri čemu je odgovarajući minimalni indeks performanse

$$J_{N-t+1,N}^*(x_{N-t+1}) = \min_{u_{N-t+1}, u_{N-t+2}, \dots, u_{N-1}} \{J_{N-t+1,N}(x_{N-t+1}, u_{N-t+1}, u_{N-t+2}, \dots, u_{N-1})\} \quad (4.56)$$

Ako se sada pretpostavi da se sistem nalazi u stanju  $x_{N-t}$  i da se na njega primenjuje proizvoljno upravljanje  $u_{N-t}$  koje ga dovodi u stanje  $x_{N-t+1}$ , ali da se nadalje sistem dovodi u krajnje stanje primenom sekvence optimalnih upravljanja (4.55) dobiće se minimalna mera prelaza od

stanja  $x_{N-t}$  do krajnjeg stanja  $x_N$ , preko stanja  $x_{N-t+1}$ . U skladu sa relacijom (4.38) ova mera je jednaka

$$C_{N-t,N}^*(x_{N-t}, u_{N-t}) = J_{N-t, N-t+1}(x_{N-t}, u_{N-t}) + J_{N-t+1, N}^*(x_{N-t+1}) \quad (4.57)$$

Na osnovu dobijene relacije sada se, minimiziranjem izraza (4.57) može odrediti i optimalna mera prelaza od stanja  $x_{N-t}$  do krajnjeg stanja  $x_N$ .

$$\begin{aligned} J_{N-t, N}^*(x_{N-t}) &= \min_{u_{N-t}} \left\{ C_{N-t, N}^*(x_{N-t}, u_{N-t}) \right\} = \\ &= \min_{u_{N-t}} \left\{ J_{N-t, N-t+1}(x_{N-t}, u_{N-t}) \right\} + J_{N-t+1, N}^*(x_{N-t+1}) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Upravljanje  $u_{N-t}^*$  koje minimizira relaciju (4.58) predstavlja optimalno upravljanje u stanju  $x_{N-t}$ .

Relacije (4.57) i (4.58) se nazivaju funkcionalne jednačine dinamičkog programiranja. Kada se relacija (4.58) primeni na stacionaran dinamički sistem dat modelom (4.40) dobija se Belmanova jednačina, odnosno rekurzivna jednačina dinamičkog programiranja.

$$\begin{aligned} J_{N-t, N}^*(x_{N-t}) &= \min_{u_{N-t}} \left\{ C_{N-t, N}^*(x_{N-t}, u_{N-t}) \right\} = \\ &= \min_{u_{N-t}} \left\{ J_{N-t, N-t+1}(x_{N-t}, u_{N-t}) + J_{N-t+1, N}^*(x_{N-t+1}) \right\} = \\ &= \min_{u_{N-t}} \left\{ g(x_{N-t}, u_{N-t}) + J_{N-t+1, N}^*(a(x_{N-t}, u_{N-t})) \right\} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Potrebno je zapaziti da se Belmanova jednačina može rešavati unazad. Drugim rečima, ukoliko se poznaje sekvenca optimalnog upravljanja koja sistem prevodi iz stanja  $x_{N-t+1}$  u krajnje stanje  $x_N$  i njemu odgovarajući optimalna mera performanse  $J_{N-t+1, N}^*(x_{N-t+1})$ , onda se na osnovu Belmanove jednačine može odrediti optimalno upravljanje  $u_{N-t}^*$ .

Belmanova jednačina otkriva još jedan važan princip – *princip uključenja*. Naime, mera prelaza  $J_{N-t, N}^*(x_{N-t})$  predstavlja minimalnu meru performanse poslednjih  $t$  koraka u jednom  $N$ -koračnom procesu koji se na početku  $(N-t)$ -og koraka nalazi u stanju  $x_{N-t}$ . Međutim, ova mera se može interpretirati i kao minimalna mera performanse  $t$ -koračnog procesa čije početno stanje je numerički jednako stanju  $x_{N-t}$ . To zapravo znači da su optimalna strategija i minimalna mera performanse  $t$ -koračnog procesa uključeni u optimalnu strategiju  $N$ -koračnog procesa, pod uslovom da je  $N > t$ .

#### POSTUPAK ODREĐIVANJA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Rezimirajući sve što je do sada rečeno optimalno upravljanje dinamičkog stacionarnog sistema opisanog diskretnim modelom

$$x_{t+1} = a(x_t, u_t)$$

koje minimizira meru performanse

$$J^N = h(x_N) + \sum_{t=0}^{N-1} g(x_t, u_t)$$

dobija se rešavanjem rekurzivne jednačine

$$J_{N-t, N}^*(x_{N-t}) = \min_{u_{N-t}} \left\{ g(x_{N-t}, u_{N-t}) + J_{N-t+1, N}^*(a(x_{N-t}, u_{N-t})) \right\}$$

za  $t=1, 2, \dots, N$  uz početni uslov  $J_{N, N}^* = h(x_N)$ . Pri tome se ispituju sve dopustive vrednosti upravljanja u svakom dopuštenom stanju.

Rekurzivna jednačina dinamičkog programiranja podrazumeva da se posmatra niz diskretnih tačaka na trajektoriji stanja u kojima deluje jedno od mogućih diskretnih upravljanja. Otuda je za primenu ove jednačine neophodno da se specificiraju diskretne vrednosti stanja i upravljanja.



Neka stanje i upravljanje respektivno određeni n-dimenzionim odnosno m-dimenzionim vektorima i neka su dopustive oblasti specificirane minimalnim i maksimalnim vrednostima koordinata vektora

$$x^T = [x_1 \ \dots \ x_n]_{1 \times n}; \quad \forall i (i=1,2,\dots,n), \quad x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max}$$

$$u^T = [u_1 \ \dots \ u_m]_{1 \times m}; \quad \forall i (i=1,2,\dots,m), \quad u_{i \min} \leq u_i \leq u_{i \max}$$

Svaka koordinata ovih vektora se kvantizuje tako da se formiraju rešetke stanja i upravljanja, kao što je to ilustrovano na Sl. 4-5.

#### KVANTIZACIJA STANJA

Za svako  $i=1,2,\dots,n$  bira se  $\Delta x_i$  tako da je  $\frac{x_{i \max} - x_{i \min}}{\Delta x_i}$  – ceo broj

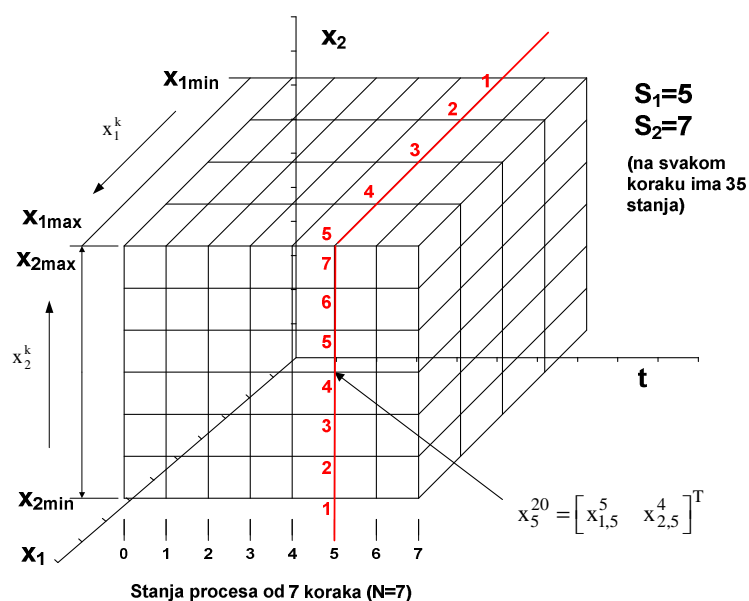
Koordinate tačaka na rešetki stanja određene su sa

$$x_i^k = x_{i \min} + (k-1)\Delta x_i, \quad k=1,2,\dots,S_i, \quad S_i = \frac{x_{i \max} - x_{i \min}}{\Delta x_i} + 1$$

Ukupan broj tačaka na rešetki stanja je  $S = S_1 S_2 \dots S_n$ . Svaka tačka na rešetki stanja u trenutku  $t$  ima koordinate

$$x_t^j = [x_{1t}^{k_1}, x_{2t}^{k_2}, \dots, x_{nt}^{k_n}]^T;$$

$$k_i = 1, 2, \dots, S_i \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad j=1, 2, \dots, S, \quad \left( j = \prod_{i=1}^n k_i \right)$$



SL. 4-5 ILUSTRACIJA FORMIRANJA REŠETKE STANJA

#### KVANTIZACIJA UPRAVLJANJA

Za svako  $q=1,2,\dots,m$  bira se  $\Delta u_q$  tako da je  $\frac{u_{q \max} - u_{q \min}}{\Delta u_q}$  – ceo broj

Koordinate tačaka na rešetki upravljanja određene su sa

$$u_q^k = u_{q \min} + (k-1)\Delta u_q, \quad k=1,2,\dots,C_q, \quad C_q = \frac{u_{q \max} - u_{q \min}}{\Delta u_q} + 1$$

Ukupan broj tačaka upravljanja je  $C = C_1 C_2 \dots C_n$ .

Svaka tačka na rešetki upravljanja u trenutku  $t$  ima koordinate

$$u_t^j = [u_{1t}^j, x_{2t}^j, \dots, u_{mt}^j]^T \quad ; \quad j_q = 1, 2, \dots, C_i \quad (q = 1, 2, \dots, m) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, C, \left( j = \prod_{q=1}^m j_q \right)$$

## INTERPOLACIJA

Pri formiranju vrednosti u tablici može se dogoditi da za neko  $x_{N-t}^i$  i  $u_{N-t}^i$  izračunata vrednost  $x_{N-t+1}^{(i,j)}$  nije na rešetki, što znači da ne postoji prethodno izračunata vrednost minimalne mere performanse ( $J_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^{(i,j)})$ ) za to stanje. U tom slučaju se ova performansa izračunava interpolacijom.

Pretpostavimo da su dve tačke  $x_{N-t+1}^v$  i  $x_{N-t+1}^w$  najbliže tački  $x_{N-t+1}^{(i,j)}$  tada se vrednost minimalne mere performanse određuje ili pomoću srednje vrednosti ili pomoću linearne interpolacije.

*Srednja vrednost:*

$$J_{N-t+1,N}^*(x_{N-t+1}^{(i,j)}) = \frac{1}{2} \left[ J_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^w) + J_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^v) \right]$$

*Linearna interpolacija:*

$$J_{N-t+1,N}^*(x_{N-t+1}^{(i,j)}) = \frac{J_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^w) - J_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^v)}{x_{N-t+1}^w - x_{N-t+1}^v} \cdot (x_{N-t+1}^{(i,j)} - x_{N-t+1}^v) + J_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^v)$$

## ALGORITAM

*Inicijalizacija*

FOR i=1 to S

$J_{N,N}^*(x_N^i) = h(x_N^i)$

end i

*Vremenska petlja*

FOR t=1 to N

*Petlja po stanjima*

FOR i=1 to S

izaberi  $x_{N-t}^i$ , postavi  $C_{\min}$  na veliku pozitivnu vrednost

*Petlja po upravljanju*

FOR j=1 to C

izaberi  $u_{N-t}^j$ ; izračunaj  $x_{N-t+1}^{(i,j)} = a(x_{N-t}^i, u_{N-t}^j)$

IF  $x_{N-t+1}^{(i,j)}$  dopušteno

pronađi (prethodno izračunatu) optimalnu meru za (t-1)-proces:

$J_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^{(i,j)})$  (ako je potrebno izvrši interpolaciju)

izračunaj minimalnu meru za poslednjih t koraka (kada  $u_{N-t}^j$

deluje u  $x_{N-t}^i$ )

$C_{N-t,N}^*(x_{N-t}^i, u_{N-t}^j) = g(x_{N-t}^i, u_{N-t}^j) + J_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^{(i,j)})$

IF  $C_{N-t,N}^*(x_{N-t}^i, u_{N-t}^j) < C_{\min}$

$C_{\min} = C_{N-t,N}^*(x_{N-t}^i, u_{N-t}^j)$ ;  $u_{\min} = u_{N-t}^j$

(određivanje  $u_{N-t}^j$  koje daje min meru  $C_{N-t,N}^*(x_{N-t}^i, u_{N-t}^j)$ )

ENDIF

ENDIF

end j

$J_{N-k,N}^*(x_{N-k}^i) = C_{\min}$

$u_{N-k}^i = u_{\min}$

end i

end t

Rezultat je tabela minimalnih mera i optimalnog upravljanja za svaku tačku na rešetki stanja

#### KORIŠĆENJE REZULTATA

Praktična implementacija opisanog algoritma za rešavanje problema optimalnog upravljanja, pretpostavlja da se unapred formira odgovarajuća tablica optimalnih upravljanja. Kada se dati sistem pusti u rad, onda se zadatak optimalnog kontrolera sastoji u tome da za stanje u kome se sistem nalazi iz tablice odredi optimalnu vrednost upravljanja i dovede je na ulaz procesa. Ovaj postupak se ponavlja na svakom koraku vremena  $t$ .

Pri korišćenju tabličnih vrednosti za izračunavanje optimalnog upravljanja u stanju  $x_{N-t}$  može se dogoditi da upravljanje  $u_{N-t}^*$  vodi sistem u stanje  $x_{N-t+1}$  koje nije na rešetki već leži između dve tačke  $x_{N-t+1}^v$  i  $x_{N-t+1}^w$ . U tom slučaju optimalno upravljanje koje treba primeniti u sledećem koraku se izračunava interpolacijom između vrednosti optimalnih upravljanja koje odgovaraju susednim tačkama na rešetki. I ovde se interpolacija može vršiti pomoću srednje vrednosti ili kao linearna interpolacija.

*Srednja vrednost:*

$$u_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}) = \frac{1}{2} \left[ u_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^v) + u_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^w) \right]$$

*Linearna interpolacija:*

$$u_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}) = \frac{u_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^w) - u_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^v)}{x_{N-t+1}^w - x_{N-t+1}^v} \cdot (x_{N-t+1} - x_{N-t+1}^v) + u_{N-t+1}^*(x_{N-t+1}^v)$$

#### DIMENZIJE PROBLEMA

Koliko god da sam postupak dinamičkog programiranja može da izgleda zametan, neophodno je da se uoči da on ipak značajno smanjuje dimenzije celog problema. Naime, ako se pretpostavi da su dopustiva stanja kvantizovana na 10 nivoa, a dopustiva upravljanja na 4 nivoa onda je za određivanje optimalne trajektorije metodom kompletnog pretraživanja za  $t$  koraka vremena ukupni broj trajektorija jednak  $\sum_{i=0}^t 10 \cdot 4^i = 10 \frac{4^t - 1}{3}$ . Međutim kod dinamičkog programiranja za  $t$  koraka vremena ukupni broj trajektorija je  $40t$ .

#### PR. 4-4

Sistem prvog reda

$$x_{t+1} = 0,5x_t + u_t$$

treba da se prevede u koordinatni početak u dva koraka ( $x_2=0$ ) tako da se minimizira mera performanse

$$J = \sum_{t=0}^1 (|x_t| + 5|u_t|)$$

Dopustive vrednosti upravljanja su u opsegu  $u_t \in [-1, 1]$

a) Metodom dinamičkog programiranja odrediti optimalno upravljanje za sve tačke na rešetki stanja  $x_t = -3+i$ ;  $i=0,1,\dots,6$ ,  $t=0,1$  i rešetki upravljanja  $u_t = \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$ .

*Rešenje*

Budući da se eksplicitno zahteva da se sistem dovede u koordinatni početak, iz jednačine sistema sledi da se to može ostvariti samo ako se upravljanje u trenutku  $t=1$  (pred početak drugog koraka) odredi u skladu sa sledećom relacijom

$$x_2 = 0 \Rightarrow u_1 = -0,5x_1$$

Ovo nadalje znači da na poslednjem (drugom) koraku nema potrebe da se formira kompletna tablica, već je dovoljno da se posmatraju samo vrednosti upravljanja koje ispunjavaju postavljeni uslov.

Prema tome, odgovarajuća tablica za drugi korak ima sledeće vrednosti.

$x_1$	$u_1 = -0.5x_1$	$x_2$	$C_{1,2}^* =  x_1  + 5 u_1 $	$J_{1,2}^* = \min\{C_{1,2}^*\}$	$u_1^*$
-3	1.5	0	Nedopustivo upravljanje		
-2	1	0	$2 + 5 = 7$	7	1
-1	0.5	0	$1 + 2.5 = 3.5$	3.5	0.5
0	0	0	0	0	0
1	-0.5	0	$1 + 2.5 = 3.5$	7	-0.5
2	-1	0	$2 + 5 = 7$	3.5	-1
3	-1.5	0	Nedopustivo upravljanje		

Sada se pomeramo jedan korak u nazad i formiramo tablicu za trenutak  $t=0$ . Za neko početno stanje  $x_0$  na koje deluje upravljanje  $u_0$  buduće stanje je određeno relacijom  $x_1 = 0.5x_0 + u_0$ .

$x_0$	$u_0$	$x_1$	$C_{0,2}^* = J_{0,1} + J_{1,2}^* = ( x_0  + 5 u_0 ) + J_{1,2}^*$	$J_{0,2}^* = \min\{C_{0,2}^*\}$	$u_0^*$
-3	-1	-2.5	Ne postoji $u_1$ koje bi dalo $x_2=0$	8.25	0
	-0.5	-2	$(3+2.5) + 7 = 12.5$		
	0	-1.5	$(3+0) + \left(\frac{7-3.5}{-2-(-1)}(-1.5-(-1)) + 3.5\right) = 3 + 5.25 = 8.25$		
	0.5	-1	$(3+2.5) + 3.5 = 9$		
	1	-0.5	$(3+5) + \left(\frac{3.5-0}{-1-0}(-0.5-0) + 0\right) = 8 + 1.75 = 9.75$		
-2	-1	-2	$(2+5) + 7 = 14$	5.5	0
	-0.5	-1.5	$(2+2.5) + \left(\frac{7-3.5}{-2-(-1)}(-1.5-(-1)) + 3.5\right) = 9.25$		
	0	-1	$(2+0) + 3.5 = 5.5$		
	0.5	-0.5	$(2+2.5) + \left(\frac{3.5-0}{-1-0}(-0.5-0) + 0\right) = 4.5 + 1.75 = 6.25$		
	1	0	$(2+5) + 0 = 7$		
-1	-1	-1.5	$(1+5) + \left(\frac{7-3.5}{-2-(-1)}(-1.5-(-1)) + 3.5\right) = 11.25$	2.75	0 interpolacija ( $u_1^* = 0.25$ )
	-0.5	-1	$(1+2.5) + 3.5 = 7$		
	0	-0.5	$(1+0) + \left(\frac{3.5-0}{-1-0}(-0.5-0) + 0\right) = 1 + 1.75 = 2.75$		
	0.5	0	$(1+2.5) + 0 = 3.5$		
	1	0.5	$(1+5) + \left(\frac{3.5-0}{1-0}(0.5-0) + 0\right) = 6 + 1.75 = 7.75$		

0	-1	-1	$(0+5) + 3.5 = 8.5$	0	0
	-0.5	-0.5	$(0+2.5) + \left(\frac{3.5-0}{-1-0}(-0.5-0)+0\right) = 2.5+1.75 = 4.25$		
	0	0	$(0+0)+0=0$		
	0.5	0.5	$(0+2.5) + \left(\frac{3.5-0}{1-0}(0.5-0)+0\right) = 2.5+1.75 = 4.25$		
	1	1	$(0+5) + 3.5 = 8.5$		
1	-1	-0.5	$(1+5) + \left(\frac{3.5-0}{-1-0}(-0.5-0)+0\right) = 6+1.75 = 7.75$	2.75	0 interpolacija ( $u_1^* = -0.25$ )
	-0.5	0	$(1+2.5) + 0 = 3.5$		
	0	0.5	$(1+0) + \left(\frac{3.5-0}{1-0}(0.5-0)+0\right) = 1+1.75 = 2.75$		
	0.5	1	$(1+5)+3.5=8.5$		
	1	1.5	$(1+5) + \left(\frac{7-3.5}{2-1}(1.5-1)+3.5\right) = 11.25$		
2	-1	0	$(2+5) + 0 = 7$	5.5	0
	-0.5	0.5	$(2+2.5) + \left(\frac{3.5-0}{1-0}(0.5-0)+0\right) = 4.5+1.75 = 6.25$		
	0	1	$(2+0) + 3.5 = 5.5$		
	0.5	1.5	$(2+2.5) + \left(\frac{7-3.5}{2-1}(1.5-1)+3.5\right) = 9.75$		
	1	2	$(2+5) + 7 = 14$		
3	-1	0.5	$(3+5) + \left(\frac{3.5-0}{1-0}(0.5-0)+0\right) = 8+1.75 = 9.75$	8.25	0 interpolacija ( $u_1^* = -0.75$ )
	-0.5	1	$(3+2.5) + 3.5 = 9$		
	0	1.5	$(3+0) + \left(\frac{7-3.5}{2-1}(1.5-1)+3.5\right) = 8.25$		
	0.5	2	$(3+2.5) + 7 = 12.5$		
	1	2.5	Ne postoji $u_1$ koje bi dalo $x_2=0$		

Potrebno je zapaziti da je u nekim elementima tablice korišćena interpolacija. Tamo gde se interpolirano rešenje pokazalo kao optimalno, izračunato je i optimalno upravljanje koje će u sledećem (drugom) koraku sistem da dovede u koordinatni početak. Tako je, na primer, za stanje  $x_1=-0.5$  upravljanje određeno interpolacijom između optimalnih upravljanja u tačkama  $x_1=-1$  i  $x_1=0$ , koje se nalaze na rešetki i najbliže su datom stanju.

$$u_1^*(-0.5) = \frac{u_1^*(-1) - u_1^*(0)}{-1-0} \cdot (-0.5-0) + u_1^*(0) = \frac{0.5-0}{-1} \cdot (-0.5) + 0 = 0.25$$

b) Odrediti optimalnu sekvencu upravljanja kada se sistem nalazi u početnom stanju  $x_0=-2$

Rešenje

Ako se u tablici potraži vrsta koja odgovara datom početnom stanju direktno se dobija da je prvo upravljanje jednako nuli. Ono dovodi sistem u stanje  $x_1=-1$ . Zatim se potraži odgovarajuća vrsta u drugoj tablici i određuje se i drugo optimalno upravljanje.

$$x_0 = -2 \xrightarrow{u_0^*=0} x_1 = -1 \xrightarrow{u_1^*=0.5} x_2 = 0$$

**PR. 4-5**

Posmatra se sistem

$$x_{t+1} = x_t - 0.4x_t^2 + u_t$$

i mera performanse

$$J = 4|x_2| + \sum_{t=0}^1 |u_t|$$

i) *Metodom dinamičkog programiranja odrediti optimalno upravljanje za sve tačke na rešetki*

$$x_t = \{0, 0.5, 1\}$$

Dopustive vrednosti upravljanja su

$$u_t = \{-0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4\}$$

iv. b) *Odrediti optimalnu sekvencu upravljanja kada se sistem nalazi u početnom stanju  $x_0=1$*

*Rešenje*

i) Iz jednačine sistema se direktno dobija

$$x_{t+1} = x_t - 0.4x_t^2 + u_t \Rightarrow$$

$$x_t = 0, \quad x_{t+1} = u_t$$

$$x_t = 0.5, \quad x_{t+1} = 0.4 + u_t$$

$$x_t = 1, \quad x_{t+1} = 0.6 + u_t$$

Na osnovu ovih relacija i principa dinamičkog programiranja moguće je formirati tabelu prelaza iz stanja  $x_1$  u stanje  $x_2$

$x_1$	$u_1$	$x_2$	$C_{1,2}^* = 4 x_2  +  u_1 $	$J_{1,2}^* = \min\{C_{1,2}^*\}$	$u_1^*$
0	-0.4	-0.4	Nedopustivo upravljanje	0	0
	-0.2	-0.2	Nedopustivo upravljanje		
	0	0	0		
	0.2	0.2	1		
	0.4	0.4	2		
0.5	-0.4	0	0.4	0.4	-0.4
	-0.2	0.2	1		
	0	0.4	1.6		
	0.2	0.6	2.4		
	0.4	0.8	3.6		
1	-0.4	0.2	1.2	1.2	-0.4
	-0.2	0.4	1.8		
	0	0.6	2.4		
	0.2	0.8	3.4		
	0.4		4.4		

Na isti način formira se i tabela prelaza iz stanja  $x_0$  u stanje  $x_1$ . Pri tome budući da neka od dobijenih stanja  $x_1$  nisu na rešetki neophodno koristiti interpolacione formule

$$x_1 \in (0, 0.5) \quad J_{1,2}^*(x_1) = \frac{0.4-0}{0.5-0} \cdot (x_1-0) + 0 = 0.8x_1$$

$$x_1 \in (0.5, 1) \quad J_{1,2}^*(x_1) = \frac{1.2-0.4}{1-0.5} \cdot (x_1-0.5) + 0.4 = 1.6x_1 - 0.4$$

$x_0$	$u_0$	$x_1$	$C_{0,2}^* =  u_0  + J_{1,2}^*(x_1)$	$J_{0,2}^* = \min\{C_{0,2}^*\}$	$u_0^*$
0	-0.4	-0.4	Nedopustivo upravljanje	0	0
	-0.2	-0.2	Nedopustivo upravljanje		
	0	0	0		
	0.2	0.2	0.2		
	0.4	0.4	0.4		
0.5	-0.4	0	$0.4+0.4=0.8$	0.32	0
	-0.2	0.2	$0.2+0.8 \cdot 0.2 = 0.36$		
	0	0.4	$0+0.8 \cdot 0.4 = 0.32$		
	0.2	0.6	$0.2+1.6 \cdot 0.6 - 0.4 = 0.76$		
	0.4	0.8	$0.4+1.6 \cdot 0.8 - 0.4 = 1.28$		
1	-0.4	0.2	$0.4+0.8 \cdot 0.2 = 0.56$	0.52	-0.2
	-0.2	0.4	$0.2+0.8 \cdot 0.4 = 0.52$		
	0	0.6	$0+1.6 \cdot 0.6 - 0.4 = 0.56$		
	0.2	0.8	$0.2+1.6 \cdot 0.8 - 0.4 = 1.08$		
	0.4	1	1.6		

- v. Iz tabele se vidi da je za početno stanje  $x_0=1$  optimalno upravljanje  $-0.2$ . Pošto ovo upravljanje vodi sistem u stanje  $x=0.4$ , koje nije na rešetki, optimalno upravljanje koje treba primeniti u toj tački dobija se interpolacijom optimalnih upravljanja u susjednim tačkama na rešetki.

$$x_0 = 1 \xrightarrow{u_0^* = -0.2} x_1 = 0.4 \xrightarrow{u_1^* = \frac{-0.4-0}{0.5-0} \cdot (0.4-0) - 0.4 = -0.72} x_2 = 0.4 - 0.064 - 0.72 = 0.384$$

## 4.5 Linearni optimalni regulator

*Kvadratni kriterijum odgovara linearnom sistemu kao rukavica ruci*

### 4.5.1 MINIMIZACIJA MERE PRELAZA

U principu, primena rekurzivne relacije dinamičkog programiranja omogućava da se odredi optimalno upravljanje sistema u zatvorenoj sprezi

$$u_t^* = f(x_t, t) \quad (4.60)$$

Dobijeno rešenje zavisi od modela sistema i najčešće ga je teško, ako ne i nemoguće dobiti u analitičkoj formi. Izuzetak je jedino linearni model sistema za koji se primenom dinamičkog programiranja dobija jednostavno analitičko rešenje.

Posmatra se sistem opisan linearnim, diskretnim, nestacionarnim modelom<sup>1</sup>

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t \quad (4.61)$$

<sup>1</sup> Istorijski gledano optimalno upravljanje razvijeno je prvo za kontinualne linearne modele. Međutim, budući da se ovde rešenje izvodi iz Belmanovog principa optimalnosti koji je pogodan za diskretne modele, posmatraće se ovi modeli.

pri čemu se usvaja da su stanja i upravljanja bez ograničenja. Potrebno je odrediti optimalno upravljanje  $u_t^*(x_t, t)$  koje minimizira kriterijum performanse

$$J = \frac{1}{2} x_N^T H x_N + \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \{x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t\} \quad (4.62)$$

gde su

$H$  – konstantna realna simetrična pozitivno semidefinitna matrica

$Q_t$  – vremenski promenljiva, realna simetrična pozitivno semidefinitna matrica

$R_t$  - vremenski promenljiva, realna simetrična pozitivno definitna matrica

Rešenje postavljenog problema se dobija rešavanjem Belmanove rekurzivne relacije (4.59)

u nazad

$$J_{N-t,N}^*(x_{N-t}) = \min_{u_{N-t}} \{J_{N-t,N-t+1}(x_{N-t}, u_{N-t}) + J_{N-t+1,N}^*(x_{N-t+1})\}$$

- $t=0$  - sistem se nalazi u krajnjem stanju ( $N$ ). Definišimo

$$J_{NN}(x_N) = \frac{1}{2} x_N^T H x_N = \frac{1}{2} x_N^T P_N x_N \quad ; P_N = H \quad (4.63)$$

Zapazimo da je matrica  $P_N$  simetrična pozitivno semidefinitna matrica.

- $t=1$  – sistem je jedan korak od krajnjeg stanja. Na osnovu jednačine sistema (4.61) kao i funkcije kriterijuma (4.62) mera prelaza od stanja  $N-1$  do krajnjeg stanja je

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}(x_{N-1}) &= \frac{1}{2} x_{N-1}^T P_N x_{N-1} + \frac{1}{2} \sum_{t=N-1}^{N-1} \{x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t\} = \\ &= \frac{1}{2} (A_{N-1} x_{N-1} + B_{N-1} u_{N-1})^T P_N (A_{N-1} x_{N-1} + B_{N-1} u_{N-1}) + \\ &+ \frac{1}{2} x_{N-1}^T Q_{N-1} x_{N-1} + \frac{1}{2} u_{N-1}^T R_{N-1} u_{N-1} = \\ &= \frac{1}{2} x_{N-1}^T (A_{N-1}^T P_N A_{N-1} + Q_{N-1}) x_{N-1} + \frac{1}{2} u_{N-1}^T (B_{N-1}^T P_N B_{N-1} + R_{N-1}) u_{N-1} + \\ &+ u_{N-1}^T (B_{N-1}^T P_N A_{N-1}) x_{N-1} \end{aligned} \quad (4.64)$$

U skladu sa (4.51) minimalna mera poslednjeg prelaza je

$$J_{N-1,N}^*(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \{J_{N-1,N}(x_{N-1}, u_{N-1})\} \quad (4.65)$$

Budući da su stanja i upravljanja neograničeni, upravljanje koje minimizira relaciju (4.65) se može dobiti rešavanjem jednačine

$$\frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_{N-1}} = \left[ \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_{1,N-1}} \quad \dots \quad \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_{m,N-1}} \right]^T = \text{grad}_u J_{N-1,N} = 0 \quad (4.66)$$

tako da rešenje  $u_{N-1}^*$  zadovolji uslov da je Jakobijan

$$\frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial^2 u_{N-1}} \Big|_{u_{N-1}^*} = \left[ \frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_{i,N-1} \partial u_{j,N-1}} \right]_{m \times m} \Big|_{u_{N-1}^*} = \frac{\partial}{\partial u_{N-1}} \{ \text{grad}_u J_{N-1,N} \} \Big|_{u_{N-1}^*} \quad (4.67)$$

pozitivno definitna matrica.

Polazeći od relacije (4.64) gradijent se dobija kao

$$\frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_{N-1}} = (B_{N-1}^T P_N B_{N-1} + R_{N-1}) u_{N-1} + B_{N-1}^T P_N A_{N-1} x_{N-1} = 0 \quad (4.68)$$

$$\Rightarrow u_{N-1} = - (B_{N-1}^T P_N B_{N-1} + R_{N-1})^{-1} B_{N-1}^T P_N A_{N-1} x_{N-1}$$



pri čemu je invertibilnost matrice  $\left(B_{N-1}^T P_N B_{N-1} + R_{N-1}\right)$  zagarantovana njenom pozitivnom definitnošću. Jakobijan mere prelaza jednak je

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial^2 u_{N-1}} &= \frac{\partial}{\partial u_{N-1}} \left\{ \left( B_{N-1}^T P_N B_{N-1} + R_{N-1} \right) u_{N-1} + B_{N-1}^T P_N A_{N-1} x_{N-1} \right\} = \\ &= B_{N-1}^T P_N B_{N-1} + R_{N-1} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Pošto je Jakobijan pozitivno definitna matrica, upravljanje određeno relacijom (4.68) daje apsolutni minimum mere prelaza poslednjeg koraka. Ovo upravljanje predstavlja optimalno upravljanje

$$u_{N-1}^* = F_{N-1} x_{N-1} \quad ; \quad F_{N-1} = - \left( B_{N-1}^T P_N B_{N-1} + R_{N-1} \right)^{-1} B_{N-1}^T P_N A_{N-1} \quad (4.70)$$

Minimalna mera prelaza se dobija zamenom optimalnog upravljanja u izraz (4.64).

$$\begin{aligned} J_{N-1,N}^*(x_{N-1}) &= \\ &= \frac{1}{2} x_{N-1}^T \left\{ \left( A_{N-1} + B_{N-1} F_{N-1} \right)^T P_N \left( A_{N-1} + B_{N-1} F_{N-1} \right) + F_{N-1}^T R_{N-1} F_{N-1} + Q_{N-1} \right\} x_{N-1} = \\ &= \frac{1}{2} x_{N-1}^T P_{N-1} x_{N-1} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Iz relacije (4.71) vidi se da je matrica  $P_{N-1}$  realna simetrična pozitivno semidefinitna matrica. Potrebno je zapaziti da je sa ovako definisanom matricom  $P_{N-1}$  minimalna mera poslednjeg prelaza istog oblika kao i minimalna mera krajnjeg stanja (4.63). Otuda se može očekivati da će ova mera i u narednim koracima unazad imati isti oblik.

- $t=2$  – sistem je dva koraka od krajnjeg stanja, pri čemu se pretpostavlja da se delovanjem upravljanja  $u_{N-2}$  prevodi u pretposlednje stanje ( $x_{N-1}$ ), odakle se u krajnje stanje vodi pod dejstvom optimalnog upravljanja  $u_{N-1}^*$ . Na osnovu relacije (4.59) kao i funkcije kriterijuma (4.62) mera prelaza od stanja  $N-2$  do krajnjeg stanja je

$$J_{N-2,N}^*(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2}} \left\{ x_{N-2}^T Q_{N-2} x_{N-2} + u_{N-2}^T R_{N-2} u_{N-2} + J_{N-1,N}^*(x_{N-1}) \right\} \quad (4.72)$$

Primenjujući isti postupak određivanja minimuma dobija se optimalno upravljanje u stanju  $x_{N-2}$

$$\begin{aligned} u_{N-2}^* &= F_{N-2} x_{N-2} \quad ; \\ F_{N-2} &= - \left( B_{N-2}^T P_{N-1} B_{N-2} + R_{N-2} \right)^{-1} B_{N-2}^T P_{N-1} A_{N-2} \end{aligned} \quad (4.73)$$

i minimalna mera prelaza od stanja  $x_{N-2}$  do krajnjeg stanja  $x_N$ .

$$\begin{aligned} J_{N-2,N}^*(x_{N-2}) &= \\ &= \frac{1}{2} x_{N-2}^T \left\{ \left( A_{N-2} + B_{N-2} F_{N-2} \right)^T P_{N-1} \left( A_{N-2} + B_{N-2} F_{N-2} \right) + F_{N-2}^T R_{N-2} F_{N-2} + Q_{N-2} \right\} x_{N-2} = \\ &= \frac{1}{2} x_{N-2}^T P_{N-2} x_{N-2} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Matrica  $P_{N-2}$  je realna simetrična pozitivno semidefinitna matrica.

- $t$  – sistem je  $t$  koraka od krajnjeg stanja. Po analogiji sa do sada izvedenim rezultatima, opšti oblik rešenja je

$$\begin{aligned} &\circ \text{ Optimalno upravljanje} \\ u_{N-t}^* &= F_{N-t} x_{N-t} \quad ; \\ F_{N-t} &= - \left( B_{N-t}^T P_{N-t+1} B_{N-t} + R_{N-t} \right)^{-1} B_{N-t}^T P_{N-t+1} A_{N-t} \end{aligned} \quad (4.75)$$

- o Matrica  $P_{N-t}$

$$P_{N-t} = (A_{N-t} + B_{N-t}F_{N-t})^T P_{N-t+1} (A_{N-t} + B_{N-t}F_{N-t}) + F_{N-t}^T R_{N-t} F_{N-t} + Q_{N-t} \quad (4.76)$$

$$P_N = H$$

realna, simetrična pozitivno semidefinitna matrica.

- o Minimalna mera prelaza

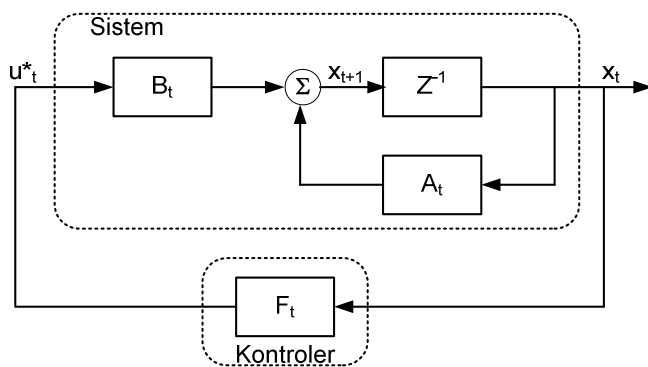
$$J_{N-t,N}^*(x_{N-t}) = \frac{1}{2} x_{N-t}^T P_{N-t} x_{N-t} \quad (4.77)$$

Tačnost navedenih relacija se može dokazati matematičkom indukcijom.

U skladu sa relacijom (4.77) ukupna minimalna mera performanse za sistem koji se nalazi u početnom stanju  $x_0$  jednaka

$$J_{0,N}^*(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0 \quad (4.78)$$

Potrebno je uočiti da sama brojna vrednost ove mere performanse nema nikakvo fizičko



SL. 4-6 OPTIMALNI KONTROLER

značenje. Nezavisno od toga da li je ta brojna vrednost velika ili mala, izvesno je da je rešenje kome ona odgovara optimalno, odnosno najbolje, u okviru postavljenog kriterijuma. Ako bi se promenio kriterijum, promenilo bi se i optimalno rešenje, a i time minimalna vrednost performanse. Poređenjem minimalnih vrednosti performansi ne mogu se izvući nikakvi zaključci o eventualnim prednostima bilo kog rešenja. Svako od rešenja je zapravo najbolje, ali samo u okviru postavljenog kriterijuma.

#### 4.5.2 MATRIČNA RIKATIJEVA DIFERENTNA JEDNAČINA

Iz dobijenog rešenja optimalnog upravljanja (4.75) vidi se da je kontroler linearan i da radi na osnovu povratne sprege po stanjima sistema (Sl. 4-6). Ostavljajući po strani činjenicu da se, s obzirom na nemerljivost stanja, ovaj kontroler može realizovati isključivo uz korišćenje observera, Kalmanovog filtra ili nekog drugog estimatora stanja, postavlja se pitanje karakteristika samog kontrolera.

Pre svega, pojačanja kontrolera zavise od matrice  $P_t$  koja se dobija rešavanjem diferentne jednačine (4.76) sa datim graničnim uslovom. To znači da se rešavanje vrši unazad, odnosno da se sve vrednosti ove matrice, a time i pojačanja kontrolera moraju unapred izračunati. Pored toga, jednačina (4.76) ukazuje i na to da će kontroler biti nestacionaran, čak i kada je sam sistem stacionaran.

Nesumnjivo je da ključnu ulogu u strukturi samog kontrolera igra jednačina (4.76) što zahteva da se ona detaljnije razmotri. Uvrštavanjem izraza za matricu  $F_N$  (4.75) dobija se

$$\begin{aligned} P_{N-t} &= (A_{N-t} + B_{N-t}F_{N-t})^T P_{N-t+1} (A_{N-t} + B_{N-t}F_{N-t}) + F_{N-t}^T R_{N-t} F_{N-t} + Q_{N-t} = \\ &= A_{N-t}^T P_{N-t+1} A_{N-t} + F_{N-t}^T B_{N-t}^T P_{N-t+1} A_{N-t} + A_{N-t}^T P_{N-t+1} B_{N-t} F_{N-t} + \\ &+ F_{N-t}^T B_{N-t}^T P_{N-t+1} B_{N-t} F_{N-t} + F_{N-t}^T R_{N-t} F_{N-t} + Q_{N-t} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{N-t} &= A_{N-t}^T P_{N-t+1} A_{N-t} - \\
&- A_{N-t}^T P_{N-t+1} B_{N-t} \left( R_{N-t} + B_{N-t}^T P_{N-t+1} B_{N-t} \right)^{-1} B_{N-t}^T P_{N-t+1} A_{N-t} + Q_{N-t} = \quad (4.79) \\
&= A_{N-t}^T \left( P_{N-t+1} - P_{N-t+1} B_{N-t} \left( R_{N-t} + B_{N-t}^T P_{N-t+1} B_{N-t} \right)^{-1} B_{N-t}^T P_{N-t+1} \right) A_{N-t} + Q_{N-t}
\end{aligned}$$

Primenom Leme o inverziji prema kojoj je

$$\begin{aligned}
&\left( P_{N-t+1}^{-1} + B_{N-t} R_{N-t}^{-1} B_{N-t}^T \right)^{-1} = \quad (4.80) \\
&= P_{N-t+1} - P_{N-t+1} B_{N-t} \left( R_{N-t} + B_{N-t}^T P_{N-t+1} B_{N-t} \right)^{-1} B_{N-t}^T P_{N-t+1}
\end{aligned}$$

dobija se

$$P_{N-t} = A_{N-t}^T \left( P_{N-t+1}^{-1} + B_{N-t} R_{N-t}^{-1} B_{N-t}^T \right)^{-1} A_{N-t} + Q_{N-t} \quad (4.81)$$

Sa gledišta praktične implementacije pogodno je da se izvrši smena indeksa, tako da se dobije

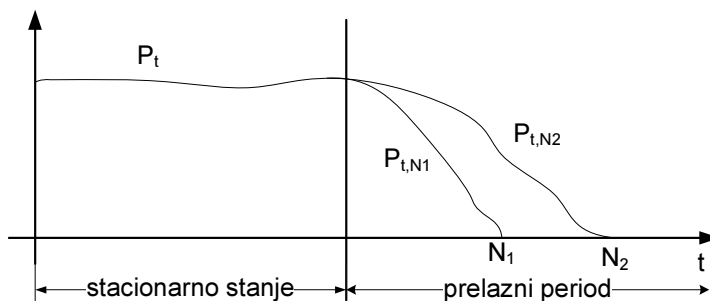
$$P_t = A_t^T \left( P_{t+1}^{-1} + B_t R_t^{-1} B_t^T \right)^{-1} A_t + Q_t; \quad P_N = H \quad (4.82)$$

odnosno

$$P_t = A_t^T P_{t+1} A_t - A_t^T P_{t+1} B_t \left( R_t + B_t^T P_{t+1} B_t \right)^{-1} B_t^T P_{t+1} A_t + Q_t; \quad P_N = H \quad (4.83)$$

Rezultujuća diferentna jednačina predstavlja matricnu Rikatijevu diferentnu jednačinu. Rešenje ove jednačine, uz dati granični uslov, daje optimalni zakon upravljanja

$$u_t^* = - \left( B_t^T P_{t+1} B_t + R_t \right)^{-1} B_t^T P_{t+1} A_t x_t \quad (4.84)$$



SL. 4-7 STACIONARNO REŠENJE RIKATIJEVE JEDNAČINE

dve promenljive t i N. Izvesno je da će se, kada se N menja, menjati i rešenje Rikatijeve jednačina, čak i ukoliko granični uslov ostane nepromenjen. Prirodno se, prema tome, postavlja pitanje da li će i čemu težiti ovo rešenje ako N postane veoma veliko, odnosno ako teži ka beskonačnosti.

Neka je  $P_{t,N}$  rešenje Rikatijeve jednačine za granični uslov  $P_{N,N} = H$ . Pokazuje se da<sup>2</sup>

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{t,N} = \bar{P}_t \quad (4.85)$$

uz sledeće uslove

- i. sistem kompletno kontrolabilan
- ii. matrica H jednaka nuli

<sup>1</sup> Ako je sistem stacionaran tada se, na veštački način, specificiranjem matrice H kao

$$H = A^T H A - A^T H B \left( R + B^T H B \right)^{-1} B^T H A + Q \text{ dobija stacionarno rešenje Rikatijeve jednačine } P_t = H$$

<sup>2</sup> Ovaj rezultat je prvi izveo Kalman za kontinualne sisteme

kome odgovara minimalna mera performanse

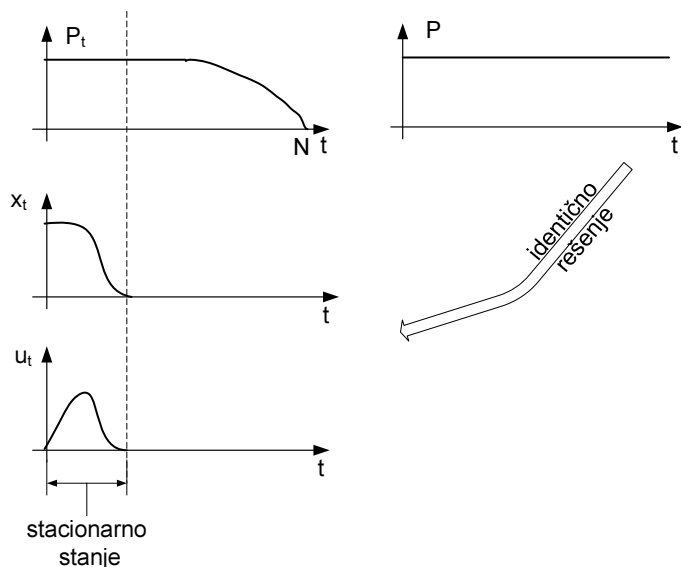
$$J_{0,N}^*(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T P_0 x_0$$

Očigledno je da rešenje Rikatijeve jednačine zavisi od graničnog uslova. U principu ovo rešenje je vremenski promenljiva matricna funkcija<sup>1</sup>, koja zavisi i od krajnjeg vremena N. U tom smislu ono se može posmatrati kao funkcija

iii. granični uslov  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,N} = H = 0$

Ovaj rezultat, zapravo pokazuje da Rikatijska jednačina, za dovoljno veliko  $N$  ima stacionarno rešenje. Drugim rečima, ako je granični uslov jednak nuli, i ako je krajnje vreme dovoljno veliko, onda kada vreme opada sva rešenja teže ka istoj stacionarnoj vrednosti (Sl. 4-7). Šta više, ukoliko je sistem stacionaran i ukoliko su i težinske matrice konstantne onda je i ovo stacionarno rešenje konstantno

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{t,N} = \bar{P}_t = P = \text{const.} \quad (4.86)$$



SL. 4-8 EKVIVALENTNOST REŠENJAKONTROLERA SA PROMENLJIVIM I KONAČNIM POJAČANJEM NA DOVOLJNO VELIKOM INTERVALU VREMENA

Izložena osobina matrice  $P_{t,N}$  ima izuzetno važnu implikaciju. Naime, iako se matricna Rikatijska jednačina rešava unazad (počev od  $t=N$ ), kontroler se implementira tako da počinje da deluje u trenutku puštanja sistema u rad ( $t=0$ ). Ako je sistem stacionaran, onda će kontroler u početnom periodu imati konstantno pojačanje  $P$ , koje odgovara stacionarnom rešenju Rikatijske jednačine. Ako je  $N$  dovoljno veliko, sistem će ući u sopstveno stacionarno stanje unutar intervala vremena u kome je pojačanje još uvek konstantno. To nadalje znači da za dovoljno dugo krajnje vreme  $N$  nije neophodno da se kontroler implementira sa promenljivim pojačanjem  $P_{t,N}$ , odnosno da će se isti

efekat postići ukoliko se projektuje kontroler sa konstantnim pojačanjem koje odgovara stacionarnom rešenju Rikatijske jednačine (Sl. 4-8). Otuda se prirodno nametnula ideja da se posmatra kontroler koji radi na beskonačnom intervalu vremena.

#### 4.5.3 OPTIMALNI DISKRETNi KONTROLER NA BESKONAČNOM INTERVALU VREMENA

U principu, svaki sistem radi neki ograničeni period vremena. Pri tome, pretpostavlja se da će on, relativno brzo, ući u željeno stacionarno stanje, i da će ga potom kontroler održavati u tom stanju koliko god to bude potrebno. Otuda se najčešće govori o "dovoljno dugom" periodu vremena. U tom smislu, da bi se izbegla proizvoljnost, može se smatrati da period vremena teži beskonačnosti, podrazumevajući, pri tome, da realni sistem svakako neće postojati pa ni raditi beskonačno dugo.

Ako se već pretpostavlja da sistem radi u beskonačno dugom intervalu vremena onda je prirodno da se zahteva da kriterijum performanse više ne sadrži član koji predstavlja meru dostizanja krajnjeg stanja. Naime, sa praktične tačke gledišta nas svakako ne interesuje kako će se sistem ponašati u beskonačnosti, pa nema nikakve potrebe da na bilo koji način, kroz kriterijum performanse, merimo to ponašanje. U skladu sa time kriterijum performanse se definiše kao

$$J = \int_{t_0}^{\infty} g(t, u_t, t) dt \text{ - kontinualni sistemi} \quad (4.87)$$

$$J = \sum_{t=t_0}^{\infty} g(x_t, u_t, t) \text{ - diskretni sistemi} \quad (4.88)$$

Potrebno je zapaziti da je, za razliku od konačnog vremenskog intervala, u slučaju

beskonačnog intervala kontrolabilnost sistema potreban uslov za egzistenciju rešenja. Naime, ukoliko sistem nije kontrolabilan, onda nema garancije da će, nakon zatvaranja povratne sprege, nekontrolabilno stanje biti stabilno. Pri tome će, pošto je vremenski interval neograničen, ovo nestabilno stanje težiti beskonačnosti čime bi bila obesmišljena i sama ideja optimalnog upravljanja.

Posmatrajmo sada jedan sistem opisan kontrolabilnim stacionarnim diskretnim modelom

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \quad (4.89)$$

koji nema ograničenja na upravljanje i trajektorije stanja. Potrebno je odrediti optimalno upravljanje  $u_t^*(x_t, t)$  koje minimizira kriterijum performanse

$$J = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \{x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t\} \quad (4.90)$$

gde su

$Q_t$  – vremenski promenljiva, realna simetrična pozitivno semidefinitna matrica

$R_t$  – vremenski promenljiva, realna simetrična pozitivno definitna matrica.

Nema nikakve sumnje da i za ovako postavljen problem važi opšte rešenje dato jednačinom (4.84)

$$u_t^* = -\left(B^T \bar{P}_t B + R_t\right)^{-1} B^T \bar{P}_t A x_t \quad (4.91)$$

pri čemu je, budući da je  $H=0$  i da  $N$  teži beskonačnosti, matrica  $\bar{P}_t$  stacionarno rešenje matrice Rikatijeve diferentne jednačine

$$P_t = A^T P_{t+1} A - A^T P_{t+1} B \left(R_t + B^T P_{t+1} B\right)^{-1} B^T P_{t+1} A + Q_t \quad (4.92)$$

uz granični uslov  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = 0$ .

Može se pokazati da kontrolabilnost sistema obezbeđuje egzistenciju stacionarnog rešenja ove jednačine. Šta više, u skladu sa relacijom (4.86), stacionarno rešenje će biti konstantno ukoliko su i težinske matrice  $Q$  i  $R$  konstantne. Ovo rešenje ( $\bar{P}_t = P$ ) mora da zadovolji Rikatijevu diferentnu jednačinu (4.92), što znači da važi

$$P = A^T P A - A^T P B \left(R + B^T P B\right)^{-1} B^T P A + Q \quad (4.93)$$

Kada se odredi rešenje Rikatijeve jednačine, optimalno upravljanje stacionarnim sistemom se izračunava kao

$$u_t^* = -\left(B^T P B + R\right)^{-1} B^T P A x_t = -K x_t \quad (4.94)$$

Budući da je matrica  $K$  konstantna dobijeni kontroler je stacionaran. Minimalna mera performanse postaje

$$J^* = \frac{1}{2} x_0^T P x_0 \quad (4.95)$$

Iz oblika indeksa performanse jasno je da ovo rešenje ima smisla samo ako je  $P$  pozitivno semidefinitna definitna matrica, jer se time garantuje i nenegativnost indeksa performanse.

#### 4.5.4 STABILNOST KONTROLERA

U skladu sa dobijenim optimalnim zakonom upravljanja sistem u zatvorenoj sprezi opisan je modelom

$$x_{t+1} = (A - BK) x_t \quad (4.96)$$

Stabilnost ovog sistema zavisiće od položaja sopstvenih vrednosti matrice  $A - BK$  i ona se svakako može ispitati kada se dobije optimalni kontroler. Međutim, sa praktične tačke gledišta saznanje da je dobijeni kontroler neodgovarajući je zakasnelo. Posebno ako se ima u vidu da ni ponovnim rešavanjem, uz neke izmenjene parametre u meri performanse, nema garancije da će

so dobiti stabilan sistem. Drugim rečima, sa aspekta projektovanja značajno je da se ustanovi da li postoji način da se problem formuliše tako da njegovo rešenje garantuje stabilnost sistema. Pri tome, treba imati na umu da je model sistema zadan, odnosno da su matrice A, B i C određene samim sistemom. To znači da je sa gledišta stabilnosti, pa i svih drugih performansi sistema u zatvorenoj sprezi, moguće uticati jedino na izbor težinskih matrica Q i R.

U cilju pronalazjenja rešenja za postavljeni problem, neophodno je ustanoviti pod kojim uslovima bi optimalno rešenje moglo da bude nestabilno.

Pretpostavimo da je sistem u otvorenoj sprezi nestabilan, odnosno da ima jedno stanje koje teži beskonačnosti. Neka je to stanje  $x_{i,t}$ . U tom slučaju zadatak povratne sprege je da, pored ostalog, stabilizuje ovo stanje. Polazeći od činjenice da se optimalno upravljanje određuje na osnovu zadanog kriterijuma performanse izvesno je da će ono delovati na ona stanja koja se na neki način "vide" kroz taj kriterijum. Otuda je nesumnjivo da ključnu ulogu sa gledišta stabilnosti igra matrica Q. Prema uslovima rešenja ova matrica treba da bude pozitivno semidefinitna. To znači da mogu da postoje neki nenulti vektori za koji je kvadratni proizvod jednak nuli. Neka je to baš posmatrano nestabilno stanje, odnosno neka je

$$x_{i,t}^T Q x_{i,t} = 0 \quad (4.97)$$

U tom slučaju, nestabilno stanje se neće videti u kriterijumu, odnosno kriterijum performanse će biti konačan i ako postoji beskonačno (nestabilno) stanje. Samim tim, povratna sprega neće biti usmerena ka stabilizaciji ovog stanja.

#### PR. 4-6

##### Zadatak

Dat je sistem opisan jednačinom

$$x_{t+1} = x_t + u_t$$

Potrebno je odrediti optimalno upravljanje tako da se minimizira kriterijum

$$J = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} u_t^2 \quad (A = B = R = 1, Q = 0)$$

##### Rešenje

Sistem u otvorenoj sprezi je na granici stabilnosti (sopstvena vrednost  $\lambda=1$ ). Za date uslove Rikatijska diferentna jednačina ima oblik

$$p_t = p_{t+1} - \frac{p_{t+1}^2}{1+p_{t+1}} = \frac{p_{t+1}}{1+p_{t+1}}$$

i njeno rešenje daje optimalno upravljanje

$$p = 0 \Rightarrow u_t^* = 0 \Rightarrow x_t = x_{t+1}$$

Odavde se vidi da dobijeno rešenje uopšte ne utiče na stabilnost sistema, odnosno da je on i dalje na granici stabilnosti. Ovo je prirodna posledica definisanog kriterijuma. Naime, pošto se kriterijumom jedino traži da se minimizira potrošnja, očigledno je da je ona najmanja kada je upravljanje jednako nuli.

Primenom teorije Ljapunova na optimalni sistem u zatvorenoj sprezi može se pokazati da će on biti stabilan ukoliko je matrica P pozitivno definitna, umesto pozitivno semidefinitna. Otuda se postavlja pitanje kako treba definisati kriterijum performanse da bi se obezbedila pozitivna definitnost matrice P.

Minimalna mera performanse

$$J^* = \frac{1}{2} x_0^T P x_0 = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ x_t^T Q x_t + (u_t^*)^T R_t u_t^* \right\}$$

je, zbog pozitivne definitnosti matrice  $R_t$  pozitivna uz uslov da je  $\forall t, u_t \neq 0$ . Pod tim uslovom je i matrica P pozitivno definitna. Ovaj uslov, međutim, ima smisla samo ako se posmatra konačan interval vremena, jer kod optimizacije na beskonačnom intervalu vremena upravljanje mora da teži ka nuli. U protivnom bi sve mere performanse bile beskonačno velike. Prema tome, pošto je

izvesno da će član u indeksu performanse koji potiče od upravljanja posle dovoljno dugog vremena postati nula, pozitivnost indeksa performanse, a time i pozitivna definitnost matrice P zavisice i od strukture matrice Q.

Analizom matricne Rikatijeve diferentne jednačine može se pokazati da je potreban i dovoljan uslov za pozitivnu definitnost rešenja da par  $[A, D]$  bude kompletno observabilan, gde je D proizvoljna matrica za koju važi

$$Q = D^T D \quad (4.98)$$

---

Pozitivnost matrice Q je dovoljan uslov da par  $[A, D]$  bude observabilan. Pre svega, ako je Q pozitivno definitna matrica tada važi

$$\forall x \neq 0, x^T Q x > 0 \Rightarrow x^T D^T D x > 0 \Rightarrow (Dx)^T (Dx) > 0 \Rightarrow$$

$$x^T Q x = 0 \Leftrightarrow Dx = 0$$

Budući da pozitivnost matrice Q implicira

$$x^T Q x = 0 \Rightarrow x = 0$$

to znači da važi i sledeća implikacija

$$Dx = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{rang} D = n$$

Poslednji uslov  $\text{rang} D = n$ , je dovoljan uslov observabilnosti para  $[A, D]$ .

---

Naglasimo da se može pokazati da uslov observabilnosti para  $[A, D]$  zavisi isključivo od matrice Q, a ne od izbora matrice D. Ovaj uslov zapravo obezbeđuje da se sve trajektorije stanja vide u kriterijumu performanse. Kako ovaj kriterijum mora imati konačnu vrednost, to će implicirati i stabilizaciju svih eventualno nestabilnih trajektorija.

#### REŠAVANJE RIKATIJEVE JEDNAČINE

Kao što je već rečeno ukoliko je sistem stacionaran i ukoliko su težinske matrice Q i R konstantne Rikatijeva diferentna jednačina (4.92) ima stacionarno rešenje P. U opštem slučaju ovo rešenje se može dobiti nekom od metoda za rešavanje diferentnih jednačina, pri čemu se kada se dobije rešenje odredi njegovo stacionarno stanje ( $t \rightarrow \infty$ ). Međutim, imajući u vidu da je traženo rešenje konstantno, ono se može odrediti i tako što bi se umesto diferentne, rešavala algebarska Rikatijeva jednačina

$$P = A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q$$

Problem je jedino u tome što, za razliku od diferentne jednačine koja ima jedinstveno rešenje, algebarska jednačina ima više rešenja, pa se nužno postavlja pitanje koje od tih rešenja predstavlja u isto vreme i rešenje diferentne jednačine. Ukoliko je matrica Q odabrana tako da je par  $[A, D]$  observabilan tada algebarska Rikatijeva jednačina ima samo jedno pozitivno definitno rešenje i to rešenje je jednako rešenju Rikatijeve diferentne jednačine. U tom slučaju se algebarska jednačina može rešavati iterativnim postupkom za neku pozitivno definitnu početnu vrednost  $P_0$

$$P_{i+1} = A^T P_i A - A^T P_i B (R + B^T P_i B)^{-1} B^T P_i A + Q \quad (4.99)$$

Iterativna procedura se prekida kada su norme dva susedna rešenja  $\|P_i\|$  i  $\|P_{i+1}\|$  dovoljno bliske.

---

#### PR. 4-7

Posmatra se isti sistem koji je na granici stabilnosti

$$x_{t+1} = x_t + u_t$$

Ako sada pretpostavimo da se merom performanse postavljaju zahtevi i u pogledu trajektorije stanja sistema i u pogledu upravljanja, odnosno da je mera performanse, na primer,

$$J = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} (2x_t^2 + u_t^2) \quad (A = B = R = 1; Q = 2)$$

tada je Rikatijska diferencijalna jednačina

$$p_t = p_{t+1} - \frac{p_{t+1}^2}{1 + p_{t+1}} + 2$$

odnosno Rikatijska algebarska jednačina je

$$p^2 - p - 2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow p = 2$$

Usvajajući pozitivno rešenje, optimalno upravljanje je

$$u_t^* = -\left(B^T P B + R\right)^{-1} B^T P A x_t = -\frac{2}{3} x_t$$

Iz jednačine sistema u zatvorenoj sprezi

$$K = \frac{2}{3}; x_{t+1} = (A - BK) x_t = \frac{1}{3} x_t$$

se vidi da je sopstvena vrednost sistema  $\lambda=1/3$ , što znači da je sistem stabilan.

#### 4.5.5 OPTIMALNI KONTINUALNI KONTINUALNI KONTROLER NA NEOGRANIČENOM INTERVALU VREMENA

Kao što je već rečeno, rešenje optimalnog upravljanja za kontinualne sisteme izvodi se primenom varijacionog računa. Budući da je ovo rešenje, zapravo, analogno rešenju dobijenom za diskretne sisteme, navešćemo samo krajnje rezultate, ne upuštajući se u njihovo izvođenje.

Posmatra se linearan, nestacionaran sistem opisan kontinualnim modelom u prostoru stanja

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (4.100)$$

Potrebno je odrediti optimalno upravljanje koje minimizira kriterijum performanse

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t) \right\} dt \quad (4.101)$$

gde su

$Q(t)$  – vremenski promenljiva, realna simetrična pozitivno semidefinitna matrica

$R(t)$  - vremenski promenljiva, realna simetrična pozitivno definitna matrica.

Optimalno upravljanje određeno je relacijom

$$u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) P(t) x(t) \quad (4.102)$$

pri čemu je  $P(t)$  rešenje matrice Rikatijske diferencijalne jednačine

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0 \quad (4.103)$$

uz granični uslov  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$ .

Minimalna mera performanse određena je sa

$$J^*(t) = \frac{1}{2} x^T(t) P(t) x(t) \quad (4.104)$$

Ako se nadalje pretpostavi da je sistem stacionaran (matrice A i B su konstantne) i da su težinske matrice Q i R takođe konstantne, tada je optimalno upravljanje određeno sa

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \quad (4.105)$$

gde je P stacionarno rešenje matrice Rikatijske diferencijalne jednačine

$$\dot{P}(t) + P(t)A + A^T P(t) - P(t)B R^{-1} B^T P(t) + Q = 0; \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0 \quad (4.106)$$

Ovo rešenje istovremeno zadovoljava i matricnu Rikatijsku algebarsku jednačinu

$$PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (4.107)$$

U pogledu egzistencije stacionarnog rešenja kao i stabilnosti sistema u zatvorenoj



povratnoj sprezi, važe isti uslovi kao i kod diskretnih sistema.

#### PR. 4-8

##### Zadatak

Posmatra se linearni sistem prvog reda  $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$  za koji se traži optimalno upravljanje tako da se minimizira indeks performanse

$$J = \frac{1}{2}hx_f(t) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (qx^2(t) + ru^2(t))dt ; h, q \geq 0, r > 0$$

##### Analiza sistema u otvorenoj sprezi

- Stabilnost: sopstvena vrednost sistema  $\lambda=a \Rightarrow a<0$  stabilan,  $a>0$  nestabilan
- Trajektorija stanja:  $x(t) = e^{at} + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$
- kontrolabilnost:  $b \neq 0$  kontrolabilan,  $b=0$  nekontrolabilan

##### Očekivani (teorijski) rezultati

$t_f$  KONAČNO

$$\text{Optimalno upravljanje } u^*(t) = -\frac{1}{r}bp(t)x(t) = -\hat{r}b\hat{p}(t)x(t)$$

gde je  $p(t)$  rešenje matrice Rikatijske diferencijalne jednačine

$$\dot{p}(t) + q + 2ap(t) - p^2(t)\hat{r}b^2 = 0 ; p(t_f) = h$$

$$\text{Minimalni (optimalni) indeks performanse: } J^*(x(t), t) = \frac{1}{2}p(t)x^2(t) \Rightarrow J^* = \frac{1}{2}p_0x_0^2$$

- rešenje postoji za svako  $b$  (kontrolabilnost nije uslov)
- stacionaran kontroler se ne može ostvariti za  $h=0$  (uslov za stacionarni kontroler je  $h = q + 2ah - h^2b^2\hat{r}$ )

$t_f$  BESKONAČNO

$$\text{Optimalno upravljanje } u^*(t) = -\hat{r}b\bar{p}x(t)$$

gde je  $\bar{p}$  stacionarno rešenje matrice Rikatijske diferencijalne jednačine

$$\dot{p}(t) + q + 2ap(t) - p^2(t)\hat{r}b^2 = 0 ; \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 0$$

koje istovremeno zadovoljava Rikatijsku algebarsku jednačinu

$$q + 2a\bar{p} - \bar{p}^2\hat{r}b^2 = 0$$

Ukoliko je  $q>0$ , algebarska jednačina ima samo jedno pozitivno rešenje ( $p>0$ )

$$\text{Minimalni (optimalni) indeks performanse: } J^* = \frac{1}{2}\bar{p}(t)x_0^2$$

- rešenje ne postoji za  $b=0$  (kontrolabilnost je uslov)
- za  $q>0$  sistem je stabilan za svako  $a$

##### Rešavanje Rikatijske diferencijalne jednačine

Ova jednačina se može rešiti na tri načina

- Odredi se rešenje jednačine sa konačnim vremenom trajanja i na osnovu njega se dobije stacionarno rešenje
  - Odredi se rešenje jednačine sa beskonačnim vremenom trajanja
  - Odredi se pozitivno rešenje algebarske Rikatijske jednačine
- Nezavisno od načina rešavanja, rešenje će zavisiti i od vrednosti parametara  $q$  i  $b$

- $q>0, b \neq 0$

##### Rešavanje Rikatijske diferencijalne jednačine: konačno krajnje vreme $t_f$

Rikatijska jednačina

$$\dot{p}(t) + q + 2ap(t) - p^2(t)\hat{r}b^2 = 0 ; p(t_f) = h$$

se može rešiti metodom razdvajanja promenljivih. Kako je

$$p^2(t)\hat{r}b^2 - 2ap(t) - q = \hat{r}b^2(p(t) - \alpha)(p(t) - \beta) \quad \alpha = \frac{a}{\hat{r}b^2} + \frac{\sqrt{a^2 + q\hat{r}b^2}}{\hat{r}b^2}; \beta = \frac{a}{\hat{r}b^2} - \frac{\sqrt{a^2 + q\hat{r}b^2}}{\hat{r}b^2}$$

$$\frac{1}{\hat{r}b^2(p(t) - \alpha)(p(t) - \beta)} = \frac{C_1}{(p(t) - \alpha)} + \frac{C_2}{(p(t) - \beta)}; C_1 = \frac{1}{\hat{r}b^2(\alpha - \beta)} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + q\hat{r}b^2}}; C_2 = -C_1$$

rešenje jednačine se dobija na sledeći način.

$$\dot{p}(t) + q + 2ap(t) - p^2(t)\hat{r}b^2 = 0 \quad ; p(t_f) = h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{p}(t) - \hat{r}b^2(p(t) - \alpha)(p(t) - \beta) = 0 \Rightarrow \frac{dp}{(p(t) - \alpha)(p(t) - \beta)} = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{(p(t) - \alpha)} - \frac{dp}{(p(t) - \beta)} = \frac{dt}{C_1} = C dt \quad C = \frac{1}{C_1} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(p(t) - \alpha) - \ln(p(t) - \beta) = Ct + L \Rightarrow \frac{p(t) - \alpha}{p(t) - \beta} = e^{Ct} e^L \Rightarrow$$

$$\frac{p(t_f) - \alpha}{p(t_f) - \beta} = e^{Ct_f} e^L \Rightarrow \frac{h - \alpha}{h - \beta} = e^{Ct_f} e^L \Rightarrow e^L = \frac{h - \alpha}{h - \beta} e^{-Ct_f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p(t) - \alpha}{p(t) - \beta} = \frac{h - \alpha}{h - \beta} e^{-C(t_f - t)} \Rightarrow p(t) = \frac{h(\beta e^{-C(t_f - t)} - \alpha) + \alpha\beta(1 - e^{-C(t_f - t)})}{h(e^{-C(t_f - t)} - 1) + (\beta - \alpha e^{-C(t_f - t)})}$$

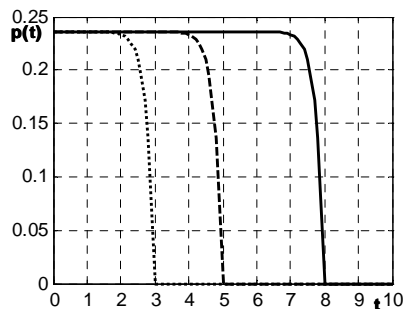
**Analiza rešenja za p(t) - stacionarnost kontrolera**

Za različite vrednosti h, p(t) nije konstanta. Tako je na primer za h=0

$$h = 0, \quad p(t) = \frac{\alpha\beta(1 - e^{-C(t_f - t)})}{(\beta - \alpha e^{-C(t_f - t)})} \neq \text{const}$$

Međutim ako se h definiše kao pozitivno rešenje jednačine

$$h = q + 2ah - h^2 b^2 \hat{r} \Rightarrow h_{1,2} = \frac{1 - 2a \pm \sqrt{(1 - 2a)^2 + 4qb^2 \hat{r}}}{2b^2 \hat{r}}; \quad h \geq 0 \Rightarrow h = \frac{1 - 2a + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 4qb^2 \hat{r}}}{2b^2 \hat{r}}$$



tada je h rešenje Rikatijske diferencijalne jednačine, jer je  $\dot{h} - q - 2ah + h\hat{r}b^2 = 0$ , što znači da je kontroler stacionaran.

$$p(t) = h = \frac{1 - 2a + \sqrt{(1 - 2a)^2 + 4qb^2 \hat{r}}}{2b^2 \hat{r}} \Rightarrow u^*(t) = -\hat{r}bh = \text{const}$$

**Stacionarno rešenje p(t)**

Budući da je

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} e^{-C(t_f - t)} = 0 \Rightarrow \lim_{t_f \rightarrow \infty} p(t) = \bar{p} = \frac{-h\alpha + \alpha\beta}{-h + \beta} = \alpha$$

stacionarno rešenje ne zavisi od vrednosti h. Na slici je prikazano rešenje za slučaj kada je a=-2, b=1, r=q=1, h=0, i t\_f={3, 5, 8}. Kao što se vidi, nezavisno od krajnjeg vremena sva tri rešenja imaju isto stacionarno rešenje  $\alpha=0.2361$ .

**Rešavanje Rikatijske diferencijalne jednačine: beskonačno krajnje vreme (t\_f = ∞, h=0)**

U skladu sa onim što je već rečeno o rešenju Rikatijske diferencijalne jednačine, vidi se da je u ovom slučaju rešenje

$$p(t) = \frac{\alpha\beta(1 - e^{-C(t_f - t)})}{(\beta - \alpha e^{-C(t_f - t)})} \Rightarrow \lim_{t_f \rightarrow \infty} p(t) = \alpha = \frac{a}{\hat{r}b^2} + \frac{\sqrt{a^2 + q\hat{r}b^2}}{\hat{r}b^2}, \quad \forall a, q > 0 \Rightarrow \alpha > 0$$

jednako stacionarnom rešenju p(t) koje je određeno za slučaj konačnog vremena.

**Rešenje algebarske Rikatijske jednačine**

$$q + 2ap - p^2\hat{r}b^2 = \hat{r}b^2(p - \alpha)(p - \beta) \quad ; a, q > 0 \quad ; \alpha > 0, \quad \beta < 0$$

Ova jednačin ima dva rešenja ( $\alpha$  i  $\beta$ ), od kojih je samo jedno ( $\alpha$ ) pozitivno i ono je jednako rešenju Rikatijske diferencijalne jednačine.

### Rezultujući optimalni kontroler

$$u^*(t) = -\hat{r}b^2\alpha x(t)$$

je linearan, tako da jednačina sistema u zatvorenoj sprezi postaje

$$\dot{x}(t) = (a - \hat{r}b^2\alpha)x(t)$$

### Uslov stabilnosti

Optimalni sistem u zatvorenoj sprezi biće stabilan ukoliko se njegova sopstvena vrednost nalazi u levoj poluravni s-ravni, odnosno ako je

$$\lambda = a - \hat{r}b^2\alpha < 0 \Rightarrow a < \hat{r}b^2\alpha = a + \sqrt{a + q\hat{r}b^2},$$

dati uslov je ispunjen za svako  $a$ , što znači da je optimalni sistem stabilan.

Primitimo da je u slučaju kad je sistem nekontrolabilan ( $b=0$ ), optimalno upravljanje  $u^*(t)=0$ . Upravljeni sistem je međutim i dalje stabilan ako je  $a < 0$ , odnosno ako je sistem stabilan u otvorenoj sprezi. (kontrolabilnost je uslov stabilnosti samo za nestabilne modove).

- $q = 0, b \neq 0$

### Rešavanje Rikatijske jednačine: konačno krajnje vreme $t_f$

Ponovnom primenom metode razdvajanja promenljivih na Rikatijsku diferencijalnu jednačinu

$$\dot{p}(t) + 2ap(t) - p^2(t)\hat{r}b^2 = 0 \quad ; \quad p(t_f) = h$$

dobija se

$$\frac{dp}{\hat{r}b^2 p(t)(p(t) - \alpha)} = dt \quad ; \quad \alpha = \frac{2a}{\hat{r}b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{2ap(t)} - \frac{dp}{2a(p(t) - \alpha)} = dt \Rightarrow \ln p(t) - \ln(p(t) - \alpha) = 2at + L \Rightarrow \frac{p(t)}{p(t) - \alpha} = e^{2at} e^L$$

Konstanta integracije  $L$  određuje se uvrštavanjem graničnog uslova

$$\frac{p(t_f)}{p(t_f) - \alpha} = e^{2at_f} e^L \Rightarrow \frac{h}{h - \alpha} = e^{2at_f} e^L \Rightarrow e^L = \frac{h}{h - \alpha} e^{-2at_f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p(t)}{p(t) - \alpha} = \frac{h}{h - \alpha} e^{-2a(t_f - t)} \Rightarrow p(t) = \frac{\alpha h e^{-2a(t_f - t)}}{\alpha - h(1 - e^{-2a(t_f - t)})}$$

U pogledu stacionarnosti dobijeno rešenje ima iste osobine kao i u prethodnom slučaju.

### Rešavanje Rikatijske jednačine: beskonačno krajnje vreme ( $t_f = \infty, h = 0$ )

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} p(t) = 0 \Rightarrow u^*(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = (a - \hat{r}b^2 p)x(t) = ax, \text{ sistem je nestabilan za } a < 0.$$

### Rešenje algebarske Rikatijske jednačine

Algebarska Rikatijska jednačina:

$$2ap - p^2\hat{r}b^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = \frac{2a}{\hat{r}b^2} > 0$$

ima jedno pozitivno rešenje, ali ono nije jednako stacionarnom rešenju diferencijalne jednačine. Stacionarno rešenje diferencijalne jednačine je zapravo  $p_1$  ali ono nije pozitivno. To je posledica činjenice da je  $q=0$ . Ako se usvoji  $p_2$  kao rešenje, tada je sistem u zatvorenoj sprezi

$$\dot{x}(t) = (a - \hat{r}b^2 p_2)x(t) = -ax$$

stabilan za  $a < 0$ ; ali indeks performanse nije minimalan  $J = p_2 x_0^2 > 0 = J^* = p_1 x_0^2$ .

$b=0$  - NEKONTROLABILAN SISTEM

$$\dot{p}(t) + 2ap(t) + q = 0 \quad ; \quad p(t_f) = h \Rightarrow \dot{p}(t) = -2ap(t) - q; \text{ uz uslov } a \neq 0 \Rightarrow$$

$$p(t) = e^{-2at} p_0 - \int_0^t e^{-2a(t-\tau)} q d\tau = e^{-2at} p_0 - \frac{q}{2a} e^{-2at} e^{2a\tau} \Big|_0^t = e^{-2at} p_0 - \frac{q}{2a} (1 - e^{-2at})$$

$$\Rightarrow p(t_f) = h \Rightarrow h = e^{-2at_f} p_0 - \frac{q}{2a} (1 - e^{-2at_f}) \Rightarrow p_0 = \left[ h + \frac{q}{2a} (1 - e^{-2at_f}) \right] e^{2at_f} \Rightarrow$$

$$p(t) = h e^{2a(t_f-t)} + \frac{q}{2a} (e^{2a(t_f-t)} - 1)$$

*Analiza rešenja*

Za konačno vreme  $t_f$   $p_0$  je konačno što znači da je i optimalni indeks performanse  $J^*$  konačan.

Ukoliko se pretpostavi da je  $h=0$ , rešenje Rikatijeve jednačine u slučaju beskonačnog krajnjeg vremena je

$$p(t) = \frac{q}{2a} (e^{2a(t_f-t)} - 1) \Rightarrow \lim_{t_f \rightarrow \infty} p(t) = \begin{cases} -\frac{q}{2a} = \bar{p} = \text{const} & a < 0 \\ \infty & a > 0 \end{cases}$$

Ovo rešenje postoji i pozitivno je samo ako je  $a < 0$ , odnosno ako je sistem u otvorenoj sprezi stabilan. Ukoliko je međutim,  $a > 0$  sistem u otvorenoj sprezi je nestabilan, pa budući da je istovremeno i nekontrolabilan, stacionarno rešenje ne postoji.

#### PR. 4-9

Dat je linearni sistem drugog reda  $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$  i mera performanse

$$J = \frac{1}{2} (x_{1f}^2 + x_{2f}^2) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x_1^2(t) + qx_2^2(t) + u^2(t)) dt; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}; \quad R = 1$$

*Analiza sistema u otvorenoj sprezi*

- sopstvene vrednosti:  $\lambda_1=0, \lambda_2=b$
- sistem je nekontrolabilan, nekontrolabilno stanje je stanje  $x_2$

*Očekivani rezultati*

Trebalo bi da može da se promeni  $\lambda_1$ , ali ne i  $\lambda_2$ , jer ova sopstvena vrednost odgovara nekontrolabilnom stanju.

*Rešenje*

$t_f$  KONAČNO

S obzirom na date izraze za matrice  $R$  i  $B$  optimalno upravljanje i mera performanse određeni su sledećim izrazima.

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P(t) x(t) = -p_{11}(t) x_1(t) - p_{12}(t) x_2(t)$$

$$J^*(x(t), t) = \frac{1}{2} p(t) x^2(t) \Rightarrow J^* = \frac{1}{2} p_0 x_0^2$$

Rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine može se dobiti razlaganjem matrice jednačine na tri skalarne jednačine.

$$\dot{P}(t) + Q - P(t) B R^{-1} B^T P(t) + P(t) A + A^T P(t) = 0; \quad P(t_f) = H; \quad P = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$P(t) B R^{-1} B^T P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) \\ p_{12}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}^2(t) & p_{11}(t)p_{12}(t) \\ p_{11}(t)p_{12}(t) & p_{12}^2(t) \end{bmatrix}$$

$$P(t)A = \begin{bmatrix} 0 & ap_{11}(t) + bp_{12}(t) \\ 0 & ap_{12}(t) + bp_{22}(t) \end{bmatrix}; \quad A^T P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ap_{11}(t) + bp_{12}(t) & ap_{12}(t) + bp_{22}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{p}_{11}(t) = p_{11}^2(t) - 1; \quad p_{11}(t_f) = 1$$

$$\dot{p}_{12}(t) = p_{11}(t)p_{12}(t) - ap_{11}(t) - bp_{12}(t); \quad p_{12}(t_f) = 0$$

$$\dot{p}_{22}(t) = p_{12}^2(t) - 2ap_{12}(t) - 2bp_{22}(t) - q; \quad p_{22}(t_f) = 1$$

Sukcesivnim rešavanjem ove tri diferencijalne jednačine uz korišćenje graničnih uslova dobija se

$$\dot{p}_{11}(t) = p_{11}^2(t) - 1; \quad p_{11}(t_f) = 1 \Rightarrow \frac{dp_{11}(t)}{p_{11}^2(t) - 1} = dt \Rightarrow \frac{p_{11}(t) - 1}{p_{11}(t) + 1} = Ce^{2t}$$

$$p_{11}(t_f) = h_{11} = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow p_{11}(t) = p = 1$$

$$\dot{p}_{12}(t) = p_{11}(t)p_{12}(t) - ap_{11}(t) - bp_{12}(t); \quad p_{12}(t_f) = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{p}_{12}(t) = (1-b)p_{12}(t) - a \Rightarrow p_{12}(t) = e^{(1-b)t} p_{12}(0) + \int_0^{t_f} e^{(1-b)(t-\tau)} (-a) d\tau =$$

$$= e^{(1-b)t} p_{12}(0) + \frac{a}{1-b} e^{(1-b)(t-\tau)} \Big|_0^{t_f} = e^{(1-b)t} p_{12}(0) + \frac{a}{1-b} (1 - e^{-(1-b)t})$$

$$p_{12}(t_f) = h_{12} = 0 \Rightarrow p_{12}(0) = \frac{a}{1-b} (1 - e^{-(1-b)t_f}) \Rightarrow p_{12}(t) = \frac{a}{1-b} (1 - e^{-(1-b)(t_f-t)})$$

Na osnovu dobijenog rešenja, optimalno upravljanje je

$$u^*(t) = -p_{11}(t)x_1(t) - p_{12}(t)x_2(t) = x_1(t) - \frac{a}{1-b} (1 - e^{-(1-b)(t_f-t)}) x_2(t)$$

Pošto je  $x_2$  nekontrolabilno, to znači da upravljanje ne deluje na izraz  $qx_2^2(t)$  iz indeksa performanse. U skladu sa tim logično je da se vrednost  $q$  ne pojavljuje u izrazu za optimalno upravljanje. Međutim, pošto je  $x_1$  zavisno od  $x_2$ , optimalno upravljanje zavisi i od stanja  $x_2$ . Ukoliko je  $a=0$ , tada je  $x_1$  nezavisno od  $x_2$ , pa je i logično što je optimalno upravljanje  $u^*(t) = -x_1(t)$ .

Sistem u zatvorenoj sprezi opisan je jednačinom

$$u^*(t) = -p_{11}(t)x_1(t) - p_{12}(t)x_2(t); \quad p_{11} = 1; \quad p_{12} = \frac{a}{1-b} (1 - e^{-(1-b)(t_f-t)})$$

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - (a - p_{12}(t))x_2(t) = -x_1(t) - \frac{a}{1-b} (b - e^{-(1-b)(t_f-t)}) x_2(t) \Rightarrow$$

$$x_1(t) = e^{-t} x_{10} - \frac{a}{1-b} \left\{ \frac{b}{1+b} (e^{bt} - e^{-t}) - e^{-(1-b)t_f} (e^t - 1) \right\} x_{20}$$

$$\dot{x}_2(t) = b \Rightarrow x_2(t) = e^{bt} x_{20}$$

Zamenom dobijenih rešenja u izraz za meru performanse vidi se da je ona konačna, ali i da postoji jedan član na čiju vrednost optimalno upravljanje ne utiče.

$$J^*(x(t), t) = x^T(t)P(t)x(t) = p_{11}(t)x_1^2(t) + p_{22}(t)x_2^2(t) + 2p_{12}(t)x_1(t)x_2(t)$$

$$J^*(x_0, t_0) = x_{10}^2 + \underbrace{p_{220}x_{20}^2}_{\text{ne može se uticati}} + 2p_{120}x_{10}x_{20}$$

#### $t_f$ BESKONAČNO

Stacionarno rešenje Rikatijske jednačine dobija se na isti način kao i u prethodnom slučaju samo uz uslov da je  $H=0$ . Zapazimo da se time menjaju granični uslovi samo za članove  $p_{11}$  i  $p_{22}$  u rešenju, dok je uslov za  $p_{12}$  nepromenjen. Otuda sledi

$$\dot{p}_{11}(t) = p_{11}^2(t) - 1; \quad p_{11}(t_f) = 1 \Rightarrow \frac{dp_{11}(t)}{p_{11}^2(t) - 1} = dt \Rightarrow \frac{p_{11}(t) - 1}{p_{11}(t) + 1} = Ce^{2t}$$

$$p_{11}(t_f) = 0 \Rightarrow C = -e^{-2t} \Rightarrow p_{11}(t) = \frac{1 + Ce^{2t}}{1 - Ce^{2t}} = \frac{1 - e^{-2(t_f-t)}}{1 + e^{-2(t_f-t)}}; \quad \lim_{t_f \rightarrow \infty} p_{11}(t) = 1$$

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} p_{12}(t) = \frac{a}{1-b} (1 - e^{-(1-b)(t_f-t)}) = \bar{p}_{12}(t) = \frac{a}{1-b}$$

$$\dot{p}_{22}(t) = p_{12}^2(t) - 2ap_{12}(t) - 2bp_{12}(t); \quad p_{22}(t_f) = 0$$

$$p_{22}(t) = e^{-2bt} p_{220} + \int_0^{t_f} e^{-2b(t-\tau)} (p_{12}^2 - 2ap_{12} - q) d\tau = e^{-2bt} p_{220} + \frac{1}{2b} (p_{12}^2 - 2ap_{12} - q) (1 - e^{-2bt})$$

$$p_{22}(t_f) = 0 \Rightarrow p_{220} = -\frac{1}{2b} (p_{12}^2 - 2ap_{12} - q) e^{2bt_f} \Rightarrow p_{22}(t) = \frac{p_{12}^2 - 2ap_{12} - q}{2b} (1 - e^{2b(t_f-t)})$$

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} p_{22}(t) = \frac{p_{12}^2 - 2ap_{12} - q}{2b}; \quad \text{za } b < 0$$

Rešenje se može odrediti i preko algebarske matricne Rikatijske jednačine. Razbijanje na sklarane algebarske jednačine i izdvajanje pozitivnih rešenja daje

$$p_{11}^2 - 1 = 0 \Rightarrow p_{11} = \pm 1$$

$$p_{11}p_{12} - ap_{11} - bp_{12} = 0 \Rightarrow p_{12} = \frac{a}{1-b}$$

$$p_{12}^2 - 2ap_{12} - 2bp_{22} - q = 0 \Rightarrow p_{22} = \frac{p_{12}^2 - 2ap_{12} - q}{2b}$$

$$p_{12} = \frac{a}{1-b} \Rightarrow p_{22} = \frac{a^2(2b-1) - q(1-b)^2}{2b(1-b)^2}$$

*Uslov pozitivnosti*

$$p_{11} > 0 \Rightarrow p_{11} = 1$$

$$p_{11}p_{22} > p_{12}^2 \Rightarrow p_{22} > p_{12}^2 \Rightarrow \frac{a^2(2b-1) - q(1-b)^2}{2b(1-b)^2} > \frac{a^2}{(1-b)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2q(1-b)^2 < 0; & b > 0 \\ a^2q(1-b)^2 > 0; & b < 0 \end{cases}$$

Budući da izraz  $a^2q(1-b)^2$  ne može biti negativan, rešenje algebarske jednačine je pozitivno definitna matrica samo ako je  $b < 0$ , odnosno samo pod istim uslovima pod kojima postoji i stacionarno rešenje diferencijalne jednačine.

Pod datim uslovima optimalno upravljanje je

$$u^*(t) = -p_{11}x_1(t) - p_{12}x_2(t) = -x_1(t) - \frac{a}{1-b}x_2(t)$$

dok je jednačina sistema u zatvorenoj sprezi

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - (a - p_{12}(t))x_2(t) = -x_1(t) - \frac{a}{1-b}x_2(t) \Rightarrow$$

$$x_1(t) = e^{-t}x_{10} - \frac{ab}{1-b}(e^{bt} - e^{-t})x_{20} \Rightarrow x_1(t) \rightarrow 0 \quad \text{za } b < 0$$

$$\dot{x}_2(t) = b \Rightarrow x_2(t) = e^{bt}x_{20}$$

Očigledno je da će stanje  $x_1$  biti stabilno samo ako je  $b < 0$ , što je istovremeno i uslov pozitivnosti rešenja Rikatijske jednačine. Drugim rečima, ako je sistem u otvorenoj sprezi stabilan, ostaće stabilan i u zatvorenoj, jer se zbog nekontrolabilnosti sistema on ne može stabilisati zatvaranjem povratne sprege.

Trajektorije sistema u zatvorenoj sprezi mogu se odrediti i iz nestacionarnog rešenja

$$x_1(t) = e^{-t}x_{10} - \frac{a}{1-b} \left\{ \frac{b}{1+b}(e^{bt} - e^{-t}) - e^{-(1-b)t_f} (e^t - 1) \right\} x_{20}$$

$$t_f \rightarrow \infty \quad \text{za } b < 1 \quad x_1(t) = e^{-t}x_{10} - \frac{ab}{1-b}(e^{bt} - e^{-t})x_{20} \Rightarrow x_1(t) \rightarrow 0 \quad \text{za } b < 0$$

Iako je ovde uslov za određivanje trajektorije drugačiji, treba zapaziti da će trajektorija i dalje biti stabilna samo ako je  $b < 0$ .

*"U svakoj aktivnosti razmislite šta joj je prethodilo i šta sledi iz nje, a onda je preduzmite"*

Thomas W. Higginson, Rasprave

## 5 Savremene metode projektovanja upravljačkih sistema

U OVOM POGLAVLJU ČITALAC ĆE

- *sagledati osnovne koncepte savremenih metoda projektovanja upravljanja na osnovu U/I modela*
- *ovladati formiranjem matematičkog modela u prediktorskoj formi*
- *ovladati metodologijom projektovanja prediktivnog kontrolera*
- *uočiti ograničenja u praktičnoj realizaciji prediktivnog kontrolera i sagledati moguće modifikacije*
- *uočiti osetljivost projektovanog kontrolera na tačnost matematičkog modela procesa*
- *uspostaviti vezu između projektovanja prediktivnog upravljanja i drugih metoda projektovanja zasnovanih na praćenju referentnog modela i podešavanju polova*

### 5.1 Opšti pristup projektovanju kontrolera

*Od mnoštva međusobno suprotstavljenih strategija ka jedinstvenoj metodologiji projektovanja*

Kada se posmatra istorija razvoja teorije upravljanja sistemima vidi se da je pojava novih rešenja uvek bila uslovljena nekim praktičnim problemom koji se nije mogao rešiti postojećim metodama. U traženju načina da se reši partikularni problem otkrivani su novi koncepti, drugačije zavisnosti i shodno tome razvijana nova metodologija. Većina metoda projektovanja kontrolera je nastala tek nakon kreiranja kontrolera kojim je rešavan neki konkretan problem. Veoma često, tek sa uspešnošću praktičnog rešenja otvaralo se pitanje njegove teorijske opravdanosti, a iz njegove analize rađala se opšta teorija projektovanja. U početnoj fazi sticao se utisak da se radi o međusobno veoma različitim strategijama upravljanja. Brojni radovi svedoče o debatama u kojima je, sa puno argumenata, dokazivano zašto je neka metodologija superiorna u odnosu na ostale<sup>1</sup>.

Po prirodi stvari kako je koja od razvijenih strategija zaokružena u smislu egzistencije rešenja, utvrđivanja domena primenjivosti i ocene performanse, tako je istovremeno i poopštavana sa teorijskog aspekta. Vremenom se ustanovilo da se u poopštenu konceptu mogu uključiti i neke druge strategije. Drugim rečima, pokazalo se da veliki broj metoda za projektovanje kontrolera, zapravo proizilazi iz jednog šireg koncepta, odnosno da se ne radi o suštinski drugačijim strategijama, već pre o drugačijoj interpretaciji jedne, u osnovi, iste strategije.

Kada se sumiraju svi rezultati vidi se da se svi kontroleri projektuju u skladu sa sledećim zahtevima.

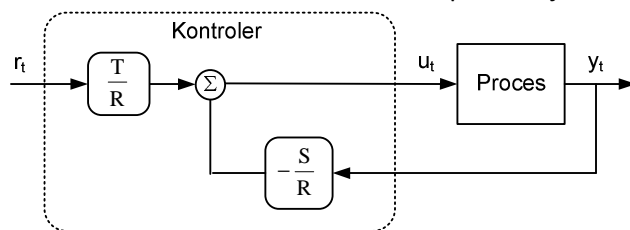
- *Stabilnost* sistema koja podrazumeva i ograničenost ulaznih i izlaznih signala javlja se kao preduslov svakog projektovanja. To zapravo znači da ne postoji nijedna metodologija projektovanja koja ne polazi od ovog uslova.
- *Performansa* praćenja, odnosno sposobnost sistema da na izlazu reprodukuje željene vrednosti. Kao specijalni slučaj javlja se zahtev regulacije kod koga su željene vrednosti konstante.
- *Ograničenja* – teorijski ukoliko je sistem linearan, ukoliko se njegov model poznaje egzaktno i ukoliko na sistem ne deluju poremećaji moguće je, korišćenjem dovoljno složenog zakona upravljanja, ostvariti proizvoljno dobru performansu. Međutim, u praksi se uvek pojavljuju fizička ograničenja, koja se ne mogu izbeći. Sa jedne strane ona su uslovljena samom

<sup>1</sup> U Kabinetu za Automatiku na Elektrotehničkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu dugi niz godina stajao je na zidu natpis "*i nemoj imati drugih teorija upravljanja od ...*" pri čemu se sam naziv teorije menjao svaki put kad bi nas argumenti i eksperimenti ubedili da je to "ona prava" teorija za kojom smo svi tragali.

tehnologijom procesa koja određuje maksimalne i minimalne vrednosti temperature, pritiska, protoka i drugih internih promenljivih procesa. Sa druge strane ona su uslovljena raspoloživom mernom opremom, a posebno raspoloživim izvršnim organima koji definišu granice dozvoljenih vrednosti upravljačkih signala, kao i brzine njihove promene. Konačno, i praktična realizacija kontrolera postavlja ograničenja u pogledu dozvoljene složenosti zakona upravljanja. Sva ova ograničenja uvek postavljaju gornju granicu performanse koja se može ostvariti.

- *Robusnost* predstavlja meru degradacije performanse sistema do koje dolazi usled bilo koje vrste poremećaja uzrokovanih nemodeliranom dinamikom, promenom parametara, odnosno radne tačke procesa, otkazom pojedinih komponenti, ili dejstvom spoljnih poremećaja.

Svi pristupi projektovanju zakona upravljanja polaze zapravo od performanse praćenja, pri čemu se akcenat stavlja ili na ostvarivanje odgovarajućeg prelaznog procesa ili na praćenju nekog referentnog modela. Pri tome je stabilnost inherentno uključena u samo projektovanje, dok se fizička ograničenja uzimaju u obzir tek kada se dobije osnovni oblik zakona upravljanja. Robusnost dobijenog rešenja ispituje se na kraju, kada se traže i eventualni načini da se ona poveća. Vremenom su razvijene i metode projektovanja koje su inherentno robusnije od drugih. Robusnost se takođe često koristi i za poređenje različitih kontrolera.



SL. 5-1 OPŠTI OBLIK KONTROLERA

Posmatrano potpuno opšte, može se reći da se različiti zahtevi koji se postavljaju pri projektovanju upravljanja linearnim sistemima sa jednim ulazom i jednim izlazom mogu realizovati pomoću kontrolera koji ima izgled kao što je to prikazano na Sl. 5-1. Drugim rečima projektovanje kontrolera svodi se na određivanje polinoma R, S i T koji definišu zakon upravljanja<sup>1</sup>

$$Ru_t = Tr_t - Sy_t \quad (5.1)$$

Iako bi se moglo činiti da je svođenjem projektovanja kontrolera "samo" na određivanje parametara tri polinoma problem znatno pojednostavljen to očekivanje je u potpunosti neopravdano. Radi se samo o tome da je težište pomereno od samog postupka određivanja parametara, ka osmišljavanju zahteva koje treba postaviti i koji će onda, gotovo sami od sebe, dovesti do traženog rešenja. Problem se, zapravo, kao i uvek javlja u fazi u kojoj se inženjerski zahtevi prevode u domen matematike.

Ako je osnovni cilj da dobijeni kontroler bude što jednostavniji i to pre svega u pogledu dimenzije samog rešenja, onda se kao rešenje javlja proporcionalno diferencijalni regulator (PID) čiji parametri se određuju eksperimentalno iz snimljenih karakteristika odziva. Alternativa ovom pristupu su integro-diferencijalni kompenzatori koji se projektuju grafo-analitičkim metodama u frekvencijskom ili kompleksnom domenu primenom Bodeove metode ili metode geometrijskog mesta korena. Sa aspekta zakona upravljanja (5.1) u svim ovim metodama usvaja se da su polinomi S i T jednaki. Pri tome se unapred definiše njihova struktura, pa se metode svode na određivanje parametara.

Kao što je već istaknuto osnovna prednost ovih, takozvanih "klasičnih" metoda ogleda se u jasnom značenju parametara performanse koji se postavljaju kao projektni zahtevi. Sa druge strane nemogućnost da se svi pokazatelji performanse objedine u jedan celovit zahtev u velikoj meri ograničava primenu ovih metoda. Drugim rečima, kao i sve druge prihvaćene tehnike projektovanja, i ove klasične tehnike imaju svoj ograničen domen primenljivosti.

Sa nastankom teorije sisteme, klasične tehnike bivaju u velikoj meri potisnute od strane

<sup>1</sup> Polinomi R, S i T mogu biti definisani u kompleksnom s ili z domenu u zavisnosti od toga da li se radi o kontinualnim ili diskretnim sistemima



tehnika upravljanja zasnovanim na zatvaranju povratne sprege po stanju. Sinteza sistema u prostoru stanja omogućila je razvoj potpuno novih kriterijuma performanse, a sami tim i nove tehnike projektovanja kontrolera. Pri isticanju superiornosti ovog pristupa obično se naglašava sveobuhvatnost zahteva koji se mogu ostvariti. Pri tome se, najčešće, gubi iz vida da su dobijena rešenja izuzetno složena, odnosno da su projektovani kontroleri značajno većih dimenzija od klasičnih. Jedan od uzroka povećanja dimenzija svakako predstavlja i nemogućnost direktnog merenja stanja sistema. Otuda se proširenje kontrolera observerom javlja kao preduslov za praktičnu implementaciju kontrolera.

Polazeći od činjenice da svako rešenje razvijeno u prostoru stanja može biti opisano preko odgovarajuće funkcije prenosa, prirodno se javila potreba da se dobijena rešenja sagledaju i sa tog aspekta. U tom procesu je postalo jasno da postoji mogućnost da se i u pogledu projektovanja kontrolera na osnovu modela funkcije prenosa procesa iskorači izvan domena klasične teorije. Na taj način je razvijen čitav niz novih metodologija projektovanja koje se međusobno, makar prividno, razlikuju u načinu na koji se zadaje performansa. Vremenom je postalo jasno da neka od ovih rešenja i nisu toliko različita koliko na prvi pogled izgledaju.

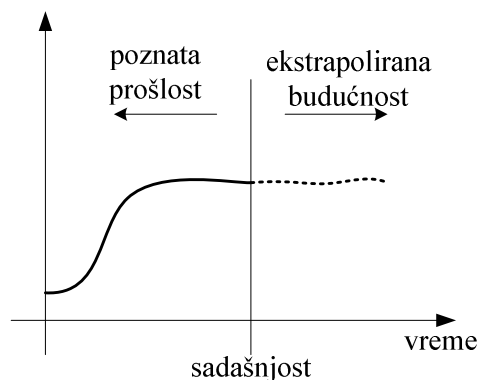
Konačno i pojava diskretnih sistema i uočavanje činjenice da algoritam upravljanja može da operiše i sa prošlim i sa budućim podacima donosi sa sobom fundamentalno novu mogućnost u pogledu projektovanja kontrolera. Čisto vremensko kašnjenje koje se javlja kao jedan od osnovnih problema u sintezi kontinualnih sistema upravljanja, ovde se pojavljuje kao izvor jedne potpuno nove klase diskretnih prediktivnih kontrolera koja nema svoj pandan u kontinualnom svetu.

Prihvatajući početnu tvrdnju da se postojeće strategije projektovanja mogu objediniti u smislu određivanja tri polinoma, prirodno se postavlja pitanje koju bi od prihvaćenih strategija trebalo usvojiti kao polaznu. Imajući na umu njihov nastanak, jasno je da se na postavljeno pitanje ne može dati jedinstven odgovor. U tom smislu ideja da se pođe od prediktivnog upravljanja, kao što je to urađeno ovde, je verovatno podjednako dobra ili loša, kao što bi to bila i bilo koja druga polazna tačka. Opređenije za ovaj pristup bilo je uslovljeno utiskom da se već kroz samu evoluciju prediktivnih kontrolera može dobro uočiti odnos inženjerskih zahteva, performanse rešenja i matematičkog aparata, a time i povezanost između različitih pristupa projektovanju.

## 5.2 Model prediktora

### *Planiranje kao predikcija budućih efekata*

Veliki broj, ako ne i sve, ljudske aktivnosti zasnivaju se na pretpostavkama i očekivanjima efekata koje će preduzeta aktivnost proizvesti u budućnosti. Drugim rečima, od svih mogućih aktivnosti u nekom trenutku, bira se ona za koju se, iz nekog razloga veruje da će dovesti do željenog efekta. U tom smislu, može se reći da se planiranje intuitivno svodi na to da se za svaku od mogućih aktivnosti izvrši predikcija efekata i da se na osnovu rezultata predikcije odabira najpogodnija aktivnost.



SL. 5-2 PREDIKCIJA EKSTRAPOLACIJOM

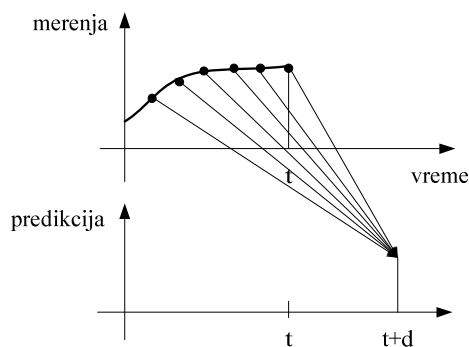
Gledano potpuno opšte, pri planiranju pojedinih aktivnosti neophodno je raspolagati podacima o prošlim aktivnostima koje su rezultovale trenutnim stanjem. Kombinovanjem ovih podataka, iskustva stečenih u sličnim situacijama, raspoloživih aktivnosti i predikcije efekta pojedine aktivnosti donosi se odluka o najpovoljnijoj aktivnosti u datom trenutku.

Jedan od najjednostavnijih pristupa predikciji je ekstrapolacija na bazi prethodno stečenih znanja. U tom cilju se posmatra neki vremenski niz koji opisuje ponašanje u prošlosti i on se ekstrapolira u trenutku koji se označava kao "sadašnjost" (Sl. 5-2). Dobijeni rezultat će svakako zavisiti od primenjene tehnike ekstrapolacije

i od toga da li je u nju ugrađeno iskustvo stečeno posmatranjem toka procesa u nekim sličnim situacijama. Tako se, na primer, pri predviđanju potrošnje vode u nekom periodu godine mogu koristiti podaci o potrošnji u istim periodima proteklih godina. Međutim, nezavisno od načina na koji će se predviđanje ekstrapolacijom doterivati, osnovni nedostatak ovog pristupa je statičnost, odnosno nemogućnost da se u toku odvijanja procesa preuzmu akcije kojima bi se uticalo na budući oblik ekstrapolirane krive. Ovaj problem se može prevazići formiranjem matematičkog modela pojave koja se posmatra. Ukoliko je model verodostojan, buduće ponašanje će biti prediktabilno do mere do koje se mogu proceniti eventualni poremećaji koji će nastupiti u budućnosti.

Kao što je već istaknuto, koncept prediktivnih modela, a zatim i prediktivnog upravljanja javio se tek sa modeliranjem diskretnih signala. Naime, tek kada je signal predstavljen kao uređeni niz podataka vezanih za skup prirodnih brojeva koji označavaju trenutke vremena, uočena je mogućnost da se "slobodnim" pozicioniranjem na vremenskoj osi deo tih podataka proglaši za "prošlost" a deo za "budućnost". Smatra se da je ideja o obradi prošlih i budućih vrednosti signala dovela do revolucionarnih promena u teoriji obrade signala. Time je, zapravo, rođena digitalna obrada signala kao fundamentalno drugačija metodologija u odnosu na klasično projektovanje kontinualnih filtara.<sup>1</sup>

### 5.2.1 LINEARNI PREDIKTOR MINIMALNE VARIJANSE



SL. 5-3 D-KORAČNA PREDIKCIJA

Projektovanje prediktora bitno zavisi od prirode usvojenog modela procesa. U cilju ilustracije same ideje posmatra se linearni model procesa čija je dinamika opisana sa

$$w_t = \frac{B_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})} u_t \quad (5.2)$$

Ako se pretpostavi da se uticaj okruženja na proces može okarakterisati preko poremećaja koji su modelirani linearnim modelom pobuđenim belim šumom

$$v_t = \frac{C_1(q^{-1})}{A_2(q^{-1})} e_t \quad (5.3)$$

tada se, primenjujući princip superpozicije, model procesa može formirati kao

$$y_t = w_t + v_t = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e_t \quad (5.4)$$

gde su polinomi u brojiocu i imeniocu definisani kao<sup>2</sup>

$$A(q^{-1}) = A_1(q^{-1})A_2(q^{-1}) = 1 + \bar{A}(q^{-1}) = \sum_{i=0}^n a_i q^{-i}; \quad a_0 = 1;$$

$$B(q^{-1}) = B_1(q^{-1})A_2(q^{-1}) = q^{-d} B^*(q^{-1}) = q^{-d} \sum_{i=0}^m b_i q^{-i}; \quad b_0 \neq 0, \quad d = n - m \neq 0 \quad (5.5)$$

$$C(q^{-1}) = C_1(q^{-1})A_1(q^{-1}) = \sum_{i=0}^k c_i q^{-i}; \quad c_0 = 1$$

Činjenica da polinom B sadrži kašnjenje od  $d$  perioda implicira da izlaz procesa u trenutku  $t+d$  zavisi isključivo od ulaznih signala kojima je sistem pobuđivan do trenutka  $t$ , a to znači i od

<sup>1</sup> R.Hamming, "Topics in EE – The birth of digital signal processing in Bell Labs", Lecture notes, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, (USA), 1985.

<sup>2</sup> Usvajanjem moničnosti polinoma C ne gubi na opštosti posmatranog problema. Naime, polinom C se uvek može pomnožiti proizvoljnim faktorom  $\alpha q^i$  čime se neće narušiti korelaciona struktura  $C(q^{-1})e_t$ .

izlaza procesa registrovanih do tog trenutka (Sl. 5-3). Otuda se postavlja pitanje moguće transformacije modela procesa tako da izlaz procesa u trenutku  $t+d$  ne bude eksplicitna funkcija merenja posle trenutka  $t$ .

U cilju određivanja modela prediktora definišimo dva polinoma

$$F(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{d-1} f_i q^{-i}; f_0 = 1; \quad G(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i q^{-i} \quad (5.6)$$

takva da važi sledeći identitet

$$F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) = C(q^{-1}) \quad (5.7)$$

Množenjem jednačine procesa (5.4) polinomom  $F$  dobija se

$$\begin{aligned} F(q^{-1})A(q^{-1})y_t &= F(q^{-1})B(q^{-1})u_t + F(q^{-1})C(q^{-1})e_t \Rightarrow \\ \Rightarrow (C(q^{-1}) - q^{-d}G(q^{-1}))y_t &= F(q^{-1})B(q^{-1})u_t + F(q^{-1})C(q^{-1})e_t \quad | \times q^d \Rightarrow \\ \Rightarrow C(q^{-1})y_{t+d} &= G(q^{-1})y_t + F(q^{-1})B^*(q^{-1})u_t + F(q^{-1})C(q^{-1})e_{t+d} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_{t+d} &= \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_t + \frac{F(q^{-1})B^*(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_t + F(q^{-1})e_{t+d} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Iz ove relacije je očigledno da rezultujući model procesa ima traženu osobinu. Budući da se poremećaj procesa ne može meriti, na osnovu ovog modela moguće je odrediti prediktorski model. Kako ovaj model treba da određuje predikciju izlaza sistema određenu u trenutku  $t+d$  na osnovu merenja prikupljenih do trenutka  $t$  ( $\hat{y}_{t+d|t}$ ) on se naziva *d-koračni prediktor*.

Intuitivno je jasno da bi model prediktora trebalo da sadrži sve merljive delove modela procesa određenog jednačinom (5.8). Ovo intuitivno rešenje može se dobiti i formalnim izvođenjem minimizacijom mere valjanosti izražene preko varijanse greške

$$J(d) = E \left\{ \left( y_{t+d} - \hat{y}_{t+d|t} \right)^2 \right\} \quad (5.9)$$

Uvrštavanjem jednačine modela procesa u izraz za varijansu dobija se

$$\begin{aligned} J(d) &= E \left\{ \left( \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_t + \frac{F(q^{-1})B^*(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_t + F(q^{-1})e_{t+d} - \hat{y}_{t+d|t} \right)^2 \right\} = \\ &= E \left\{ \left( F(q^{-1})e_{t+d} \right)^2 \right\} + E \left\{ \left( \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_t + \frac{F(q^{-1})B^*(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_t - \hat{y}_{t+d|t} \right)^2 \right\} + \\ &2E \left\{ \left( F(q^{-1})e_{t+d} \right) \left( \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_t + \frac{F(q^{-1})B^*(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_t - \hat{y}_{t+d|t} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Pošto je  $e_t$  beli šum, sa srednjom vrednošću nula, nekorelisan sa izlazom procesa ( $y_t$ ) poslednji član u izrazu (5.10) je jednak nuli. Otuda će varijansa biti minimalna ukoliko se kao model prediktora usvoji

$$\hat{y}_{t+d|t} = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_t + \frac{F(q^{-1})B^*(q^{-1})}{C(q^{-1})}u_t \quad (5.11)$$

Ukoliko je varijansa belog šuma  $\sigma$  tada minimalna vrednost indeksa performanse

$$J^*(d) = \sigma^2 \left( 1 + f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{d-1}^2 \right) \quad (5.12)$$

predstavlja varijansu greške predikcije na intervalu vremena  $d$ .

Formiranje prediktora u skladu sa relacijom (5.11) zahteva da se odrede koeficijenti polinoma  $F$  i  $G$ . Deobom relacije (5.6) izrazom  $q^{-d+1}A(q^{-1})$  dobija se

$$F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) = C(q^{-1}) \Rightarrow \frac{q^{d-1}C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = q^{d-1}F(q^{-1}) + \frac{q^{-1}G(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (5.13)$$

Otuda izraz  $q^{d-1}F(q^{-1})$  predstavlja količnik, a polinom  $q^{-1}G(q^{-1})$  ostatak deljenja polinoma  $C(q^{-1})$  polinomom  $q^{d+1}A(q^{-1})$ .

**PR. 5-1**

Određiti prediktorski model sistema koji je opisan modelom

$$y_t = \frac{q + 0.2}{q^3 + 1.1q^2 + 0.3q} u_t + \frac{q^3 - 0.6q^2}{q^3 + 1.1q^2 + 0.3q} e_t$$

Odgovarajući polinomi modela procesa su

$$A(q^{-1})y_t = B(q^{-1})u_t + C(q^{-1})e_t \Rightarrow$$

$$B(q^{-1}) = q^{-2} + 0.2q^{-3} = q^{-2}(1 + 0.2q^{-1}) = q^{-2}B^*(q^{-1}), \quad m = 1, \quad d = 2$$

$$A(q^{-1}) = 1 + 1.1q^{-1} + 0.3q^{-2}, \quad n = 2$$

$$C(q^{-1}) = 1 - 0.6q^{-1}$$

Deljenjem polinoma  $C(q^{-1})$  sa  $q^{d+1}A(q^{-1})$  dobija se

$$(1 - 0.6q^{-1}) : q^{-1}(1 + 1.1q^{-1} + 0.3q^{-2}) = (q - 0.6) : (1 + 1.1q^{-1} + 0.3q^{-2}) = q - 1.7 + \frac{1.57q^{-1} - 0.3q^{-2}}{1 + 1.1q^{-1} + 0.3q^{-2}}$$

tako da su polinomi F i G određeni sledećim relacijama

$$qF(q^{-1}) = q - 1.7 = q(1 - 1.7q^{-1}) \Rightarrow F(q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1}$$

$$q^{-1}G(q^{-1}) = 1.57q^{-1} - 0.3q^{-2} = q^{-1}(1.57 - 0.3q^{-1}) \Rightarrow G(q^{-1}) = 1.57 - 0.3q^{-1}$$

Odgovarajući prediktorski model je

$$\hat{y}_{t+d|t} = \frac{1.57 - 0.3q^{-1}}{1 - 0.6q^{-1}} y_t + \frac{(1 - 1.7q^{-1})(1 + 0.2q^{-1})}{1 - 0.6q^{-1}} u_t = \frac{1.57 - 0.3q^{-1}}{1 - 0.6q^{-1}} y_t + \frac{1 - 1.5q^{-1} - 0.34q^{-2}}{1 - 0.6q^{-1}} u_t$$

**5.2.2 MODEL DETERMINISTIČKOG PROCESA U PREDIKTORSKOJ FORMI**

Sličan postupak može se ponoviti i u cilju određivanja prediktorske forme determinističkog modela opisanog sa

$$y_t = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t \quad (5.14)$$

gde su polinomi  $A(q^{-1})$  i  $B(q^{-1})$  definisani kao u (5.5).

Množenjem jednačine procesa polinomom F, uz uslov da važi relacija

$$F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) = 1, \quad (5.15)$$

dobija se

$$\begin{aligned} F(q^{-1})A(q^{-1})y_t &= F(q^{-1})B(q^{-1})u_t \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - q^{-d}G(q^{-1}))y_t &= F(q^{-1})B(q^{-1})u_t \Big| \times q^d \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow y_{t+d} = G(q^{-1})y_t + F(q^{-1})B^*(q^{-1})u_t \Rightarrow$$

Nadalje se na osnovu izraza (5.15) pokazuje da se koeficijenti polinoma  $F(q^{-1})$  i  $G(q^{-1})$  mogu odrediti na sledeći način

$$f_0 = 1; \quad f_i = -\sum_{j=0}^{i-1} f_j a_{i-j}; \quad i = 1, \dots, d-1$$

$$g_i = -\sum_{j=0}^{d-1} f_j a_{i+d-j}; \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (5.17)$$

$$(a_j = 0 \quad \text{za } j < 0 \text{ i } j > n)$$

Potrebno je takođe zapaziti da ako se definiše vektor parametara

$$\theta^T = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \beta_0 \beta_1 \dots \beta_{m+d-1}] \quad (5.18)$$

gde su elementi vektora određeni koeficijentima polinoma

$$\alpha(q^{-1}) = G(q^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{n-1} q^{-(n-1)} \quad ;$$

$$\beta(q^{-1}) = F(q^{-1})B^*(q^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_{m+d-1} q^{-(m+d-1)} \quad (5.19)$$

kao i vektor merenja

$$\Phi_{t+1}^T = [y_t \ y_{t-1} \ \dots \ y_{t-n+1} \ u_t \ u_{t-1} \ \dots \ u_{t-m-d+1}] \quad (5.20)$$

tada se prediktorski model (5.15) može prikazati i uobičajenoj formi koja odgovara modelu greške jednačine

$$y_{t+d} = \theta^T \Phi_{t+1}$$

**PR. 5-2**

Neka je dat sistem

$$y_t = \frac{q + 0.2}{q^3 + 1.1q^2 + 0.3q} u_t$$

Budući da je

$$A(q^{-1}) = 1 + 1.1q^{-1} + 0.3q^{-2}, \quad n = 2$$

$$B(q^{-1}) = q^{-2} + 0.2q^{-3} = q^{-2}(1 + 0.2q^{-1}) = q^{-2}B^*(q^{-1}), \quad m = 1, \quad d = 2$$

model prediktora se može predstaviti kao

$$y_{t+2} = G(q^{-1})y_t + F(q^{-1})B^*(q^{-1})u_t$$

$$dgF = d - 1 \Rightarrow F(q^{-1}) = f_0 + f_1 q^{-1}; \quad dgG = n - 1 = 1 \Rightarrow G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1}$$

Koeficijenti polinoma  $F(q^{-1})$  i  $G(q^{-1})$  određuju se korišćenjem relacija (5.17)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1.1, \quad a_2 = 0.3; \quad \Rightarrow$$

$$f_0 = 1, \quad f_1 = -f_0 a_1 = -1.1$$

$$g_0 = -f_0 a_2 - f_1 a_1 = -0.3 + 1.21 = 0.91,$$

$$g_1 = -f_0 a_3 - f_1 a_2 = 0 + 0.33 = 0.33,$$

Odgovarajuća jednačina prediktora je

$$y_{t+2} = 0.91y_t + 0.33y_{t-1} + (1 - 1.1q^{-1})(1 + 0.2q^{-1})u_t =$$

$$= 0.91y_t + 0.33y_{t-1} + u_t - 0.9u_{t-1} - 0.22u_{t-2}$$

Zapazimo da se u ovom jednostavnom slučaju ista relacija može izvesti i direktno primenom rekursivnih relacija modela

$$y_t = -1.1y_{t-1} - 0.3y_{t-2} + u_{t-2} + 0.2u_{t-3}$$

$$y_{t+1} = -1.1y_t - 0.3y_{t-1} + u_{t-1} + 0.2u_{t-2}$$

$$y_{t+2} = -1.1y_{t+1} - 0.3y_t + u_t + 0.2u_{t-1} = -1.1(-1.1y_t - 0.3y_{t-1} + u_{t-1} + 0.2u_{t-2}) - 0.3y_t + u_t + 0.2u_{t-1} =$$

$$= 0.91y_t + 0.33y_{t-1} + u_t - 0.9u_{t-1} - 0.22u_{t-2}$$

### 5.3 Prediktivno upravljanje determinističkih sistema

*Stvari su veoma retko onakve kakve izgledaju*

Predstavljanje modela linearnog sistema u prediktorskoj formi (5.16) ukazuje na činjenicu da se na osnovu poznavanja prošlih i trenutnih vrednosti ulaza i izlaza sistema može izvršiti predikcija budućih izlaza sistema. Otuda se čini prirodnim da se postavi i obrnuto pitanje: koji upravljački signal treba primeniti u sadašnjem trenutku kako bi sistem u nekom budućem trenutku vremena imao neku, unapred definisanu, vrednost?

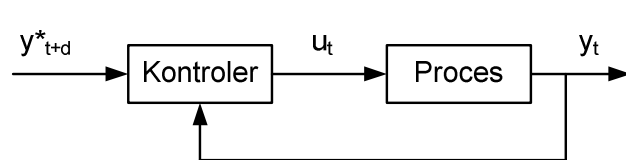
U traženju odgovora na postavljeno pitanje pretpostavićemo da je poznat linearan deterministički model nekog procesa

$$y_t = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t$$

pri čemu su polinomi  $A(q^{-1})$  i  $B(q^{-1})$  definisani kao u (5.5). Kao što je već pokazano ovaj model se može predstaviti u prediktorskoj formi

$$y_{t+d} = G(q^{-1})y_t + F(q^{-1})B^*(q^{-1})u_t = \alpha(q^{-1})y_t + \beta(q^{-1})u_t \quad (5.21)$$

Neka je  $y_{t+d}^*$  željeni izlaz procesa u trenutku  $t+d$ . Potrebno je odrediti signal  $u_t$  koji treba



dovesti na ulaz procesa u trenutku  $t$  pa da izlaz modela u trenutku  $t+d$  bude jednak zadanoj vrednosti ( $y_t = y_{t+d}^*$ )<sup>1</sup>. Rezultujući upravljački sistem može se prikazati kao na Sl. 5-4.

Sl. 5-4 JEDNOKORAČNO PREDIKTIVNO UPRAVLJANJE

Budući da je koeficijent  $f_0=1$  i da je  $b_0 \neq 0$ , iz relacije (5.21) sledi da je

$\beta_0 \neq 0$ . Ako se definiše polinom

$$\bar{\beta}(q^{-1}) = \beta(q^{-1}) - \beta_0 \quad (5.22)$$

onda se zahtevano upravljanje može direktno odrediti kao

$$y_{t+d}^* = \alpha(q^{-1})y_t + (\beta_0 u_t + \bar{\beta}(q^{-1})u_t) \Rightarrow \beta_0 u_t = y_{t+d}^* - \alpha(q^{-1})y_t - \bar{\beta}(q^{-1})u_t \Rightarrow$$

$$u_t = \frac{y_{t+d}^* - \alpha(q^{-1})y_t - \bar{\beta}(q^{-1})u_t}{\beta_0} \quad (5.23)$$

Iz relacije (5.23) se vidi da upravljanje u trenutku vremena  $t$  zavisi od zadane željene vrednosti, trenutne i prethodnih vrednosti odziva procesa, kao i prethodnih vrednosti upravljačkog signala. Drugim rečima, dobijeni zakon upravljanja se jednostavno realizuje. Činjenica da je za određivanje upravljanja u trenutku  $t$  neophodno da se poznaje odziv u tom trenutku ne bi trebalo da zvuči paradoksalno ako se ima na umu da proces ima čisto transportno kašnjenje, što znači da upravljanje  $u_t$  koje na proces deluje u trenutku vremena  $t$ , utiče tek na buduće odzive procesa.

#### 5.3.1 OSOBINE PROJEKTOVANOG SISTEMA UPRAVLJANJA

Kada se po prvi put javila, ideja sinteze prediktivnog kontrolera delovala je izuzetno atraktivno, najviše zbog svoje jednostavnosti. Analitički se pokazuje da se kontroler projektuje tako da u trenutku vremena  $d$  upravljanje  $u_0$  dovede izlaz sistema na zadanu vrednost  $y_d^*$ , zatim u sledećem trenutku vremena  $(d+1)$  upravljanja  $u_1$  i  $u_0$ , dovode na vrednost  $y_{d+1}^*$  itd. Posle niza

<sup>1</sup> Ovako određeno upravljanje označava se kao jednokoračno prediktivno upravljanje (*one-step ahead control*), zato što se posmatra razlika željenog i stvarnog ulaza u jednom trenutku (na jednom koraku), a ne na nekom intervalu vremena

teorijskih radova u kojima su prezentirani izvanredni simulacioni rezultati, gotovo da je sa iznenađenjem konstatovano da praktična realizacija ni izbliza nije tako efikasna. Razlog tome treba potražiti u analizi dobijenog rešenja.

Da bi se ustanovila prava priroda projektovanog zakona upravljanja pogodno je da se potraži funkcija prenosa sistema u zatvorenoj sprezi u kojoj bi upravljanje i proces bili u rednoj vezi. Polazeći od zakona upravljanja (5.23) dobija se

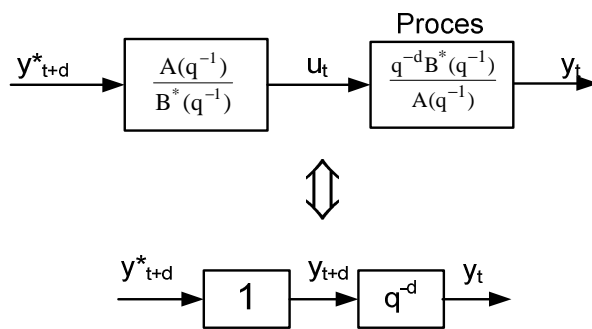
$$\beta_0 u_t + \bar{\beta}(q^{-1})u_t = y_{t+d}^* - \underbrace{\alpha_0 y_t - \alpha_1 y_{t-1} - \dots - \alpha_{n-1} y_{t-n+1}}_{y_{t-n+1}^* = y_{t-n+1}^* \text{ za } t \geq d+n} \Rightarrow$$

$$\alpha(q^{-1})y_t^* + \beta(q^{-1})u_t = y_{t+d}^* \Rightarrow$$

$$\bar{A}(q^{-1})y_t^* + B(q^{-1})u_t = y_t^* \Rightarrow \tag{5.24}$$

$$B(q^{-1})u_t = (1 + \bar{A}(q^{-1}))y_t^* = A(q^{-1})y_t^* \Rightarrow u_t = \frac{A(q^{-1})}{B^*(q^{-1})} y_{t+d}^*$$

To znači da je za vreme  $t \geq d$  funkcija prenosa sistema u zatvorenoj sprezi jednaka  $q^{-d}$  (Sl. 5-5). Dobijeno rešenje je u svojoj osnovi trivijalno, jer je kontroler određen kao inverzni model procesa

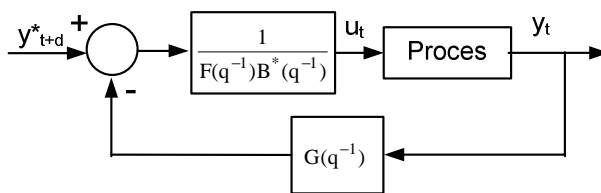


SL. 5-5 SISTEM UPRAVLJAN PREDIKTIVNIM KONTROLEROM

bez kašnjenja. On na taj način jednostavno skraćuje sve polove i nule procesa.

Kao što je već istaknuto, ideja generisanja upravljanja pomoću inverznog modela je od samog početka bila razmatrana kod kontinualnih sistema i jedan od razloga za njeno neprihvatanje bila je i fizička neostvarivost kontinualnog kontrolera koji ima veći broj nula nego polova, odnosno koji treba da radi kao prediktor. Sa prelaskom na diskretne modele, problem realizacije prediktora je očigledno prevaziđen. Time međutim, nisu otklonjeni svi drugi nedostaci

koji su vezani za činjenicu da pretpostavljeni model samo približno aproksimira proces, te da je zapravo u praksi nemoguće ostvariti idealno skraćivanje polova i nula. Ukoliko su i kontroler i proces stabilni, sistem će se ponašati kao da je realizovano približno skraćivanje i efekti stabilnih dipola koji nastaju usled skraćivanja neće doći do izražaja. Međutim, ukoliko su bilo kontroler bilo proces nestabilni, efekti nestabilnih dipola će biti veoma izraženi i sistem neće biti stabilan<sup>1</sup>.



SL. 5-6 REALIZACIJA PREDIKTIVNOG KONTROLERA

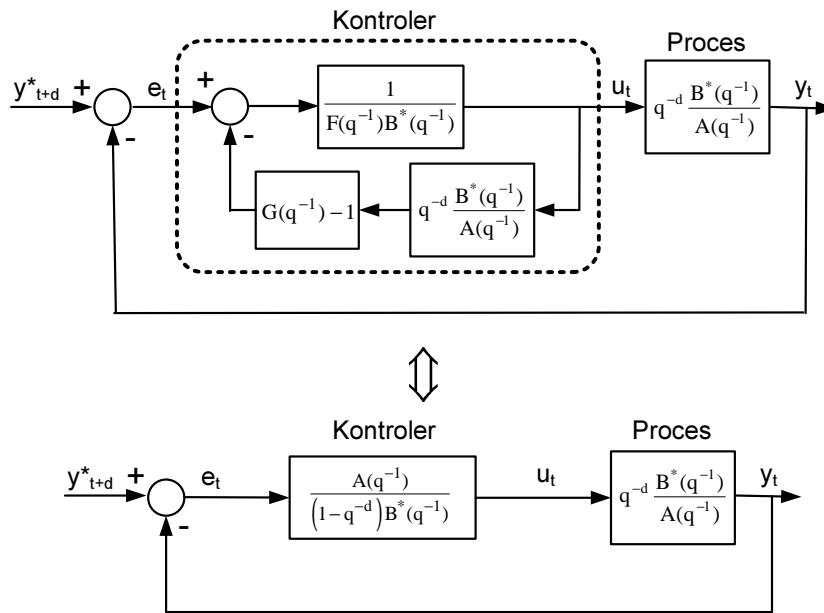
$$u_t = \frac{1}{F(q^{-1})B^*(q^{-1})} [y_{t+d}^* - G(q^{-1})y_t] \tag{5.25}$$

### 5.3.2 REALIZACIJA KONTROLERA

Samo se po sebi razume da će kontroler biti realizovan tako da radi u zatvorenoj povratnoj sprezi. U tom smislu vidi se da se, u skladu sa relacijama (5.21), prediktivni kontroler može izraziti preko relacije

<sup>1</sup> Potrebno je da se istakne da se, uprkos određenim nedostacima koje prediktivni kontroler nesumnjivo ima, izložena metodologija projektovanja uspešno primenjuje i na nelinearne modele. Iako ova tehnika upravljanja nije tako opšta kao što su to neke druge tehnike, ona može imati izvesnih prednosti nad izuzetno složenim upravljanjem nekim linearizovanim modelom.

tako da se dobija sistem upravljanja kod koga pojačanje u povratnoj sprezi zavisi isključivo od polinoma  $A(q^{-1})$  koji određuje koeficijente polinoma  $G(q^{-1})$  (Sl. 5-6). Pored toga, prelazni režim na izlazu kontrolera, kao i stabilnost zavise isključivo od polinoma  $B^*(q^{-1})$ . Kontroler će biti BIBO stabilan ukoliko su sve nule polinoma  $q^m B^*(q^{-1})$  unutar jediničnog kruga. Budući da je  $y_{t+d}^*$  ograničeno, sledi i da će izlaz kontrolera biti ograničen ukoliko polinom  $q^m B^*(q^{-1})$  ima jednostruke nule na jediničnom krugu. Pri tome se, ukoliko je sistem stabilan, eventualne oscilacije na izlazu kontrolera ne vide u odzivu procesa, jer se skraćuju sa brojiocem modela procesa. Sve ovo još jedanput potvrđuje činjenicu da je kontroler nefleksibilan, što znači da se na njegove osobine ne može uticati.



SL. 5-7 EKVIVALENTNE REALIZACIJE PREDIKTIVNOG KONTROLERA

Izložena analiza postaje još jasnija ako se kontroler realizuje tako da bude pobuđen signalom greške, odnosno da sistem ima jediničnu povratnu spregu. Ekvivalentnom transformacijom blok dijagrama sa slike Sl. 5-6 dobija se blok dijagram na Sl. 5-7 iz koga se direktno vidi da je kontroler određen jednačinom

$$u_t = \frac{A(q^{-1})}{(1-q^{-d})B^*(q^{-1})} e_t \quad (5.26)$$

Iako su obe realizacije ekvivalentne, prva, koja uključuje i povratnu spregu po upravljanju a ne samo po izlazu, može biti pogodnija ukoliko se želi da se pri realizaciji kontrolera uzme u obzir i potencijalno zasićenje aktuatora.

U skladu sa izrazom (5.26) zakon upravljanja se može formirati kao

$$\begin{aligned} R(q^{-1})u_t &= S(q^{-1})e_t = S(q^{-1})(y_{t+d}^* - y_t); \\ R(q^{-1}) &= (1-q^{-d})B^*(q^{-1}); \quad S(q^{-1}) = T(q^{-1}) = A(q^{-1}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Potrebno je zapaziti da se pri realizaciji ovog kontrolera podrazumeva da je vrednost referentnog signala koji se na ulaz sistema dovodi u trenutku vremena  $t$  jednaka željenom odzivu ( $r_t = y_{t+d}^*$ ).

Konačno primetimo i da iz izraza za upravljanje sledi da kontroler zapravo ima povratnu spregu i po izlazu procesa i po signalu greške.

$$\begin{aligned} F(q^{-1})B^*(q^{-1})u_t &= q^d y_t^* - G(q^{-1})y_t = q^d y_t^* + (q^d F(q^{-1})A(q^{-1}) - q^d)y_t \Rightarrow \\ F(q^{-1})B(q^{-1})u_t &= F(q^{-1})A(q^{-1})y_t + \underbrace{(y_t^* - y_t)}_{\varepsilon_t} \end{aligned} \quad (5.28)$$



**PR. 5-3**

Posmatra se sistem definisan u primeru Pr. 5-2. Neka su svi početni uslovi jednaki nuli i neka je željeni izlaz  $y_{t+d}^* = 2$ . Tada je na osnovu relacije (5.23) upravljanje određeno kao

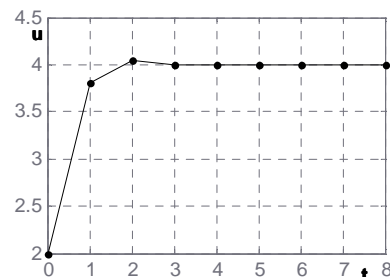
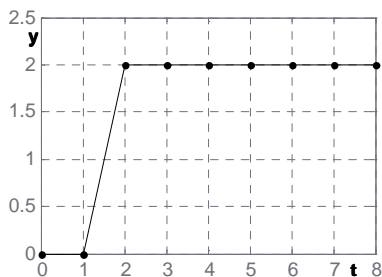
$$y_{t+2} = 0.91y_t + 0.33y_{t-1} + u_t - 0.9u_{t-1} - 0.22u_{t-2} = \alpha(q^{-1})y_t + \beta(q^{-1})u_t \Rightarrow$$

$$\alpha(q^{-1}) = 0.91 + 0.33q^{-1}$$

$$\beta(q^{-1}) = 1 - 0.9q^{-1} + 0.22q^{-2} \Rightarrow \bar{\beta}(q^{-1}) = -0.9q^{-1} - 0.22q^{-2}$$

$$u_t = \frac{y_{t+d}^* - \alpha(q^{-1})y_t - \bar{\beta}(q^{-1})u}{\beta_0} = 2 - 0.91y_t - 0.33y_{t-1} + 0.9u_{t-1} + 0.22u_{t-2}$$

Budući da su sve početne vrednosti jednake nuli, iz jednačine modela sledi i da je  $y_1=0$ . Prva vrednost upravljanja  $u_0$  određuje vrednost izlaza u trenutku  $t=2$ .



**Sl. 5-8 UPRAVLJANJE I ODZIV SISTEMA U PRIMERU PR. 5-3**

$$u_0 = 2 - 0.91y_0 - 0.33y_{-1} + 0.9u_{-1} + 0.22u_{-2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = 0.91y_0 + 0.33y_{-1} + u_0 - 0.9u_{-1} - 0.22u_{-2} = u_0 = 2$$

Sledeća vrednost upravljanja (zajedno sa prethodnom) određuje vrednost izlaza u trenutku  $t=3$  i tako redom.

$$u_1 = 2 - 0.91y_1 - 0.33y_0 + 0.9u_0 + 0.22u_{-1} = 3.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_3 = 0.91y_1 + 0.33y_0 + u_1 - 0.9u_0 - 0.22u_{-1} = u_1 - 0.9u_0 = 2$$

$$u_2 = 2 - 0.91y_2 - 0.33y_1 + 0.9u_1 + 0.22u_0 = 4.058 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_4 = 0.91y_2 + 0.33y_1 + u_2 - 0.91u_1 - 0.22u_0 = 2$$

$$u_3 = 2 - 0.91y_3 - 0.33y_2 + 0.9u_2 + 0.22u_1 = 4.0126 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_5 = 0.91y_3 + 0.33y_2 + u_3 - 0.91u_2 - 0.22u_1 = 2$$

$$u_4 = 2 - 0.91y_4 - 0.33y_3 + 0.9u_3 + 0.22u_2 = 4.0241$$

Kontroler je očigledno stabilan, jer upravljanje teži konstantnoj vrednosti (Sl. 5-8). Stabilnost je obezbeđena činjenicom da polinom  $q^{d+m}B(q^{-1})$  ima samo jednu nulu  $q=-0.2$ , koja se nalazi unutar jediničnog kruga.

**PR. 5-4**

Posmatra se linearan proces opisan modelom u prostoru stanja

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \quad ; \quad x_0^T = [-10 \ 0]$$

$$y_t = Cx_t$$

gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0]$$

Funkcija prenosa procesa određena je sa

$$\frac{y(z)}{u(z)} = C(zI - A)^{-1}B = \frac{0.5(z+1)}{(z-1)^2} = \frac{0.5z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^2}$$

Odgovarajuća diferentna jednačina procesa je

$$y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = 0.5u_{t-1} + 0.5u_{t-2}$$

Da bi se obezbedilo da diferentna jednačina ima ista rešenja kao i proces definisan modelom u prostoru stanja potrebno je definisati početne uslove na sledeći način

$$y_0 = y_{-1} = -10$$

Iz diferentne jednačine procesa se vidi da je

$$A(q^{-1}) = 1 - 2q^{-1} + q^{-2}; \quad B(q^{-1}) = q^{-1}0.5(1 + q^{-1}); \quad n = 2, m = 1, d = 1$$

Očigledno je da polinom  $q^2B(q^{-1})$  ima jednu nulu na jediničnom krugu ( $q=-1$ ), što znači da će odgovarajući prediktivni kontroler biti na granici stabilnosti.

U cilju određivanja prediktivnog upravljanja koje će da obezbedi  $y_{t+d}^* = 0$  formiraće se model u prediktorskoj formi

$$y_{t+1} = 2y_t - y_{t-1} + 0.5u_t + 0.5u_{t-1}; \quad y_0 = -10;$$

$$y_{t+1} = \alpha(q^{-1})y_t + \beta(q^{-1})u_t \Rightarrow \alpha(q^{-1}) = 2 - q^{-1}; \quad \bar{\beta}(q^{-1}) = \beta(q^{-1}) - \beta_0 = 0.5q^{-1}; \quad \beta_0 = 0.5$$

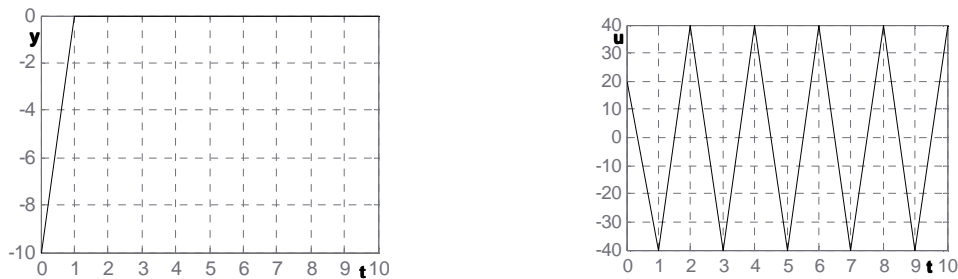
Jednokoračni prediktivni kontroler je prema tome

$$\beta_0 u_t = y_{t+d}^* - \alpha(q^{-1})y_t - \bar{\beta}(q^{-1})u_t \Rightarrow$$

$$y_{t+1}^* = 0 \Rightarrow u_t = -4y_t + 2y_{t-1} - u_{t-1} \Rightarrow$$

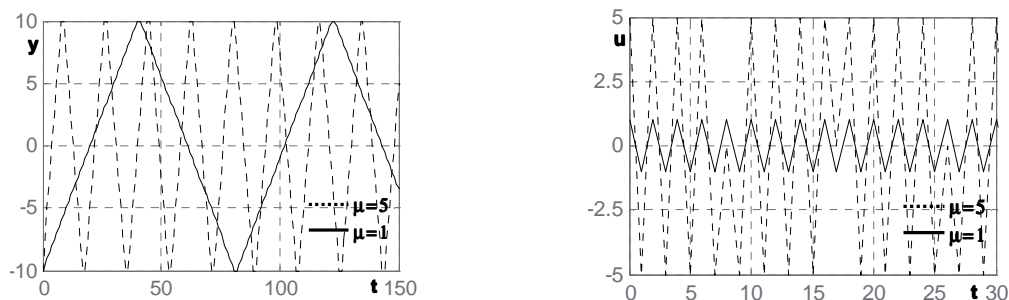
$$u_0 = 40, u_1 = -60, u_2 = 60, u_3 = -60, \dots, u_t = (-1)^t 60; t = 1, 2, \dots$$

Iz grafika upravljačkog signala i odziva procesa (Sl. 5-9) vidi se da, u principu, kontroler ispunjava postavljene zadatke, ali je pri tome sam upravljački signal izuzetno veliki i oscilatoran. Drugim rečima, dobijeno rešenje svakako nije dobro za praktičnu realizaciju, jer je teško očekivati da bi neki izvršni organ mogao uistinu da prati generisani upravljački signal.



Sl. 5-9 UPRAVLJANJE I ODZIV SISTEMA

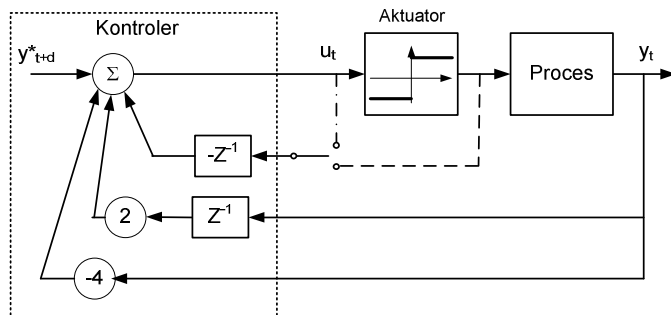
Polazeći od dobijenog rezultata prirodno se postavlja pitanje kako bi se ovaj kontroler ponašao na nekom realnom procesu kod koga bi izvršni organ imao zasićenje  $\pm\mu$ . Iz rezultata simulacije za slučaj kada je  $\mu=5$  i  $\mu=1$  vidi se da kontroler uvodi proces u oscilaciju (Sl. 5-10). (Budući da, nakon početnog, prelaznog perioda i upravljački signali postaju periodični, na slici je prikazan samo početni deo upravljačkih signala).



Sl. 5-10 UPRAVLJANJE I ODZIV SISTEMA ČIJI AKTUATOR IMA ZASIĆENJE  $\mu$

Treba istaći da ovaj rezultat nije neočekivan, zato što je celokupna ideja projektovanja kontrolera zasnovana na rešavanju jedne jednačine koja predstavlja prediktorsku formu modela. Drugim rečima, da bi kontroler ispravno radio neophodno je da upravljanja koje on generiše budu rešenja date jednačine. Svako odstupanje od toga, nužno dovodi do poremećaja u ponašanju kontrolera.

Nadalje, ako se pogleda jednačina kontrolera, realno je pretpostaviti da bi se uticaj zasićenja aktuatora možda mogao ublažiti ako bi se on implemetirao tako da se izbegne efekat navijanja. To

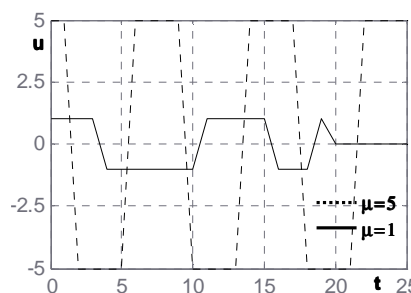
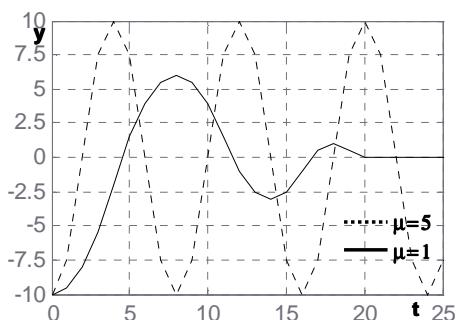


**SL. 5-11 PREDIKTVNI KONTROLER IMPLEMENTIRAN NA REALNOM IZVRŠNOM ORGANU SA MOGUĆNOŠĆU SPREČAVANJA EFEKTA NAVIJANJA**

zapravo znači da bi kontroler trebalo realizovati tako da se prethodna vrednost upravljačkog signala dobije zatvaranjem povratne sprege sa izlaza izvršnog organa, umesto sa njegovog ulaza, kao što je to ilustrovano na Sl. 5-11.

Simulacija kontrolera sa povratnom spregom po izlazu aktuatora (Sl. 5-12) pokazuje da sistem uspeva da ostvari zadani izlaz ukoliko je zasićenje  $\mu=1$ . Istina za razliku od idealnog prediktivnog kontrolera, kod koga se željeni izlaz postiže u jednom koraku, ovde je za dostizanje tog stanja potrebno dvadesetak koraka. Međutim, sistem čiji

aktuator ima zasićenje  $\mu=5$  ne uspeva, uopšte, da ostvari zadanu vrednost. Ovakvo ponašanje može se objasniti činjenicom da je realizovan kontroler nelienaran, te da njegova stabilnost, između ostalog zavisi, i od veličine ulaznog signala.



**SL. 5-12 UPRAVLJANJE I ODZIV SISTEMA ČIJI AKTUATOR IMA ZASIĆENJE  $\mu$  I ČIJI KONTROLER JE REALIZOVAN TAKO DA SE SPREČI NAVIJANJE KONTROLERA**

Potrebno je da se istakne da iz izloženog primera ne treba izvlačiti neke opšte zaključke. On samo ukazuje na meru u kojoj je ponašanje kontrolera uslovljeno vernošću sa kojom pretpostavljeni model opisuje proces.

### 5.3.3 KONTROLER MINIMALNE GREŠKE PREDIKCIJE

Iz izvršene analize vidi se da je osnovni nedostatak projektovanja prediktivnog kontrolera u tome što je kontroler u potpunosti određen modelom samog procesa. Budući da je kontroler određen direktnim rešavanjem jednačine modela prediktora za date zahteve, u ovom pristupu se ne vidi način na koji bi ovaj nedostatak mogao da se prevaziđe. Drugim rečima, ovde sama postavka problema vodi do jednoznačnog rešenja koje je analitički atraktivno, a u praksi često neprimenljivo.

Međutim, ukoliko se potraži još neka moguća interpretacija dobijenog rešenja, onda izloženi problem dobija drugačiji smisao, pa se samim tim i uočava mogućnost njegovog prevazilaženja.

Osnovni zahtev pri projektovanju posmatranog kontrolera bio je da se obezbedi da, posle određenog vremena, izlaz procesa ima neku unapred zadanu vrednost. U tom smislu, realno je

očekivati da bi se sličan efekat mogao postići i ako bi se kontroler projektovao tako da se minimizira greška odstupanja izlaza od zadane vrednosti izražena merom performanse<sup>1</sup>

$$J_{t+d} = \frac{1}{2} [y_{t+d} - y_{t+d}^*]^2 \quad (5.29)$$

Optimalni kontroler koji minimizira postavljeni kriterijum može se odrediti diferenciranjem funkcije kriterijuma po upravljanju, no u ovom slučaju za tim nema potrebe. Činjenica da prethodno formirani prediktivni kontroler dovodi do jednakosti izlaza procesa i zadanog referentnog ulaza ukazuje da je, kada se on primeni, posmatrana mera performanse (5.29) jednaka nuli. Kako je to istovremeno i minimalna vrednost mere performanse, očigledno je da je dobijeni kontroler optimalan za dati indeks performanse. Otuda se, posmatrano sa aspekta mere performanse, ovaj kontroler često označava i kao *kontroler minimalne greške predikcije*.

Imajući u vidu da dobijeni kontroler minimizira samo grešku predikcije, nije ni čudno što dobijeno rešenje ne vodi nikakvog računa o prirodi i veličini upravljačkih signala. Ukoliko se želi bilo koja vrsta uticaja na upravljačke signale realizovanog kontrolera, onda se, van svake sumnje, odgovarajući zahtev mora, na neki način, iskazati i u samom kriterijumu koji se posmatra.

## 5.4 Težinski jednokoračni prediktivni kontroler

### *Prihvatanje realnih ograničenja kao izvor dodatnog stepena slobode*

Kao što je već istaknuto, osnovni nedostatak prediktivnog kontrolera je nemogućnost da se, podešavanjem njegovih parametara, pored postizanja željenog odziva utiče i na bilo koji drugi aspekt performanse sistema. Pored stabilnosti kontrolera, koja, zapravo, predstavlja prevashodni uslov koji treba da omogući njegovu primenu u praksi, problem često predstavljaju i preveliki upravljački signali koje izvršni organ nije u stanju da realizuje.

Jedan od načina da se preko funkcije kriterijuma (5.29) iskaže i zahtev u pogledu veličine upravljačkih signala je da se ona proširi tako da uključi i veličinu upravljačkog signala. Osnovna ideja je da se zahtev da se sistem u jednom koraku dovede u željenu tačku u izvesnoj meri relaksira, čime će se omogućiti da upravljački signali ne budu preveliki. Kompromis između postavljenih zahteva može se ostvariti projektovanjem kontrolera tako da se minimizira kriterijum performanse

$$J_{t+d}^\lambda = \left\{ \frac{1}{2} [y_{t+d} - y_{t+d}^*]^2 + \frac{\lambda}{2} u_t^2 \right\} \quad (5.30)$$

U ovako definisanom kriterijumu, parametar  $\lambda$  predstavlja težinu koja se daje upravljačkom signalu u odnosu na grešku izlaza. Otuda se on odabira u zavisnosti od značaja koji veličina upravljačkog signala ima na implementaciju rešenja.

Polazeći od modela procesa u prediktorskoj formi, upravljanje koje minimizira postavljeni kriterijum može se odrediti na sledeći način.

$$\frac{\partial J_{t+d}^\lambda}{\partial u_t} = J_{t+d}^\lambda \left\{ \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\alpha(q^{-1})y_t + \beta(q^{-1})u_t}_{y_{t+d}} - y_{t+d}^* \right]^2 + \frac{\lambda}{2} u_t^2 \right\} = 0 \Rightarrow \quad (5.31)$$

$$\beta_0 \left[ \alpha(q^{-1})y_t + \underbrace{\beta_0(q^{-1})u_t + \bar{\beta}(q^{-1})u_t}_{\beta(q^{-1})u_t} - y_{t+d}^* \right] + \lambda u_t = 0 \Rightarrow$$

$$u_t = \frac{\beta_0 [y_{t+d}^* - \alpha(q^{-1})y_t - \bar{\beta}(q^{-1})u_t]}{\beta_0^2 + \lambda} \quad (5.32)$$

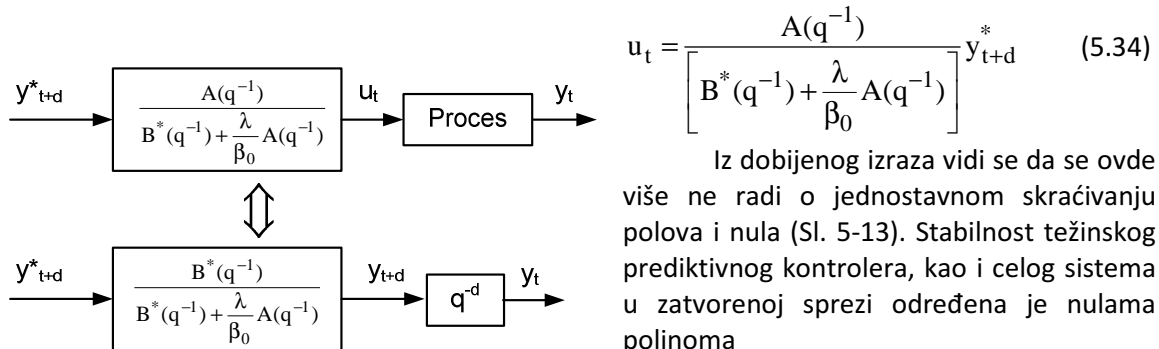
<sup>1</sup> Ovako definisana mera, koja izražava trenutnu ocenu ponašanja odziva u jednom trenutku vremena, a ne na celom intervalu označava se kao *jednokoračna mera*.

5.4.1 OSOBINE PREDIKTIVNOG TEŽINSKOG KONTROLERA

Da bi se utvrdila razlika između ovog rešenja i kontrolera minimalne predikcije određiće se ponovo funkcija prenosa sistema u zatvorenoj sprezi, odnosno serijska veza upravljanja i procesa. Polazeći od relacije (5.31), dobija se

$$\beta_0 \{y_{t+d} - y_{t+d}^*\} + \lambda u_t = 0 \quad | \times A(q^{-1}) \Rightarrow$$

$$\beta_0 \left\{ \underbrace{A(q^{-1})y_{t+d}}_{=B(q^{-1})u_{t+d}=B^*(q^{-1})u_t} - A(q^{-1})y_{t+d}^* \right\} + \beta_0 \left\{ \frac{\lambda}{\beta_0} A(q^{-1})u_t \right\} = 0 \Rightarrow \quad (5.33)$$



Iz dobijenog izraza vidi se da se ovde više ne radi o jednostavnom skraćivanju polova i nula (Sl. 5-13). Stabilnost težinskog prediktivnog kontrolera, kao i celog sistema u zatvorenoj sprezi određena je nulama polinoma

$$B^*(q^{-1}) + \lambda/\beta_0 A(q^{-1}).$$

SL. 5-13 SISTEM UPRAVLJAN TEŽINSKIM KONTROLEROM

Kako se ove nule menjaju u zavisnosti od vrednosti parametra  $\lambda$ , realno je očekivati

da će postojati interval vrednosti ovog parametra za koje će kontroler biti stabilan. Drugim rečima, parametar  $\lambda$  daje jedan stepen slobode pri projektovanju kontrolera, što znači da se, bar u izvesnoj meri, može uticati na njegovu performansu. Ukoliko je taj parametar jednak nuli, težinski kontroler se svodi na obični prediktivni kontroler.

Pretpostavljajući da je kontroler stabilan postavlja se, nadalje, pitanje u kojoj meri se može očekivati da ovaj kontrole ispuni osnovni zahtev a to je dovođenje izlaza sistema na neku željenu vrednost. U tom smislu potrebno je odrediti grešku stacionarnog stanja.

$$e_{t+d} = y_{t+d}^* - y_{t+d} = y_{t+d}^* - \frac{B^*(q^{-1})}{B^*(q^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0} A(q^{-1})} y_{t+d}^* =$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{\beta_0} A(q^{-1})}{B^*(q^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0} A(q^{-1})} y_{t+d}^* = \frac{1}{1 + \frac{\beta_0 B^*(q^{-1})}{\lambda A(q^{-1})}} y_{t+d}^* \quad (5.35)$$

Ako se pretpostavi da se svi polovi polinoma  $B^*(q^{-1}) + \lambda/\beta_0 A(q^{-1})$  nalaze unutar jediničnog kruga, odnosno da je sistem stabilan, tada važi druga granična teorema z-transformacije. Usvajajući, nadalje da je zadana referenca odskočni signal intenziteta  $Y^*$ , tako da je

$$y_{t+d}^* = Y^* h_t \Rightarrow Y^*(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} Y^* \quad (5.36)$$

dobija se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{t+d} = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1 + \frac{\beta_0 B^*(z^{-1})}{\lambda A(z^{-1})}} \frac{1}{1-z^{-1}} Y^* = \begin{cases} \text{const} & A(1) \neq 0 \\ 0 & A(1) = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

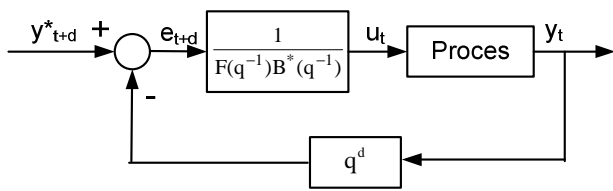
Dobijeni rezultat pokazuje da, za razliku od kontrolera minimalne greške predikcije, ovde

greška ne mora biti nula. Ovo je prirodna posledica činjenice da je kontroler formiran na osnovu zahteva da se minimizira funkcija kriterijuma, a ne eksplicitnog zahteva da greška stacionarnog stanja bude jednaka nuli. Veličina greške zavisi od svih parametara sistema, što znači i od parametara modela procesa i od težinskog faktora  $\lambda$ . Pri tome se, promenom parametra  $\lambda$  ne može postići da greška bude jednaka nuli. Struktura kontrolera je takva, da ovaj jedini slobodno izabrani parametar može da utiče samo na stabilnost kontrolera. Postojanje greške stacionarnog stanja zavisi zapravo od polova samog procesa kojim se upravlja. Greška će biti nula ukoliko je  $A(1)=0$ , odnosno ukoliko model procesa u sebi sadrži integrator tako da je

$$A(q^{-1}) = (1 - q^{-1})A_1(q^{-1}) \quad (5.38)$$

#### 5.4.2 REALIZACIJA PREDIKTIVNOG TEŽINSKOG KONTROLERA

Iz relacije (5.33) se vidi još jedna moguća interpretacija težinskog kontrolera.

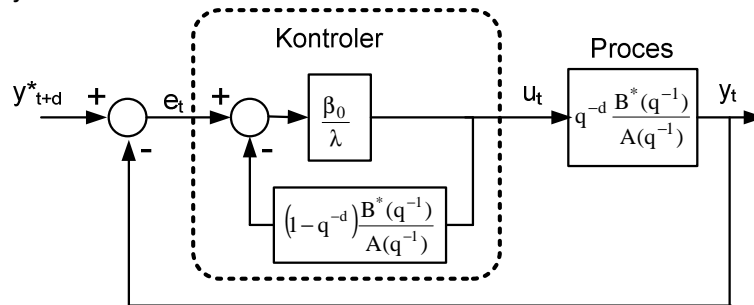


$$\begin{aligned} & \beta_0 \{ A(q^{-1})y_{t+d} - A(q^{-1})y_{t+d}^* \} + \\ & + \beta_0 \left\{ \frac{\lambda}{\beta_0} A(q^{-1})u_t \right\} = 0 \Rightarrow \quad (5.39) \\ & u_t = \frac{\beta_0}{\lambda} (y_{t+d}^* - y_{t+d}) \end{aligned}$$

SL. 5-14 UPRAVLJANJE PREKO PREDIKCIJE IZLAZA

Iz dobijenog izraza sledi da se upravljanje u trenutku  $t$  formira na osnovu greške (razlike) između budućeg odziva procesa i željenog odziva u trenutku  $t+d$ . To zapravo znači da kontroler vrši predikciju buduće greške i unapred pokušava da je eliminiše (Sl. 5-14). Kao što je već rečeno, pošto je projektovan sa drugačijeg polazišta kontroler u tom pokušaju ne mora i uspeti. Sa gledišta greške izlaza, obrada koju nad signalom povratne sprege vrši kontroler minimalne greške predikcije je očigledno efikasnija.

Iz dobijenog izraza sledi da se upravljanje u trenutku  $t$  formira na osnovu greške (razlike) između budućeg



SL. 5-15 REALIZACIJA TEŽINSKOG PREDIKTIVNOG KONTROLERA

U cilju implementacije kontrolera u sistemu sa jediničnom povratnom spregom (Sl. 5-15) upravljanje može da se izrazi na sledeći način

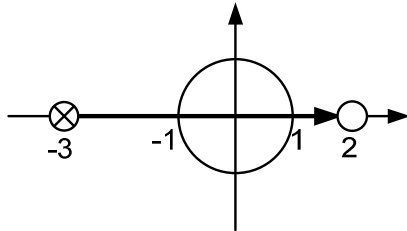
$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\beta_0}{\lambda} (y_{t+d}^* - y_{t+d}) = \frac{\beta_0}{\lambda} y_{t+d}^* - \frac{\beta_0}{\lambda} q^d y_t = \frac{\beta_0}{\lambda} y_{t+d}^* - \frac{\beta_0}{\lambda} q^d \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t = \\ &= \frac{\beta_0}{\lambda} y_{t+d}^* - \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t + \left( \frac{\beta_0}{\lambda} y_t - \frac{\beta_0}{\lambda} y_t \right) = \\ &= \frac{\beta_0}{\lambda} (y_{t+d}^* - y_t) - \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t + \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t = \\ &= \frac{\beta_0}{\lambda} (y_{t+d}^* - y_t) - \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})} (1 - q^{-d}) u_t = \frac{\beta_0}{\lambda} \left[ (y_{t+d}^* - y_t) - \frac{B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})} (1 - q^{-d}) u_t \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Zakon upravljanja je, prema tome definisan pomoću sledećih polinoma

$$R(q^{-1})u_t = S(q^{-1})e_t ;$$

$$R(q^{-1}) = A(q^{-1}) + (1 - q^{-d}) \frac{\beta_0}{\lambda} B^*(q^{-1}) ; \quad S(q^{-1}) = T(q^{-1}) = \frac{\beta_0}{\lambda} A(q^{-1}) \quad (5.41)$$

PR. 5-5



SL. 5-16 GMK POLINOMA U PR. 5-5

Neka je sistem opisan polinomima

$$A(q^{-1}) = 1 - 2q^{-1} ; \quad B(q^{-1}) = q^{-1}(1 + 3q^{-1}) \Rightarrow$$

$$B^*(q^{-1}) = (1 + 3q^{-1}) ; \quad d = 1$$

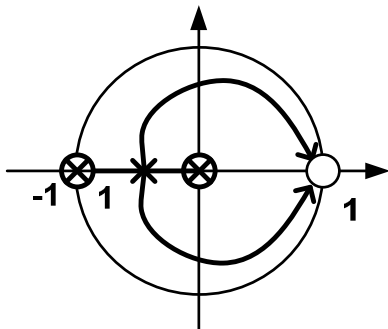
Budući da je polinom  $B^*(q^{-1})$  nestabilan ne može se formirati prediktivni kontroler. U cilju ispitivanja mogućnosti formiranja težinskog kontrolera posmatra se geometrijsko mesto korena polinoma

$$B^*(q^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0} A(q^{-1}) = 1 + 3q^{-1} + \frac{\lambda}{\beta_0}(1 - 2q^{-1}) \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda}{\beta_0} \frac{q-2}{q+3} = -1 \Rightarrow \frac{\lambda}{\beta_0} \in \left( \frac{2}{3}; 4 \right)$$

Težinski kontroler se, očigledno, može projektovati, ali stabilnost nije zagarantovana za svaku vrednost parametra  $\lambda$  (Sl. 5-16).

PR. 5-6



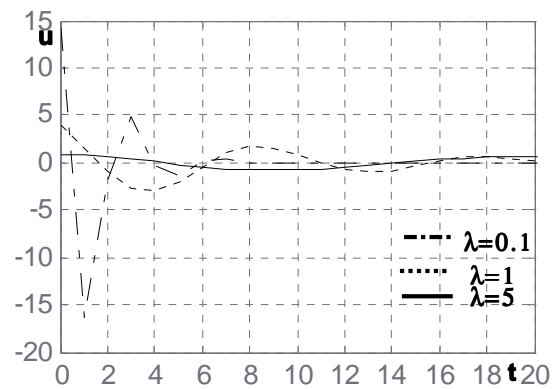
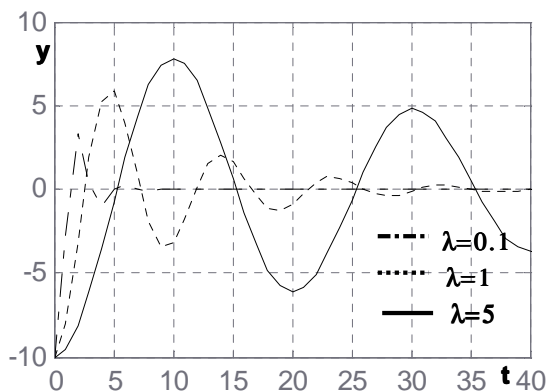
SL. 5-17 GMK POLINOMA U PR. 5-6

Posmatra se sistem definisan u primeru Pr. 5-4, kod koga je obični prediktivni kontroler na granici stabilnosti. Težinski prediktivni kontroler, određen na osnovu relacije (5.32) ima jednačinu

$$B^*(q^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0} A(q^{-1}) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\beta_0} \frac{(1 - q^{-1})^2}{0.5(1 + q^{-1})} = -1 \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda}{0.25} \frac{(q-1)^2}{q(q+1)} = -1$$

Iz odgovarajućeg geometrijskog mesta korena vidi se da je kontroler stabilan za svaku vrednost parametra  $\lambda$ . Simulacioni rezultati pokazuju da sa porastom parametra  $\lambda$ , odnosno davanjem veće težine veličini upravljačkog signala, opada vrednost upravljanja, ali raste vreme za koje sistem dostiže željeni izlaz. Ovde se više ne može govoriti o postizanju željenog cilja u d-koraka, ali se zato dobija rešenje koje je primenljivo u praksi.



SL. 5-18 UPRAVLJANJE I ODZIV SISTEMA SA TEŽINSKIM PREDIKTIVNIM KONTROLEROM ZA RAZLIČITE VREDNOSTI PARAMETRA  $\lambda$

## 5.5 Prediktivni kontroler sa zagaranovanom stabilnošću

*Zamagljivanje kriterijuma otvara niz novih mogućnosti*

Činjenica da težinski prediktivni kontroler može biti stabilan za određene vrednosti parametara, prirodno je otvorila pitanje da li se može napraviti prediktivni kontroler koji će uvek biti stabilan. Drugim rečima, postavlja se pitanje da li je moguće formirati kriterijum koji će omogućiti da se zadrži izuzetna jednostavnost zakona upravljanja, ali istovremeno obezbediti i dovoljno stepeni slobode da se ostvari stabilnost kontrolera.

U traženju odgovora pokazalo se da je moguće odabrati filter

$$\begin{aligned} P(q^{-1})\tilde{u}_t &= V(q^{-1})u_t \\ P(q^{-1}) &= 1 + p_1q^{-1} + \dots + p_kq^{-k} = 1 + \bar{V}(q^{-1}) \\ V(q^{-1}) &= 1 + v_1q^{-1} + \dots + v_\ell q^{-\ell} = 1 + \bar{V}(q^{-1}) \end{aligned} \quad (5.42)$$

tako da kontroler dobijen na osnovu funkcije kriterijuma

$$\tilde{J}_{t+d} = \left\{ \frac{1}{2} [y_{t+d} - y_{t+d}^*]^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{u}_t^2 \right\} \quad (5.43)$$

bude stabilan.

Minimizacijom funkcije (5.43) dobija se sledeći zakon upravljanja

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}_{t+d}}{\partial u_t} = 0 &\Rightarrow \beta_0 \left[ \alpha(q^{-1})y_t + \beta_0 u_t + \bar{\beta}(q^{-1})u_t - y_{t+d}^* \right] + \lambda \tilde{u}_t \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial u_t} = 0 \Rightarrow \\ \beta_0 \left[ \alpha(q^{-1})y_t + \beta_0 u_t + \bar{\beta}(q^{-1})u_t - y_{t+d}^* \right] &+ \lambda \left[ u_t + \bar{V}(q^{-1})u_t - \bar{P}(q^{-1})\tilde{u}_t \right] \\ u_t = \frac{\beta_0 \left[ y_{t+d}^* - \alpha(q^{-1})y_t - \bar{\beta}(q^{-1})u_t \right]}{\lambda + \beta_0^2} &+ \frac{\left[ \lambda \bar{V}(q^{-1})\tilde{u}_t - \lambda \bar{P}(q^{-1})u_t \right]}{\lambda + \beta_0^2} \end{aligned} \quad (5.44)$$

### 5.5.1 OSOBINE PREDIKTIVNOG KONTROLERA SA ZAGARANTOVANOM STABILNOŠĆU

Zakon upravljanja (5.44) omogućava da se odredi izgled sistema u zatvorenoj sprezi

$$\begin{aligned} \beta_0 \left\{ y_{t+d} - y_{t+d}^* \right\} + \lambda \tilde{u}_t \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial u_t} = 0 &\Rightarrow \\ \beta_0 \left\{ y_{t+d} - y_{t+d}^* \right\} + \lambda V u_t - \lambda \underbrace{\bar{P} \tilde{u}_t}_{V u_t - \tilde{u}_t} = 0 &\quad \times P(q^{-1})A(q^{-1}) \Rightarrow \\ \beta_0 \left\{ \underbrace{P(q^{-1})B^*(q^{-1})u_t}_{S(q^{-1})A(q^{-1})y_{t+d}} - P(q^{-1})A(q^{-1})y_{t+d}^* + \frac{\lambda}{\beta_0} \underbrace{V(q^{-1})A(q^{-1})u_t}_{P(q^{-1})A(q^{-1})\tilde{u}_t} \right\} &= 0 \Rightarrow \\ u_t = \frac{P(q^{-1})A(q^{-1})}{P(q^{-1})B^*(q^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0} V(q^{-1})A(q^{-1})} y_{t+d}^* & \end{aligned} \quad (5.45)$$

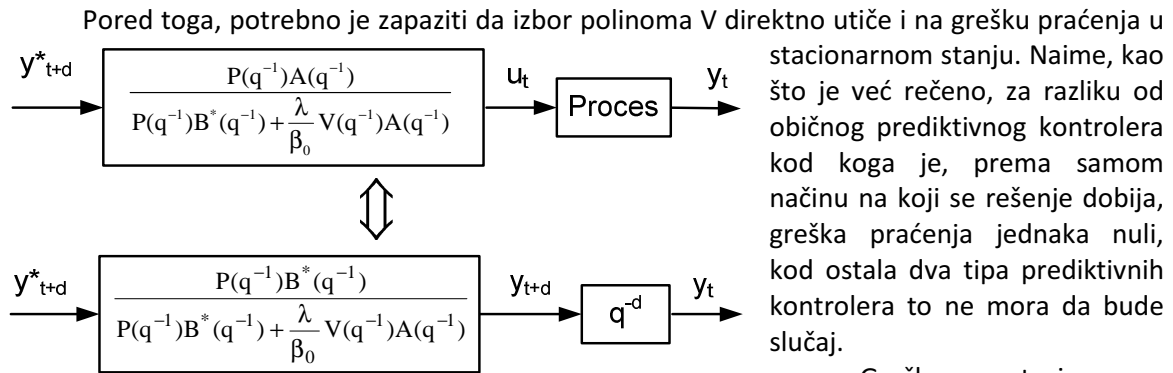
Iz dobijene relacije se vidi da stabilnost kontrolera, kao i celog sistema u zatvorenoj sprezi (Sl. 5-19) zavisi od nula polinoma

$$P(q^{-1})B^*(q^{-1}) + \frac{\lambda}{\beta_0} V(q^{-1})A(q^{-1}) \quad (5.46)$$

To nadalje znači da je, u cilju obezbeđivanja stabilnosti kontrolera, potrebno izvršiti odgovarajući izbor polinoma P i V, kao i parametra  $\lambda$ . Pokazuje se da je ovaj izbor uvek moguće izvršiti ukoliko polinomi  $A(q^{-1})$  i  $B(q^{-1})$  nemaju nestabilne zajedničke faktore.

U principu parametri polinoma  $P(q^{-1})$  i  $V(q^{-1})$  mogu se odrediti posmatranjem geometrijskog mesta korena polinoma (5.46)





SL. 5-19 SISTEM UPRAVLJAN PREDIKTIVNIM KONTROLEROM SA ZAGARANTOVANOM STABILNOŠĆU

Greška stacionarnog stanja dobija se iz jednačine sistema u zatvorenoj sprezi

$$e_{t+d} = y_{t+d}^* - y_{t+d} = \frac{1}{1 + \frac{\beta_0 P(q^{-1})B^*(q^{-1})}{\lambda V(q^{-1})A(q^{-1})}} y_{t+d}^* \quad (5.47)$$

Ako se pretpostavi da je sistem stabilan, i da je željeni odziv jedinična odskočna funkcija intenziteta  $Y^*$  tada se primenom druge granične teoreme z-transformacije dobija

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{t+d} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + \frac{\beta_0 P(z^{-1})B^*(z^{-1})}{\lambda V(z^{-1})A(z^{-1})}} \frac{1}{1 - z^{-1}} Y^* \quad (5.48)$$

Iz ove relacije sledi da će, nezavisno od parametara modela procesa, greška praćenja u stacionarnom stanju biti jednaka nuli ukoliko se usvoji da polinom V sadrži integrator. Otuda se veoma često usvaja da je

$$V(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \quad (5.49)$$

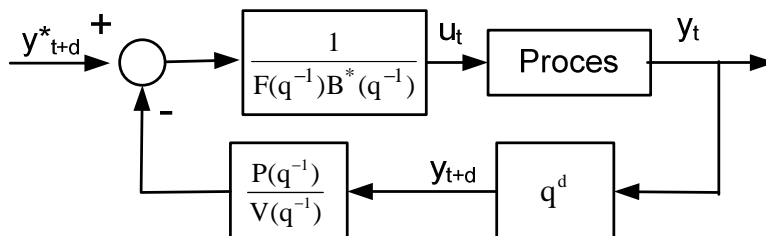
Samo se po sebi razume da je pri realizaciji ovog kontrolera neophodno da se povede računa o mogućim efektima navijanja.

### 5.5.2 REALIZACIJA PREDIKTIVNOG KONTROLERA SA ZAGARANTOVANOM STABILNOŠĆU

Slično kao i kod težinskog kontrolera i ovde se može potražiti dodatna interpretacija dobijenog kontrolera. Iz relacije (5.45) se direktno dobija

$$\beta_0 \left\{ P(q^{-1})A(q^{-1})y_{t+d} - P(q^{-1})A(q^{-1})y_{t+d}^* + \frac{\lambda}{\beta_0} V(q^{-1})A(q^{-1})u_t \right\} = 0 \Rightarrow \quad (5.50)$$

$$u_t = \frac{\beta_0 P(q^{-1})}{\lambda V(q^{-1})} (y_{t+d}^* - y_{t+d})$$



SL. 5-20 UPRAVLJANJE PREKO OBRADENE PREDIKCIJE IZLAZA

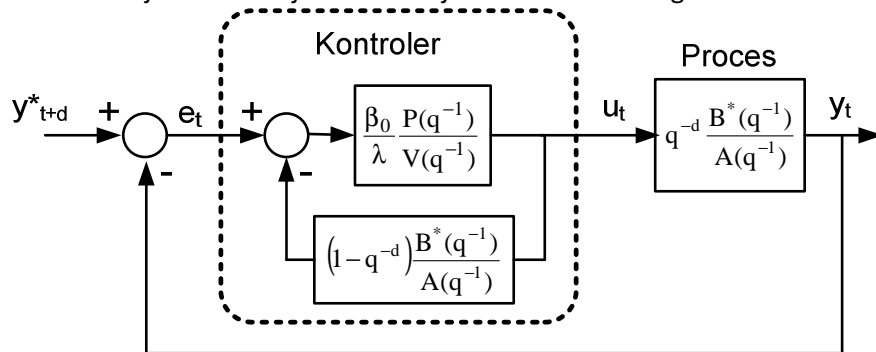
Otuda sledi da se upravljanje u trenutku t formira obrađivanjem greške (razlike) između budućeg odziva procesa i željenog odziva u trenutku t+d. To zapravo znači da i ovaj kontroler, isto kao i težinski obrađuje predikciju buduće greške. Razlika je samo u tome što se ovde predikcija izlaza

propušta kroz filter koji je određen parametrima polinoma P i V (Sl. 5-21). U tom smislu, uvođenje ovog filtra svakako daje više slobode za dobijanje bolje performanse sistema.

Transformisanjem relacije (5.50) dobija se realizacija kontrolera u sistemu sa jediničnom povratnom spregom, koja ujedno i omogućava da se uzmu u obzir efekti zasićenja.

$$\begin{aligned}
 u_t &= \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} (y_{t+d}^* - y_{t+d}) = \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} y_{t+d}^* - \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} q^d y_t = \\
 &= \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} y_{t+d}^* - \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} \frac{B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t + \left( \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} y_t - \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} y_t \right) = \\
 &= \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} (y_{t+d}^* - y_t) - \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} \frac{B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t + \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t = \\
 &= \frac{\beta_0}{\lambda} \frac{P(q^{-1})}{V(q^{-1})} \left[ (y_{t+d}^* - y_t) - (1 - q^{-d}) \frac{B^*(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.51}$$

U skladu sa dobijenom relacijom realizacija kontrolera ima izgled kao na Sl. 5-21.

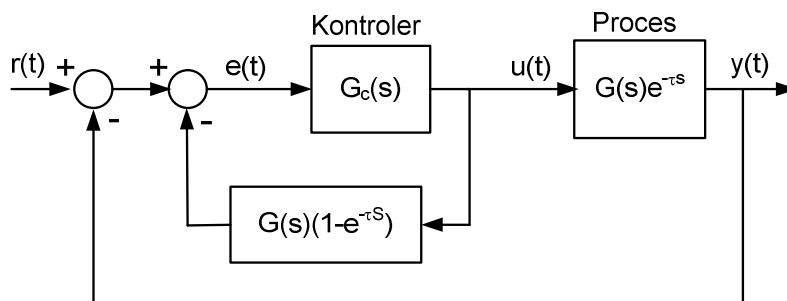


SL. 5-21 REALIZACIJA PREDIKTIVNOG KONTROLERA SA ZAGARANTOVANOM STABILNOŠĆU

Konačno, iz izraza (5.51), kao i iz blok dijagrama (Sl. 5-21) se vidi da je zakon upravljanja definisan sa

$$\begin{aligned}
 R(q^{-1})u_t &= S(q^{-1})e_t ; \\
 R(q^{-1}) &= V(q^{-1})A(q^{-1}) + (1 - q^{-d})B^*(q^{-1})\frac{\beta_0}{\lambda}P(q^{-1}) ; \\
 S(q^{-1}) &= T(q^{-1}) = \frac{\beta_0}{\lambda}A(q^{-1})P(q^{-1})
 \end{aligned}
 \tag{5.52}$$

### 5.5.3 INTERPRETACIJA SMITOVOG PREDIKTORA



SL. 5-22 EKVIVALENTNI BLOK DIJAGRAM SMITOVOG PREDIKTORA

Da bi se jasnije sagledalo šta u stvari radi Smitov prediktor podsetimo se da on obrađuje razliku između referentnog signala i predikcije budućeg odziva procesa, odnosno da formira upravljački signal vodeći računa o efektu koji će on imati na buduću odziv procesa, kao što je to ilustrovano na Sl. 5-22.

Ako se sada dobijeno rešenje uporedi sa prediktivnim kontrolerom sa zagantovanom stabilnošću (Sl. 5-21), vidi se da se radi o istom rešenju. Razlika je zapravo u tome što Smitov prediktor daje jasne smernice u

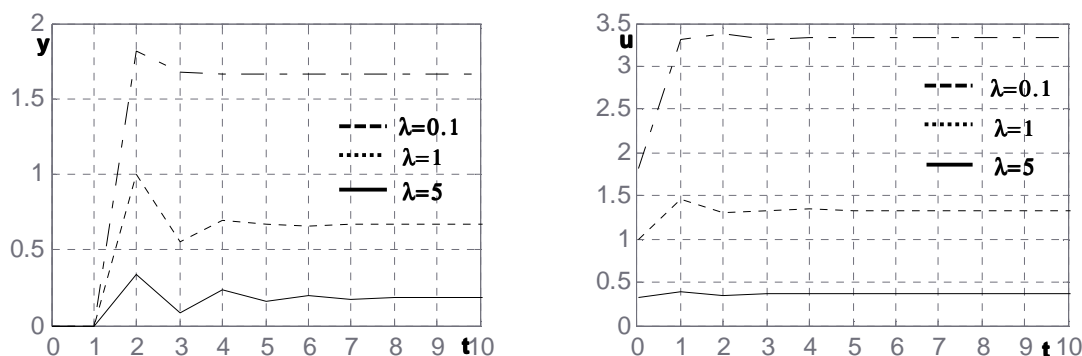
pogledu izbora funkcije prenosa samog kontrolera, dok se kod diskretnog prediktivnog kontrolera funkcija prenosa kontrolera  $G_c(s)$  zamenjuje filtrom koji se odabira sa gledišta stabilnosti i eventualno anuliranja greške stacionarnog stanja.

Interesantno je zapaziti da jedno, u osnovi intuitivno, rešenje za kontinualne sisteme, koje je davalo veoma zadovoljavajuće rezultate, svoje puno teorijsko tumačenje dobija tek kroz teoriju diskretnih sistema. Na taj način, se mogućnost jednostavnog tretiranja "budućih" i "prošlih" vremenskih trenutaka, kod diskretnih sistema, još jedanput potvrđuje kao delotvorna.

Napomenimo da ako se kontroler određuje u skladu sa Smitovim predlogom, odnosno na osnovu definisanih pokazatelja performanse sistema u zatvorenoj sprezi, onda stabilnost sistema nije zagarantovana. U tom kontekstu i težinski prediktivni kontroler Sl. 5-15 može da se interpretira kao Smitov kontroler čija je funkcija prenosa čisto pojačanje. Otuda je prirodno da on ne garantuje stabilnost sistema, odnosno da stabilnost zavisi od parametara samog modela procesa.

**PR. 5-7**

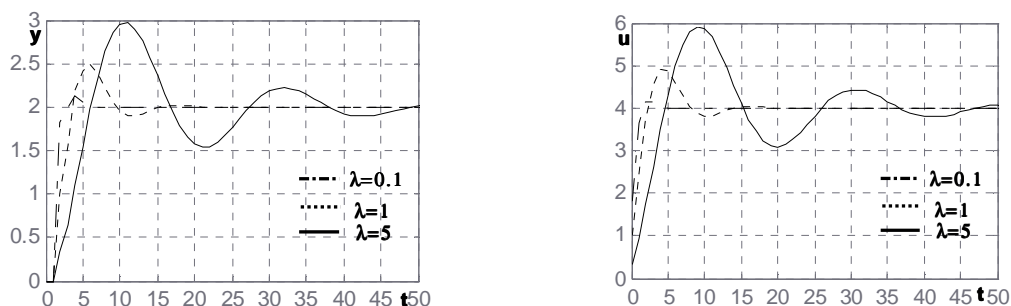
Posmatra se sistem dat modelom u Pr. 5-3. Za sistem se projektuju težinski kontroler i kontroler sa zagarantovanom stabilnošću. Pri tome je usvojeno da je  $P(q^{-1})=1$ ,  $V(q^{-1})=1-q^{-1}$ .



**SL. 5-23 UPRAVLJANJE I ODZIV SISTEMA SA TEŽINSKIM PREDIKTIVNIM KONTROLEROM**

Iz dobijenih rezultata (Sl. 5-23) se vidi da težinski kontroler ne uspeva da obavi postavljeni zadatak, odnosno da ima statičku grešku koja je utoliko veća ukoliko je parametar  $\lambda$  veći. Ovo je prirodna posledica činjenice da se u funkciji kriterijuma sve više ograničava veličina upravljanja.

Za razliku od težinskog kontrolera, kontroler sa zagarantovanim stepenom stabilnosti (Sl. 5-24) ima statičku grešku nula. Ovakvo ponašanje uslovljeno je izborom integralnog dejstva za polinom  $V(q^{-1})$ .



**SL. 5-24 UPRAVLJANJE I ODZIV SISTEMA SA PREDIKTIVNIM KONTROLEROM KOJI IMA ZAGARANTOVANU STABILNOST**

Potrebno je, takođe, da se zapazi da kod ovako odabranih polinoma  $P(q^{-1})$  i  $V(q^{-1})$ , kriterijum (5.42) postaje

$$\tilde{J}_{t+d} = \left\{ \frac{1}{2} [y_{t+d} - y_{t+d}^*]^2 + \frac{\lambda}{2} [u_t - u_{t-1}]^2 \right\}$$

Otuda, parametar  $\lambda$  nema više značenje ograničenja na intenzitet upravljačkog signala, već na veličinu razlike između dve susedne vrednosti upravljanja. U skladu sa time, što je ovaj parametar veći to upravljački signal sporije raste, pa je potrebno više vremena da bi odziv sistema dostigao zadanu vrednost.

## 5.6 Robusnost kontrolera

*Ništa nije samo po sebi ni veliko ni malo sve dok se ne izvrši poređenje*

Kao što je već istaknuto ceo koncept projektovanja prediktivnog upravljanja zasniva se na pretpostavci o poznavanju parametara modela procesa. U tom smislu, sam kontroler je veoma osetljiv na tačnost procene parametara i ne postoji način da se ta osetljivost smanji. Međutim, moguće je uticati na osetljivost kontrolera u odnosu na strukturu samog modela određenu parametrom  $d$  koji izražava kašnjenje odziva u odnosu na pobudu.

U principu, čisto transportno kašnjenje se određuje eksperimentalnim snimanjem odskočnog, (ili nekog drugog) odziva sistema. Pretpostavimo zato, da se kao odziv na odskočnu pobudu u nekom trenutku vremena na izlazu sistema pojavi mali signal sa kašnjenjem od  $d-1$  i daleko veći signal u sledećem trenutku, dakle sa kašnjenjem  $d$ . U skladu sa time, postavlja se pitanje koju od ove dve vrednosti bi trebalo usvojiti kao kašnjenje posmatranog sistema.

Ako se pogleda jednačina modela (5.14), onda se vidi da je prvi registrovani odziv na jediničnu odskočnu pobudu koja deluje u trenutku  $t=0$  jednak

$$y_d = b_0$$

Otuda, usvojeno kašnjenje, odnosno vrednost odziva u tom trenutku direktno utiče na veličinu koeficijenta  $b_0$ . To nadalje znači da se odgovor na postavljeno pitanje može dobiti ako se ustanovi koji je uticaj koeficijenta  $b_0$  na stabilnost i performansu kontrolera.

Iz Vietove formule za proizvod nula polinoma

$$B(q^{-1}) = q^{-d} B^*(q^{-1}) = q^{-d} \sum_{i=0}^m b_i q^{-i} \Rightarrow \quad (5.53)$$

$$\Rightarrow q^{d+m} B = b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \dots + b_m = b_0 \prod_{i=1}^m (q - z_i)$$

$$\left| \prod_{i=1}^m z_i \right| = \left| \frac{b_m}{b_0} \right| \quad (5.54)$$

vidi se da je, ukoliko je koeficijent  $b_0$  mali, lako moguće da bude

$$\frac{b_m}{b_0} > 1, \Rightarrow \exists z_i, |z_i| > 1 \quad (5.55)$$

što bi značilo da se neka od nula polinoma nalazi izvan jediničnog kruga, odnosno da je prediktivni kontroler nestabilan.

Sa druge strane, ako bi se pri projektovanju kontrolera zanemario koeficijent  $b_0$ , onda bi se dobio nešto drugačiji polinom  $B(q^{-1})$  u kome je kašnjenje povećano za jedan, ali vodeći koeficijent  $\tilde{b}_0$  nije mali.

$$B = q^{-d} B^* = b_0 q^{-d} + q^{-d-1} \tilde{B}^* \approx q^{-d_1} \tilde{B}^*; \quad d_1 = d + 1$$

$$\tilde{B}^* = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 q^{-1} + \dots + \tilde{b}_{m-1} q^{-(m-1)} \quad (5.56)$$

$$\tilde{b}_i = b_{i+1}; \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

Odgovarajući model prediktora je

$$y_{t+d_1}^* = G(q^{-1}) y_t + F(q^{-1}) \tilde{B}^*(q^{-1}) u_t \quad (5.57)$$

tako da se, uz pomoć relacije (5.15) dobija prediktivni kontroler u zatvorenoj formi

$$F(q^{-1})\tilde{B}^*(q^{-1})u_t = y_{t+d_1}^* - G(q^{-1})\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u_t \Rightarrow$$

$$\left[ F(q^{-1})A(q^{-1})\tilde{B}^*(q^{-1}) + G(q^{-1})\underbrace{\left(b_0q^{-d} + q^{-d-1}\tilde{B}^*(q^{-1})\right)}_{\text{st var ni polinom B}} \right] u_t = A(q^{-1})y_{t+d_1}^* \Rightarrow \quad (5.58)$$

$$\left[ \underbrace{\left(F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d_1}G(q^{-1})\right)}_1 \tilde{B}^*(q^{-1}) + b_0q^{-d}G(q^{-1}) \right] u_t = A(q^{-1})y_{t+d_1}^*$$

Stabilnost kontrolera određena je nulama polinoma  $\tilde{B}^*(q^{-1}) + b_0q^{-(d-1)}G(q^{-1})$ . Ove nule će biti unutar jediničnog kruga ukoliko je polinom  $\tilde{B}^*(q^{-1})$  stabilan i ukoliko je njegova margina stabilnosti značajno veća od koeficijenta  $b_0$ . Na taj način, zanemarivanjem koeficijenta  $b_0$ , može se dobiti stabilan kontroler koji se ponaša veoma slično kao i da je koeficijent  $b_0$  zaista imao vrednost 0.

### 5.7 Praćenje referentnog modela

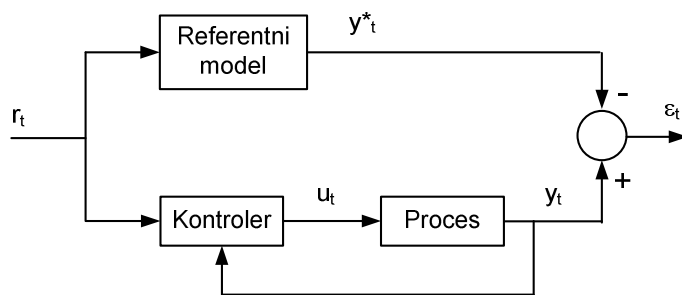
*Preciziranje krajnjeg cilja ne pomaže samo da se utvrdi kako se do njega stiže, već i zašto se to radi*

Ako se već želi da se kroz prizmu rešavanja problema prediktivnog upravljanja sagledaju i druge tehnike upravljanja sistemima, onda je neophodno da se, kao prvo, još jedanput razmotri evolucija ovog rešenja.

Početna ideja formiranja jednokoračnog prediktivnog kontrolera ima svoje puno opravdanje u samom matematičkom modelu procesa. Dobijeno rešenje je izuzetno jednostavno, ali nažalost i isto toliko zavisno od modela procesa. Naknadna analiza rešenja, međutim, pokazuje da ono istovremeno predstavlja i optimalno rešenje ako se kao mera performanse usvoji trenutna greška predikcije. Ova činjenica uslovlila je da se ceo problem projektovanja prediktivnog kontrolera iz domena izjednačavanja željenog i ostvarenog budućeg odziva sistema, prevede u domen minimizacije mere performanse, definisane i nadalje kao jednokoračne (trenutne) mere.

Po prirodi stvari, kada se pogleda originalna mera (5.29), odmah postaje jasno da u njoj nedostaje ograničenje upravljačkog signala. Otuda se težinski prediktivni kontroler javlja kao direktna posledica filozofije optimalnog upravljanja koje se zasniva na kompromisu između ostvarivanja željenog cilja i uložene energije da se on postigne. Pri tome se težina koja se u kriterijumu daje uloženoj energiji izražava pomoću parametra  $\lambda$ .

Realizacija prediktivnog težinskog kontrolera ukazala je i na mogućnost da se izborom parametra  $\lambda$  utiče na stabilnost kontrolera, a time i na performansu celog sistema u smislu



SL. 5-25 MRAS - SISTEM UPRAVLJANJA SA REFERENTNIM MODELOM

rasporeda polova spregnutog prenosa. Iako je nesumnjivo moguće da se ovako određen parametar  $\lambda$  interpretira i u svetlu težine koja se u funkciji kriterijuma daje upravljačkom signalu, izvesno je da je ta veza ipak krajnje indirektna.

Uvođenja filtriranog ulaznog signala u funkciju kriterijuma predstavlja korak dalje u odnosu na težinski kontroler. Naime, i dalje bi se moglo tvrditi da taj član, na izvestan

način, deluje na ograničavanje vrednosti upravljačkog signala, ali je veoma teško uspostaviti

direktnu vezu između parametara polinoma filtra i stvarne vrednosti upravljanja. Otuda bi se moglo reći da projektovanje kontrolera sa zagaranovanim stabilnošću predstavlja dalju evoluciju ideje da se dobije jednostavan algoritam upravljanja koji će, pri tome, ispunjavati određene uslove u pogledu performanse. U izvesnom smislu, ovde se odustaje od zahteva da se željeni i ostvareni odziv izjednače u d-koraka, pa i da se pri tome direktno utiče na uloženu energiju. Ovde se zapravo projektuje stabilan sistem pomoću metodologije izvođenja rešenja preuzete iz prediktivnog upravljanja.

Ukoliko se, nadalje želi da se pored stabilnosti postigne i anuliranje greške stacionarnog stanja, tada je neophodno da filter sadrži integrator. Samo se po sebi razume da bi se sada moglo nastaviti sa dodavanjem različitih uslova u pogledu ponašanja sistema što bi, van svake sumnje, dodatno određivalo strukturu filtra. U krajnjoj liniji mogao bi se postaviti zahtev da sistem zajedno sa kontrolerom ima neku unapred definisanu funkciju prenosa. Time bi njegova performansa bila u potpunosti definisana, pa je prirodno očekivati da bi i funkcija prenosa filtra bila u potpunosti određena.

Izložena ideja dovodi zapravo do zahteva da se upravljanje projektuje tako da se proces zajedno sa kontrolerom ponaša kao neki zadani referentni model. Od kontrolera se očekuje da generiše sekvencu upravljanja tako da izlaz procesa prati neki signal ( $y_t^*$ ) koji se dobija kao izlaz poznatog dinamičkog modela pobuđenog istim referentnim ulazom ( $r_t$ ) kao i sam sistem.

U teoriji linearnih sistema upravljanih pomoću referentnog modela pretpostavlja se da je referentni model linearan, opisan sledećom relacijom

$$\begin{aligned} A_m(q^{-1})y_t^* &= q^{-d}\mu B_m^*(q^{-1})r_t \\ A_m(q^{-1}) &= 1 + a_{m1}q^{-1} + \dots + a_{m\ell}q^{-\ell} \\ B_m^*(q^{-1}) &= 1 + b_{m1}q^{-1} + \dots + b_{mk}q^{-k} \\ \mu &= \text{const} \end{aligned} \tag{5.59}$$

dok se sam proces i nadalje definisan kao

$$A(q^{-1})y_t = B(q^{-1})u_t = q^{-d}B^*(q^{-1})u_t \tag{5.60}$$

Kao što je već ranije istaknuto, metodologija upravljanja pomoću referentnog modela, nastala je potpuno nezavisno od prediktivnog upravljanja. Međutim, ako se ceo problem sagleda sa gledišta prediktivnog upravljanja, onde se vidi da se ovde, zapravo, radi o preciziranju načina na koji se zadaje željeni odziva sistema. Otuda se ne vidi razlog zašto se za rešavanje tog problema ne bi mogla koristiti ista metodologija. Drugim rečima, pokazuje se da je upravo način zadavanja odziva ona tačka kroz koju se mogu interpretirati i druge poznate strategije upravljanja, koje su, istorijski gledano, nastale na različite načine.

U izvornom obliku upravljanje pomoću referentnog modela pretpostavlja da je referentni model u paraleli sa procesom i kontrolerom (Sl. 5-25). Ovakva struktura se često koristi u adaptivnim sistemima, pa je odatle i preuzet njen naziv MRAS - Model Reference (Adaptive) System. Daljom razradom ovog koncepta došlo se do rešenja u kojima je referentni model istovremeno vezan na red sa procesom i kontrolerom – serijski MRAS, odnosno u kome je on razbijen na rednu i paralelnu granu – serijsko-paralelni MRAS.

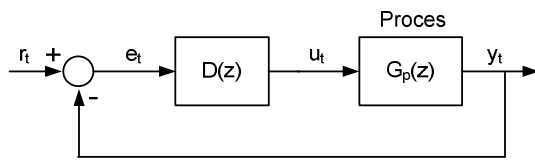
### 5.7.1 DEAD-BEAT KONTROLER

Dead-bit kontroler je razvijen uz zahteva da odziv sistema verno prati ulazni signal sa kašnjenjem od d jedinica vremena

$$y_{t+d}^* = r_t \tag{5.61}$$

U tom smislu on se može posmatrati kao sistem sa najelementarnijim referentnim modelom čija je funkcija prenosa čisto transportno kašnjenje od d-perioda. Naime, na osnovu postavljenog zahteva i relacije (5.59) vidi se da je referentni model jednak

$$y_t^* = \frac{q^{-d} \mu B_m^*(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r_t = r_t \Rightarrow A_m(q^{-1}) = 1; B_m^*(q^{-1}) = 1; \mu = 1 \Rightarrow G_m(z) = z^{-d} \quad (5.62)$$



Ako se pri rešavanju postavljenog zahteva odabere da se kontroler formira tako da sistem ima jediničnu povratnu spregu (Sl. 5-26), onda se izjednačavanjem funkcije spregnutog prenosa sistema sa funkcijom prenosa referentnog modela dobija

**SL. 5-26 DEAD-BEAT KONTROLER U SISTEMU SA JEDINIČNOM POVRATNOM DPREGOM**

$$\frac{D(z)G_p(z)}{1 + D(z)G_p(z)} = z^{-d} \Rightarrow D(z) = \frac{z^{-d}}{(1 - z^{-d})G_p(z)} = \frac{1}{(z^d - 1)G_p(z)} \quad (5.63)$$

Ako se nadalje pretpostavi da je funkcija prenosa procesa definisana kao

$$G_p(z) = \frac{\tilde{B}(z)}{\tilde{A}(z)} = \frac{\tilde{b}_m z^m + \tilde{b}_{m-1} z^{m-1} + \dots + \tilde{b}_1 z + \tilde{b}_0}{\tilde{a}_n z^n + \tilde{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \tilde{a}_1 z + 1} = \frac{z^{-d} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{z^{-d} B^*(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (5.64)$$

tada je dead-beat kontroler određen relacijom

$$D(q^{-1}) = \frac{A(q^{-1})}{(1 - q^{-d})B^*(q^{-1})} \quad (5.65)$$

Potrebno je zapaziti da je dobijena funkcija prenosa identična sa funkcijom prenosa kontrolera minimalne greške predikcije (5.27). Ovo je potpuno u skladu sa činjenicom da su oba kontrolera, uprkos različitim nazivima, projektovani sa potpuno istim zahtevom. Konačno, ako se pogleda sistem sa prediktivnim kontrolerom koji minimizira grešku predikcije (Sl. 5-5) onda se vidi da on ima funkciju prenosa koja je jednaka funkciji prenosa zadanog referentnog modela (5.62). Otuda se prediktivni kontroler može interpretirati ne samo kako kontroler minimalne greške predikcije već i kao dead-beat kontroler.

Dead-bit kontroler je jedan od prvih kontrolera koji je razvijen za diskretne sisteme, a nije imao svoj kontinualni ekvivalent. Posebnu atraktivnost predstavljala je činjenica da on obavlja postavljene zadatke u tačno definisanom, malom broju koraka.

Interesantno je analizirati i zašto dead-beat kontroler nije imao svoj kontinualni ekvivalent. Naime, budući da je karakteristični polinom sistema sa zatvorenom povratnom spregom  $f(z) = z^d$  vidi se da su svi polovi kompenzovanog sistema smešteni u koordinatni početak. Pandan ovom rasporedu polova bio bi kontinualni sistem kod koga se svi polovi nalaze na negativnom delu realne ose u beskonačnosti. Ako se ostavi po strani činjenica da se takav kontroler ni teorijski ne može napraviti, izvesno je da bi mogao da se napravi kontroler koji bi imao veoma velike negativne polove. Njegov odziv bi bio veoma brz, što znači da bi imao performansu koja odgovara dead-beat kontroleru. Međutim, takav kontinualni sistem bi imao i beskonačno, ili skoro beskonačno veliki propusni opseg, pa bi zbog nemogućnosti da otkloni poremećaje bio neprimenljiv.

Samo se po sebi razume, da prema zakonitosti preslikavanja između  $s$  i  $z$  domena i dead-beat kontroler ima maksimalni mogući propusni opseg. Pitanje je, međutim, zašto ta osobina nije bila prepreka u praktičnoj realizaciji diskretnog kontrolera. Odgovor treba tražiti u činjenici da je u klasičnoj realizaciji diskretnih sistema, teorema odabiranja zahtevala da se signal povratne sprege isfiltrira pre nego što se dovede na odabirač. To zapravo znači da je do kontrolera dolazio samo

koristan signal, očišćen od šuma merenja, pa je u osnovi bilo svejedno koliki je njegov propusni opseg.

Široku praktičnu primenu ovog kontrolera sprečila je zapravo nemogućnost da se utiče na oblik i veličinu upravljačkog signala, odnosno isti oni nedostaci koji ograničavaju primenu svih kontrolera kod kojih se pri projektovanju ne vodi računa o upravljačkom signalu.

**PR. 5-8**

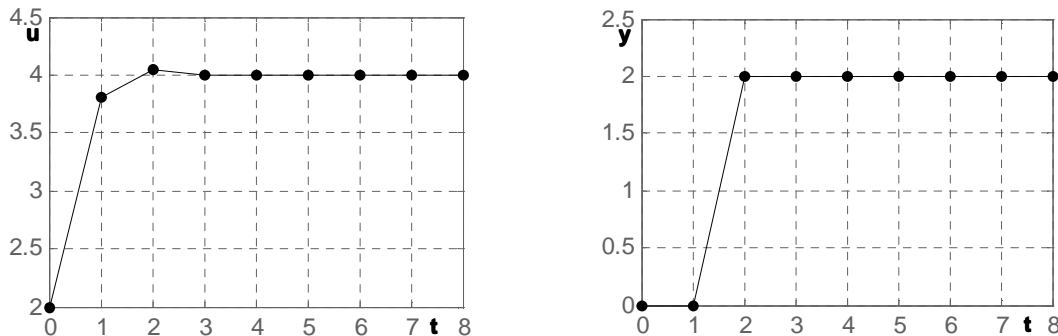
Ako se posmatra sistem iz primera Pr. 5-2 kod koga je proces opisan sa

$$G(z) = \frac{z + 0.2}{z^3 + 1.1z^2 + 0.3z}$$

tada je dead-beat kontroler određen sa

$$D(z) = \frac{z^3 + 1.1z^2 + 0.3z}{(z^2 - 1)(z + 0.2)} = \frac{z^3 + 1.1z^2 + 0.3z}{z^3 + 0.2z^2 - z - 0.2}$$

Ako se, nadalje, pretpostavi da je pobudni signal odskočna funkcija intenziteta 2, tada je postavljeni zahtev identičan zahtevu iz primera Pr. 5-3. Otuda nije ni čudno da se dobijaju identični rezultati što se vidi poređenjem dijagrama na Sl. 5-8 i dijagram dobijenih primenom dead-beat kontrolera (Sl. 5-27)



**SL. 5-27 UPRAVLJANJE I ODZIV SISTEMA UPRAVLJANOG DEAD-BEAT CONTROLEROM**

**5.7.2 DALINOV (DAHLIN) KONTROLER**

Dalinov kontroler je bio veoma popularan u ranim danima razvoja diskretnih sistema najviše zbog svoje jednostavnosti. U izvesnom smislu on sledi osnovnu ideju dead-beat kontrolera. Pri tome, budući da dead-beat kontroler može da ima izuzetno velike upravljačke signale, ovde se postavljaju blaži zahtevi, sa idejom da bi to moglo da dovede i do smanjenja upravljanja.

Dalinov regulator se projektuje sa zahtevom da odziv sistema na jediničnu odskočnu funkciju bude aperiodičan, odnosno da važi

$$r_t = h_t \Rightarrow y_{t+d-1}^* = 1 - a^t \tag{5.66}$$

Referentni model koji odgovara ovako postavljenom zahtevu dobija se na sledeći način

$$r_t = h_t \Rightarrow R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$y_{t+d-1}^* = 1 - a^{t+1} \Rightarrow q^{d-1} y_t^* = 1 - a^t \Rightarrow Y^*(z) = z^{-d} \frac{z(1-a)}{(z-1)(z-a)}$$

$$\frac{Y^*(z)}{R(z)} = G_m(z) = z^{-d+1} \frac{1-a}{z-a} = z^{-d} \frac{1-a}{1-az^{-1}} = z^{-d} \frac{\mu B_m^*(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} \Rightarrow \tag{5.67}$$

$$A_m(q^{-1}) = 1 - az^{-1}; \quad B_m^*(q^{-1}) = 1; \quad \mu = 1 - a$$



Pretpostavljajući i nadalje da je kontroler postavljen u direktnu granu sistema sa jediničnom povratnom spregom (Sl. 5-26) funkcija prenosa kontrolera dobija se na sledeći način.

$$\frac{D(z)G_p(z)}{1+D(z)G_p(z)} = z^{-d} \frac{1-a}{1-az^{-1}} \Rightarrow D(z) = \frac{1-a}{(z^d - az^{d-1} - 1 + a)G_p(z)} \quad (5.68)$$

Uvrštavanjem izraza za funkciju prenosa procesa, kao i referentnog modela dobiće se

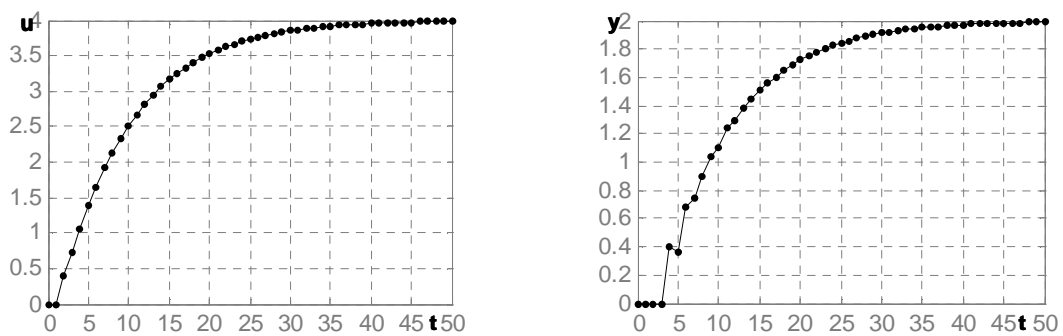
$$D(q^{-1}) = \frac{\mu A(q^{-1})}{(A_m(q^{-1}) - \mu q^{-d}) B^*(q^{-1})} \quad (5.69)$$

U skladu sa definisanim opštim oblikom kontrolera, odgovarajući polinomi su

$$\begin{aligned} R(q^{-1})u_t &= S(q^{-1})e_t = S(q^{-1})(y_{t+d}^* - y_t); \\ R(q^{-1}) &= (A_m(q^{-1}) - \mu q^{-d}) B^*(q^{-1}); \quad S(q^{-1}) = T(q^{-1}) = \mu A(q^{-1}) \end{aligned} \quad (5.70)$$

**PR. 5-9**

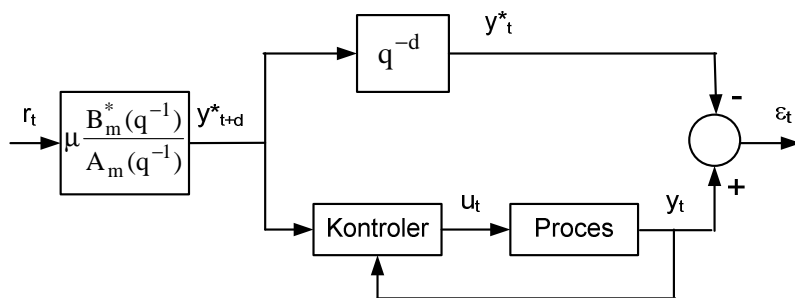
Rezultati primene Dalinovog regulatora na isti sistem iz primera Pr. 5-8, za slučaj kada je  $a=0.8$ , prikazani su na Sl. 5-28. Iz dijagrama se vidi da je dostizanje zadane reference značajno usporeno, ali je istovremeno usporena i promena upravljačkog signala.



**SL. 5-28 UPRAVLJANJE I ODZIV SISTEMA UPRAVLJANOG DALINOVIM KONTROLEROM**

**5.7.3 SERIJSKI MRAS**

Nesumnjivo je da se na sličan način mogao razviti još jedan broj kontrolera koji odgovara relativno jednostavnim funkcijama prenosa referentnog modela. Pitanje je, međutim da li se može naći opšti postupak kojim bi se dobio zakon upravljanja proizvoljne strukture izražen kao funkcija parametara referentnog modela i modela procesa.



**SL. 5-29 SERIJSKI MRAS KAO PREDIKTIVNI KONTROLER**

Ostajući i nadalje pri metodologiji projektovanja prediktivnog upravljanja vidi se da je neophodno da se sistem sa referentnim modelom transformiše tako da signal  $y_{t+d}^*$  bude ulaz kontrolera. Imajući u vidu da i referentni model sadrži kašnjenje, odnosno da njegov izlaz u trenutku

vremena  $t+d$  zavisi samo o referentnih ulaza koji su na sistem delovali do trenutka  $t$ , postavljeni zahtev se može ostvariti tako što bi se referentni model bez kašnjenja vezao na red sa kontrolerom (Sl. 5-29). Striktno gledano na taj način i referentni model postaje deo kontrolera, odnosno u nekoj meri određuje njegovu strukturu. Osnovna ideja sastoji se u tome da se deo referentnog modela, ili čak i ceo model uključi u sam kontroler. Ovako transformisan MRAS pripada kategoriji serijskog MRASa.

Zakon upravljanja sada zavisi od toga koja vrsta prediktivnog kontrolera se želi odabrati. Budući da je performansa sistema zadana pomoću referentnog modela i da je on sastavni deo kontrolera, kao prirodno opredeljenje se nameće osnovni oblik prediktivnog kontrolera, odnosno kontroler minimalne greške predikcije. U skladu sa relacijom (5.25) upravljanje je određeno sa

$$u_t = \frac{1}{F(q^{-1})B^*(q^{-1})} \left[ \mu \frac{B_m^*(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r_t - G(q^{-1})y_t \right] \quad (5.71)$$

odnosno, prema relaciji (5.27) zakon upravljanja je

$$\begin{aligned} R(q^{-1})u_t &= T(q^{-1})r_t - S y_t \\ R(q^{-1}) &= (1 - q^{-d})B^*(q^{-1})A_m(q^{-1}); \\ T(q^{-1}) &= \mu B_m^*(q^{-1})A(q^{-1}); \quad S(q^{-1}) = A(q^{-1})A_m(q^{-1}) \end{aligned} \quad (5.72)$$

Iz relacije (5.71), kao i iz relacije (5.72) se vidi da je proces zajedno sa kontrolerom opisan sledećom jednačinom

$$y_t = \mu \frac{q^{-d} B_m^*(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r_t \quad (5.73)$$

To zapravo znači da je ostvaren postavljeni zadatak, odnosno da je, bar sa teorijske tačke gledišta, izlaz procesa jednak izlazu referentnog modela.

Zapazimo, da stabilnost dobijenog kontrolera i nadalje zavisi od nula polinoma  $q^m B^*(q^{-1})$ . Međutim, na dinamiku samog kontrolera (uz uslov da je stabilan) utiču i nule polinoma  $q^n A_m(q^{-1})$ , koje se biraju pri specifikaciji referentnog modela. Otuda se može dobiti bolje ponašanje nego što je to slučaj sa kontrolerom minimalne greške predikcije.

Teorijski, umesto kontrolera minimalne greške predikcije mogao bi se koristiti težinski kontroler, ili kontroler sa zagaranovanim stepenom stabilnosti. Taj pristup bi rezultovao stabilnim kontrolerom, ali se više ne bi dobilo idealno praćenje referentnog modela. Međutim, ne vidi se neki poseban razlog da se prihvati ovaj pristup. Ako polinom  $q^m B^*(q^{-1})$  ima nestabilne nule, onda nema smisla da se uopšte projektuje serijski MRAS, već treba potražiti neku drugu strukturu sistema koja će dovesti do stabilnog kontrolera.

#### PR. 5-10

Dat je proces opisan linearnim modelom

$$y_t = K \frac{q^{-1}(1-0.55q^{-1})}{(1-q^{-1})(1-aq^{-1})} u_t$$

Potrebno je odrediti kontroler takav da izlaz procesa prati izlaz referentnog modela

$$y_t^* = \frac{q^{-1}(0.785-0.3q^{-1})}{(1-0.75q^{-1}+0.247q^{-2})} r_t$$

U skladu sa relacijama (5.72) traženi kontroler je

$$\begin{aligned} R(q^{-1}) &= (1 - q^{-d})B^*(q^{-1})A_m(q^{-1}) = K(1 - q^{-1})(1 - 0.55q^{-1})(1 - 0.75q^{-1} + 0.247q^{-2}) \\ T(q^{-1}) &= \mu B_m^*(q^{-1})A(q^{-1}) = (0.785 - 0.3q^{-1})(1 - q^{-1})(1 - aq^{-1}) \\ S(q^{-1}) &= A(q^{-1})A_m(q^{-1}) = (1 - q^{-1})(1 - aq^{-1})(1 - 0.75q^{-1} + 0.247q^{-2}) \end{aligned}$$

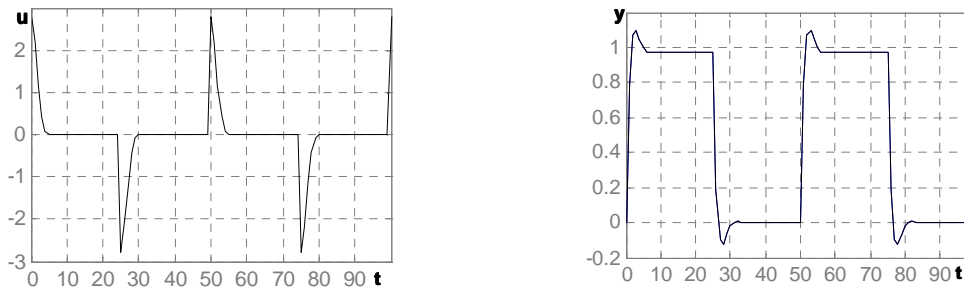
$$R(q^{-1})u_t = T(q^{-1})r_t - S y_t \Rightarrow$$

$$u_t = \frac{(0.785 - 0.3q^{-1})(1 - aq^{-1})}{K(1 - 0.55q^{-1})(1 - 0.75q^{-1} + 0.247q^{-2})} r_t - \frac{(1 - aq^{-1})}{K(1 - 0.55q^{-1})} y_t$$

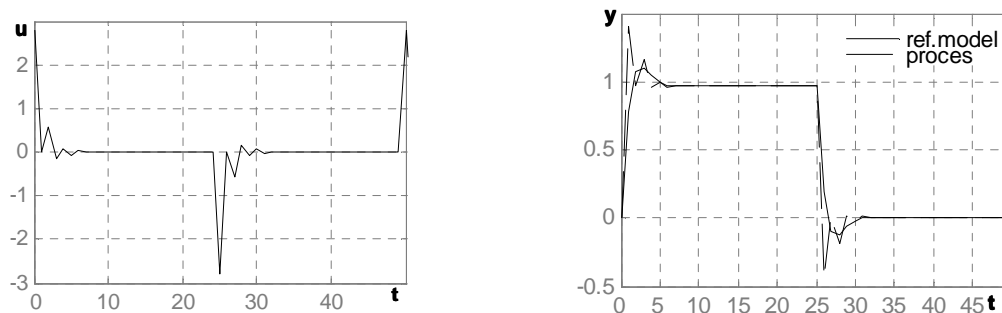
Kontroler je projektovan uz pretpostavku da su parametri procesa  $K=0.28$  i  $a=0.135$ .

Rezultati simulacije za slučaj kada je referentni signal povorka pravougaonih impulsa amplitude 1 i učestanosti 50, prikazani su na Sl. 5-30. Kao što se vidi proces idealno prati referentni model, tako da se i ne vidi razlika između ta dva odziva.

Pretpostavimo sada da parametri procesa nisu tačno procenjeni ili da je zbog nekog razloga došlo do promene parametara procesa tako da stvarno pojačanje procesa iznosi  $K_p=0.5$ , kao i da je pol procesa  $a_p=0.25$ . Samo se po sebi razume da se u tom slučaju više ne može očekivati idealno slaganje odziva referentnog modela i procesa. Ipak sa Sl. 5-31 se vidi da posle izvesnog vremena kontroler uspeva da uspostavi slaganje odziva.



**SL. 5-30 UPRAVLJANJE, ODZIV PROCESA UPRAVLJANOG POMOĆU SERIJSKOG MRASA SA TAČNIM VREDNOSTIMA PARAMETARA PROCESA I ODZIV REFERENTNOG MODELA**



**SL. 5-31 UPRAVLJANJE I ODZIV PROCESA UPRAVLJANOG POMOĆU SERIJSKOG MRASA SA NETAČNO PROCENJENIM PARAMETRIMA PROCESA**

Može se postaviti pitanje da li je fenomen relativno dobrog praćenja i u slučaju pogrešno procenjenih parametara, uočen u primeru Pr. 5-10, karakteristika ovog tipa kontrolera ili se radi o slučajnom rezultatu. Da bi se odgovorilo na ovo pitanje potražićemo grešku stacionarnog stanja kod serijskog MRASA projektovanog za parametre procesa određene polinomima  $A(q^{-1})$  i  $B(q^{-1})$ , a za slučaj kada proces ima parametre određene polinomima  $A_p(q^{-1})$  i  $B_p(q^{-1})$ .

Ako se pretpostavi da je sistem stabilan i da je referentni signal jedinična odskočna funkcija, tada se dobija

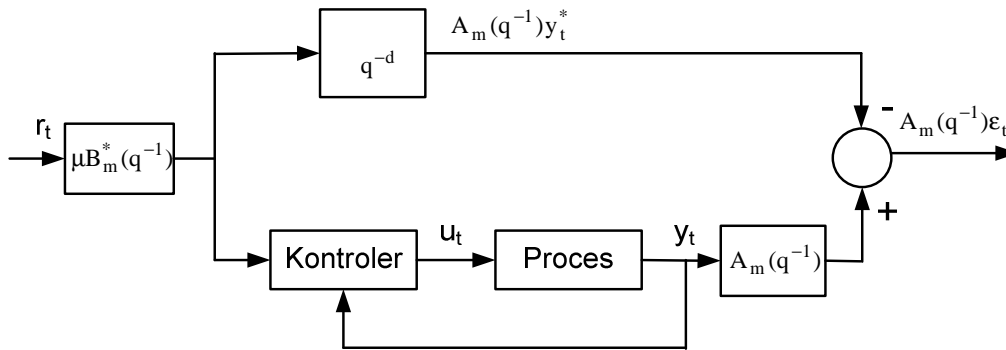
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_t &= \lim_{t \rightarrow \infty} (y_t^* - y_t) = \\ &= \lim_{z=1} (1 - z^{-1}) \left( \frac{\mu q^{-d} B_m^*(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} - \frac{q^{-d} B_p^*(q^{-1}) T(q^{-1})}{R(q^{-1}) A_p(q^{-1}) + S(q^{-1}) q^{-d} B_p^*(q^{-1})} \right) \frac{1}{1 - z^{-1}} = 0 \end{aligned} \quad (5.74)$$

Potrebno je zapaziti da je greška stacionarnog stanja jednaka nuli zahvaljujući činjenici da je  $R(1)=0$ .

#### 5.7.4 SERIJSKO-PARALELNI MRAS

Ideja da se referentni model na neki način uključi u kontroler svakako se ne iscrpljuje sa serijskim MRASom. Još jedna mogućnost transformacije početnog referentnog modela prikazana je na Sl. 5-32. Rezultujući sistem predstavlja serijsko paralelni MRAS. Sa slike se vidi da je ovde zahtev preformulisan tako da se od kontrolera traži da generiše upravljanje koje će obezbediti da signal  $A_m(q^{-1})y_t$  prati zadani signal  $A_m(q^{-1})y_t^*$ , odnosno da bude

$$A_m(q^{-1})y_t = A_m(q^{-1})y_t^* = q^{-d}\mu B_m(q^{-1})r_t \quad (5.75)$$



SL. 5-32 SERIJSKO-PARALELNI MRAS

Postavljeni problem se može rešiti po analogiji sa prediktivnim upravljanjem i to tako što će se umesto zahteva da se ostvari jednakost  $y_{t+d} = y_{t+d}^*$ , postaviti zahtev da bude

$$A_m(q^{-1})y_{t+d} = A_m(q^{-1})y_{t+d}^* = \mu B_m(q^{-1})r_t.$$

Sledeći ranije izloženi postupak rešavanja postavljenog problema potrebno je, kao prvo, da se formira i model signala  $A_m(q^{-1})y_t$  u prediktorskoj formi. Neka je

$$F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) = A_m(q^{-1}) \quad (5.76)$$

tada je

$$F(q^{-1})A(q^{-1})y_t = F(q^{-1})B(q^{-1})u_t \Rightarrow [A_m(q^{-1}) - q^{-d}G(q^{-1})]y_t = q^{-d}F(q^{-1})B^*(q^{-1})u_t \Rightarrow \quad (5.77)$$

$$A_m(q^{-1})y_{t+d} = G(q^{-1})y_t + F(q^{-1})B^*(q^{-1})u_t$$

Ako se definiše

$$\alpha(q^{-1}) = G(q^{-1}) ; \beta(q^{-1}) = F(q^{-1})B^*(q^{-1}) \quad (5.78)$$

traženi prediktorski model je

$$A_m(q^{-1})y_{t+d} = \alpha(q^{-1})y_t + \beta(q^{-1})u_t \quad (5.79)$$

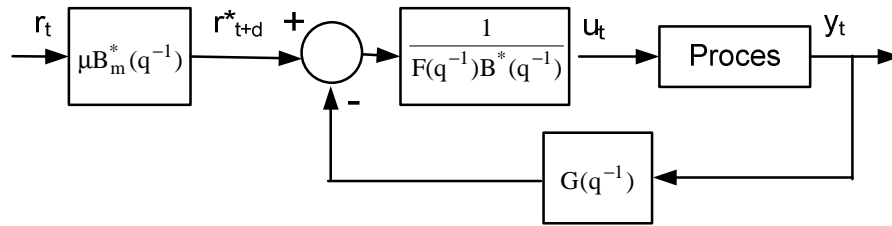
U skladu sa postavljenim zahtevom, iz relacije (5.79), se direktno određuje zakon upravljanja

$$A_m(q^{-1})y_{t+d} = A_m(q^{-1})y_{t+d}^* \Rightarrow \beta(q^{-1})u_t = -\alpha(q^{-1})y_t + \underbrace{\mu B_m^*(q^{-1})r_t}_{A_m y_{t+d}^*} \quad (5.80)$$

Iz izraza (5.77) sledi da je jednačina kontrolera data kao

$$u_t = \frac{1}{F(q^{-1})B^*(q^{-1})} (\mu B_m^*(q^{-1})r_t - G(q^{-1})y_t) \quad (5.81)$$

Očigledno je da prelazni proces, kao i stabilnost kontrolera i dalje zavise od polinoma  $B^*$ .

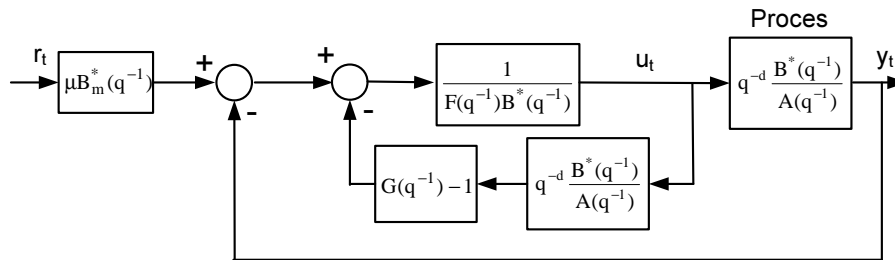


SL. 5-33 KONTROLER KOD SERIJSKO-PARALELNOG MRASA

Struktura kontrolera (Sl. 5-33) je takva da, pored povratne sprege po izlazu procesa postoji i povratna sprega po obrađenom signalu greške<sup>1</sup>.

$$F(q^{-1})B^*(q^{-1})u_t = \underbrace{(q^d F(q^{-1})A(q^{-1}) - q^d A_m(q^{-1}))}_{G(q^{-1})} y_t + \underbrace{q^d A_m(q^{-1})}_{\mu B_m^*(q^{-1})} y_t^* \Rightarrow \tag{5.82}$$

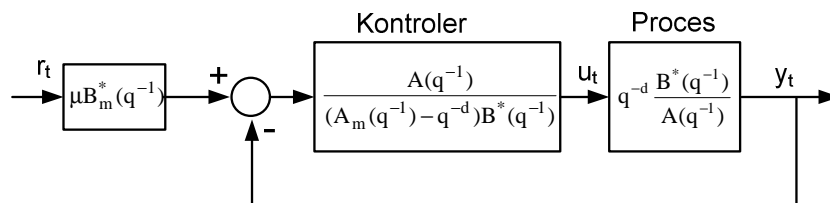
$$F(q^{-1})B(q^{-1})u_t = F(q^{-1})A(q^{-1})y_t + A_m(q^{-1})(y_t^* - y_t) \underset{\varepsilon_t}{}$$



SL. 5-34 EKVIVALENTNA REALIZACIJA KONTROLERA SA POVRATNOM SPREGOM PO UPRAVLJANJU

Potrebno je istaći da pojačanja u povratnoj sprezi zavise od polinoma  $A(q^{-1})$  i  $A_m(q^{-1})$  (koji određuju polinom  $G(q^{-1})$ ), što znači da se pogodnim izborom polova referentnog modela može postići da ona budu manja nego kod prediktivnog upravljanja.

Ukoliko se želi da se kontroler realizuje sa jediničnom povratnom spregom po izlazu procesa onda se ekvivalentnom transformacijom blok dijagrama dobija realizacija prikazana na Sl. 5-34. Daljim transformacijama, korišćenjem relacije (5.76) pokazuje se da se kontroler može realizovati i bez eksplicitnog izračunavanja polinoma  $F(q^{-1})$  i  $G(q^{-1})$  (Sl. 5-35).



SL. 5-35 REALIZACIJA KONTROLERA BEZ IZRAČUNAVANJA POLINOMA F I G

U tom slučaju zakon upravljanja je dat sledećom relacijom

$$\begin{aligned} R(q^{-1})u_t &= T(q^{-1})r_t - S(q^{-1})y_t ; \\ R(q^{-1}) &= (A_m(q^{-1}) - q^{-d})B^*(q^{-1}) ; \\ T(q^{-1}) &= \mu A(q^{-1})B_m^*(q^{-1})r_t ; \quad S(q^{-1}) = A(q^{-1}) \end{aligned} \tag{5.83}$$

Kao što je već rečeno stabilnost kontrolera zavisi od nula polinoma  $B^*(q^{-1})$ , ali se i ovde izborom polova referentnog modela može uticati na jedan broj polova kontrolera, pa time i na njegovu performansu. Razlika je svakako i u tome što za razliku od serijskog kontrolera serijsko

<sup>1</sup> Ovaj signal se u literaturu često označava kao *generalisana greška*

paralelni kontroler ne uključuje integrator. To znači da se od ovog kontrolera ne može očekivati da eliminiše poremećaje tipa početnih uslova do kojih dolazi usled promene parametara modela procesa. Sve ovo ukazuje da se ne može dati opšta ocena koji od dva kontrolera je pogodniji za primenu. Izbor će zavisiti od kompromisa između potencijalno manjih pojačanja u povratnoj sprezi (a time i manjih vrednosti upravljačkog signala) i eliminacije statičke greške.

Iz relacije (5.83) se vidi da je funkcija prenosa sistema u zatvorenoj povratnoj sprezi jednaka

$$u_t = \frac{A(q^{-1})}{(A_m(q^{-1}) - q^{-d})B^*(q^{-1})} [\mu B_m^*(q^{-1})r_t - y_t] \Rightarrow y_t = \frac{q^{-d}\mu B_m^*(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r_t \quad (5.84)$$

Prema očekivanju, funkcija prenosa sistema jednaka je funkciji prenosa referentnog modela. Budući da su polovi funkcije spregnutog prenosa definisani referentnim modelom, zagarantovana je stabilnost celog sistema.

Konačno, ako se Dalinov kontroler (5.70) uporedi sa dobijenim zakonom upravljanja vidi se da on zapravo pripada kategoriji serijsko-paralelnog MRASa. Izvesna razlika nastaje usled apriorno postavljene strukture sistema sa procesom i kontrolerom.

**PR. 5-11**

Posmatraju se proces i referentni model definisani u primeru Pr. 5-10. U skladu sa relacijama (5.83) serijsko-paralelni kontroler opisan je sa

$$R(q^{-1})u_t = T(q^{-1})r_t - S y_t$$

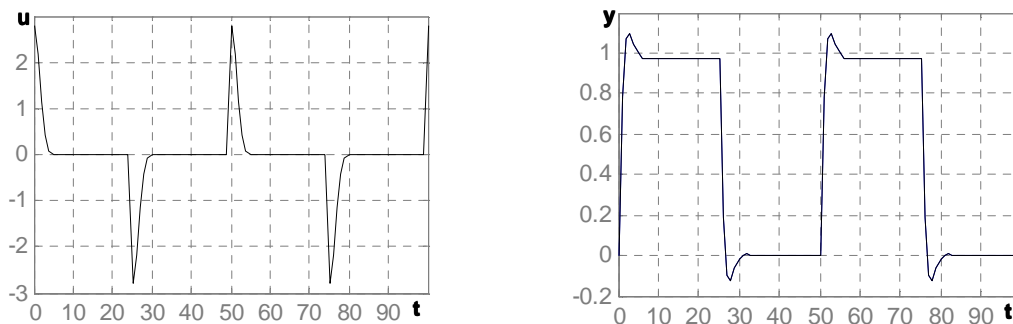
$$R(q^{-1}) = (A_m(q^{-1}) - q^{-d})B^*(q^{-1}) = K(1 - 1.75q^{-1} + 0.247q^{-2})(1 - 0.55q^{-1})$$

$$T(q^{-1}) = \mu B_m^*(q^{-1})A(q^{-1}) = (0.785 - 0.3q^{-1})(1 - q^{-1})(1 - aq^{-1})$$

$$S(q^{-1}) = A(q^{-1}) = (1 - q^{-1})(1 - aq^{-1})$$

Kontroler je projektovan uz pretpostavku da su parametri procesa  $K=0.28$  i  $a=0.135$ .

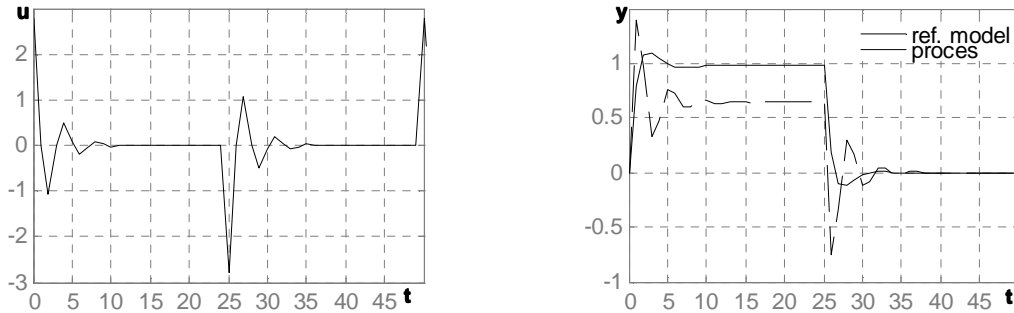
Rezultati simulacije za slučaj kada je referentni signal povorka pravougaonih impulsa amplitude 1 i učestanosti 50, prikazani su na Sl. 5-36. Kao što se vidi proces idealno prati referentni model, isto kao što je to bio slučaj kod serijskog MRASa.



**SL. 5-36 UPRAVLJANJE, ODZIV PROCESA UPRAVLJANOG POMOĆU SERIJSKO-PARALELNOG MRASa SA TAČNIM VREDNOSTIMA PARAMETARA PROCESA I ODZIV REFERENTNOG MODELA**

Postavlja se pitanje da li se možda ponašanje serijskog i serijsko-paralelnog MRASa razlikuju ukoliko parametri procesa nisu tačno procenjeni. Pretpostavimo sada da su parametri procesa i  $K_p=0.5$ , i  $a_p=0.25$ . Rezultati simulacije (Sl. 5-37) pokazuju se u ovom slučaju ni u stacionarnom stanju ne postiže slaganje odziva.

Dobijeni rezultati su zapravo posledica činjenice da, za razliku od serijskog MRASa, serijsko-paralelni MRAS ne garantuje nultu grešku stacionarnog stanja ukoliko su parametri procesa pogrešno procenjeni. Ovo je zapravo posledice činjenice da kod ovog kontrolera polinom  $R(q^{-1})$  ne sadrži integrator.



SL. 5-37 UPRAVLJANJE, ODZIV PROCESA UPRAVLJANOG POMOĆU SERIJSKO-PARALELNOG MRASA SA NETAČNIM VREDNOSTIMA PARAMETARA PROCESA I ODZIV REFERENTNOG MODELA

### 5.8 Paralelni MRAS i podešavanje polova

*Svi načini da se nešto reši su podjednako dobri (izuzev onih koji su veoma zametni)*

Osnovni problem pri formiranju serijskog ili serijsko-paralelnog kontrolera ogleda se u činjenici da polovi kontrolera uključuju i nule procesa, što znači da kontroler ne mora biti stabilan. Osnovna prednost, se međutim, ogleda u činjenici da se može odrediti jednostavan algoritam za projektovanje kontrolera.

Svi do sada izloženi pristupi rešavanju problema praćenja referentnog modela polazili su od postavljenog krajnjeg cilja i kontroler je određivan kroz pogodne transformacije referentnog modela. Drugim rečima nijedna od metoda ne pretpostavlja unapred neku određenu strukturu kontrolera. Ipak, dobijena rešenja i za serijski i za serijsko-paralelni kontroler pokazuju da kontroler ima strukturu prikazanu na Sl. 5-1. Otuda se prirodno postavlja pitanje da li se ova struktura može koristiti kao polazni korak u traženju opšteg rešenja problema praćenja referentnog modela.

Neka ceo sistem koji obuhvata kontroler, proces i referentni model ima izgled kao što je to prikazano na Sl. 5-38. Neka su, pri tome, odgovarajući modeli definisani na sledeći način.

MODEL PROCESA

$$y_t = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u_t = \frac{\tilde{B}^*(q)}{\tilde{A}(q)} u_t; \quad d = dg\tilde{A}(q) - dg\tilde{B}^*(q) = n - m$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n} = q^{-n}\tilde{A}(q); \tag{5.85}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n} = q^{-n}\tilde{B}(q) = q^{-d}B^*(q^{-1}); \quad \left( b_i = \begin{cases} 0 & ; i = 1, 2, \dots, d-1 \\ b_{i-d}^* & ; i = d, d+1, \dots, n \end{cases} \right)$$

$$B^*(q^{-1}) = b_0^* + b_1^*q^{-1} + \dots + b_m^*q^{-m} = q^{-m}\tilde{B}^*(q)$$

REFERENTNI MODEL

$$y_t^* = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r_t = \frac{\tilde{B}_m^*(q)}{\tilde{A}_m(q)} r_t; \quad d_m = dg\tilde{A}_m(q) - dg\tilde{B}_m^*(q) = \ell - k \geq dg\tilde{A}(q) - dg\tilde{B}^*(q)$$

$$A_m(q^{-1}) = 1 + a_{m1}q^{-1} + \dots + a_{m\ell}q^{-\ell} = q^{-\ell}\tilde{A}_m(q)$$

$$B_m(q^{-1}) = b_{m0} + b_{m1}q^{-1} + \dots + b_{m\ell}q^{-\ell} = q^{-\ell}\tilde{B}_m(q) = q^{-d_m}B_m^*(q^{-1}); \tag{5.86}$$

$$B_m^*(q^{-1}) = b_{m0}^* + b_{m1}^*q^{-1} + \dots + b_{mk}^*q^{-k} = q^{-k}\tilde{B}_m^*(q)$$

$$\left( b_{mi} = \begin{cases} 0 & ; i = 0, \dots, d_m - 1 \\ b_{m(i-d_m)}^* & ; i = d_m, \dots, \ell \end{cases} \right)$$

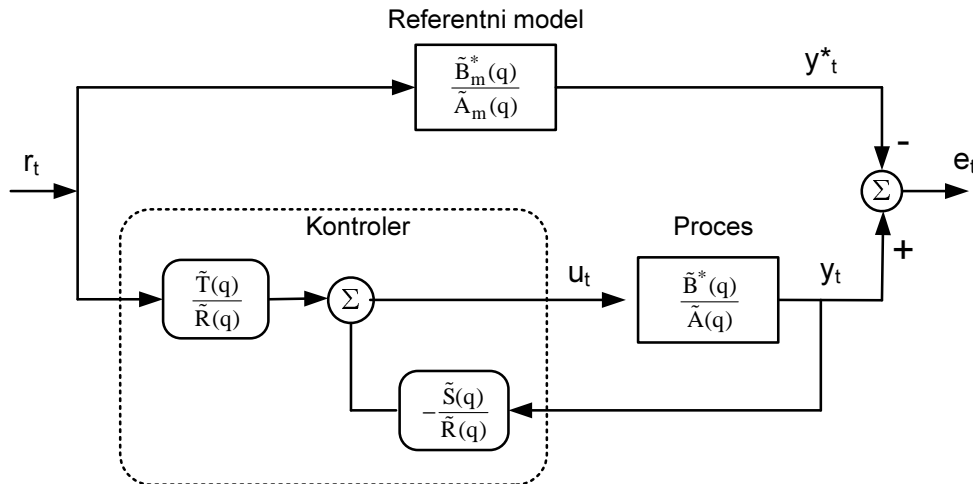
Polinomi  $A_m(q^{-1})$  i  $B_m(q^{-1})$  su uzajamno prosti. Nadalje se pretpostavlja da referentni model

ima kašnjenje koje nije manje od kašnjenja procesa. Ovaj uslov je prirodna posledica činjenice da se kašnjenje koje je inherentno prirodi samoj procesa ne može eliminisati.

KONTROLER

$$u_t = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})} r_t - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y_t = \frac{\tilde{T}(q)}{\tilde{R}(q)} r_t - \frac{\tilde{S}(q)}{\tilde{R}(q)} y_t; \tag{5.87}$$

$$dg\tilde{R}(q) \geq dg\tilde{T}(q); \quad dg\tilde{R}(q) \geq dg\tilde{S}(q)$$



SL. 5-38 PARALELNI MRAS SA ZADATOM STRUKTUROM KONTROLERA

Zapazimo da je pri definisanju strukture kontrolera, uslovljavanjem odnosa stepena polinoma u brojiocu i imeniocu uzeta u obzir potreba da on ima osobinu kauzalnosti. Kolika će biti razlika između stepena polinoma u imeniocu i brojiocu kontrolera zavisi pre svega od toga koliko traje algoritam izračunavanja upravljanja u odnosu na veličinu odabrane periode odabiranja. Ukoliko je trajanje algoritma znatno manje od veličine periode odabiranja, onda se može smatrati da se za određivanje upravljačkog signala koristi trenutna vrednost izlaza pa je

$$dg\tilde{R}(q) = dg\tilde{T}(q) = dg\tilde{S}(q) \tag{5.88}$$

Ukoliko, međutim, algoritam upravljanja zahteva značajno vreme za izračunavanje, tada je prirodno pretpostaviti da kontroler koristi prethodnu vrednost izlaza, odnosno da unosi kašnjenje od jedne periode odabiranja

$$dg\tilde{R}(q) = dg\tilde{T}(q) + 1 = dg\tilde{S}(q) + 1 \tag{5.89}$$

Konačno, ukoliko se želi da kontroler bude formiran tako da eliminiše i spore poremećaje, odnosno da garantuje nultu grešku stacionarnog stanja, potrebno da sadrži integrator, odnosno da polinom u imeniocu bude oblika

$$\tilde{R}(q) = (q - 1)\hat{R}(q) \tag{5.90}$$

5.8.1 IZBOR REFERENTNOG MODELA

Postavljeni zadatak praćenja referentnog modela zahteva da se parametri kontrolera odrede tako da funkcija spregnutog prenosa sistema koji čine proces i kontroler bude jednaka funkciji prenosa referentnog modela.

$$\frac{\tilde{B}^*(q)\tilde{T}(q)}{\tilde{A}(q)\tilde{R}(q) + \tilde{B}^*(q)\tilde{S}(q)} = \frac{\tilde{B}_m^*(q)}{\tilde{A}_m(q)} \tag{5.91}$$

Budući da se zahteva jednakost dve racionalne funkcije izvesno je da postoji veoma mnogo načina na koji mogu da se izaberu parametri kontrolera tako da se zadovolji postavljena jednakost.

Pre svega, već izvedena rešenja za serijski i serijsko-paralelni MRAS ispunjavaju postavljeni



uslov. Pored toga, ako se usvoji da je

$$\tilde{R}(q) = \tilde{B}^*(q)\tilde{A}_m(q); \quad \tilde{S}(q) = 0; \quad \tilde{T}(q) = \tilde{A}(q)\tilde{B}_m^*(q) \quad (5.92)$$

dobija se trivijalno rešenje

$$u_t = \frac{\tilde{T}(q)}{\tilde{R}(q)} = \frac{\tilde{A}(q)}{\tilde{B}^*(q)} \frac{\tilde{B}_m^*(q)}{\tilde{A}_m(q)} r_t \quad (5.93)$$

u kome kontroler skрати sve polove i nule procesa i uvede željene polove i nule. Pored već ranije isticanih problema skraćivanja polova i nula sa praktične tačke gledišta, osnovni nedostatak ovako projektovanog kontrolera ogleda se u nepostojanju povratne sprege po izlazu ( $\tilde{S}(q) = 0$ ). Ovaj nedostatak bi se, bar teorijski, mogao otkloniti ako se pođe od ideje da se projektuje sistem sa jediničnom povratnom spregom ( $\tilde{S}(q) = \tilde{T}(q)$ ), tada će jednakost (5.91) biti zadovoljena ako se usvoji da je

$$\tilde{R}(q) = \tilde{B}^*(q)(\tilde{A}_m(q) - \tilde{B}_m^*(q)); \quad \tilde{S}(q) = \tilde{T}(q) = \tilde{A}(q)\tilde{B}_m^*(q) \quad (5.94)$$

Međutim, kada se pogleda dobijeni kontroler

$$u_t = \frac{\tilde{S}(q)}{\tilde{R}(q)}(r_t - y_t) = \frac{\tilde{S}(q)}{\tilde{R}(q)\tilde{A}(q) + \tilde{S}(q)\tilde{B}^*(q)} r_t \Rightarrow u_t = \frac{\tilde{A}(q)\tilde{B}_m^*(q)}{\tilde{B}^*(q)\tilde{A}_m(q)} r_t \quad (5.95)$$

vidi se da se i u ovom slučaju radi o skraćivanju svih polova i nula procesa što nije prihvatljivo sa inženjerske tačke gledišta.

Imajući u vidu da se jednakost funkcija prenosa može ostvariti na veoma mnogo načina postavlja se pitanje načina određivanja rešenja koje bi dovelo do željene performanse i ujedno imalo dobre karakteristike u smislu implementacije. Otuda je neophodno da se pažnja posveti mogućim strukturama kontrolera, koje zapravo zavise od usvojenog referentnog modela.

#### POLOVI REFERENTNOG MODELA

Ponašanje sistema u zatvorenoj sprezi zavisi prevashodno od nula karakterističnog polinoma

$$f(q) = \tilde{A}(q)\tilde{R}(q) + \tilde{B}^*(q)\tilde{S}(q) \quad (5.96)$$

Projektovani kontroler treba da postigne jednakost ovih nula sa zadanim polovima referentnog modela. Pitanje koje se pri tome otvara je koliki treba da bude red referentnog modela da bi se postavljeni zahtev mogao ostvariti.

Sa gledišta fizičkog tumačenja samog procesa bilo bi logično da referentni model bude istog reda kao i sam proces. Drugim rečima, ako se referentni model shvati kao model koji opisuje željeno ponašanje procesa, onda zaista nema nikakve logike da on bude model većeg reda nego što je red samog procesa. Međutim, iz relacije (5.91) se vidi da bi to značilo da je ukupan broj polova jednak stepenu polinoma  $\tilde{A}(q)$ . To je moguće ostvariti ako kontroler nema nikakvu dinamiku, odnosno ako je  $\tilde{R}(q) = 1$ , ili ako kontroler skрати bar neke polove procesa. Ukoliko se, međutim, želi potpuno slobodan izbor parametara kontrolera onda je neophodno da se pođe od teorijskih rezultata izvedenih za projektovanje upravljanja preko modela u prostoru stanja. Dokazuje se, naime, da je za slobodno podešavanje svih polova sistema neophodno da se zatvori povratna sprega po stanju, s tim što se stanja moraju procenjivati uz pomoć observera. To zapravo znači da je za sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom reda  $n$ , neophodno da se specificira  $n$  željenih polova i još najmanje  $n-1$  polova observera<sup>1</sup>, tako da se dobij sistem najmanje  $2n-1$  reda.

Samo se po sebi razume da osobine jednog sistema ne mogu zavisiti od toga da li je on modeliran u prostoru stanja ili je opisan ekvivalentnim relacijama koje definišu preslikavanje ulaza i izlaza. To nadalje znači da je za potpuno slobodno podešavanje polova sistema neophodno da

<sup>1</sup> Ako bi se koristio observer identiteta onda bi njegov red bio  $n$ . Međutim, s obzirom da se jedan izlaz meri, postoji i mogućnost korišćena redukovano observera reda  $n-1$ .

karakteristični polinom ima bar  $2n-1$  polova, odnosno da bude<sup>1</sup>

$$f(q) = \tilde{A}(q)\tilde{R}(q) + \tilde{B}^*(q)\tilde{S}(q) = \tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q) \quad (5.97)$$

gde  $\tilde{A}_0(q)$  predstavlja karakteristični polinom observera (koji može biti  $n$  ili  $n-1$  stepena). U skladu sa time referentni model sistema mora da se proširi observerom tako da se relacija (5.91) modifikuje u ekvivalentnu jednakost

$$\frac{\tilde{B}^*(q)\tilde{T}(q)}{\tilde{A}(q)\tilde{R}(q) + \tilde{B}^*(q)\tilde{S}(q)} = \frac{\tilde{B}_m^*(q)\tilde{A}_0(q)}{\tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q)} \quad (5.98)$$

#### NULE REFERENTNOG MODELA

Sistem u zatvorenoj sprezi ima nule koje su određenje nulama procesa u otvorenoj sprezi, odnosno nulama polinoma  $\tilde{B}^*(q)$  i nulama polinoma  $\tilde{T}(q)$ . Jednakost data relacijom (5.98) zahteva da ove nule budu jednake nulama referentnog modela

$$\tilde{B}^*(q)\tilde{T}(q) = \tilde{B}_m^*(q)\tilde{A}_0(q) \quad (5.99)$$

Budući da se nule procesa ne mogu menjati, izvesno je da se o njima mora voditi računa kada se specificira referentni model. Naime, referentni model ili mora sadržavati ove nule, ili se one moraju skratiti, odnosno moraju biti i nule karakterističnog polinoma (5.97). Pri tome je, ukoliko se opredelimo za skraćivanje, neophodno imati u vidu da se nestabilne nule procesa ne mogu skratiti. To znači da se one moraju pojaviti i kao nule referentnog modela.

Izvršena analiza ukazuje da je pogodno da se polinom u brojiocu modela procesa predstavi kao

$$\tilde{B}^*(q) = \tilde{B}^+(q)\tilde{B}^-(q) \quad (5.100)$$

gde polinom  $\tilde{B}^-(q)$  uključuje sve nule koje se nalaze izvan jediničnog kruga ili na krugu i kao takve se ne mogu skratiti, dok je polinom  $\tilde{B}^+(q)$  moničan i sadrži sve nule koje se nalaze unutar jediničnog kruga. Ako se pretpostavi da će se sve nule koje se nalaze unutar jediničnog kruga skratiti onda brojilac referentnog modela mora da ima oblik<sup>2</sup>

$$\tilde{B}_m^*(q) = \tilde{B}^-(q)\tilde{B}_m^*(q); \quad \hat{B}_m^*(q^{-1}) = q^{-h}\tilde{B}_m^*(q), \quad h = \text{dg}(\tilde{B}_m^*(q)) \quad (5.101)$$

gde je polinom  $\tilde{B}_m^*(q)$  proizvoljan, dok karakteristični polinom mora da uključi i nule procesa koje će biti skraćene

$$\tilde{A}(q)\tilde{R}(q) + \tilde{B}^*(q)\tilde{S}(q) = \tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q)\tilde{B}^+(q) \quad (5.102)$$

Drugim rečima jednakost (5.98) se transformiše u

$$\frac{\tilde{B}^+(q)\tilde{B}^-(q)\tilde{T}(q)}{\tilde{A}(q)\tilde{R}(q) + \tilde{B}^+(q)\tilde{B}^-(q)\tilde{S}(q)} = \frac{\tilde{B}^+(q)\tilde{B}_m^-(q)\tilde{B}_m^*(q)\tilde{A}_0(q)}{\tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q)\tilde{B}^+(q)} \quad (5.103)$$

Konačno, pošto polovi procesa (polinom  $\tilde{A}(q)$ ) sigurno nisu jednaki nulama, iz relacije (5.103) se vidi da polinom  $\tilde{R}(q)$  mora da sadrži nule koje se skraćuju što znači da mora da bude oblika

$$\tilde{R}(q) = \hat{B}^+(q)\tilde{R}(q); \quad \hat{R}(q^{-1}) = q^{-j}\tilde{R}(q), \quad j = \text{dg}(\tilde{R}(q)) \quad (5.104)$$

tako da karakteristični polinom sistema sa kontrolerom postaje

<sup>1</sup> Formalno gledano bilo bi potrebno da se polinom  $\tilde{A}_m(q)$  definiše kao polinom  $2n$  ili  $2n-1$  stepena. Međutim u želji da se jasno razdvoje željeni polovi procesa od polova observera usvojeno je da polinom  $\tilde{A}_m(q)$  definiše samo polove procesa, dok polinom  $\tilde{A}_0(q)$  definiše polove observera.

<sup>22</sup> Budući da nije neophodno da se skrate sve stabilne nule procesa, može se usvojiti da polinom  $\tilde{B}^+(q)$  zapravo ne sadrži sve stabilne nule, već samo one koje se žele skratiti. U tom slučaju polinom  $\tilde{B}^-(q)$  sadrži sve nestabilne nule i one stabilne nule koje se ne skraćuju.

$$\begin{aligned} \tilde{A}(q)\tilde{B}^+(q)\tilde{R}(q) + \tilde{B}^+(q)\tilde{B}^-(q)\tilde{S}(q) &= \tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q)\tilde{B}^+(q) \Rightarrow \\ \tilde{A}(q)\tilde{R}(q) + \tilde{B}^-(q)\tilde{S}(q) &= \tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q) \end{aligned} \quad (5.105)$$

Ako se sada dobijeni kontroler uporedi sa ranije određenim serijskim i serijsko-paralelnim kontrolerom vidi se da se ključna razlika ogleda u tome što je ovde dinamika kontrolera određena u skladu sa zadanim polovima referentnog modela i što eventualno uključuje samo stabilne nule procesa. Uklanjanje nestabilnih nula iz dinamike kontrolera je suštinska prednost koju paralelni kontroler ima u odnosu na druga dva kontrolera.

### 5.8.2 ODREĐIVANJE PARAMETARA KONTROLERA

Parametri kontrolera se određuju izjednačavanjem brojioca i imenioca u relaciji (5.103).

POLINOM  $\tilde{T}(q)$

Iz brojioca relacije (5.103) se direktno vidi da je

$$\tilde{T}(q) = \tilde{A}_0(q)\tilde{B}_m^*(q); \quad (dg\tilde{T}(q) = dg\tilde{A}_0(q) + dg\tilde{B}_m^*(q)) \quad (5.106)$$

POLINOMI  $\tilde{R}(q)$  i  $\tilde{S}(q)$

Polinomi  $\tilde{R}(q)$  i  $\tilde{S}(q)$  određuju se rešavanjem jednačine (5.102) koja ima oblik Diofantove jednačine. Iz algebre je poznato da će ova jednačina imati rešenje ako i samo ako se najveći zajednički imenitelj polinoma  $\tilde{A}(q)$  i  $\tilde{B}^*(q)$  sadrži u polinomu  $\tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q)\tilde{B}^+(q)$ .

U principu rešenje, ako postoji nije jedinstveno. Neka su, naime polinomi  $\tilde{R}_0(q)$  i  $\tilde{S}_0(q)$  rešenja Diofantove jednačine, što znači da važi

$$\tilde{A}(q)\tilde{R}_0(q) + \tilde{B}^*(q)\tilde{S}_0(q) = \tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q)\tilde{B}^+(q) \quad (5.107)$$

tada se direktno vidi da su i polinomi

$$\tilde{R}_V(q) = \tilde{R}_0(q) + V(q)\tilde{B}^*(q) \quad (5.108)$$

$$\tilde{S}_V(q) = \tilde{S}_0(q) - V(q)\tilde{A}(q)$$

rešenje Diofantove jednačine za bilo koji polinom  $V(q)$ . Ako se međutim usvoji da je

$$dg\tilde{R}(q) < dg\tilde{B}^*(q) \quad (5.109)$$

ili da je

$$dg\tilde{S}(q) < dg\tilde{A}(q) \quad (5.110)$$

Diofantova jednačina ima jedinstveno rešenje.

#### *Dozvoljeni odnosi redova polinoma*

Pre nego što se pažnja posveti načinu rešavanja Diofantove jednačine neophodno je se razmotre dozvoljeni odnosi redova polinoma.

Potrebno je zapaziti da kauzalnost kontrolera i procesa impliciraju valjanost sledećih odnosa redova polinoma

$$dg\tilde{S}(q) \leq dg\tilde{R}(q); \quad dg\tilde{B}^*(q) < dg\tilde{A}(q) \quad (5.111)$$

Otuda sledi da je

$$dg(\tilde{A}(q)\tilde{R}(q) + \tilde{B}^*(q)\tilde{S}(q)) = dg(\tilde{A}(q)\tilde{R}(q)) = dg(\tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q)\tilde{B}^+(q)) \Rightarrow \quad (5.112)$$

$$dg\tilde{R}(q) = dg\tilde{A}_m(q) + dg\tilde{A}_0(q) + dg\tilde{B}^+(q) - dg\tilde{A}(q)$$

Ako se nadalje pretpostavi da se referentnim modelom zadaju samo željeni polovi sistema, odnosno da važi

$$dg\tilde{A}(q) = dg\tilde{A}_m(q) \quad (5.113)$$

kao i da referentni model i sistem imaju isto kašnjenje

$$dg\tilde{A}(q) - dg\tilde{B}^*(q) = dg\tilde{A}_m(q) - dg\tilde{B}_m^*(q) = d \quad (5.114)$$

tada iz jednačina (5.112) i (5.104) sledi

$$dg\tilde{A}_0(q) = dg\tilde{R}(q) - dg\tilde{B}^+(q) = dg\tilde{R}(q) \quad (5.115)$$

*Jedna metoda rešavanja Diofantove jednačine*

Jedan od načina da se dobije jedinstveno rešenje Diofantove jednačina je da se u skladu sa uslovom (5.110) usvoji da je

$$dg\tilde{S}(q) = dg\tilde{A}(q) - 1 = n - 1$$

$$\tilde{S}(q) = \sum_{i=0}^{n-1} s_{n-1-i}q^i, \quad S(q^{-1}) = q^{-(n-1)}\tilde{S}(q) = \sum_{i=0}^{n-1} s_iq^{-i} \quad (5.116)$$

Ako se nadalje poštujući uslov (5.111) usvoji i da je

$$dg\tilde{R}(q) = dg\tilde{A}(q) - 1 = n - 1$$

$$\tilde{R}(q) = \sum_{i=0}^{n-1} r_{n-1-i}q^i, \quad R(q^{-1}) = q^{-(n-1)}\tilde{R}(q) = \sum_{i=0}^{n-1} r_iq^{-i} \quad (5.117)$$

tada se iz jednačine (5.102) izjednačavanjem koeficijenata dobija

$$\begin{matrix} n+1 \\ \left\{ \begin{array}{cccccc|ccc} a_0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & r_0 \\ a_1 & \ddots & 0 & b_1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \ddots & b_0 & r_{n-1} \\ a_n & \cdots & a_1 & b_n & \cdots & b_1 & s_0 \\ \hline 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_n & 0 & 0 & b_n & s_{n-1} \end{array} \right. \end{matrix} = \begin{matrix} a_0^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{2n-1}^* \end{matrix} \quad (5.118)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n \quad \underbrace{\hspace{10em}}_n$

gde su koeficijenti  $a_i^*$  određeni polinomom

$$\tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q)\tilde{B}^+(q) = \tilde{A}^*(q) = a_0^*q^{2n-1} + a_1^*q^{2n-2} + \cdots + a_{2n-1}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^*(q^{-1}) = q^{-(2n-1)}\tilde{A}^*(q) = a_0^* + a_1^*q^{-1} + \cdots + a_{2n-1}^*q^{-(2n-1)} \quad (5.119)$$

Ukoliko su polinomi modela procesa uzajamno prosti, i ukoliko su istog reda tada je odgovarajuća matrica nesingularna<sup>1</sup>, pa se parametri kontrolera određuju njenom inverzijom.

Polinomi  $\tilde{A}(q)$ ,  $\tilde{A}_m(q)$  i  $\tilde{B}^+(q)$  su monični. Ako se pri tome usvoji da je i observer moničan polinom tada je  $a_0 = a_0^* = 1$ . Kako je nadalje i koeficijent  $b_0 = 0$  iz relacije (5.118) sledi i da će polinom  $\tilde{R}(q)$  biti moničan, odnosno da je  $r_0 = 1$ . Otuda se matična jednačina (5.118) može smanjiti za jedan red tako da se dobije

$$\begin{matrix} n \\ \left\{ \begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & r_1 \\ a_1 & \ddots & 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & r_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & b_n & \cdots & b_2 & b_1 & s_0 \\ \hline a_n & \ddots & a_2 & 0 & \ddots & \ddots & b_2 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & \cdots & b_n & s_{n-1} \end{array} \right. \end{matrix} = \begin{matrix} a_1^* - a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n^* - a_n \\ a_{n+1}^* \\ \vdots \\ a_{2n-1}^* \end{matrix} \quad (5.120)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_n$

<sup>1</sup> Silvesterova teorema definiše nesingularnost ove matrice kao uslov da dva polinoma budu uzajamno prosta

Pošto su polinomi  $\tilde{R}(q)$  i  $\tilde{B}^+(q)$  monični i polinom  $\tilde{R}(q)$ , u skladu sa relacijom (5.104) mora biti moničan.

**PR. 5-12**

ZADATAK

Proces i referentni model opisani su sledećim polinomima

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} \quad ; \quad B(q^{-1}) = q^{-2}b_2$$

$$A_m(q^{-1}) = 1 + a_{m1}q^{-1} + a_{m2}q^{-2} \quad ; \quad B_m(q^{-1}) = q^{-2}b_{m2}$$

Potrebno je odrediti parametre kontrolera.

REŠENJE

Da bi se formirala Diofantova jednačina neophodno je da se kao prvo odrede model procesa i referentni model. S obzirom na date polinome vidi se da je

$$\tilde{A}(q) = q^2 + a_1q + a_2 \quad ; \quad \tilde{B}^*(q) = b_0^* = b_2; \quad \tilde{B}(q) = b_2, (b_0 = b_1 = 0); \quad d = 2, \quad dg\tilde{A}(q) = n = 2$$

$$\tilde{A}_m(q^{-1}) = q^2 + a_{m1}q + a_{m2} \quad ; \quad \tilde{B}_m^*(q) = b_{m0}^* = b_{m2} \quad (\tilde{B}_m(q) = b_{m2}); \quad d_m = 2$$

Budući da proces nema nula

$$\tilde{B}^+(q) = 1; \quad \tilde{B}^-(q) = b_2$$

pa je

$$\tilde{B}_m(q) = \tilde{B}^-(q)\hat{B}_m^*(q) \Rightarrow \tilde{B}_m^*(q) = \frac{b_{m2}}{b_2}$$

▪ Observer

Ako se u skladu sa relacijama (5.116) i (5.117) polinomi kontrolera definišu kao

$$dg\tilde{R}(q) = dg\tilde{S}(q) = n - 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\tilde{R}(q) = q + r_1, \quad R(q^{-1}) = 1 + r_1q^{-1}$$

$$\tilde{S}(q) = s_0q + s_1, \quad S(q^{-1}) = s_0 + s_1q^{-1}$$

tada iz relacije (5.115) sledi

$$dg\tilde{A}_0(q) = dg\tilde{R}(q) - dg\tilde{B}^+(q) = dg\tilde{R}(q) = 1$$

Budući da je karakteristični polinom observera polinom prvog reda on se može definisati kao

$$\tilde{A}_0(q) = q + \alpha, \quad A_0(q^{-1}) = 1 + \alpha q^{-1}$$

▪ Polinom  $\tilde{T}(q)$

Koeficijenti polinoma  $T(q^{-1})$  se mogu odrediti direktno iz izraza (5.106)

$$dg\tilde{T}(q) = dg\tilde{A}_0(q) + dg\tilde{B}_m^*(q) = dg\tilde{A}_0(q) = 1 \Rightarrow$$

$$\tilde{T}(q) = t_0q + t_1, \quad T(q^{-1}) = t_0 + t_1q^{-1}$$

$$\tilde{T}(q) = t_0q + t_1 = \frac{(q + \alpha)b_{m2}}{b_2} \Rightarrow t_0 = \frac{b_{m2}}{b_2} \quad ; \quad t_1 = \frac{\alpha b_{m2}}{b_2}$$

▪ Polinomi  $\tilde{R}(q)$  i  $\tilde{S}(q)$

Kada se u Diofantovu jednačinu

$$\tilde{A}(q)\tilde{R}(q) + \tilde{B}^*(q)\tilde{S}(q) = \tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q)$$

uvrste dati polinomi dobija se

$$\tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q) = q^3 + (\alpha + a_1)q^2 + (\alpha a_1 + a_2)q + \alpha a_2 = a_0^*q^3 + a_1^*q^2 + a_2^*q + a_3^*$$

Koeficijenti kontrolera se određuju iz jednačine (5.118)

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha + a_{m1} - a_1 \\ \alpha a_{m1} + a_{m2} - a_2 \\ \alpha a_{m2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$r_1 = a_{m1} - a_1 + \alpha$$

$$s_0 = \frac{a_{m1}\alpha + a_{m2} - a_2 - a_{m1}a_1 + a_1^2 - a_1\alpha}{b_2} ;$$

$$s_1 = \frac{a_{m2}\alpha - a_2\alpha - a_2a_{m1} + a_1a_2}{b_2}$$

**PR. 5-13**

Posmatraju se proces i referentni model definisani u Pr. 5-10. Odgovarajući polinomi modela procesa i referentnog modela dati su sa

$$\tilde{A}(q) = q^2 - (1+a)q + a, \quad \tilde{B}^* = Kq - 0.55K, \quad d = 1, \quad \text{dg}\tilde{A}(q) = n = 2$$

$$\tilde{A}_m(q) = q^2 - 0.75q + 0.247, \quad \tilde{B}_m^* = 0.785q - 0.3,$$

Budući da referentni model ne uključuje nulu procesa, izvesno je da se ona mora skratiti. Otuda ćemo definisati

$$\tilde{B}^+(q) = q - 0.55; \quad \tilde{B}^-(q) = K$$

tako da je

$$\tilde{B}_m^*(q) = \tilde{B}^-(q)\tilde{B}_m^*(q) \Rightarrow \tilde{B}_m^*(q) = \frac{0.785q - 0.3}{K}$$

▪ Observer

Usvojimo da je

$$\text{dg}\tilde{R}(q) = \text{dg}\tilde{S}(q) = n - 1 = 1 \Rightarrow \tilde{R}(q) = q + r_1; \quad \tilde{S}(q^{-1}) = s_0 + s_1q^{-1}$$

Tada parametri polinoma  $\hat{R}(q)$  mogu da se usvoje kao

$$\tilde{R}(q) = (q - 0.55)\tilde{R}(q) \Rightarrow \tilde{R}(q) = 1, \quad r_1 = -0.55$$

Na osnovu toga sledi

$$\text{dg}\tilde{R}(q) = 0 \Rightarrow \text{dg}\tilde{A}_0(q) = 0 \Rightarrow \tilde{A}_0(q) = 1$$

▪ Polinom  $\tilde{T}(q)$

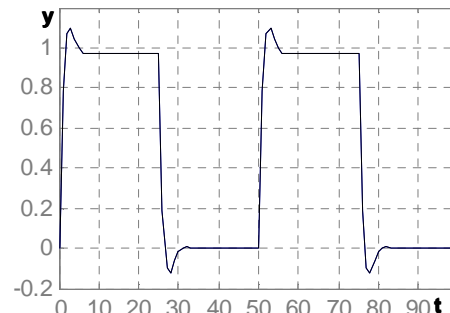
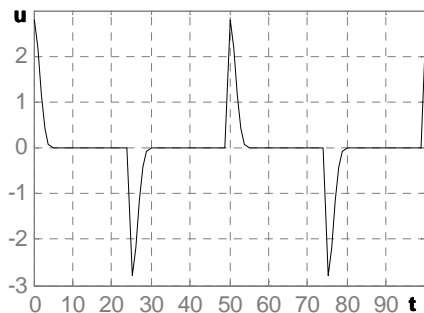
$$\text{dg}\tilde{T}(q) = \text{dg}\tilde{A}_0(q) + \text{dg}\tilde{B}_m^*(q) = 1 \Rightarrow \tilde{T}(q) = t_0q + t_1$$

$$\tilde{T}(q) = \tilde{A}_0(q)\tilde{B}_m^*(q) \Rightarrow \tilde{T}(q) = \tilde{B}_m^*(q) = \frac{0.785q - 0.3}{K} \Rightarrow t_0 = \frac{0.785}{K}; \quad t_1 = -\frac{0.3}{K}$$

▪ Polinom  $\tilde{S}(q)$

$$\tilde{A}(q)\hat{R}(q) + \tilde{B}^-(q)\tilde{S}(q) = \tilde{A}_m(q)\tilde{A}_0(q) \Rightarrow$$

$$(q^2 - (a+1)q + a) + K(s_0q + s_1) = (q^2 - 0.75q + 0.247) \Rightarrow s_0 = \frac{a+0.25}{K}; \quad s_1 = \frac{0.247-a}{K}$$

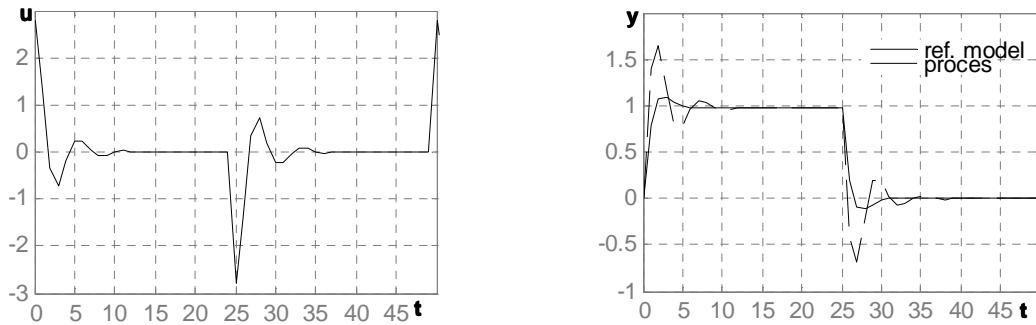


**SL. 5-39 UPRAVLJANJE, ODZIV PROCESA UPRAVLJANOG POMOĆU PARALELNOG MRASA SA TAČNIM VREDNOSTIMA PARAMETARA PROCESA I ODZIV REFERENTNOG MODELA**

Rad kontrolera testiran je pod istim uslovima kao i rad serijskog odnosno serijsko-paralelnog kontrolera. Rezultati simulacije za slučaj kada je referentni signal povorka pravougaonih impulsa amplitude

1 i učestanosti 50, prikazani su na Sl. 5-39. Kao što se vidi proces idealno prati referentni model, isto kao što je to bio slučaj kod serijskog i kod serijsko-paralelnog MRASa.

Rezultati simulacije za slučaj kada su parametri procesa netačno procenjeni, odnosno kada je usvojeno da je  $K_p=0.5$ , i  $a_p=0.25$ , prikazani na Sl. 5-40 pokazuju da je u ovom slučaju paralelni kontroler nešto bolji od serijskog. Iako kod oba kontrolera prelazni proces približno isto traje, paralelni kontroler ima manje oscilacija upravljačkog signala, što znači da ima povoljniju dinamiku.



SL. 5-40 UPRAVLJANJE, ODZIV PROCESA UPRAVLJANOG POMOĆU PARALELNOG MRASA SA NETAČNIM VREDNOSTIMA PARAMETARA PROCESA I ODZIV REFERENTNOG MODELA

Činjenicu da u posmatranom primeru kontroler prati referentni signal čak i kada su parametri procesa pogrešno odabrani ne treba prihvatiti kao opšte pravilo. Naime, greška stacionarnog stanja paralelnog kontrolera projektovanog za proces definisan polinomima  $\tilde{A}(q)$  i  $\tilde{B}(q)$ , i implementiranog uz pogrešno procenjene vrednosti polinoma  $(\tilde{A}_p(q), \tilde{B}_p(q))$ , kada je referentni signal jedinična odskočna funkcija biće jednaka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_t^* - y_t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left( \frac{\tilde{B}_m^*(z)}{\tilde{A}_m(z)} - \frac{\tilde{B}_p^*(z)\tilde{T}(z)}{\tilde{A}_p(z)\tilde{R}(z) + \tilde{B}_p^*(z)\tilde{S}(z)} \right) \frac{z}{z-1} \quad (5.121)$$

Iz relacije (5.121) se vidi da će greška sigurno biti nula ukoliko kontroler sadrži integrator odnosno ako je  $\tilde{R}(1) = 0$ , jer u tom slučaju ona uopšte ne zavisi od parametara procesa.

U posmatranom primeru kontroler ne sadrži integrator, ali zato sam proces, nezavisno od procene parametara  $a$ , sadrži integrator pa je to razlog što je greška stacionarnog stanja jednaka nuli.





*"Adaptiraj se ili nestani, sada kao i uvek, neumitni je imperativ prirode"*

H.G-Wells, Mind at the End of its Tether

## 6 Adaptivno upravljanje

U OVOM POGLAVLJU ČITALAC ĆE

- *sagledati osnovne koncepte projektovanja adaptivnih sistema*
- *razumeti probleme koje nelinearnost sistema unosi u pogledu stabilnosti*
- *ovladati metodologijom projektovanja jedne klase adaptivnih sistema*
- *uočiti ograničenja u praktičnoj implementaciji adaptivnog upravljanja*

### 6.1 Osnovna ideja projektovanja adaptivnog upravljanja

*Čemu zapravo služi povratna sprega?*

Vebsterov rečnik definiše pojam "adaptacije" kao promenu kojom se nečije ponašanje prilagođava novim ili izmenjenim uslovima. U skladu sa time intuitivno je jasno da adaptivni sistemi upravljanja obuhvataju klasu sistema koji imaju sposobnost da promene svoju performansu i na taj način kompenzuju nepredviđene promene u dinamici procesa ili poremećajima koji deluju na sistem. Koliko god ova definicija bila logična, ona je istovremeno i kontroverzna. Naime, ako se pogleda istorijat razvoja servosistema, kao prvih sistema upravljanja, onda se vidi da se zatvaranje povratne sprege u sistemu zagovara upravo sa istim argumentima. Drugim rečima, kada se projektuje kontroler, onda se pođe od pretpostavljenog modela procesa, primeni neka metoda i dobije algoritam upravljanja. U principu, ovaj algoritam se uvek može izraziti kao funkcija referentnog signala i to se često i radi ukoliko se želi analiza performansi samog kontrolera. Međutim, praksa je pokazala da se kontroler mora implementirati zatvaranjem povratne sprege po izlazu procesa. Ukoliko se to ne uradi, onda kontroler zapravo radi na bazi procenjene vrednosti izlaza procesa, koja se dobija na osnovu modela, što znači da se bilo koja vrsta poremećaja koja deluje na proces i izaziva odstupanje izlaza procesa od modeliranog izlaza, neće videti u kontroleru, pa on, prirodno na to ne može ni da reaguje. Sve ovo ukazuje da se od samog početka teorije upravljanja realizacija kontrolera izvodi tako da se sam sistem prilagođava promenjenim okolnostima. Otuda se postavlja pitanje, odakle sad potreba za adaptivnim upravljanjem i šta zapravo ono predstavlja.

Moglo bi se reći da se u osnovi potrebe za projektovanjem adaptivnih sistema nalazi linearizacija modela procesa. Kao što je već rečeno, linearni model se uvek traži u okolini neke pretpostavljene radne tačke. Problem, međutim nastaje, kada su radni uslovi nekog procesa takvi da se u toku rada značajno menja radna tačka, a samim tim i linearizovani model procesa. Tako se, na primer, kod aeronautičkih procesa pokazuje da dinamičko ponašanje letilice zavisi od visine, brzine i konfiguracije letilice, pri čemu se odnos promena parametara linearizovanih modela koji odgovaraju letilici u raznim fazama leta kreće između 10 i 50. Sličan je slučaj i kod nautičkih procesa gde se dinamičke karakteristike tankera, zbog njegovih izuzetno velikih dimenzija, menjaju drastično od duboke prema plitkoj vodi gde dubina gaza i zapremina tankera postaju komparativne sa dubinom i zapreminom bazena po kojem brod plovi. Pored toga, dinamičke karakteristike menjaju se i sa opterećenjem koje tanker nosi. Isti fenomeni uočavaju se i kod elektromehaničkih sistema kod kojih se dinamičko ponašanje motora menja sa momentom inercije ili kod metalurških procesa gde se parametri modela menjaju od proizvoda do proizvoda.

Svi izloženi primeri ukazuju da postoji veliki broj procesa čije upravljanje nije moguće ostvariti na osnovu kontrolera koji bi bio projektovan za jedan pretpostavljeni linearni model procesa. Otuda se javila ideja o "adaptaciji" kontrolera u toku rada procesa. Odnosno prema Cipkinu (1968) "adaptacija je proces promene parametara, strukture i eventualno upravljanja

sistema, na osnovu informacija dobijenih za vreme intervala upravljanja, tako da se performansa sistema optimizira (u odnosu na datu tačku gledišta) u slučajevima kada su radni uslovi ili nepotpuno početno definisani ili izmenjeni". Na ovu definiciju nadovezao se Landau (1975) razjašnjavajući da je "sistem sa zatvorenim povratnom spregom orijentisan ka eliminaciji efekta poremećaja stanja, te kao takav nije adaptivni sistem; adaptivni sistem je orijentisan ka eliminaciji efekata strukturnih perturbacija na performansu sistema, koje su u najvećoj meri izazvane promenom dinamičkih parametara procesa".

U daljim nastojanjima da se adaptivni sistemi razgraniče od drugih sistema upravljanja predloženo je da se adaptivno upravljanje posmatra kao "jedan suboptimalni pristup projektovanja algoritama za upravljanje nelinearnim stohastičkim procesima" (Jacobs, 1981). Prihvatajući ovaj pristup, Astrom (1983) je ustvrdio da je "adaptivni sistem posebna vrsta sistema sa nelinearnom povratnom spregom kod koga se stanja procesa, na osnovu brzine njihove promene, mogu podeliti u dve kategorije; sporo promenljiva stanja se posmatraju kao parametri procesa". Ovim se, zapravo želi reći da se o brzo promenljivim stanjima stara kontroler kroz klasičnu povratnu spregu, dok je za obradu sporopromenljivih stanja neophodno da se zatvori još jedna posebna povratna sprega kojom se formira adaptivni sistem upravljanja.

Izraz "adaptivni" koristi se od početka pedesetih godina prošlog veka<sup>1</sup>. U to vreme, istraživanja su bila motivisana projektovanjem auto-pilota. Kad se danas pogledaju ti rezultati može se zaključiti da su istraživanja bila karakterisana "velikim entuzijazmom, lošim hardverom i nepostojećom teorijom"<sup>2</sup>. Zbog katastrofalnih rezultata u probnim letovima interes za ovu oblast postepeno jenjava.

Moglo bi se slobodno reći da šezdesete godine prošlog veka predstavljaju period renesanse teorije upravljanja. Razvijen je potpuno novi koncept prostora stanja, ostvareni su značajni rezultati u teoriji stabilnosti, predložena je teorija stohastičkog upravljanja... Ovi rezultati otvaraju potpuno nova područja istraživanja kao što su identifikacija i estimacija parametara, samoučenje i prepoznavanje oblika itd. Sve ovo značajno doprinosi i boljem razumevanju problema adaptivnog upravljanja. U tom smislu početkom sedamdesetih godina predloženo je više različitih algoritama adaptivnog upravljanja koji su, istina, još uvek nedovoljno teorijski obrazloženi i imaju dosta heuristike.

Konačno, krajem sedamdesetih dolazi do ozbiljnog pomaka sa teorijske tačke gledišta. Izvedeni su dokazi stabilnosti adaptivnih sistema pod veoma restriktivnim ograničenjima. Ispitivanje opravdanosti ovih ograničenja dovelo je do analize robusnosti koja je rezultovala "univerzalno stabilizirajućim" adaptivnim kontrolerima. Teško je reći koliko bi se dugo čekalo da ovi rezultati dobiju i svoju praktičnu implementaciju da u isto vreme nije došlo i do naglog razvoja mikroprocesorske tehnike koja je pružila podlogu za praktičnu realizaciju adaptivnih kontrolera. Sredinom osamdesetih godina na tržištu je bilo nekoliko hiljada adaptivnih regulatora u industrijskoj upotrebi.

U principu projektni zadatak se kod adaptivnih sistema ne razlikuje od projektnog zadatka bilo kojih drugih sistema. Zahtev je, u osnovi, uvek isti: projektovati najjednostavniji sistem koji obezbeđuje zadovoljavajuću performansu uprkos dinamičkim promenama parametara. Ako su te promene male, postavljeni zadatak se može ostvariti nekim konstantnim zakonom upravljanja koji eventualno nije preterano osetljiv na promene. Ukoliko su, međutim, te promene značajne, zadovoljavajuća performansa sistema se može postići samo projektovanjem adaptivnog sistema.

Iako se čini da je, sa teorijske tačke gledišta, u pogledu potrebe za adaptivnim sistemima sve jasno, iako je do danas napisano na hiljade radova iz ove oblasti, pitanje upotrebe adaptivnih sistema je i dalje otvoreno.

Osnovni problem leži u činjenici da su procesi koji bi zahtevali adaptivno upravljanje nelinearni i stohastički i kao takvi izuzetno kompleksni i za analizu i za upravljanje. Kod njih, gotovo po definiciji, ne postoje analitička rešenja. Zapravo, sa jedne strane ne postoje opšti

<sup>1</sup> Caldwell je 1950. godine registrovao patent adaptivnog regulatora

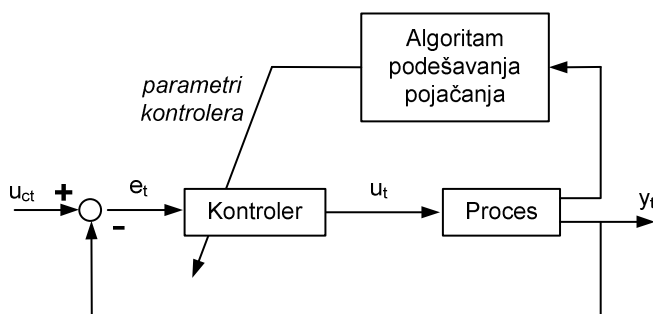
<sup>2</sup> Astrom, Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison Wesley, 1989

postupci projektovanja upravljanja nelinearnim stohastičkim sistemima, dok sa druge strane, nema ni opštih rezultata o performansi sistema u slučaju optimalnog upravljanja koja bi služila kao referentna tačka za poređenje različitih suboptimalnih rešenja. Otuda, svaka pojedinačna aplikacija predstavlja poseban slučaj i nema gotovo nikakvih garancija da će se dobijeni rezultati moći preneti na drugi sistem.

U odsustvu opšte teorije adaptivnog upravljanja, projektovanje i razvoj se mogu ocenjivati jedino sa gledišta praktičnih aplikacija. Nažalost, broj značajnih aplikacija nije preterano velik. Veliki broj izveštaja se odnosi na pilot postrojenja i relativno kratke eksperimentalne periode.

### 6.1.1 ADAPTIVNO UPRAVLJANJE U OTVORENOJ SPREZI – PODEŠAVANJE POJAČANJA<sup>1</sup>

Osnovna ideja ovog pristupa zasniva se na činjenici da su, u principu, kod svakog procesa poznati radni uslovi, odnosno da je moguće unapred odrediti skup radnih tačaka u okolini kojih je potrebno odrediti linearizovani model procesa. Za svaki od ovih modela moguće je projektovati neki od fiksnih kontrolera. U načelu, to je najčešće isti kontroler sa različitim vrednostima



SL. 6-1 ŠEMATSKI PRIKAZ PODEŠAVANJA POJAČANJA

parametara, no nije isključeno da to bude čak i drugačiji tip kontrolera. U toku rada procesa identifikuju se radni uslovi, odnosno odredi se koji kontroler (koji skup parametara) treba da bude uključen u tom trenutku. Činjenica da je ovaj pristup početno bio korišćen samo za promenu pojačanja kontrolera uslovlila je da se cela tehnika označi kao "podešavanje pojačanja".

Implementacija ovog tipa kontrolera zahteva da se utvrdi koja promenljiva u procesu korelira sa promenom dinamike (odnosno promenom radne tačke), tako da se na osnovu merenja njene vrednosti može uključiti odgovarajući kontroler. Ceo problem se zapravo svodi na uspostavljanje funkcionalne veze između parametara kontrolera i te "pomoćne" promenljive.

Osnovna prednost ove tehnike upravljanja je da je promena u dinamici procesa praćena brzom promenom parametara kontrolera. Naime, pošto su ovi parametri unapred izračunati, nema nikakvog kašnjenja u pogledu određivanja novih vrednosti, tako da se kao jedino ograničenje javlja brzina kojom pomoćna promenljiva reaguje na promene na procesu.

Ključni nedostatak ogleda se u činjenici da se adaptacija vrši u otvorenoj sprezi. To zapravo znači da kontroler nema nikakvu informaciju o tome da li se, sa datim vrednostima parametara, obavlja postavljeni zadatak, a shodno tome ne postoji ni mogućnost da se na bilo koji način reaguje na, eventualno, neadekvatno odabran kontroler. Pored toga, samo projektovanje može da bude veoma zametno, jer može da bude neophodno da se parametri kontrolera odrede u velikom broju radnih tačaka i verifikuju ekstenzivnim simulacijama.

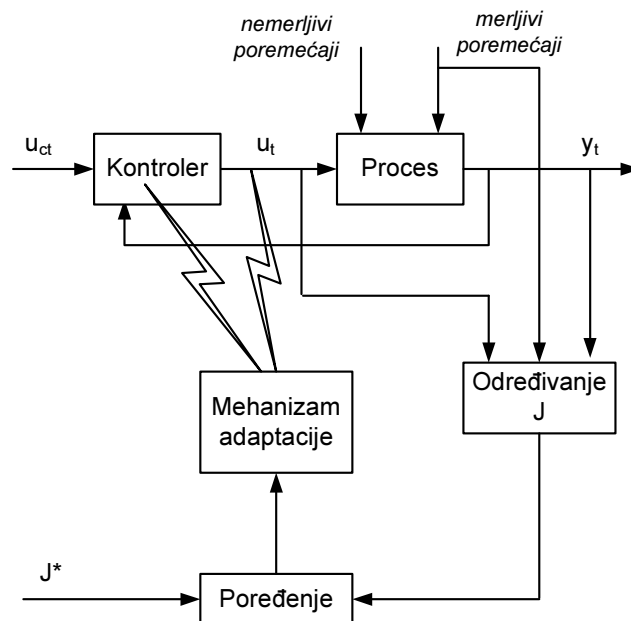
### 6.1.2 ADAPTIVNO UPRAVLJANJE U ZATVORENOJ SPREZI

Različiti pristupi projektovanju adaptivnog upravljanja u zatvorenoj sprezi zasnivaju se na ideji određivanja indeksa performanse kao funkcije upravljanja, stanja, izlaza i merljivih poremećaja procesa. Ovaj indeks performanse se poredi sa skupom zadanih indeksa performanse i mehanizam adaptacije, na osnovu rezultata poređenja, generiše nove vrednosti parametara kontrolera i/ili dodatni ulazni signal, tako da se indeks performanse zadrži u okolini zadanog skupa.

Samo se po sebi razume da je data struktura adaptivnog sistema potpuno opšta i da u

<sup>1</sup> U anglosaksonskoj literaturi ova tehnika upravljanja poznata je pod nazivom "gain scheduling"

svakom konkretnom slučaju nije moguće da se jasno razgraniče svi navedeni blokovi. Ipak, fundamentalna karakteristika adaptivnog sistema je činjenica da se poređenje željene i ostvarene performanse vrši u povratnoj sprezi. Mnogi autori smatraju da samo takva struktura sistema predstavlja pravi adaptivni sistem.



Sl. 6-2 ŠEMATSKI PRIKAZ ADAPTIVNOG UPRAVLJANJA U ZATVORENOJ SPREZI

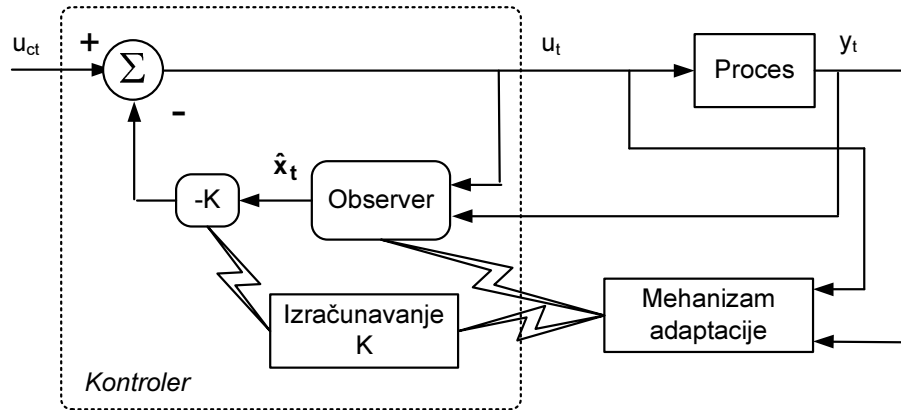
Samo se po sebi razume da će metodologija projektovanja mehanizma adaptacije zavisiti od načina na koji je projektovan kontroler. Imajući u vidu da mehanizam adaptacije treba automatski da na neki način da promeni parametre kontrolera izvesno je da se mogu adaptirati samo oni kontroleri čiji se parametri određuju rešavanjem nekog analitičkog izraza. Otuda, adaptivni sistemi ne mogu da obuhvate kontrolere projektovane pomoću grafo-analitičkih metoda ili na osnovu eksperimentalnog snimanja karakterističnih odziva procesa. Otuda se teorija projektovanja adaptivnih sistema fokusirala zapravo na optimalne kontrolere ili kontrolere razvijene za praćenje modela. U tom kontekstu potrebno je istaći da se i podešavanje polova može shvatiti kao pojednostavljen problem praćenja referentnog modela.

### 6.1.3 OPTIMALNO ADAPTIVNO UPRAVLJANJE I ADAPTIVNO PODEŠAVANJE POLOVA

Kao što je poznato, pri realizaciji kontrolera na bazi zatvaranja povratne sprege po stanju neophodno je formirati i observer koji će davati procenu nemerljivih stanja sistema. U tom smislu kontroler striktno gledano obuhvata matricu pojačanja i sam observer. Pri tome, se matrica pojačanja određuje ili rešavanjem Rikatijske jednačine (kod optimalnih kontrolera) ili na osnovu algoritma zasnovanog na zadanom obliku karakterističnog polinoma. U oba slučaja rešenje zavisi od modela procesa, odnosno od parametara matrica koje opisuju model u prostoru stanja. Na isti način, i observer, kao sastavni deo kontrolera određuje se na osnovu modela procesa.

Ukoliko, iz nekog razloga, dođe do promene parametara modela, ova promena će se, prema tome, odraziti kako na valjanost procene stanja koju daje observer, tako i na valjanost pojačanja u povratnoj sprezi. To nadalje znači, da je za ispravan rad kontrolera u promenjenim uslovima, neophodno da adaptivni mehanizam proceni nove vrednosti parametara modela i u skladu sa time izvrši odgovarajuće promene kako observera, tako i pojačanja (Sl. 6-3). Praksa pokazala da je ovakav sistem moguće realizovati i tako što se parametri observera stalno procenjuju na bazi odstupanja izlaza procesa od izlaza pretpostavljenog modela, dok se pojačanje menja samo onda kada se parametri modela značajno promene u odnosu na pretpostavljene parametre. Ova činjenica je od značaja sa gledišta praktične implementacije, jer ponovno rešavanje Rikatijske jednačine može da zahteva značajno vreme izračunavanja u odnosu na sam

adaptivni observer.

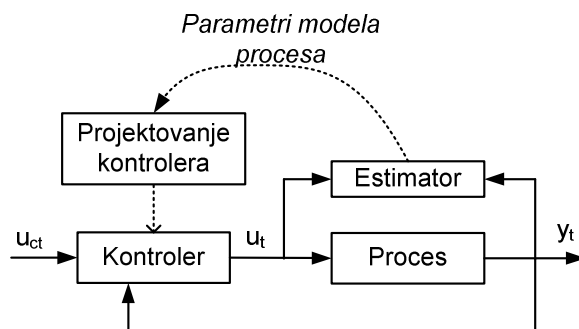


SL. 6-3 ADAPTIVNO OPTIMALNO UPRAVLJANJE I ADAPTIVNO PODEŠAVANJE POLOVA

Izloženi princip rada adaptivnog sistema pripada kategoriji indirektnog adaptivnog upravljanja, zato što se parametri kontrolera ne estimiraju direktno već se oni menjaju na osnovu eksplicitne estimacije parametara modela procesa.

#### 6.1.4 SAMOPODEŠAVAJUĆI REGULATORI

Ideja formiranja samopodešavajućih regulatora javila se pri projektovanju diskretnih sistema upravljanja. Za dati model procesa, najčešće sa modeliranim ili nemodeliranim poremećajem, razvije se zakon upravljanja uz pretpostavku da su parametri modela poznati. Pored toga projektuje se i zaseban estimator koji procenjuje parametre modela procesa koji se koriste za projektovanje kontrolera (Sl. 6-4).



SL. 6-4 SAMOPODEŠAVAJUĆI REGULATOR

Samopodešavajući regulatori se međusobno razlikuju prevashodno po metodi odabranoj za projektovanje kontrolera. U principu sreću se kontroleri projektovani na bazi podešavanja polova, praćenja modela, prediktivnog upravljanja, minimalne varijanse i

optimalnog upravljanja (LQG). Sam estimator, naravno, zavisi od usvojenog modela procesa.

Razvijena su dva pristupa projektovanju samopodešavajućih regulatora: *eksplicitni* i *implicitni*. Eksplicitni samopodešavajući regulator se zasniva na estimaciji parametara procesa u toku rada i stalnom ponovnom izračunavanju parametara regulatora na osnovu estimiranih vrednosti. Za razliku od njega, implicitni samopodešavajući regulator pretpostavlja reparametrizaciju modela procesa tako da se dobije model u kome figurišu parametri kontrolera. Na ovako formiran model se primenjuje odgovarajući algoritam estimacije parametara.

Osnovni koncept projektovanja samopodešavajućih regulatora može se objasniti na primeru projektovanja kontrolera kod praćenja referentnog modela.

#### EKSPLICITNI SAMOPODEŠAVAJUĆI REGULATOR

- Izračuna se polinom  $T(q^{-1}) = A_0(q^{-1})\hat{B}_m^*(q^{-1})$ ;  $(B_m^*(q^{-1}) = B^-(q^{-1})\hat{B}_m^*(q^{-1}))$  (6.1)

Pošto parametri ovog polinoma ne zavise od modela procesa, ovaj polinom se ne menja.

- Rekurzivno, sa zadanom periodom odabiranja se ponavljaju sledeći koraci
  - Estimiraju se parametri modela procesa (polinomi A i B)
  - Reši se Diofantova jednačina

$$A(q^{-1})\hat{R}(q^{-1}) + B^{-}(q^{-1})S(q^{-1}) = A_m(q^{-1})A_0(q^{-1}) \text{ po } \hat{R} \text{ i } S \quad (6.2)$$

$$\circ \text{ Odredi se polinom } R(q^{-1}) = B^{+}(q^{-1})\hat{R}(q^{-1}) \quad (6.3)$$

$$\circ \text{ Izračuna se upravljanje } u_t = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})}u_{ct} - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y_t \quad (6.4)$$

Algoritam se može donekle pojednostaviti ukoliko se samo prati promena parametara, pa tek kada je ona značajna realizuje izračunavanje parametara kontrolera.

#### IMPLICITNI SAMOPODEŠAVAJUĆI REGULATOR

Reparametrizacije modela može da se izvrši na osnovu Diofantove jednačine (5.105)

$$A(q^{-1})\hat{R}(q^{-1}) + q^{-d}B^{-}(q^{-1})S(q^{-1}) = A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})| \times y_t \Rightarrow$$

$$A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})y_t = \hat{R}(q^{-1})\underbrace{q^{-d}B^{+}(q^{-1})B^{-}(q^{-1})}_{A_{y_t}}u_t + q^{-d}B^{-}(q^{-1})S(q^{-1})y_t \Rightarrow \quad (6.5)$$

$$A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})y_t = q^{-d}B^{-}(q^{-1})\left( \underbrace{R(q^{-1})u_t}_{\hat{R}B^{+}} - S(q^{-1})y_t \right)$$

Dobijena jednačina može da se posmatra kao model procesa, koji je reparametrizovan po polinomima  $R$  i  $S$ . Da bi se izbegla nelinearnost modela po polinomu  $B^{-}$  pogodno je da se definiše

$$\hat{R}(q^{-1}) = q^{-d}B^{-}(q^{-1})R(q^{-1}) \quad \text{i} \quad \hat{S}(q^{-1}) = q^{-d}B^{-}(q^{-1})S(q^{-1}) \quad (6.6)$$

Tada se kao proces čiji se parametri estimiraju može posmatrati jednačina

$$A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})y_t = \hat{R}(q^{-1})u_t + \hat{S}(q^{-1})y_t \quad (6.7)$$

Model prediktora je u tom slučaju definisan kao

$$\hat{y}_{t,\theta} = A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})y_t = \varphi_t^T \theta$$

$$\varphi_t^T = [u_{t-1} \cdots u_{t-j} \quad y_{t-1} \cdots y_{t-j}]; \quad \theta^T = [\hat{r}_1 \cdots \hat{r}_j \quad \hat{s}_1 \cdots \hat{s}_j]; \quad (6.8)$$

$$j = dgR + dgB^{-} = dgS + dgB^{-}$$

Algoritam implicitnog samopodešavajućeg regulatora se može definisati u sledećim koracima.

$$\circ \text{ Izračuna se polinom } T(q^{-1}) = A_0(q^{-1})\hat{B}_m^*(q^{-1}); \left( B_m^*(q^{-1}) = B^{-}(q^{-1})\hat{B}_m^*(q^{-1}) \right).$$

$$\circ \text{ Estimiraju se parametri } \theta \text{ i odrede polinomi } \hat{R}(q^{-1}) \text{ i } \hat{S}(q^{-1})$$

$$\circ \text{ Skrate se zajednički faktori u ovim polinoma i odrede se polinomi } R(q^{-1}) \text{ i } S(q^{-1})$$

$$\circ \text{ Odredi se upravljanje } u_t: \quad u_t = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})}u_{ct} - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y_t$$

Ovaj algoritam je posebno jednostavan ukoliko se posmatra proces koji nema nestabilnih nula, odnosno za koga je  $B^{-}(q^{-1}) = b_0$ . U tom slučaju se za estimaciju parametara može koristiti metod najmanjih kvadrata.

Pri realizaciji oba tipa samopodešavajućih regulatora izvestan problem može da predstavlja činjenica da se proces pobuđuje signalima sistema u zatvorenoj sprezi, što znači da se oni ne mogu proizvoljno odabirati, pa se ne može ni garantovati da će biti perzistentno eksitirajući.

#### Stabilnost sistema u zatvorenoj sprezi

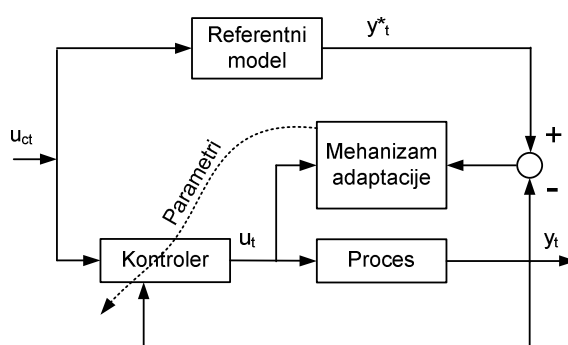
Kako se parametri kontrolera menjaju, ne postoji garancija da će sistem u zatvorenoj

sprezi u svakom koraku biti stabilan. Otuda je neophodno da se u samom algoritmu proverava da li se, na svakom koraku, polovi sistema nalaze unutar jediničnog kruga. Ukoliko to nije slučaj, onda se, ili preskače taj korak adaptacije i ostavlja da sistem radi sa poslednjim stabilnim parametrima, sve dok se u daljem postupku adaptacije ne dobiju ponovo stabilni polovi, ili se koristi neka drugačija modifikacija algoritma. Jedan od često sretanih postupaka je da se nestabilni polovi preslikaju u unutrašnjost jediničnog kruga i to tako što se uzme recipročna vrednost modula, dok faza ostaje ista. Očigledno je da su oba navedena postupka heurističke prirode, no praksa pokazuje da oni daju zadovoljavajuće rezultate.

## 6.2 Adaptivni sistemi sa referentnim modelom

*Stabilnost kao "sine qua non" svakog sistema*

### 6.2.1 ADAPTIVNO UPRAVLJANJE SA REFERENTNIM MODELOM



Osnovna odlika ovih adaptivnih sistema je da imaju dve zatvorene povratne sprege. Jedna, unutrašnja, povratna sprega je klasična sprega namenjena samom kontroleru, odnosno obezbeđivanju adekvatnih upravljačkih signala tako da se prati ponašanje referentnog modela. Druga, spoljašnja, povratna sprega pruža podatke mehanizmu adaptacije koji na odgovarajući način menja parametre kontrolera (Sl. 6-5).

U principu ovi sistemi se dalje dele u dve kategorije:

#### SL. 6-5 ADAPTIVNI SISTEM SA REFERENTNIM MODELOM

- **INDIREKTNO ADAPTIVNO UPRAVLJANJE** – zasnovano na eksplicitnoj estimaciji parametara modela procesa, na osnovu kojih se onda (indirektno) menjaju parametri kontrolera
- **DIREKTNO ADAPTIVNO UPRAVLJANJE** – zasnovano na reparametrizaciji kontrolera, tako da se njegov model dovede u oblik u kome se direktno mogu estimirati parametri kontrolera. Budući da ovi parametri zavise od parametara modela procesa govori se i o implicitnoj estimaciji parametara modela procesa.

Prvu ideju za projektovanje adaptivnih sistema dao je Whitaker još 1958.godine. On je predložio i strukturu sistema sa referentnim modelom (Sl. 6-5), i istovremeno ponudio rešenje danas poznato kao "MIT pravilo"<sup>1</sup>. Suština rešenja sastoji se u tome da se problem varijacionog računa - minimizacija funkcionala - zameni sa minimizacijom funkcije. Ovo je obrazloženo konstatacijom da se parametri modela procesa menjaju daleko sporije od promenljivih procesa, što znači da se model može posmatrati kao kvazi stacionaran. Za tako zamišljen model se onda formira izuzetno jednostavan algoritam koji minimizira odstupanje izlaza procesa od izlaza referentnog modela. Koliko god ovo rešenje bilo jednostavno i kao takvo prihvatljivo sa inženjerske tačke gledišta, njegova osnovna mana ogleda su u tome da se ne garantuje stabilnost sistema. Naime, kao što je već rečeno, zbog postojanja mehanizma adaptacije, adaptivni sistem je nelinearan sistem, tako da je veoma osetljiv sa gledišta stabilnosti.

U želji da se prevaziđe ovaj problem predloženo je (Narendra, 1973) da se zakon promene parametara formira tako da se obezbedi stabilnost u smislu neke, unapred zadate, funkcije Ljapunova. Sa idejne tačke gledišta, ovaj pristup deluje veoma privlačno. Pokazalo se, međutim, da značajan problem predstavlja nepostojanje sistematičnog načina za generisanje odgovarajućih funkcija Ljapunova. Otuda je on ostao ograničen na manji broj posebno definisanih modela. Pored

<sup>1</sup> Naziv potiče od MITa (Masachusetts Institute of Technology) na kome je Whitaker bio profesor kada je objavio ovo rešenje

toga, projektovanje preko stabilnosti ostavlja potpuno otvoreno pitanje konvergencije algoritma estimacije. Činjenica da greška, pošto je sistem stabilan, asimptotski teži ka nuli ima malu upotrebnu vrednost sa gledišta praktične implementacije upravljanja.

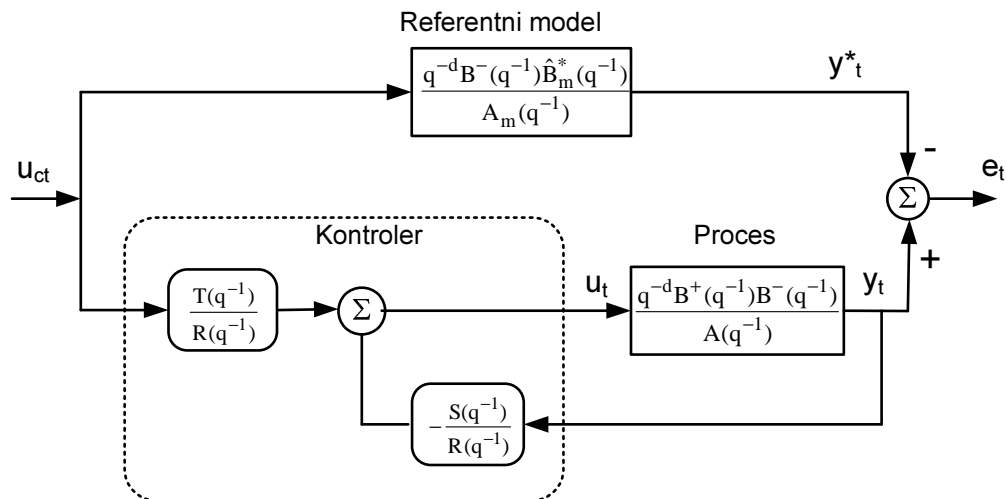
Značaj pristupa projektovanju preko greške ogleda se, pre svega, u tome da je on ostao polazna tačka u daljem razvoju adaptivnih sistema sa referentnim modelom. Uočavajući da se adaptivni sistem može prikazati kao sistem sa nelinearnim blokom u povratnoj grani, Landau je 1975. godine predložio da se za projektovanje adaptivnih zakona upravljanja koristi teorija hiperstabilnosti koju je razvio Popov. Ovim pristupom je, u odnosu na formiranje funkcije Ljapunova, značajno poopšteno generisanje algoritma. Ključni značaj, predloženog rešenja, leži međutim u tome što je on ukazao na specifičnost strukture adaptivnih sistema, što je kasnije otvorilo prostor za primenu teorije pozitivnosti i pasivnosti sistema.

Rezultati teorije pasivnosti su, nadalje, doveli do daljeg poboljšanja adaptivnih zakona upravljanja, kao i do analize performanse kroz teoriju usrednjavanja. Međutim i danas je, u izvesnom smislu, ostao nerešen problem brzine njihove konvergencije.

## 6.2.2 MODEL GREŠKE PRAĆENJA

Polazeći od teorije stabilnosti, tokom vremena, razvijen je čitav niz različitih adaptivnih algoritama. Oni se međusobno razlikuju po usvojenoj strukturi MRASa (serijska, serijsko-paralelna, ili paralelna), tipu promenljivih (kontinualne ili diskretne), vrsti modela (prostor stanja ili u/i modeli), i konačno po tome da li se vrši direktna ili indirektna adaptacija.

Nezavisno od navedenih razlika, sam pristup projektovanju je, u osnovi, isti. Naime, za usvojenu strukturu MRASa i vrstu modela projektuje se kontroler koji obezbeđuje savršeno praćenje u slučaju da su parametri modela poznati i konstantni. Za tako određene sistem, formira se model u prostoru signala greške, koja izražava odstupanje izlaza procesa od izlaza referentnog modela. Zakon promene parametara određuje se tako da se minimizira neki kriterijum koji je funkcija greške ili da sistem u prostoru greške bude asimptotski stabilan, odnosno da greška asimptotski teži ka nuli.



Sl. 6-6 PRAĆENJE REFERENTNOG MODELA

U cilju ilustracije izložene metodologije posmatrača se kontroler razvijen na osnovu paralelnog MRASa (Sl. 6-6). Imajući u vidu relaciju (6.5) kao i činjenicu da se referentni model može izraziti kao

$$y_t^* = \frac{q^{-d}B^-(q^{-1})\hat{B}_m^*(q^{-1})}{A_m(q^{-1})}u_{ct} \Rightarrow A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})y_t^* = q^{-d}B^-(q^{-1})\underbrace{T(q^{-1})}_{A_0\hat{B}_m^*}u_{ct} \quad (6.9)$$

model greške praćenja  $e_t = y_t - y_t^*$  je



$$A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})e_t = q^{-d}B^-(q^{-1})\left(R(q^{-1})u_t + S(q^{-1})y_t - T(q^{-1})u_{ct}\right) \quad (6.10)$$

### 6.2.3 MIT PRAVILO

#### *Originalno rešenje za kontinualne sisteme*

Pošto je MIT pravilo, kao i većina drugih adaptivnih algoritama razvijenih do sredine sedamdesetih godina formirana za kontinualne sisteme, neophodno je da se pođe od modela greške kontinualnih sistema. U principu, kontroler koji obezbeđuje praćenje kontinualnog referentnog modela ne razlikuje se po strukturi od diskretnog kontrolera. Drugim rečima, jednačina (6.10) se može posmatrati i kao model greške kontinualnog MRASa kod koga su odgovarajući polinomi funkcije kompleksne promenljive "s", odnosno operatora diferenciranja "p". Ukoliko se uz to, pretpostavi da se radi o procesu minimalne faze, tada model greške kontinualnog MRASa postaje

$$e_t = \frac{b_0}{A_0(p)A_m(p)}(R(p)u_t + S(p)y_t - T(p)u_{ct}) \quad (6.11)$$

Ako se, nadalje pretpostavi, da su parametri polinoma kontrolera nepoznati i definisani vektorom parametara

$$\theta^T = [r_0 \cdots r_{n-1} \ s_0 \cdots s_{n-1} \ t_0 \cdots t_{n-1}] \quad (6.12)$$

tada je greška zapravo funkcija dve promenljive  $e_{t,\theta}$ .

U cilju formiranja adaptivnog upravljanja Whitaker je predložio da se odredi funkcija promene parametara  $\theta = \theta(t)$  tako da se minimizira kvadrat greške

$$J = \frac{1}{2}e_{t,\theta}^2 \quad (6.13)$$

Problem, međutim nastaje u tome što je, budući da su parametri vremenski promenljivi, greška  $e(t, \theta(t))$  funkcional od funkcije promene parametara, tako da minimizacija kriterijuma (6.13) zahteva primenu varijacionog računa, što bi značajno komplikovalo rešenje. Međutim, ako se pretpostavi da se parametri menjaju znatno sporije od promenljivih sistema, odnosno da su parametri "skoro" konstantni, tada se kriterijum može posmatrati kao funkcija parametara pa se može minimizirati nekom od metoda za minimizaciju funkcija. U tom smislu Whitaker za minimizaciju koristi metod "najstrmijeg spuštanja"<sup>1</sup> u pravcu negativnog gradijenta kriterijuma

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = -\gamma e_t \frac{\partial e_t}{\partial \theta} \quad (6.14)$$

pri čemu se gradijent greške određuje preko modela osetljivosti.

U cilju ilustracije ove ideje posmatraće se kontinualni MRAS prvog reda kod koga je referentni model definisan kao

$$y_t^* = \frac{b_m}{p + a_m}u_{ct} \Rightarrow G_m(s) = \frac{b_m}{s + a_m} \quad (6.15)$$

dok je proces definisan sa

$$y_t = \frac{b}{p + a}u_t \Rightarrow G(s) = \frac{b}{s + a} \quad (6.16)$$

Usvajajući da je  $A_0(s) = 1$ , vidi se da je zakon upravljanja dat relacijom

$$u_t = t_0 u_{c,t} - s_0 y_t \quad (6.17)$$

gde je

$$p + a + bs_0 = p + a_m \quad ; \quad bt_0 = b_m \Rightarrow \quad (6.18)$$

$$s_0 = \frac{a_m - a}{b} \quad ; \quad t_0 = \frac{b_m}{b} \quad ; \quad \theta = [s_0 \quad t_0]^T$$

<sup>1</sup> The steepest descent method

tako da je sistema u zatvorenoj sprezi opisan sa

$$y_t = \frac{bt_0}{p+a+bs_0} u_{ct} \quad ; \quad u_t = \frac{(p+a)t_0}{p+a+bs_0} u_{ct} \quad (6.19)$$

Otuda je gradijent greške praćenja referentnog modela

$$\frac{\partial e_t}{\partial \theta} = \frac{\partial y_t}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial e_t}{\partial t_0} = \frac{b}{p+a+bs_0} u_{ct} \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial e_t}{\partial s_0} = \frac{-bt_0}{(p+a+bs_0)^2} u_{ct} = \frac{-b}{p+a+bs_0} y_t$$

Nesumnjivo je da se relacije (6.20) ne mogu koristiti za generisanje gradijenta jer se ne poznaju parametri modela procesa. Međutim, ukoliko se pretpostavi da sistem realizuje "savršeno" praćenje referentnog modela, odnosno da je postignuta jednakost funkcija prenosa, tada će važiti sledeće relacije

$$p+a+bs_0 = p+a_m \quad ; \quad bt_0 = b_m \quad (6.21)$$

U skladu sa time za izračunavanje gradijenta može se koristiti sledeća aproksimacija

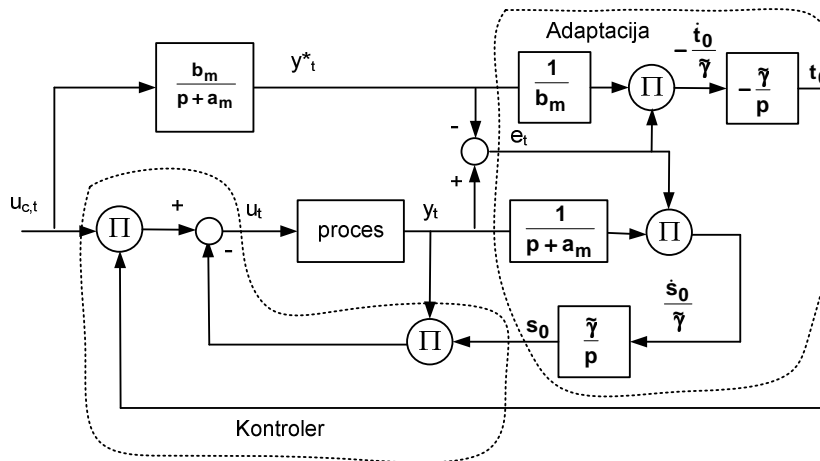
$$\frac{\partial e_t}{\partial t_0} \approx \frac{b}{p+a_m} u_{ct} \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial e_t}{\partial s_0} \approx \frac{-b}{p+a_m} y_t$$

Budući da se sada radi o poznatim vrednostima parametara i merljivim signalima, zakon adaptacije se može realizovati i on je oblika

$$\dot{\theta} = -\gamma e_t \frac{\partial e_t}{\partial \theta} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{t}_0 &= -\gamma e_t \frac{\partial e_t}{\partial t_0} = -\gamma \left( \frac{b}{p+a_m} u_{ct} \right) e_t = -\tilde{\gamma} \left( \frac{1}{p+a_m} u_{ct} \right) e_t \\ \dot{s}_0 &= -\gamma e_t \frac{\partial e_t}{\partial s_0} = \tilde{\gamma} \left( \frac{1}{p+a_m} y_t \right) e_t \end{aligned} \quad (6.23)$$

Činjenica da se ne poznaje vrednost parametra b ne predstavlja poseban problem u implementaciji algoritma. Naime sve dok se poznaje predznak parametra, može se smatrati da je on uključen u pojačanje  $\tilde{\gamma} = b\gamma$  (Sl. 6-7).



SL. 6-7 MIT PRAVILO ZA KONTINUALNI SISTEM PRVOG REDA

Osnovna prednost ovog algoritma je njegova jednostavnost. Praksa pokazuje da on daje prihvatljive rezultate u slučaju kada su vrednosti pojačanja sistema male i kada sistem ima stabilne početne uslove. Osnovna mana je činjenica da njegova stabilnost zavisi od intenziteta ulaznog signala.

## MIT PRAVILO ZA DISKRETNE SISTEME

Ukoliko se radi o sistemu minimalne faze, kod koga je  $B^-(q^{-1}) = b_0$ , diskretni model u prostoru greške je

$$e_t = \frac{q^{-d} b_0}{A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})} \left( R(q^{-1})u_t + S(q^{-1})y_t - T(q^{-1})u_{ct} \right) \quad (6.24)$$

Ako se definišu filtrirani signali

$$\begin{aligned} u_{f,t} &= \frac{1}{A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})} u_t \\ y_{f,t} &= \frac{1}{A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})} y_t \\ u_{cf,t} &= \frac{1}{A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})} u_{ct} \end{aligned} \quad (6.25)$$

tada se, imajući u vidu da je polinom R moničan, odnosno da je nezavisno od modela procesa parametar  $r_0$  uvek jednak 1, greška može izraziti kao

$$\begin{aligned} e_t &= b_0 \left( R(q^{-1})u_{f,t-d} + S(q^{-1})y_{f,t-d} - T(q^{-1})u_{cf,t-d} \right) = \\ &= b_0 \left( u_{f,t-d} + \sum_{i=1}^{n_r} r_i u_{f,t-d-i} + S(q^{-1})y_{f,t-d} - T(q^{-1})u_{cf,t-d} \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Iz relacije (6.26) se vidi da se radi o modelu tipa greške jednačine. Definisanjem vektora merenja

$$\Phi_{f,t}^T = \left[ u_{f,t-1} \cdots u_{f,t-n+1} \quad y_{f,t} \cdots y_{f,t} \cdots y_{f,t-n+1} \quad -u_{cf,t} \cdots -u_{cf,t-n+1} \right] \quad (6.27)$$

i vektora parametara

$$\theta^T = \left[ r_1 \cdots r_{n-1} \quad s_0 \cdots s_{n-1} \quad t_0 \cdots t_{n-1} \right] \quad (6.28)$$

dobija se model greške

$$e_t = b_0 \left( u_{f,t-d} + \Phi_{f,t-d}^T \theta \right) \quad (6.29)$$

U skladu sa time odgovarajući model prediktora je

$$\hat{e}_{t,\theta} = b_0 \left( u_{f,t-d} + \Phi_{f,t-d}^T \hat{\theta}_{t-1} \right) \quad (6.30)$$

tako da je pravac gradijenta greške predikcije

$$\varepsilon_t = e_t - \hat{e}_{t,\theta} = \Phi_{f,t-d}^T \left( \theta - \hat{\theta}_{t-1} \right) \Rightarrow \text{grad}_{\theta} \varepsilon_t = -\Phi_{f,t-d} \quad (6.31)$$

Po analogiji sa MIT pravilom, metod najstrijmijeg spuštanja daje estimator

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + \gamma \Phi_{f,t-d} \varepsilon_t \quad (6.32)$$

Pošto se parametri procesa ne poznaju, u realizaciji algoritma za izračunavanje greške ne može da se koristi izraz (6.32) već se ona izračunava kao razlika izlaza procesa i referentnog modela

$$\varepsilon_t = y_t - y_t^* = b_0 \left( u_{f,t-d} + \Phi_{f,t-d}^T \hat{\theta}_{t-1} \right) \quad (6.33)$$

Pored toga, budući da se i parametar  $b_0$ , po pravilu, ne poznaje umesto njega se može usvojiti proizvoljna konstanta koja uključuje samo predznak parametra  $b_0$ .

Samo se po sebi razume da ovaj algoritam ima iste osobine kao i kontinualni. Potrebno je da se istakne da su i kod kontinualnih i kod diskretnih sistema razvijene brojne modifikacije ovog osnovnog algoritma, sa ciljem da se smanji osetljivost sistema na promenu ulaznog signala i obezbedi brža konvergencija.

Iz samog izvođenja algoritma vidi se da on ni na koji način ne garantuje da će sistem kojim se upravlja biti stabilan za sve vrednosti parametara kontrolera. To znači, da je i ovde neophodno da se na svakom koraku ispituje stabilnost i da se, po potrebi ili privremeno prekine adaptacija ili izvrši preslikavanje nestabilnih polova sistema.

#### 6.2.4 STABILNI ADAPTIVNI ALGORITMI

Ideja projektovanja stabilnih adaptivnih sistema zasniva se na određivanju algoritma adaptacije koji garantuje stabilnost celog nelinearnog sistema u prostoru greške. Samo se po sebi razume da je osnovni motiv želja da se izbegne heuristički pristup u kome se, uz niz aproksimacija, dolazi do rešenja koje se onda dodatno modifikuje da bi se eventualno obezbedilo da greška teži ka nuli. Budući da ovi algoritmi imaju više istorijsku vrednost, ali su značajni sa gledišta razumevanja suštine pristupa, izložiće se samo osnovni koncept, ilustrovan na modelu prvog reda.

Polazeći od jednačina (6.15) i (6.16) model sistema u prostoru greške može se formirati na sledeći način.

$$\begin{aligned} \dot{y}_t^* &= b_m u_{c,t} - a_m y_t^*; & \dot{y}_t &= b u_t - a y_t \Rightarrow \\ \dot{e}_t &= y_t - y_t^* = b t_0 u_{c,t} - b s_0 y_t - a y_t - b_m u_{c,t} + a_m y_t^* = \\ &= -a_m e_t + (a_m - a - b s_0) y_t + (b t_0 - b_m) u_{c,t} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Potrebno je zapaziti da je ukoliko su proces i referentni model identični, greška autonoman dinamički sistem

$$a_m = a \text{ i } b = b_m \Rightarrow s_0 = 0, t_0 = 1 \Rightarrow \dot{e}_t = -a_m e_t \quad (6.35)$$

To znači da greška asimptotski teži ka nuli ukoliko je referentni model stabilan ( $a_m > 0$ ).

U cilju ispitivanja stabilnosti sistema (6.34) posmatra se funkcija Ljapunova definisana kao

$$V(e, t_0, s_0) = \frac{1}{2} \left[ e_t^2 + \frac{1}{b\gamma} (b s_0 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma} (b t_0 - b_m)^2 \right] \quad (6.36)$$

Ova funkcija je diferencijabilna po svim promenljivim, pozitivno je definitna i pri tome je pod uslovima definisanim relacijom (6.35) vrednost funkcije Ljapunova u ravnotežnom stanju  $V(0, 1, 0) = 0$ .

Izvod funkcije Ljapunova je

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, t_0, s_0) &= \dot{e}e + \frac{1}{\gamma} (b s_0 + a - a_m) \dot{s}_0 + \frac{1}{\gamma} (b t_0 - b_m) \dot{t}_0 = \\ &= -a_m e^2 + \frac{1}{\gamma} (b s_0 + a - a_m) (\dot{s}_0 - \gamma y e) + \frac{1}{\gamma} (b t_0 - b_m) (\dot{t}_0 - \gamma u_c e) \end{aligned} \quad (6.37)$$

Uslov stabilnosti sistema zahteva da prvi izvod funkcije Ljapunova bude negativan. Ovaj zahtev se može ispuniti ako se sledeće relacije usvoje kao zakon promene parametara

$$\begin{aligned} \dot{s}_{0,t} = \gamma y e_t \Rightarrow s_0(t) &= \int_0^t \gamma y(\tau) e(\tau) d\tau \\ \dot{t}_{0,t} = \gamma u_c e_t \Rightarrow t_0(t) &= \int_0^t \gamma u_c(\tau) e(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.38)$$

U tom slučaju se dobija

$$\dot{V}(e, t_0, s_0) = -a_m e^2(t) < 0 \quad (6.39)$$

što znači da je sistem u prostoru greške (6.34) asimptotski stabilan u smislu Ljapunova.

Ako se pogleda dobijeni rezultat onda je izvesno da je funkcija Ljapunova u velikoj meri veštački konstruisana, što i nije preterani problem kada se radi o sistemu prvog reda. Samo se po sebi razume da izbor postaje daleko komplikovaniji kod složenijih metoda i da se, zapravo, na ovaj način teško dobija opšta metodologija za generisanje adaptivnih algoritama. Dodatni problem predstavlja i činjenica da konvergencija greške, nužno ne implicira i konvergenciju parametara.

Polazeći od ovih rezultata koji uvek daju integralni zakon promene parametara, došlo se na ideju da se pokuša sa formiranjem proporcionalno-integralnog zakona adaptacije. U cilju izvođenja uslova pod kojima su takvi sistemi stabilni u prostoru greške korišćen je pojam hiperstabilnosti. Ovaj pristup je generalisan kroz teoriju pasivnosti.

### 6.2.5 ALGORITMI ZASNOVANI NA TEORIJI PASIVNOSTI

Polazeći od rezultata teorije pasivnosti<sup>1</sup> dobija se algoritam adaptacije diskretnih sistema koji garantuje stabilnost u prostoru greške. Algoritam se može formulirati na sledeći način

- Projektovati kontroler za praćenje referentnog modela uz pretpostavku da su parametri modela procesa poznati
- Formirati model u obliku 
$$\varepsilon_t = G_1 \left\{ \varphi_{t-d}^T (\theta^0 - \theta) \right\} \quad (6.40)$$

gde je  $G_1$  striktno pozitivno realna funkcija, a  $\varphi_{t-d}$  neki vektor merenja prikupljenih do trenutka vremena  $t$  i izraziti izraz na desnoj strani u formi koja se može implementirati (eliminirati iz njega nepoznate parametre procesa  $\theta_0$ )

- Primeniti rekurzivni metod estimacije parametara  $\theta$ .

Opisani algoritam može se ilustrovati na diskretnom linearnom sistemu minimalne faze. Za ovaj sistem se već poznaje metod za projektovanje kontrolera, koji rezultuje modelom greške datim relacijom (6.24).

$$e_t = \frac{q^{-d} b_0}{A_0 A_m} (R u_t + S y_t - T u_{ct})$$

U skladu sa izloženim algoritmom neophodno je da se ovaj model transformiše tako da se dobije model oblika (6.40). Imajući u vidu da su svi parametri kontrolera određeni na osnovu uslova da se obezbedi praćenje referentnog modela, izvesno je da on ne pruža dodatnu slobodu obezbeđivanje striktno pozitivne realnosti. Neophodno je, prema tome, da se u model unesu još neki slobodni parametri.

Iz teorije estimacije je poznato da se povećanje stepeni slobode može ostvariti filtriranjem signala kroz proizvoljno odabrani filter. Sledeći ovu ideju dobija se model filtrirane greške

$$e_{ft} = \frac{Q}{V} e_t = \frac{Q}{V} \frac{b_0}{A_0 A_m} (R u_{t-d} + S y_{t-d} - T u_{ct-d}) \quad (6.41)$$

Očigledno je da izbor parametara filtra (polinomi  $Q$  i  $V$ ) treba da omogući zahtevanu transformaciju jednačine greške. Jedan od načina da se to postigne je da se filtrirana greška izrazi kao

$$e_{ft} = \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \left( \frac{R}{V} u_{t-d} + \frac{S}{V} y_{t-d} - \frac{T}{V} u_{ct-d} \right) \quad (6.42)$$

Poređenjem izraza (6.40) i (6.41), vidi se da se može usvojiti da je

$$G_1 = \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \quad (6.43)$$

što podrazumeva da je polinom  $Q$  odabran tako da budu ispunjeni sledeći uslovi

$$dgQ \leq dgA_0 A_m; \quad \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \text{ je SPR} \quad (6.44)$$

Usvajanjem izraza za funkciju implicitno je usvojeno i da će polinom  $V$  biti određen tako da filter bude fizički ostvarljiv.

Za formiranje algoritma neophodno je još da se preostali deo izraza za grešku

$$\frac{R}{V} u_{t-d} + \frac{S}{V} y_{t-d} - \frac{T}{V} u_{ct-d} \quad (6.45)$$

izrazi preko vektora merenja. Da bi se to postiglo posmatraće se filtrirani signali

$$u_{f,t} = \frac{1}{V} u_t, \quad y_{f,t} = \frac{1}{V} y_t, \quad u_{cf,t} = \frac{1}{V} u_{ct} \quad (6.46)$$

tako da relacija (6.45) postaje

<sup>1</sup> Osnovni rezultati teorije pasivnosti dati su u dodatku A.

$$Ru_{f,t-d} + Sy_{f,t-d} - Tu_{fc,t-d} = u_{f,t-d} + \sum_{i=1}^{n_r} r_i u_{f,t-d-i} + \sum_{i=0}^{n_s} s_i y_{f,t-d-i} - \sum_{i=0}^{n_t} t_i u_{fc,t-d-i} \quad (6.47)$$

Iz dobijenog izraza se vidi da se uz definisanje vektora filtriranih merenja

$$\begin{aligned} \varphi_{ut}^T &= [u_{f,t-1} \cdots u_{f,t-(n_r-1)}] \\ \varphi_t^T &= [\varphi_{ut}^T \quad \varphi_{yt}^T \quad \varphi_{u_{c,t}}^T]; \quad \varphi_{yt}^T = [y_{f,t} \cdots y_{f,t-n_s}] \\ \varphi_{u_{c,t}}^T &= [-u_{fc,t} \cdots -u_{fc,t-n_t}] \end{aligned} \quad (6.48)$$

kao i vektora parametara

$$\begin{aligned} \theta_r^T &= [r_1 \cdots r_{n_r-1}] \quad (r_0 = 1) \\ \theta^T &= [\theta_r^T \quad \theta_s^T \quad \theta_t^T]; \quad \theta_s^T = [s_0 \cdots s_{n_s}] \\ \theta_t^T &= [t_0 \cdots t_{n_t}] \end{aligned} \quad (6.49)$$

model greške (6.44) može prikazati kao

$$e_{ft} = \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} (u_{f,t-d} + \varphi_{t-d}^T \theta^0) \quad (6.50)$$

gde je sa  $\theta^0$  označen nepoznati vektor parametara modela procesa.

Dobijeni izraz predstavlja model filtrirane greške sistema. Budući da se parametri modela ne poznaju izvesno je da se oni moraju estimirati. Otuda je neophodno da se formira odgovarajući prediktorski model filtrirane greške. Na osnovu svega što je do sada rečeno o prediktorskim modelima, izvesno je da se on dobija iz modela filtrirane greške zamenom nepoznatih parametara estimiranim parametrima

$$\hat{e}_{ft} = \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} (u_{f,t-d} + \varphi_{t-d}^T \hat{\theta}_{t-1}) \quad (6.51)$$

U skladu sa time greška predikcije filtrirane greške određena je kao

$$\varepsilon_t = e_{ft} - \hat{e}_{ft} = \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \varphi_{t-d}^T (\theta^0 - \hat{\theta}_{t-1}) \quad (6.52)$$

Kako poslednja relacija ima oblik definisan algoritmom (6.40), preostaje još da se utvrdi način izračunavanja ovog izraza. U cilju eliminacije vektora nepoznatih parametara posmatra se izraz za filtriranu grešku

$$e_{ft} = \frac{Q}{V} e_t = \frac{Q}{V} (y_t - y_t^*) \quad (6.53)$$

Budući da se ovaj signal može dobiti na osnovu merenja, greška predikcije filtrirane greške se može implementirati kao

$$\begin{aligned} \varepsilon_t = e_{ft} - \hat{e}_{ft} &= \frac{Q}{V} e_t - \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} (u_{f,t-d} + \varphi_{t-d}^T \hat{\theta}_{t-1}) = \\ &= \frac{Q}{V} (y_t - y_t^*) + \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \eta_t \quad ; \quad \eta_t = -(u_{f,t-d} + \varphi_{t-d}^T \hat{\theta}_{t-1}) \end{aligned} \quad (6.54)$$

S obzirom da su na ovaj način ispunjeni svi zahtevi u pogledu zahtevane forme modela greške na njega se može primeniti algoritam estimacije.

#### ALGORITAM

##### ▪ POLAZNI PARAMETRI KOJI SE USVAJAJU

- Kašnjenje  $d$  (procenjuje se iz snimanja odziva)
- Referentni model minimalne faze  $(A_m(q^{-1}), B_m(q^{-1}))$ , uz pretpostavku da je  $B^-(q^{-1}) = b_0$ ;  $b_0 > 0$ , za parametar  $b_0$  usvaja se proizvoljna konstanta,

- Observer  $A_0(q^{-1})$
- Struktura kontrolera (redovi polinoma  $n_r, n_s$  i  $n_t$ )
- Parametri filtra  $V(q^{-1}), Q(q^{-1})$   
(može se usvojiti da je  $V(q^{-1}) = Q(q^{-1}) = A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})$ )

▪ KORAK VREMENA T

*Na raspolaganju*

$$\hat{\theta}_{t-1}; P_{t-d-1}; \{u_{ci}\}, \{u_{f,ci}\}, \{y_i^*\}, i=1, \dots, t; \{y_i\}, \{u_i\}, \{y_{f,i}\}, \{u_{f,i}\}, i=1, \dots, t-1$$

*Meri se  $y_t$*

*Izračunava se*

1) Vektor merenja

$$y_{f,t} = \frac{1}{V} y_t; \Phi_t^T = [\Phi_{ut}^T \Phi_{yt}^T \Phi_{u_{ct}}^T]$$

$$\Phi_{ut}^T = [u_{f,t-1} \dots u_{f,t-(n_r-1)}]; \Phi_{yt}^T = [y_{f,t} \dots y_{f,t-n_s}]; \Phi_{u_{ct}}^T = [-u_{fc,t} \dots -u_{fc,t-n_t}]$$

2) Greška

$$\eta_t = -(u_{t-d} + \Phi_{t-d}^T \hat{\theta}_{t-1})$$

$$\varepsilon_t = \frac{Q}{V} (y_t - y_t^*) + \frac{b_0 Q}{A_0 A_m} \eta_t$$

3) Nova vrednost parametara

$$P_t = P_{t-1} - \frac{P_{t-1} \Phi_t^T \Phi_t^T P_{t-1}}{\frac{1}{\alpha_t} + \Phi_t^T P_{t-1} \Phi_t}$$

$$L_t = \alpha_t P_t \Phi_t$$

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + L_t \varepsilon_t$$

4) Upravljanje

$$u_t = \hat{\theta}_{t,t}^T [u_{c,t} \ u_{c,t-1} \dots u_{c,t-n_s}] - \hat{\theta}_{s,t}^T [y_t \ y_{t-1} \dots y_{t-n_t}] - \hat{\theta}_{r,t}^T [u_{t-1} \ u_{t-2} \dots u_{t-n_r}]$$

5) Vrednosti za sledeći korak

$$u_{ct+1} \Rightarrow u_{cf,t+1} = \frac{1}{V(q^{-1})} u_{c,t+1}$$

$$y_{t+1}^* = \frac{A_m(q^{-1})}{B_m(q^{-1})} u_{ct+1}$$

$$u_{f,t} = \frac{1}{V(q^{-1})} u_t$$

**PR. 6-1**

Posmatra se proces opisan funkcijom prenosa

$$G_p(s) = \frac{229(s+0.6)}{s(s+1)(s^2+30s+229)}$$

- a. Projektovati diskretni kontroler na bazi paralelnog MRASa tako da proces prati izlaz referentnog model definisanog sa

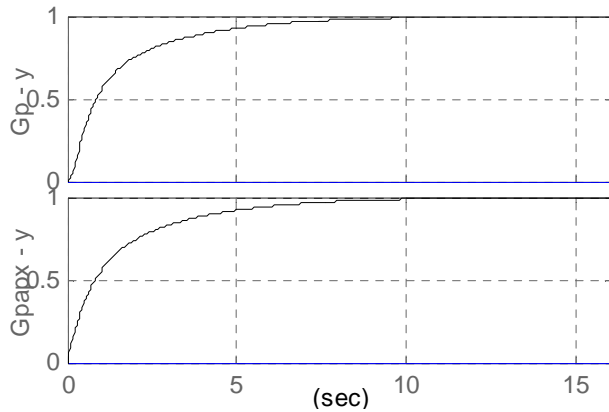
$$G_m(s) = \frac{s+1}{s^2+1.4s+1}$$

Dobijeno rešenje proveriti simulacijom u kojoj je pobudni signal povorka pravougaonih impulsa amplitude 1 i periode 50s.

### Rešenje

#### i. Izbor periode odabiranja

Budući da su i model procesa i referentni model kontinualni, a da kontroler treba da bude diskretni potrebno je da se izvrši njihova diskretizacija. U tom cilju je, kao prvo, neophodno da se odredi perioda odabiranja.



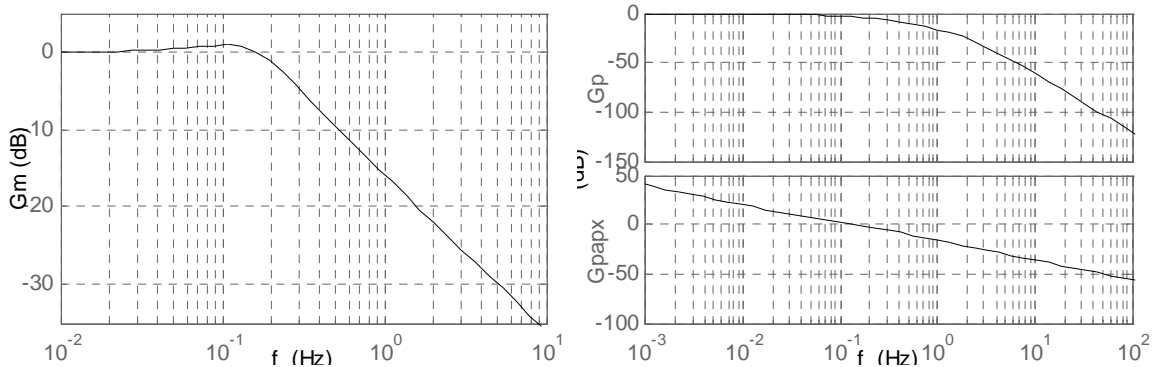
SL. 6-8 ODSKOČNI ODZIVI PROCESA I APROKSIMATIVNOG MODELA U JEDINIČNOJ POVROTNOJ SPREZI

Međutim, pre nego što se pristupi diskretizaciji, može se uočiti da model procesa ima par konjugovano kompleksnih polova  $(-15 \pm j2)$  koji se nalaze daleko u levoj poluravni  $s$ -ravnini u odnosu na dominantne polove ( $s=0$  i  $s=-1$ ). Kako će deo odziva procesa koji potiče od ovih polova biti neobično brz, oni se mogu zanemariti, čime se neće značajno uticati na ponašanje modela procesa. Iz tog razloga za projektovanje kontrolera koristiće se aproksimativni model procesa

$$G_{\text{papx}}(s) = \frac{s + 0.6}{s(s + 1)}$$

#### Valjanost učinjene aproksimacije

vidi se iz poređenja jediničnih odskočnih odziva PROCESA i aproksimativnog modela u jediničnoj povratnoj sprezi (Sl. 6-8).



SL. 6-9 AMPLITUDSKE KARAKTERISTIKE FUNKCIJA  $G_M$ ,  $G_p$  I  $G_{\text{PAPX}}$

U cilju određivanja odgovarajuće periode odabiranja snimljene su amplitudske karakteristike referentnog modela, modela procesa i aproksimativnog modela (Sl. 6-9).

Sa dijagrama se vidi da obe amplitudske karakteristike imaju slabljenje od oko -15dB, -20dB i -40dB pri učestanostima  $f = 1, 2$  i  $10$  (Hz) respektivno. Nesumnjivo je da je učestanost odabiranja od 10Hz najprihvatljivija. Imajući na umu da je sa gledišta praktične realizacije uvek povoljnije da se radi sa većim vremenom odabiranja imalo bi smisla se pokušati sa većim periodama odabiranja. Otuda su usvojene tri periode odabiranja  $T_1 = 1, T_{05} = 0.5$  i  $T_{01} = 0.1$

#### ii. Diskretizacija modela

Ako se pretpostavi da će kontroler biti realizovan u računaru onda će proces biti spregnut sa računalom preko D/A konvertora. Sa gledišta modeliranja to znači da će na red sa kontrolerom biti vezano kolo zadržke nultog reda iza koga će se nalaziti proces (Sl. 6-10).

S obzirom na realizaciju, vidi se da se za određivanje diskretne funkcije prenosa procesa mora da koristi metoda odskočne invarijantnosti. Da bi se diskretna funkcija referentnog modela mogla porediti sa diskretnom funkcijom procesa i ona se mora određivati na isti način.



$$D_p(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G_{\text{papx}}(s) \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_{\text{papx}}(s)}{s} \right\}$$

$$D_m(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G_m(s) \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_m(s)}{s} \right\}$$

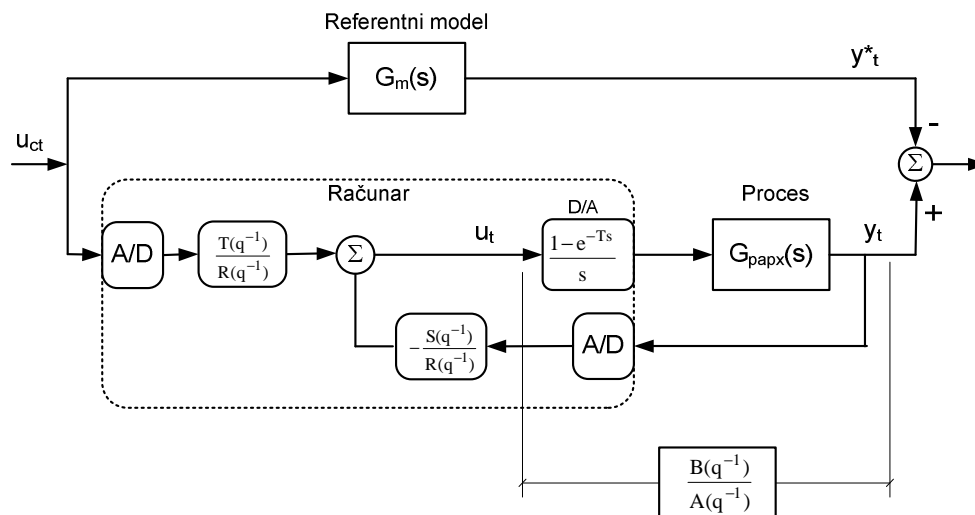
Korišćenjem ovih relacija dobija se

$$D_p = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)} \Rightarrow \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{q^{-1}K(1-bq^{-1})}{1-(1+a)q^{-1}+aq^{-2}}$$

$$D_m = \frac{\rho z - \sigma}{z^2 - \eta z + v} \Rightarrow \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} = \frac{q^{-1}(\rho - \sigma q^{-1})}{1 - \eta q^{-1} + v q^{-2}}$$

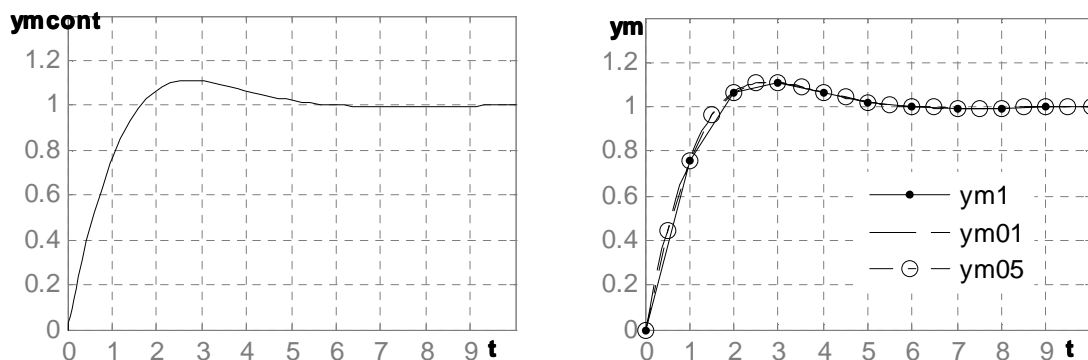
Vrednosti parametara za različite periode odabiranja date su u sledećoj tabeli

	K	b	a	$\rho$	$\sigma$	$\eta$	v
T1	0.853	0.55	0.368	0.76	0.265	0.75	0.247
T05	0.457	0.742	0.607	0.443	0.267	1.32	0.497
T01	0.098	0.942	0.905	0.098	0.089	1.86	0.869

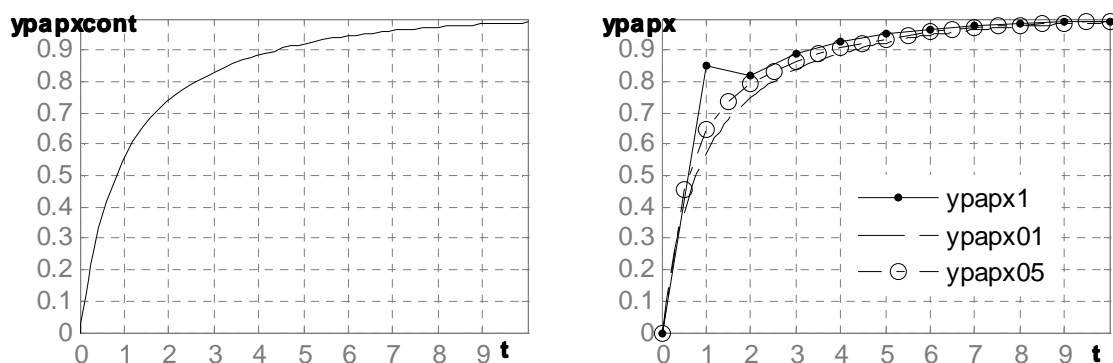


SL. 6-10 RAČUNARSKA REALIZACIJA KONTROLERA

Grafici odziva referentnog modela (Sl. 6-11), kao i aproksimativnog modela procesa u zatvorenoj sprezi (Sl. 6-12) pokazuju da su u osnovi sve tri periode odabiranja prihvatljive.



SL. 6-11 ODSKOČNI ODZIV KONTINUALNOG REFERENTNOG MODELA I TRI DISKRETIZOVANA MODELA



SL. 6-12 ODSKOČNI ODZIV KONTINUALNOG APROKSIMATIVNOG MODELA PROCESA SA JEDINIČNOMI POVRATNOM SPREGOM I TRI DISKRETIZOVANA MODELA

iii. *Projektovanje paralelnog kontrolera*

Budući da referentni model ne uključuje nulu procesa, izvesno je da se ona mora skratiti. Otuda ćemo definisati

$$B^*(q^{-1}) = K(1 - bq^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-(q^{-1}); \quad B^+(q^{-1}) = 1 - bq^{-1}; \quad B^-(q^{-1}) = K$$

tako da je

$$B_m^*(q^{-1}) = B^-(q^{-1})\hat{B}_m^*(q^{-1}) \Rightarrow \hat{B}_m^*(q^{-1}) = \frac{\rho - \sigma q^{-1}}{K}$$

$$R(q^{-1}) = B^+(q^{-1})\hat{R}(q^{-1}) = (1 - bq^{-1})\hat{R}(q^{-1})$$

Usvojimo da je

$$dg\tilde{R}(q) = dg\tilde{S}(q) = n - 1 = 1 \Rightarrow$$

iz čega sledi

$$R(q^{-1}) = 1 + r_1 q^{-1} = 1 - bq^{-1} \Rightarrow \hat{R}(q^{-1}) = 1 \Rightarrow dg\tilde{A}_0(q) = 0 \Rightarrow A_0(q^{-1}) = 1 \Rightarrow$$

$$dg\tilde{T}(q) = dg\tilde{A}_0(q) + dg\hat{B}_m(q) = 1 \Rightarrow T(q^{-1}) = t_0 + t_1 q^{-1};$$

$$S(q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1}$$

Uz pretpostavljene oblike polinoma sada se može rešiti Diofantova jednačina.

$$A(q^{-1})\hat{R}(q^{-1}) + q^{-1}B^-(q^{-1})S(q^{-1}) = A_m(q^{-1})A_0(q^{-1}) \Rightarrow$$

$$(1 - (a+1)q^{-1} + aq^{-2}) + Kq^{-1}(s_0 + s_1 q^{-1}) = (1 - \eta q^{-1} + vq^{-2}) \Rightarrow$$

$$s_0 = \frac{a+1-\eta}{K}; \quad s_1 = \frac{v-a}{K}$$

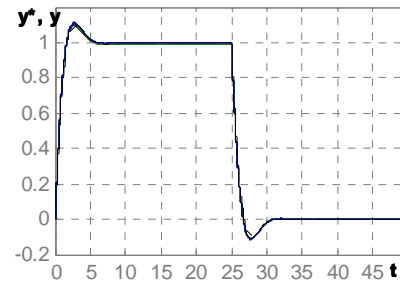
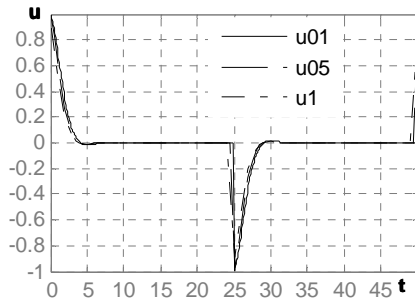
$$T(q^{-1}) = A_0(q^{-1})\hat{B}_m(q^{-1}) \Rightarrow T(q^{-1}) = \hat{B}_m(q^{-1}) = \frac{\rho - \sigma q^{-1}}{K} \Rightarrow t_0 = \frac{\rho}{K}; \quad t_1 = -\frac{\sigma}{K}$$

Za usvojene periode odabiranja parametri kontrolera prikazani su u sledećoj tabeli

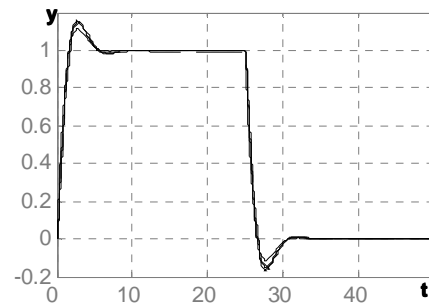
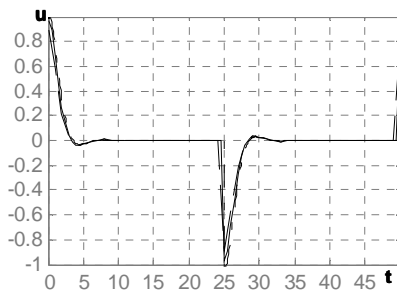
	r0	r1	s0	s1	t0	t1
T1	1	0.55	0.7245	-0.1429	6.891	-0.317
T05	1	0.742	0.628	-0.2407	0.9694	-0.5812
T01	1	0.942	0.4592	-0.3673	1	-0.9082

iv. *Simulacioni rezultati*

Rezultati simulacije prikazani na Sl. 6-13 pokazuju da se za sva tri vremena odabiranja dobijaju približno isti rezultati. U ponovljenoj simulaciji, na modelu procesa (Sl. 6-14) vidi se, takođe, da nemodelirana dinamika nema neki poseban uticaj na performasu sistema. To znači da je izvršena aproksimacija modela bila opravdana. Istovremeno se vidi i da nema posebne razlike u pogledu izbora periode odabiranja.



**SL. 6-13 UPRAVLJANJE, ODZIV APROKSIMATIVNOG MODELA I ODZIV REFERENTNOG MODELA ZA VREDNOSTI PERIODE ODABIRANJA  $T_1 = 1$ ,  $T_{05} = 0.5$  I  $T_{01} = 0.1$**



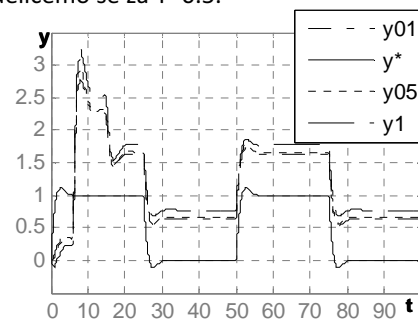
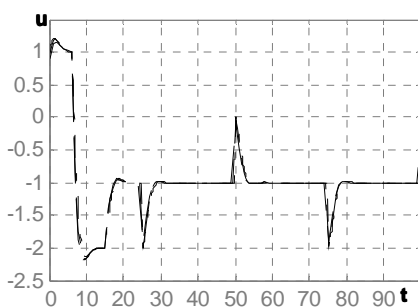
**SL. 6-14 UPRAVLJANJE, ODZIV PROCESA (SA NEMODELIRANOM DINAMIKOM) I ODZIV REFERENTNOG MODELA ZA VREDNOSTI PERIODE ODABIRANJA  $T_1 = 1$ ,  $T_{05} = 0.5$  I  $T_{01} = 0.1$**

v. *Ispitivanje uticaja poremećaja na performansu sistema.*

Pretpostavljeno je da na ulaz procesa deluje poremećaj  $d(t)$  i snimljen je odziv sistema i upravljanja.

$$d(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < 6 \\ 2 & 6 \leq t < 15 \\ 1 & 15 \leq t \end{cases}$$

Simulacija je izvršena na modelu procesa. Iz snimljenih odziva se vidi da kontroler pokušava da reaguje na promenljivi deterministički poremećaj, ali i da u tome ne uspeva. Kada poremećaj postane konstantantan (za  $t > 15$ ) proces počinje da prati izlaz referentnog modela, ali stalno ima statičku grešku. Odziv procesa je sličan za sve tri vrednosti periode odabiranja. Imajući u vidu da je greška nešto veća za  $T=1$ , dok praktično nema razlike za preostale dve vrednosti  $T$ , opredelićemo se za  $T=0.5$ .



**SL. 6-15 UPRAVLJANJE, ODZIV PROCESA I ODZIV REFERENTNOG MODELA ZA VREDNOSTI PERIODE ODABIRANJA  $T_1 = 1$ ,  $T_{05} = 0.5$  I  $T_{01} = 0.1$  PRI DELOVANJU POREMEĆAJA  $D$**

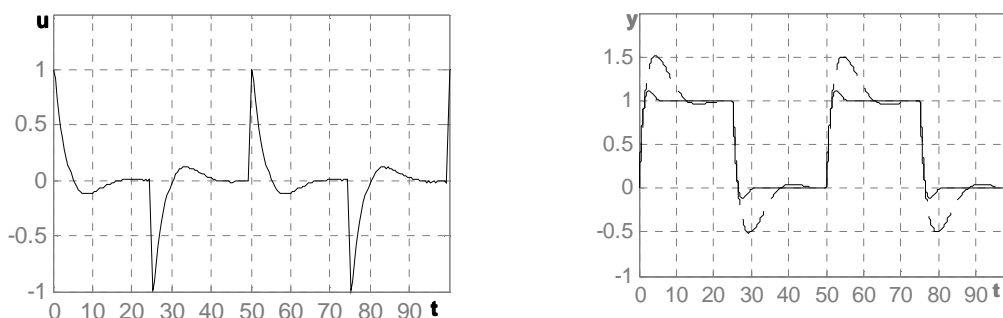
vi. *Ispitivanje uticaja šuma merenja na performansu sistema*

Pretpostaviti da na izlazu procesa deluje aditivni beo šum merenja sa srednjom vrednošću nula, čiji je intenziteta 10% u odnosu na odziv procesa i snimiti odziv sistema i upravljanja.

Budući da je izlaz procesa zašumljen, da bi se jasnije uočilo ponašanje sistema, prikazani izlaz

procesa je filtriran (Sl. 6-16). Samo se po sebi razume da je i za realizaciju upravljanja bilo neophodno da se signal povratne sprege prvo filtrira, da bi kontroler mogao da radi sa datom periodom odabiranja.

Iz dobijenih rezultata se vidi da se performansa sistema, pod uticajem šuma merenja pokvarila, ali proces u izvesnoj meri i dalje prati referentni model.



**SL. 6-16 UPRAVLJANJE, FILTRIRANI ODZIV PROCESA I ODZIV REFERENTNOG MODELA PRI DELOVANJU ADITIVNOG MERNOG ŠUMA ( $T_{05} = 0.5$ )**

- b. Za dati referentni model projektovati adaptivni kontroler sa MIT pravilom i ispitati njegov rad u slučaju kada se parametri procesa menjaju i kada na sistem deluju poremećaji.

*Rešenje*

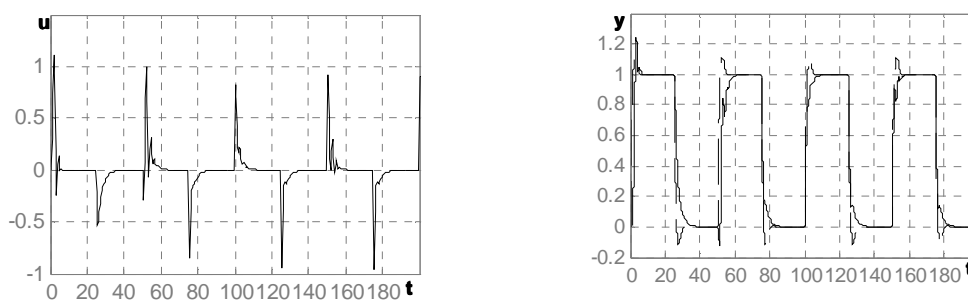
- i. *Projektovanje MIT adaptivnog kontrolera*

Pretpostavljeno je da model procesa ima jednu nulu, koja se može skratiti i dva pola, tako da kontroler ima ustnu strukturu kao i fiksni (i dalje je  $A_0=1$ ). Uz ove pretpostavke MIT kontroler je formiran u skladu sa relacijom (6.30). Zapanimo da je za njegovu realizaciju jedino potrebno da se proceni struktura modela i veličina kašnjenja ( $d=1$ ). U algoritmu je umesto parametra  $b_0$  usvojeno da je  $b_0 = \gamma_1$ .

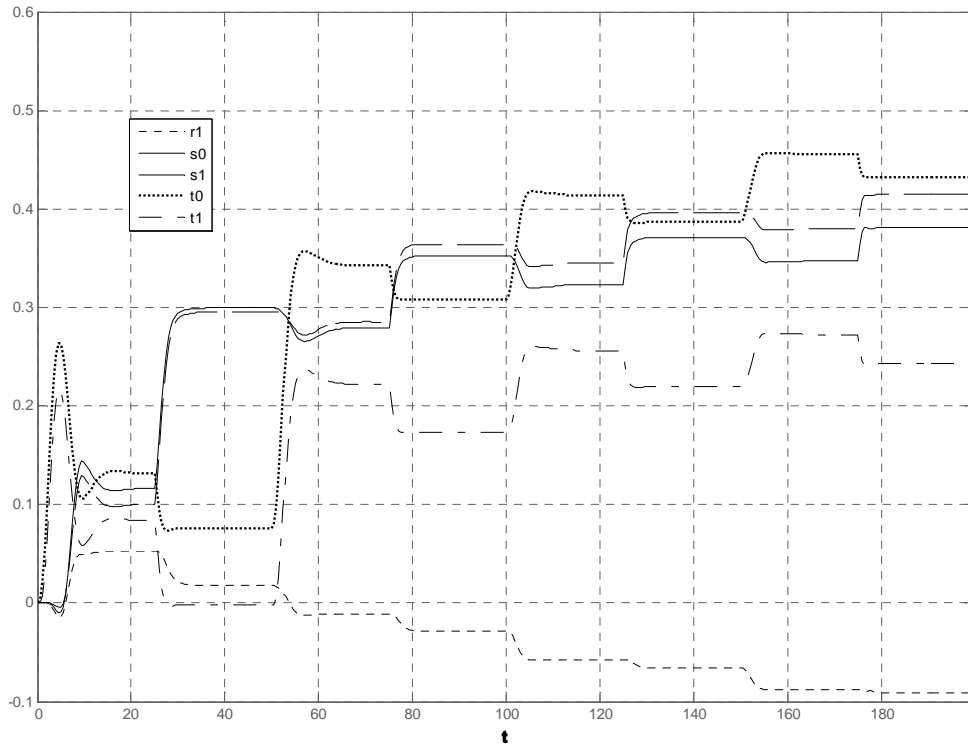
Rezultati simulacije za  $\gamma = \gamma_1 = 0.1$  prikazani su na Sl. 6-18. Potrebno je napomenuti da za veće vrednosti  $\gamma$ , sistem u zatvorenoj sprezi postaje, u nekim intervalima adaptacije, nestabilan.

Sa dijagrama se vidi da kontroler uspeva da podesi parametre i da obezbedi praćenje izlaza referentnog modela. Interesantno je zapaziti da se vrednosti parametra koje pronalazi kontroler u velikoj meri razlikuju od vrednosti izračunatih za perfektno praćenje. Ovakav rezultat je prirodna posledica činjenice da ne postoji jedinstveno rešenje postavljenog problema. Sa druge strane, kontroler i nije projektovan tako da obezbedi estimaciju parametara, već da postigne željene efekte u pogledu praćenja referentnog modela.

Konačno, uočimo i da je performansa adaptivnog kontrolera nešto lošija od projektovanog kontrolera uz poznavanje modela procesa. I ovaj rezultat ne bi trebalo da bude zbunjujući. Naime, izvesno je da poznavanje modela procesa u velikoj meri doprinosi kvalitetu projektovanog kontrolera.



**SL. 6-17 UPRAVLJANJE I ODZIV PROCESA I REFERENTNOG MODELA PRI ADAPTACIJI KONTROLERA NA OSNOVU MIT ALGORITMA ZA SLUČAJ KADA JE  $\gamma = \gamma_1 = 0.1$**



SL. 6-18 PROMENA PARAMETARA KONTROLERA NA OSNOVU MIT ALGORITMA ZA SLUČAJ KADA JE  $\gamma = \gamma_1 = 0.1$

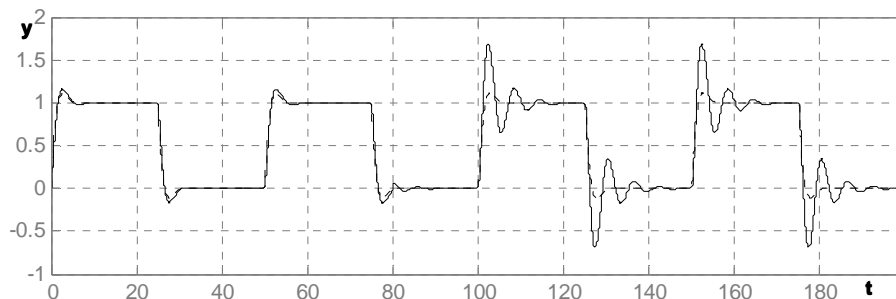
ii. *Ispitivanje uticaja promene parametara procesa*

Da bi se verifikovao uticaj poznavanja parametara procesa na performansu sistema, izvršen je sledeći eksperiment. Sistem je pušten u rad sa zadanim modelom procesa i pretpostavljeno je da u 80. sekundi dolazi do poremećaja na procesu koji dovode do toga da se njegov model promeni tako da bude

$$G_p(s) = \frac{229(s+1)}{s(s+0.6)(s^2+30s+229)}$$

Prema očekivanju, fiksni kontroler (Sl. 6-19) nije u stanju da adekvatno reaguje na promenu parametara modela. Kod njega jednostavno dolazi do degradacije odziva koji ostaje isti nezavisno od toga šta se dešava sa procesom. Za datu promenu parametara on ipak konvergira, što ne znači da se isto ponašanje može očekivati i za neku drugu promenu.

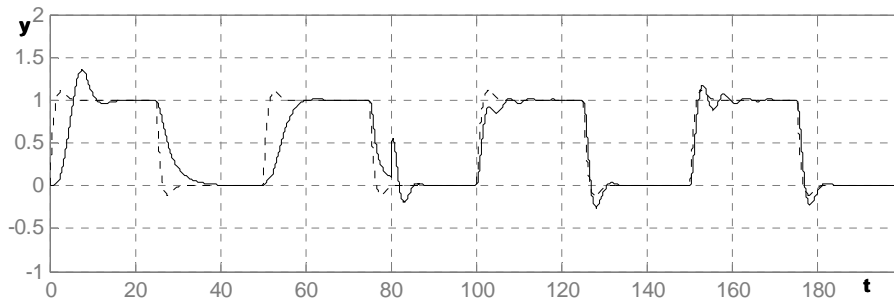
Za razliku od fiksnog kontrolera adaptivni kontroler nastavlja da prati referencu (Sl. 6-20). Ako se uporede dijagrami prikazani na Sl. 6-18 i Sl. 6-21 vidi se da adaptivni kontroler detektuje promenu parametara procesa, reaguje na nju tako što promeni svoje parametre i nastavi da prati referentni model kao i da nije bilo poremećaja. Šta više, kontroler se brže adaptira na novi model procesa. (Iz ove činjenice ne treba izvlačiti neki opšti zaključak.)



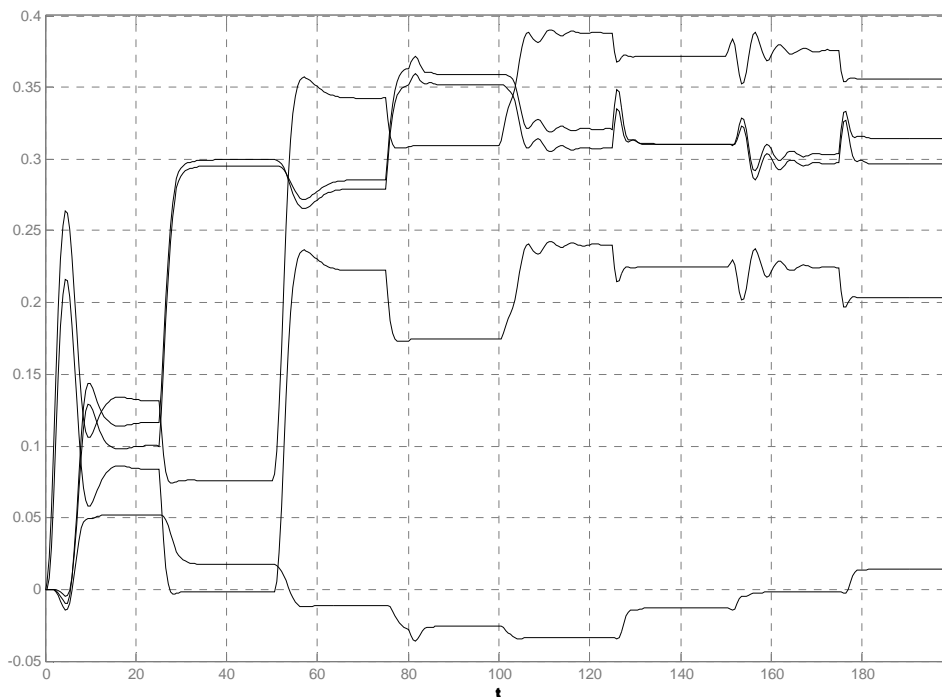
SL. 6-19 IZLAZ REFERENTNOG MODELA I PROCESA UPRAVLJANOG FIKSNIM KONTROLEROM PRI PROMENI PARAMETARA PROCESA ZA  $T=80$

Potrebno je zapaziti da je za uspešan rad adaptivnog kontrolera bilo neophodno da se izvrši drugačiji izbor parametara  $\gamma$  i  $\gamma_1$ . Ovaj izbor je čisto heuristički i izvršen je ponavljanjem eksperimenta sa

različitim mogućim vrednostima parametara. Nepostojanje jasne metodologije za izbor parametara predstavlja i ključni problem u praktičnoj primeni MIT adaptivnog kontrolera.

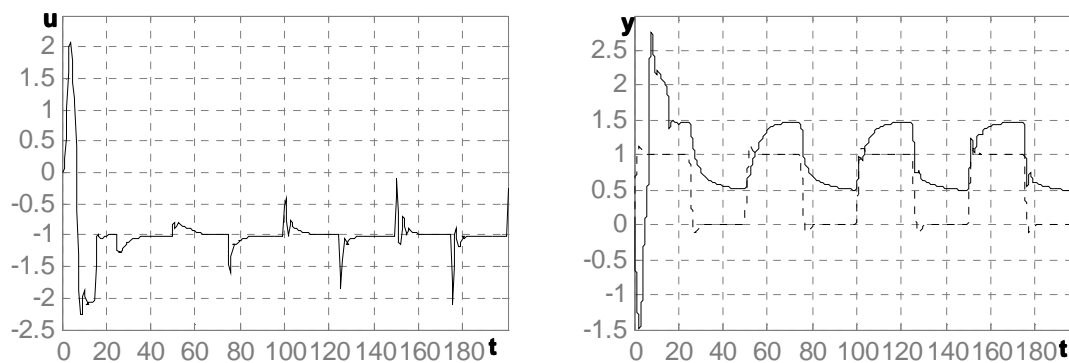


**SL. 6-20 IZLAZ REFERENTNOG MODELA I PROCESA UPRAVLJANOG ADAPTIVNIM MIT KONTROLEROM PRI PROMENI PARAMETARA PROCESA ZA  $T=80$ ,  $\gamma=0.01$ ,  $\gamma_1=10\gamma$**



**SL. 6-21 PROMENA PARAMETARA NA OSNOVU MIT ALGORITMA U SLUČAJU KADA SE MODEL PROCESA MENJA ZA  $T=80$ ,  $\gamma=0.01$ ,  $\gamma_1=10\gamma$**

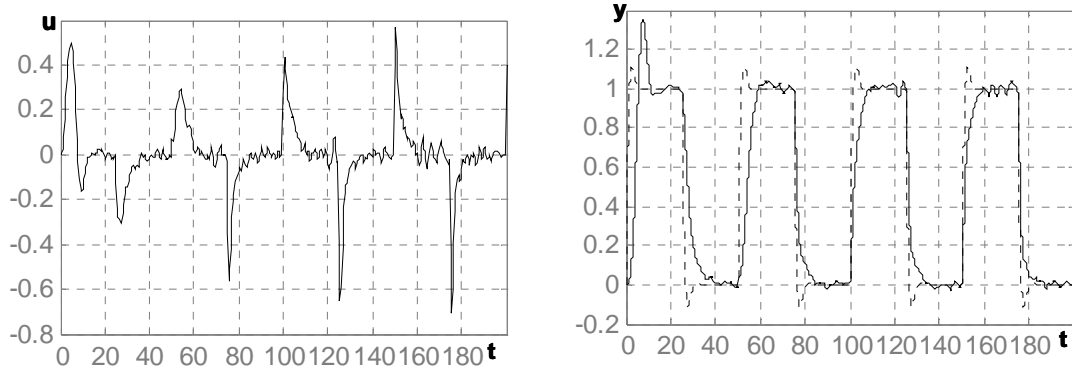
iii. *Ispitivanje uticaja poremećaja*



**SL. 6-22 UPRAVLJANJE, ODZIV REFERENTNOG MODELA I ODZIV PROCESA UPRAVLJANOG ADAPTIVNIM MIT KONTROLEROM ( $\gamma=0.01$ ,  $\gamma_1=10\gamma$ ) PRI DEJSTVU DETERMINISTIČKOG POREMEĆAJA**

U posmatranom primeru adaptivni kontroler nema nikakvu prednost u odnosu na fiksni u pogledu otklanjanja uticaja determinističkih poremećaja (Sl. 6-22). To zapravo znači da on nije u stanju da pronađe parametre kontrolera koji bi bio u stanju da anulira ovaj poremećaj. Ako se ima na umu da sistem sa konstantnim poremećajem na ulazu više nije linearan, već pripada klasi inkrementalno linearnih sistema, onda je i logično da zakon adaptacije ne može da pronađe adekvatni linearni model procesa kome bi prilagodio upravljanje.

Slična je situacija i u pogledu dejstva šuma merenja (Sl. 6-23). I ovde adaptivni kontroler nastavlja da prati referentni model, ali je teško reći da li i u kojoj meri popravlja performansu sistema.



**Sl. 6-23 UPRAVLJANJE, ODZIV REFERENTNOG MODELA I ODZIV PROCESA UPRAVLJANOG ADAPTIVNIM MIT KONTROLEROM ( $\gamma=0.01$ ,  $\gamma_1=10\gamma$ ) PRI DEJSTVU MERNOG ŠUMA**

- c. Za dati referentni model projektovati adaptivni kontroler zasnovan na SPR pravilu i ispitati njegov rad u slučaju kada se parametri procesa menjaju.

*Rešenje*

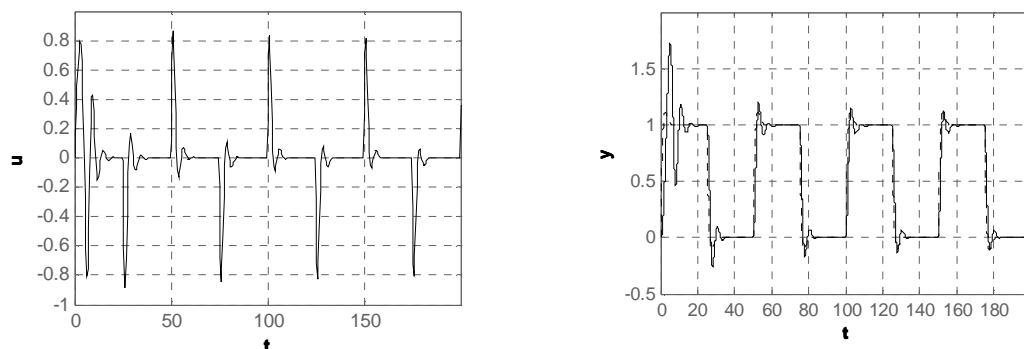
- i. *Projektovanje SPR Adaptivnog kontrolera*

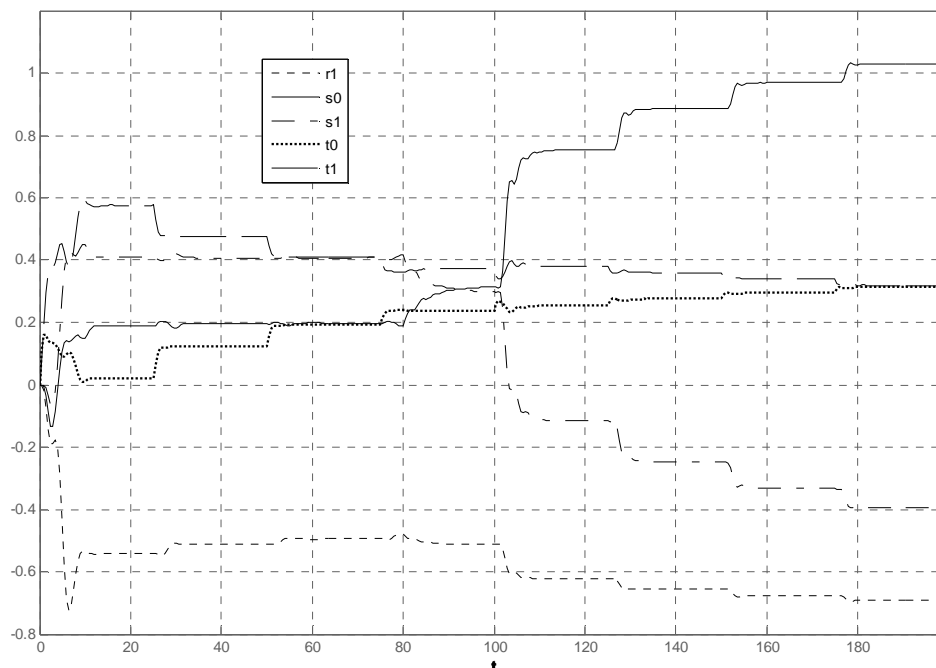
I nadalje su zadržane iste pretpostavke o strukturi modela procesa, čime je zadržana i ista struktura kontrolera (i dalje je  $A_0=1$ ). Uz ove pretpostavke SPR kontroler je formiran u skladu sa izloženim algoritmom. U algoritmu je umesto parametra  $b_0$  usvojeno da je  $b_0 = \gamma_1$ .

Simulacija je vršena za različite vrednosti parametara  $\alpha_t$  i  $b_0$ . Iako se konvergencija algoritma pri tome menjala, polovi sistema u zatvorenoj sprezi nisu izlazili izvan jediničnog kruga. Na kraju je usvojeno da je  $\alpha_t=5$  i  $b_0=0.1$ . Početna vrednost matrice  $P_0=0.1I$ .

Rezultati simulacije prikazani su na Sl. 6-24. Vidi se da kontroler uspeva da prati zadanu referencu i to u izvesnoj meri bolje od MIT kontrolera. Međutim, nezavisno od toga ključna prednost ovog algoritma ogleda se u tome da sistem u zatvorenoj sprezi ne postaje nestabilan.

Potrebno je zapaziti da se parametri realizovanog kontrolera razlikuju i od vrednosti koje ima fiksni kontroler i od kontrolera dobijenog uz primenu MIT pravila. Istina je da se ovde parametri kontrolera stalno menjaju, međutim ni posle 5 000 koraka oni ne konvergiraju ka vrednostima koje ima fiksni kontroler.

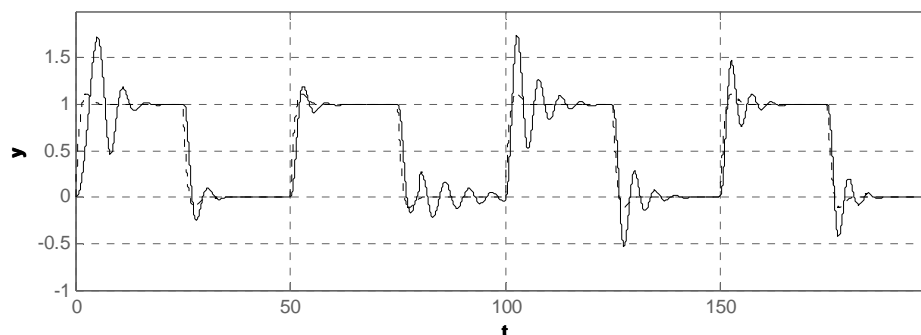




**Sl. 6-24 UPRAVLJANJE, ODZIV PROCESA I REFERENTNOG MODELA I PROMENA PARAMETARA NA OSNOVU SPR ALGORITMA ( $\alpha_r=5$  i  $b_0=0.1$ ,  $P_0=0.1$ )**

ii. *Ispitivanje uticaja promene parametara procesa*

Iz rezultata prikazanih na Sl. 6-25 se vidi da se i ovaj kontroler lako i efikasno prilagođava na promenu parametara procesa.



**Sl. 6-25 IZLAZ REFERENTNOG MODELA I PROCESA UPRAVLJANOG ADAPTIVNIM SPR KONTROLEROM ( $\alpha_r=5$  i  $b_0=0.1$ ,  $P_0=0.1$ ) PRI PROMENI PARAMETARA PROCESA ZA  $T=80$**

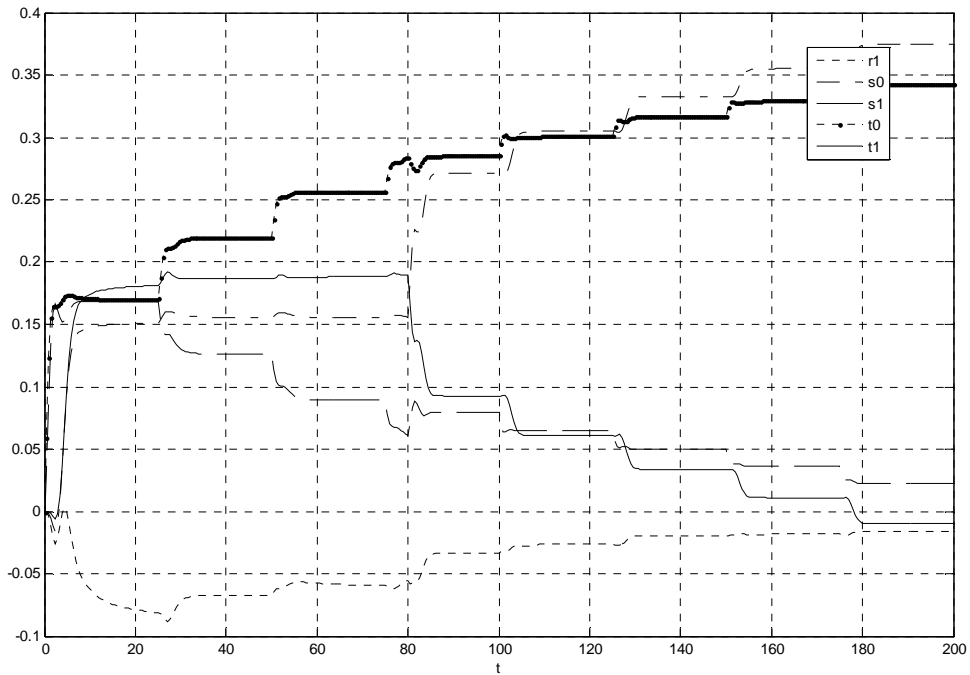
Kontroler registruje povećano odstupanje izlaza procesa do koga dolazi usled promene modela i na to reaguje naglom promenom parametara (Sl. 6-26). Činjenica da dva adaptivna kontrolera reaguju na potpuno različite načine u pogledu promene parametara je prirodna posledica različitih metodologija korišćenih za njihovo projektovanje.

Potrebno je zapaziti da SPR kontroler radi sa istim parametrima sa kojima se radio i u slučaju praćenja procesa sa nepromenljivim parametrima. Izvesno je da se promenom parametara može postići još bolja performansa, no suština projektovanja adaptivnog kontrolera je upravo u tome da on može da radi na zadovoljavajući način sa datim vrednostima parametara u uslovima različitih poremećaja. U tom smislu SPR kontroler je svakako robusniji od MIT kontrolera.

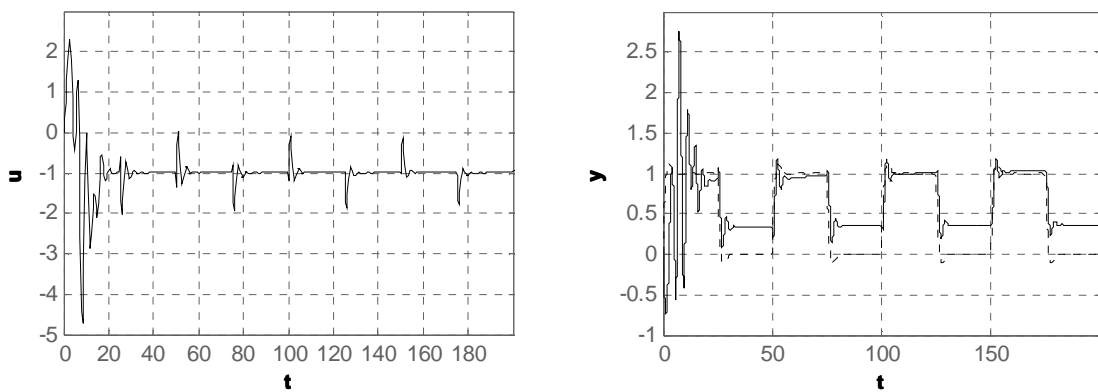
iii. *Ispitivanje uticaja poremećaja*

Iako se ovaj kontroler najbolje ponaša pri dejstvu poremećaja, ipak on nije u stanju da svede izlaz na nulu (Sl. 6-27). Ovo još jednom potvrđuje da se poremećaj tipa početnih uslova ne može eliminisati pomoću adaptivnog kontrolera.

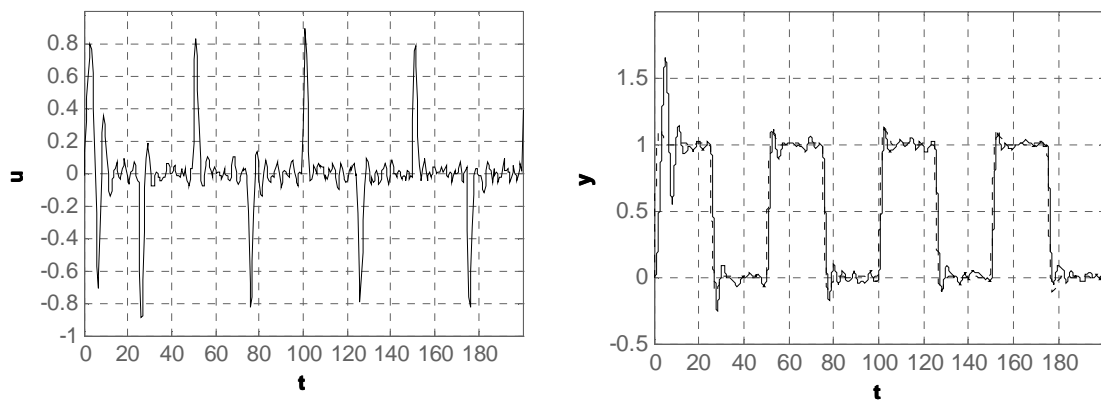




**SL. 6-26 PROMENA PARAMETARA NA OSNOVU SPR ALGORITMA U SLUČAJU KADA SE MODEL PROCESA MENJA U TRENUTKU T=80**



**SL. 6-27 UPRAVLJANJE, ODZIV REFERENTNOG MODELA I ODZIV PROCESA UPRAVLJANOG ADAPTIVNIM SPR KONTROLEROM ( $\alpha_r=5$  I  $B_0=0.1$ ,  $P_0=0.1$ ) PRI DEJSTVU DETERMINISTIČKOG POREMEĆAJA**



**SL. 6-28 UPRAVLJANJE, ODZIV REFERENTNOG MODELA I ODZIV PROCESA UPRAVLJANOG ADAPTIVNIM SPR KONTROLEROM ( $\alpha_r=5$  I  $B_0=0.1$ ,  $P_0=0.1$ ) PRI DEJSTVU ADITIVNOG ŠUMA MERENJA**

Ispitivanje rada projektovanog SPR kontrolera pod uslovom da u sistemu postoji merni šum pokazuje da on daje zadovoljavajuću performansu (Sl. 6-28). Šum istina nije eliminisan, što je praktično i nemoguće učiniti, ali izlaz procesa u potpunosti prati izlaz referentnog modela. Dodajući tome činjenicu da se radi o stabilnom kontroleru, nema sumnje da je on daleko superiorniji od MIT adaptivnog kontrolera.

*"Nove ideje prolaze kroz tri faze odbijanja:*

*1<sup>o</sup> one su pogrešne*

*2<sup>o</sup> one su protiv religije*

*3<sup>o</sup> one su "stare novosti", trivijalne,*

*zdravorazumske i svi bi mi to smislili da smo imali vremena, novca i interesa"*

John Stuart Mill

## 7 Fazi upravljanje

U OVOM POGLAVLJU ČITALAC ĆE

- *sagledati fazi pristup u modeliranju pojava i sistema*
- *ovladati osnovama fazi skupova i operacija nad njima*
- *razumeti osnove fazi relacija i njihovu vezu sa lingvističkim promenljivim*
- *ovladati metodologijom projektovanja fazi kontrolera*
- *sagledati pravce razvoja fazi teorije upravljanja*

### 7.1 Motivacija i osnovni koncept fazi upravljanja

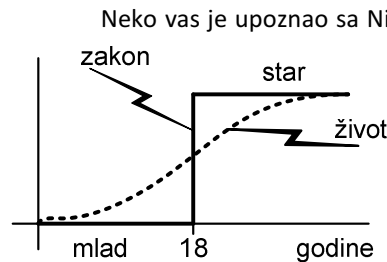
*Preciznost i relevantnost mogu biti potpuno uzajamno isključive karakteristike (L.A: Zadeh)*

Polazna tačka u definisanju metode projektovanja kontrolera je razumevanje upravljanja kao procesa donošenja odluke o tome šta u kom trenutku treba da se uradi. Otuda se kao ključni problem javlja pitanje na osnovu čega će odluka biti doneta. U savremenoj teoriji upravljanja odluka se donosi na osnovu matematičkog modela procesa. Otuda je prirodno da se razvoj savremene teorije upravljanja može pratiti kroz nastojanje da se pomoću drugačijih kriterijuma specificiranja performanse i preciznijih ili robusnijih matematičkih modela procesa dođe do rešenja koja bi na neki način prevazišla probleme izazvane nedovoljnim poznavanjem procesa, njegovom linearizacijom, zanemarivanjem brze dinamike, dejstvom spoljnih poremećaja ili nekim drugim uzrokom. U izvesnom smislu bi se moglo reći da se sve metode zasnivaju na uverenju da će se detaljnijim posmatranjem procesa i formiranjem sve složenijih i složenijih matematičkih modela dobiti bolji kontroler.

Za razliku od savremene teorije fazi pristup je u analizi načina odlučivanja pošao od svakodnevnog života u kome se odluke donose na osnovu niza utvrđenih pravila koja povezuju uzroke i posledice (na primer: **ako je u sobi zagušljivo (uzrok) tada treba otvoriti prozor (posledica)**). Polazeći od stanovišta da fazi kontroler, isto kao i čovek, treba da radi na bazi implikacija tipa "ako...tada...", postavilo se pitanje na osnovu čega bi one trebalo da budu formirane. Time je još jedanput otvoren problem formiranja modela procesa koji bi mogao da posluži kao izvor relevantnih podataka. Ovde je zapravo akcenat na pojmu relevantnosti odnosno na pitanju svrhe pravljenja modela. Naime, ukoliko se želi iscrpna analiza nekih fenomena onda je verovatno jedino moguće da se oni opišu pomoću zakona o održanju mase i energije i da se tako dobijeni sistemi jednačina analiziraju. Tako na primer, ukoliko se posmatra mehanika ljudskog hoda onda se to ne može uraditi bez uspostavljanja odgovarajućih diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanja u svakom zglobu. Sa druge strane, međutim, teško je verovati da čovek, kada upravlja svojim hodom, rešava u glavi taj složeni sistem jednačina. Čini se mnogo verovatnijim da on zapravo odlučuje na osnovu pravila stečenih iz prethodnog iskustva tipa "ako je ovo stepenik, tada treba podići više nogu". Pri tome, je izvesno da će on u tom procesu lako obraditi i informaciju "ovaj stepenik je viši od uobičajenog što znači da treba još više podići nogu", ali je isto tako izvesno da mu precizno saznanje da je taj stepenik za recimo 4,5 santimetara viši od uobičajenog neće biti od neke posebne koristi. Drugim rečima povećanje preciznosti ne doprinosi

nužno većoj određenosti pri donošenju odluka. U tom smislu Zadehovu tvrdnju da "što se bliže posmatra realni problem, sve je nejasnije njegovo rešenje i naša sposobnost da o ponašanju sistema iskažemo relevantne činjenice je sve manja i manja" treba zapravo razumeti kao predlog da se projektovanju kontrolera pristupi bez određivanja matematičkog modela procesa u klasičnom značenju tog pojma. Umesto toga, kontroler treba zasnovati na iskustvu u upravljanju nekim procesom, odnosno na ponašanju operatora koji je uvek u stanju da kaže "ako se desi to i to... tada treba uraditi to i to". Za realizaciju ovakvog pristupa bilo je neophodno da se razvije odgovarajući matematički aparat.

**PR. 7-1 VIŠE PODATAKA, ALI NE I PRECIZNIJI ODGOVOR<sup>1</sup>**

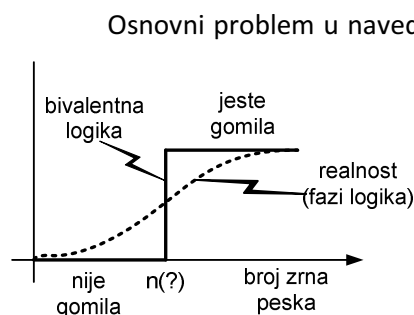


**SL. 7-1 GRANICE STAROSTI**

nekim sredinama bi se smatralo da je nedopustivo da tako *mlad* čovek postane rukovodilac, u nekim drugim opet da je suviše *star* došao na rukovodeće mesto. Izvesno je dakle da se ovde radi pre o stepenu starosti, a ne o oštroj granici koja deli ova dva pojma (Sl. 7-1). Otuda ni dodavanje podataka ne može da pomogne da se ta granica uspostavi.

**PR. 7-2 VIŠE PODATAKA ALI NE I VEĆI ZNAČAJ**

Pretpostavimo da posmatrate radnike koji stoje ispod neke skele i primetite da neki teret pada sa visine. Pretpostavimo nadalje, da ste na neki način u mogućnosti da procenite i težinu tereta i brzinu kojom se on kreće. Uprkos tome teško je verovati da ćete im u tom trenutku saopštavati da "teret težak jednu tonu pada brzinom od 50m/s". Umesto toga Izvesno je da ćete im doviknuti da se sklone. Nesumnjivo je, naime, da svi dodatni podaci doprinose jasnijoj slici događaja, ali su potpuno irelevantni za one koji treba da se brzo pomere u stranu.



**SL. 7-2 BIVALENTNI I FAZI SKUP**

Osnovni problem u navedenim primerima leži u činjenici da se čitav niz pojava pokušava iskazati u okviru bivalentne logike, odnosno "da – ne" konceptu, koji se pri tome matematički izražava precizno definisanim brojevima. Samo se po sebi razume, da ovaj problem nije nov i da na on na svoj način prati razvoj zapadne filozofije kroz čitavu njenu istoriju. Još su sofisti otvorili raspravu o tome da li se svi problemi mogu uspešno rešiti u bivalentnom konceptu. O tome svedoči niz sofizama od kojih je verovatno najpoznatiji onaj koji pokušava da definiše šta se smatra "gomilom peska". Naime, izvesno je da jedno zrno peska ne čini gomilu, kao ni dva niti tri zrna. Sa druge strane svako bi se složio da 100 miliona zrna peska predstavlja gomilu peska. Gde je onda tačna granica? Da li se može reći da 325 647 zrna ne čine gomilu, dok je 325 648 čine?" Ovim se zapravo želi reći da ne postoji tačna granica, već "siva" zona određena nekim brojem zrna peska unutar koje gomila peska prestaje to da bude (Sl. 7-2).

Različiti filozofski pristupi pokušavaju da postave osnove matematičke logike koji bi

<sup>1</sup> Većina primera u uvodnom delu zasniva se na ilustracijama B.Koska u knjizi "Fuzzy Thinking"

uključili ove paradokse. Tako, na primer, Lukašijević razvija polivalentnu logiku, dok Hajzenberg postavlja princip neodređenosti momenta i položaja. Može se reći da je i uvođenje teorije verovatnoće, u izvesnom smislu, uslovljeno pokušajima da se dopuni bivalentan pogled na svet.

Uočavajući da bivalentan pristup predstavlja ozbiljnu smetnju i u teoriji upravljanja, i u njenoj primeni u oblasti veštačke inteligencije, Zadeh predlaže uvođenje fazi<sup>1</sup> skupova koji se formiraju na osnovu pretpostavke da je svaka činjenica istinita (prisutna) ili neistinita (odsutna) do određenog stepena. U tom smislu fazi teorija svodi "crno-belu" matematiku i logiku na posebne slučajeve sivih relacija. U skladu sa time predloženo je da se umesto povećavanja broja relacija kojima se opisuje neki proces, kao što je to slučaj kod veštačke inteligencije, uvede manji broj fazi relacija.

### PR. 7-3 BIVALENTNA I FAZI RELACIJA

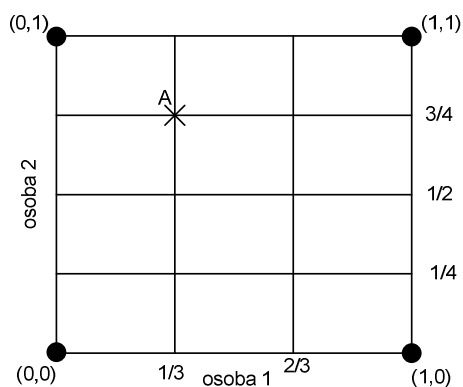
U svakodnevnom životu iskaz "ako pada kiša, tada ćete biti mokri" ima višestruko značenje. On naime, podrazumeva "ako kiša jako pada bićete veoma mokri", "ako kiša malo pada, bićete malo mokri", kao i niz drugih varijanti. Međutim, ukoliko bi se ovaj iskaz modelirao u klasičnoj bivalentnoj logici onda bi se pojmu "kiša" morala pridružiti jedna određena brojna vrednost ( $l/m^2$ ). Kroz eksperimenat bi se tada utvrdila i količina "vlažnosti" ( $l/m^3$ ) koja odgovara datoj količini padavina. Ponavljanjem eksperimenata bi se odredila i funkcionalna zavisnost oblika

$$\text{vlaznost} = f(\text{kisa})$$

U fazi logici se međutim uvodi pojam fazi skupa "kiša" koji istovremeno obuhvata činjenicu da kiša može da "rominja, sipi, pada i pljušti", i fazi skupa a "mokar" koju uključuje stanja "orošen, vlažan, mokar, prokisao". U tom slučaju se posmatrani iskaz može shvatiti kao fazi relacija koja obuhvata sva ta značenja istovremeno

### PR. 7-4 BIVALENTNI I FAZI SKUP

Pretpostavimo da se u jednom skupu ljudi zamole svi koji imaju više od trideset godina da podignu ruku. Kao odgovor dobije se jasna slika između uzdignutih i spuštenih ruku. Međutim, ukoliko postavite pitanje "neka podignu ruku oni koji su zadovoljni svojim poslom?", slika će postati potpuno drugačija. Najveći broj ruku biće negde na pola podignut označavajući unutrašnje raspoloženje prisutnih koji jesu ili nisu do neke mere zadovoljni svojim poslom. U klasičnoj, bivalentnoj logici, postavlja se pitanje kako će se ti ljudi razvrstati. Međutim, u fazi pristupu, svaka, ma do koje mere podignuta ruka ima svoje mesto.



SL. 7-3 BIVALENTAN I FAZI SKUP DVE PROMENLJIVE

Da bi se ilustrovala ova tvrdnja posmatračemo dve osobe. Neka skup A predstavlja njihov odnos prema poslu. U klasičnoj bivalentnoj logici, ovaj skup može da ima četiri elementa: obe osobe su zadovoljne, obe osobe su nezadovoljne, osoba 1 je zadovoljna, dok osoba 2 nije i osoba 1 je nezadovoljna, dok je osoba 2 zadovoljna. Ako sa 0 označimo nezadovoljstvo poslom, a sa 1 zadovoljstvo, onda je skup A definisan kao  $A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ . Geometrijski gledano, ovaj skup bi se mogao predstaviti temenima jednog kvadrata (Sl. 7-3).

Međutim, kao što je već rečeno, u životu je situacija najčešće drugačija. Obe osobe su u izvesnoj meri i zadovoljne i nezadovoljne svojim poslom. Neka je osoba 1 više nezadovoljna nego što je zadovoljna (recimo da je stepen zadovoljstva oko 33%), dok je osoba 2 više zadovoljna (recimo oko 75%). Ova činjenica se sada geometrijski može predstaviti tačkom koja leži unutar kvadrata čija su temena određena bivalentnim skupom (Sl. 7-3). Otuda sledi da, fazi skup zapravo pokriva ceo prostor unutar datog kvadrata, te pruža daleko više mogućnosti da se opiše realna situacija.

<sup>1</sup> Zadeh 1965. godine definiše pojam fuzzy skupa, koji se može shvatiti kao dalja razrada Lukašijevićeve polivalentne logike

Interesantno je napomenuti da je Zadeova ideja naišla na snažan otpor u zapadnom svetu nenaviknutom na takav način razmišljanja. Ni pojava prvog fazi kontrolera koji je projektovao Ebrahim Madmani nije mnogo pomogla da se promeni taj stav. Madmani je istakao da je u projektovanje kontrolera ugrađeno iskustvo operatera na procesu i iskustvo o karakteristikama procesa. Iz skupa jezičkih iskaza dobijenih kroz odgovore operatera na pitanja "šta bi radili u takvoj i takvoj situaciji?", kao i odgovore tehnologa na pitanja "zašto na procesu nastaje takva i takva situacija" definisan je skup fazi pravila koja predstavljaju algoritam upravljanja. Osnovna prednost ovog pristupa ogleda se u mogućnosti implementacije iskustva, intuicije, heuristike kao i u činjenici da se ne zahteva poznavanje matematičkog modela procesa.

U tom, prvom, periodu glavni prigovor fazi teoriji svodio se na činjenicu da ne postoje konzistentni teorijski rezultati kojima bi se dokazala opravdanost ovog pristupa upravljanju. Kada je tokom osamdesetih godina prošlog veka Kosko izveo i dokazao niz teorema, težište kritike premestilo se na odsustvo većeg broja aplikacija, da bi se zatim opet vratilo na teoriju.

U suštini, moglo bi se reći da je ključni problem predstavljala činjenica da je koncept fazi logike veoma blizak istočnjačkoj filozofiji, dok je u potpunosti suprotnosti sa Aristotelovom bivalentnom logikom na kojoj počiva zapadna civilizacija<sup>1</sup>. U prilog tome govore i sledeća dva citata vodećih američkih teoretičara u oblasti upravljanja.

"Fazi teorija je pogrešna, pogrešna i opasna. Ono što nama treba je više logičkog rasuđivanja, a ne manje. Opasnost fazi logike je u tome što ona ohrabruje neku vrstu nepreciznog mišljenja koje nam je uvek donosilo mnoge nevolje. Fazi logika je kokain nauke" – Prof. William Kahan, University of California, Berkeley.

"Fazifikacija je neka vrsta naučne popustljivosti. Ona rezultuje u društveno privlačnim sloganima koji ne zahtevaju disciplinu ozbiljnog naučnog rada i strpljivog posmatranja – Prof. Rudolf Kalman, University of Florida at Gainesville.

Dok je većina inženjera na zapadu tvrdila kako je fazi logika "lepa matematička disciplina koja teško može da ima ikakvu praktičnu primenu", Japanci su započeli razvoj elementarnih fazi kontrolera. Tek početkom 90-tih godina u SAD je održana prva konferencija o fazi logici. U isto to vreme od ukupno 38 fazi patenata registrovanih u SAD-u japanske firme držale su 30, dok je njihova godišnja prodaja fazi proizvoda premašila milijardu nemačkih maraka. Japanski i korejanski fazi proizvodi pored brojnih uređaja (kućni aparati, kamere, mašine za kopiranje, televizori, automobili...) obuhvataju i fazi kontrolere za sekvencijalno upravljanje (hemijski reaktori, liftovi, čeličane, cementare, saobraćajni sistemi), fazi sisteme za prepoznavanje oblika itd. Istovremeno se i dalje čuju ozbiljne kritike na račun fazi sistema, ovoga puta zasnovane na tvrdnji da "tu ima zaista jako mnogo praktičnih primena, ali nedostaju prava teorijska obrazloženja".

I dok na zapadu, gde većinu čine zagovornici bivalentnog pristupa svetu koji "ne tvrde da znaju sve (po tome se razlikuju od crkve), ali tvrde da se kreću jedinim putem ka znanju"<sup>2</sup>, traje rasprava pro i contra fazi logike, u Japanu, od početka devedesetih godina, rade dve<sup>3</sup> velike laboratorije LIFE (Laboratory for International Fuzzy Engineering Research) i FLSI (Fuzzy Logic System Institute) sa kojima saraduju sve vodeće industrijske kompanije sa ciljem da se što više i što bolje sagledaju mogućnosti primene fazi logike u stvaranju inteligentnih uređaja.

Da li je smisao celog ovog uvodnog izlaganja ukazivanje na to da je fazi upravljanje toliko moćno da ga treba primenjivati uvek i po svaku cenu? Ako bi odgovor bio jedno kategorično "da" onda bi to bilo u kontradikciji sa samim fazi pristupom. Odgovor, naravno mora biti fazi. On jeste potvrđan ali samo u određenoj meri koja zavisi od prirode problema koji se rešava. Moguće je da

<sup>1</sup> Interesantno je zapaziti da su i Zadeh i Madmani Iranci, koji su osnovne poglede na svet stekli u duhu istočnjačke filozofije. Bart Kosko pak tvrdi da "fazi logika počinje tamo gde prestaje zapadna logika"

<sup>2</sup> Bart Kosko, Fuzzy Thinking.

<sup>3</sup> Budući da je bilo jasno da se niko drugi u svetu, bar u dogledno vreme neće baviti fazi teorijom, smatralo se da je, zbog potsticajne konkurencije, neophodno da postoje dva instituta

će vreme pokazati da ima i drugih pristupa rešavanju problema upravljanja, moguće je da će i fazi logika vremenom biti prevaziđena, ali je izvesno da će u bližoj budućnosti u ovoj oblasti biti još dosta rezultata i da im, bar u izvesnoj meri, treba posvetiti pažnju.

## 7.2 Fazi skupovi

*"Svet u kome živimo je stvaran i neuređen, matematika je veštačka i uređena, svet je siv, ali nauka je crno-bela"*

*Bart Kosko, Fuzzy Thinking*

### 7.2.1 DEFINICIJA FAZI SKUPA

Fazi skup  $A$  nad univerzumom  $X$  je funkcija koja preslikava  $X$  na interval od 0 do 1

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \quad (7.1)$$

gde je

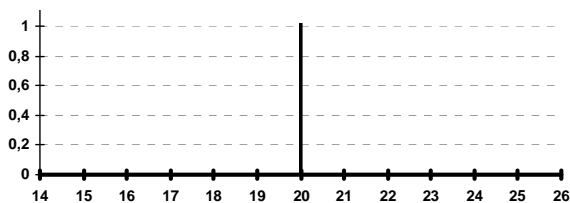
$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1] \quad (7.2)$$

funkcija pripadnosti koja predstavlja meru slaganja promenljive  $x$  sa pojmom  $A$ , odnosno osobinama obuhvaćenim pojmom  $A$ . Pri tome  $\mu_A(x) = 1$  označava potpuno slaganje promenljive  $x$  sa pojmom  $A$ ,  $\mu_A(x) = 0$  iskazuje da se promenljiva  $x$  ni na koji način ne slaže sa pojmom  $A$ , dok sve ostale vrednosti funkcije pripadnosti izražavaju stepen do koga promenljiva  $x$  ispunjava osobine pojma  $A$ .

Ukoliko je promenljiva  $x$  diskretna, fazi skup predstavlja vrstu vektor čiji su elementi jednaki odgovarajućim funkcijama pripadnosti.

#### PR. 7-5

U cilju ilustracije funkcije pripadnosti definišimo pojam  $A$  koji ima značenje PRIJATNA TEMPERATURA.



U klasičnoj Bulovoj logici za predstavljanje ovog pojma bilo bi neophodno da se usvoji neka brojna vrednost koja odgovara tom pojmu, Neka je to recimo  $20^{\circ}\text{C}$ . U tom slučaju odgovarajući skup bi se mogao definisati na sledeći način

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_A : X &\rightarrow \{0, 1\} \\ \mathfrak{N}_A(x) &= \begin{cases} 1 & x = 20 \\ 0 & x \neq 20 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.3)$$

SL. 7-4 VELIČINA PRIJATNA TEMPERATURA KAO REFERENTNA TAČKA



SL. 7-5 VELIČINA PRIJATNA TEMPERATURA TEMPERATURA KAO REFERENTNI INTERVAL

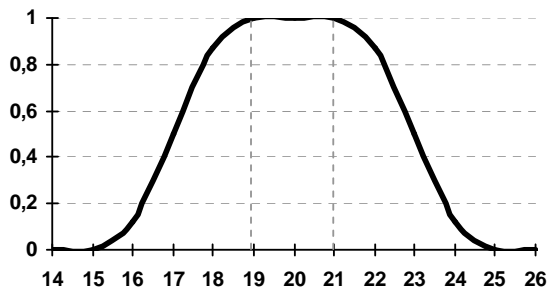
Ako se kao nezavisno promenljiva posmatra  $x$ , onda se binarni skup grafički može predstaviti kao na Sl. 7-4. Očigledno je da se ovde pojam PRIJATNA TEMPERATURA javlja kao referentna tačka.

Bulova logika dozvoljava i nešto povoljniji tretman ovog pojma. Naime, budući da je izvesno da postoji opseg temperatura koje se mogu označiti kao prijatne, moguće je da se, umesto referentne tačke, posmatra referentni interval, recimo od  $19^{\circ}\text{C}$  do  $21^{\circ}\text{C}$ . U tom slučaju, odgovarajući skup se definiše kao

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_A : X &\rightarrow \{0, 1\} \\ \mathfrak{N}_A(x) &= \begin{cases} 1 & x \in [19, 21] \\ 0 & x \notin [19, 21] \end{cases} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Odgovarajući skup ima izgled kao na Sl. 7-5.

Izvesno je da obe ove definicije, sa gledišta našeg osećaja toplote, imaju značajan nedostatak.



Naime, u skladu sa definisanim skupom ispada kao da je sve u savršenom redu ako je temperatura 19°C, a ništa ne valja kada ona postane recimo 18,9°C. Pri tome, nema nikakve sumnje da tu razliku, sem nekog osetljivog mernog instrumenta, niko nije u stanju da oseti. U normalnom ljudskom osećaju, ako bi smatrali da je 19°C prijatno, onda bi verovatno 18°C označili kao malo manje prijatno, i tako redom, a negde oko 15°C bi zaključili da postaje sveže. To zapravo znači da svaka od ovih temperatura u nekoj meri odgovara pojmu prijatno. Ako tu meru izrazimo na skali od 0 do 1, onda dobijamo fazi skup koji odgovara pojmu PRIJATNA TEMPERATURA čija bi se funkcija pripadnosti

SL. 7-6 VELIČINA PRIJATNA TEMPERATURA KAO FAZI SKUP

mogla da definiše na sledeći način

$$\mu_A = \begin{cases} f_1(x) & x \leq 19 \\ 1 & x \in [19, 21] \\ f_2(x) & x \geq 21 \end{cases} \quad (7.5)$$

gde funkcije  $f_1$  i  $f_2$  imaju izgled kao na Sl. 7-6.

Posebna vrsta fazi skupa je singleton fazi skup kod koga funkcija pripadnosti ima nenultu vrednost u samo jednoj tački

$$\mu_A(x) = \begin{cases} a \in [0, 1] & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases} \quad (7.6)$$

Zapazimo da se referentna tačka može predstaviti kao fazi singleton skup kod koga je  $a=1$ .

Za svaki fazi skup se definišu još i njegova visina i područje skupa

VISINA FAZI SKUPA (NORMA FAZI SKUPA)

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \quad (7.7)$$

Skup čija je visina 1, odnosno koji sadrži elemente koji u potpunosti odgovaraju pojmu A, označava se kao normalni fazi skup.

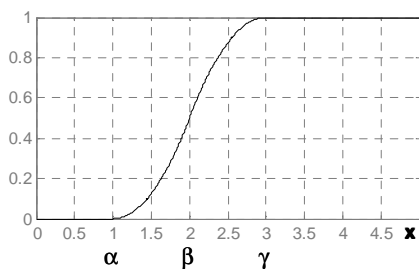
PODRUČJE FAZI SKUPA

$$\text{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (7.8)$$

### 7.2.2 FUNKCIJE PRIPADNOSTI

Samo se po sebi razume da se funkcije pripadnosti mogu definisati na više različitih načina. Često su u upotrebi "S" i "Π" funkcije.

S FUNKCIJA



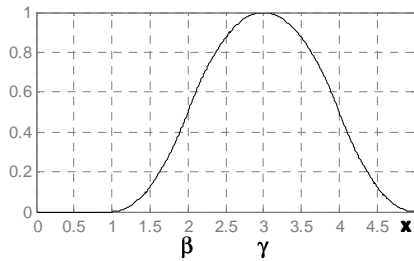
SL. 7-7 FUNKCIJA S(x,1,2,3)

$$S(x, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ 2 \left( \frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} \right) & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 - 2 \left( \frac{x - \gamma}{\gamma - \alpha} \right) & \beta \leq x \leq \gamma \\ 1 & x \geq \gamma \end{cases} \quad (7.9)$$

prevojna tačka je definisana sa  $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$



II FUNKCIJA (SUPERPOZICIJA S FUNKCIJA)



SL. 7-8 FUNKCIJA Π(x,2,3)

$$\Pi(x, \beta, \gamma) = \begin{cases} S(x, \gamma - \beta, \gamma - \beta/2, \gamma) & x \leq \gamma \\ 1 - S(x, \gamma, \gamma + \beta/2, \gamma + \beta) & x > \gamma \end{cases} \quad (7.10)$$

7.2.3 OSNOVNE OPERACIJE NAD FAZI SKUPOVIMA

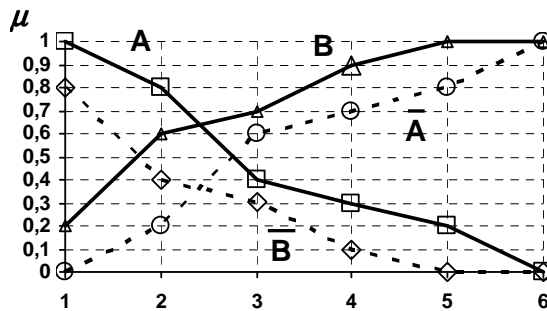
Sve operacije nad fazi skupovima definišu se po analogiji sa binarnim skupovima, vodeći pri tome računa o specifičnosti koje nosi sama definicija fazi skupa.

KOMPLEMENT FAZI SKUPA

$$\bar{A}: \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (7.11)$$

PR. 7-6

Neka je x diskretna celobrojna promenljiva koja ima vrednosti na segmentu od 1 do 6. Funkcije pripadnosti skupova A i B i njihovih komplementata prikazane su tabelarno i grafički na Sl. 7-9.



x	μ <sub>A</sub>	μ <sub>B</sub>	μ <sub>Ā</sub>	μ <sub>B̄</sub>
1	1	0.2	0	0.8
2	0.8	0.6	0.2	0.4
3	0.4	0.7	0.6	0.3
4	0.3	0.9	0.7	0.1
5	0.2	1	0.8	0
6	0	1	1	0

SL. 7-9 FAZI SKUPOVI I NJIHOVI KOMPLMENTI

PRESEK (KONJUKCIJA) FAZI SKUPA

$$A \cap B: \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \mathop{\text{t}}\limits_{\mu_B(x)} \quad (7.12)$$

gde je  $\mathop{\text{t}}\limits_{}$  trougaona norma koja ima sledeće osobine

- funkcija dva argumenta
- neopadajuća funkcija po svim argumentima
- komutativna
- asocijativna
- granični uslovi:  $x \mathop{\text{t}}\limits_0 = 0, x \mathop{\text{t}}\limits_1 = x$

Najčešće korišćeni oblici  $\mathop{\text{t}}\limits_{}$  norme su

$$\begin{aligned} 1^0 \quad x \mathop{\text{t}}\limits_y &= \min(x, y) \\ 2^0 \quad x \mathop{\text{t}}\limits_y &= x \cdot y \quad (\text{logičko "i"}) \\ 3^0 \quad x \mathop{\text{t}}\limits_y &= \max(0, x + y - 1) \quad \text{Lukašijević} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Iz gornjih relacija se vidi da je  $\mathop{\text{t}}\limits_{}$  norma ograničena, pri čemu min operator određuje gornju

granicu.

Izbor same norme zavisi od značenja promenljivih, odnosno od tipa veze koja se želi uspostaviti. Tako, na primer, iskaz "mala cena i velika tačnost" kojim se, sa gledišta proizvodnih uslova, izražavaju suprotni zahtevi podrazumeva korišćenje proizvoda, odnosno logičke "i" operacije. Međutim, budući da u iskazu "novi i brzi auto" nema korelacije za njegovo prikazivanje pogodnije je koristiti operator "min".

UNIJA (DISJUNKCIJA) FAZI SKUPA

$$A \cup B: \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \mathcal{Y} \mu_B(x) \tag{7.14}$$

gde je  $\mathcal{Y}$  trougaona norma koja ima sledeće osobine

- o funkcija dva argumenta
- o neopadajuća funkcija po svim argumentima
- o komutativna
- o asocijativna
- o granični uslovi:  $x \mathcal{Y} 0 = x, x \mathcal{Y} 1 = 1$

Najčešće korišćeni oblici  $\mathcal{Y}$  norme su

$$1^0 \ x \mathcal{Y} y = \max(x, y) \quad (\text{logičko "ili"})$$

$$2^0 \ x \mathcal{Y} y = x + y - xy \tag{7.15}$$

$$3^0 \ x \mathcal{Y} y = \min(1, x + y) \quad \text{Lukašijević}$$

$\mathcal{Y}$  norma, predstavlja ko-normu  $\mathcal{t}$  norme, pri čemu su granice određene sledećom relacijom

$$x \mathcal{t} y \leq \min(x, y) \leq \max(x, y) \leq x \mathcal{Y} y \tag{7.16}$$

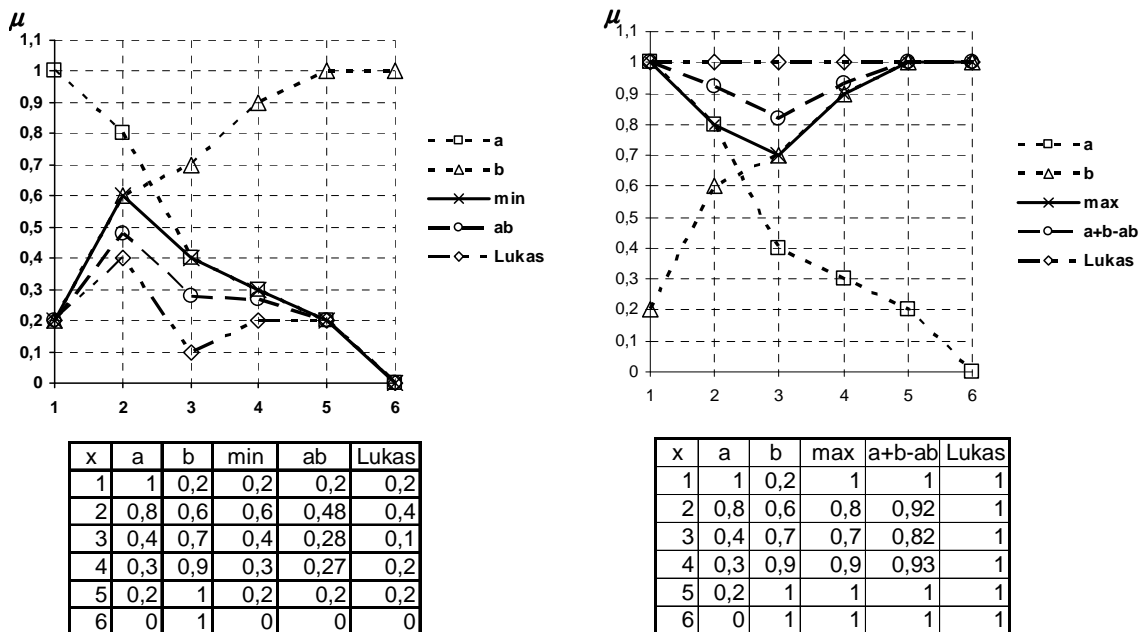
Iz definicije obe norme vidi se da važi

$$x \mathcal{Y} y = 1 - (1 - x) \mathcal{t} (1 - y) \tag{7.17}$$

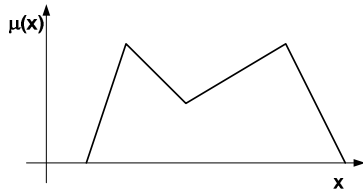
Poslednja relacija predstavlja, zapravo, De Morganove zakone za fazi skupove.

**PR. 7-7**

Funkcije pripadnosti skupova A i B i njihovih preseka i unija dati su tabelarno i grafički na Sl. 7-10.



**SL. 7-10 PRESEK I UNIJA FAZI SKUPOVA**



SL. 7-11 NEKONVEKSAN FAZI SKUP

KONVEKSNOST FAZI SKUPA

Fazi skup A definisan na skupu X je konveksan ako i samo ako važi sledeća relacija

$$\forall x_1, x_2, x_3, x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \quad (7.18)$$

$$\Rightarrow \mu_A(x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_3)\}$$

Na slici Sl. 7-11 prikazan je primer nekonveksnog fazi skupa.

INKLUZIJA FAZI SKUPOVA

Sledeći definiciju inkluzije u teoriji skupova,

$$A \subset B \text{ ako i samo ako } \forall a \in A \Rightarrow a \in B \quad (7.19)$$

inkluzija fazi skupova bi trebalo da bude definisana kao

$$A \subset B \text{ iff } \forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (7.20)$$

Ova definicija podrazumeva, zapravo, potpunu inkluziju i rezultujući skup nije fazi skup. Problem je zapravo u tome što je znak "manje ili jednako" binarni znak koji automatski ukida fazi komponentu u relaciji.

Ako se, međutim, fazi skup posmatra kroz prizmu mere pripadnosti, onda je prirodno da se i pitanju inkluzije pristupi na isti način. To nadalje znači da se može govoriti samo o meri u kojoj jedan fazi skup pripada drugom fazi skupu. U tom smislu definiše se funkcija pripadnosti skupa A skupu B kao

$$S(A, B) = \text{Stepen}(A \subset B) = 1 - \max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x)) \quad (7.21)$$

U skladu sa De Morganovim zakonom (7.17) ova funkcija se može izraziti i kao

$$S(A, B) = 1 - \left[ 1 - \min(1 - 0, 1 - (\mu_A(x) - \mu_B(x))) \right] = \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(x)) \quad (7.22)$$

Često se umesto funkcije S(A,B) posmatra normalizovana mera definisana kao

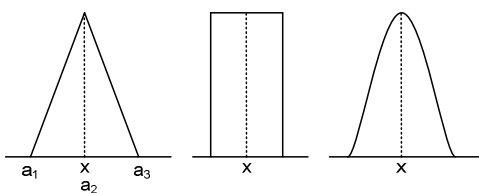
$$S_N(A, B) = 1 - \frac{\max(0, \mu_A(x) - \mu_B(x))}{\mu_A(x)} \quad (7.23)$$

PR. 7-8

Funkcije pripadnosti dva fazi skupa i odgovarajuće mere inkluzije dati su u sledećoj tabeli

x	1	2	3	4	5	6
μ <sub>A</sub>	1	0.8	0.4	0.3	0.2	0
μ <sub>B</sub>	0.2	0.6	0.7	0.9	1	1
S(A,B)	0.2	0.8	1	1	1	1
S(B,A)	1	1	0.7	0.4	0.2	0
S <sub>N</sub> (A,B)	0.2	0.75	1	1	1	1
S <sub>N</sub> (B,A)	1	1	0.57	0.33	0.2	1

7.2.4 FAZI BROJEVI



SL. 7-12 TROUGAONI, PRAVOUGAONI I KONVEKSNI FAZI BROJ

Fazi broj je konveksan fazi skup u kome postoji bar jedna vrednost promenljive x za koju važi relacija  $\mu(x) = 1$ . To znači da je fazi broj predstavljen normalnim, konveksnim skupom.

Samo se po sebi razume da postoji veliki broj skupova koji ispunjavaju ovaj uslov. Nekoliko mogućih skupova ilustrovano je na Sl. 7-12.

U osnovi, fazi broj se može posmatrati kao interval brojeva za koje se smatra da su u većoj ili manjoj meri približno jednaki nekom datom broju. U tom kontekstu, aritmetika fazi brojeva se izvodi iz "intervalne aritmetike" koja je prvobitno uvedena u teoriji merenja. Osnovna ideja je da se pretpostavlja da izmerenoj vrednosti, odgovara stvarna vrednost koja se nalazi unutar nekog intervala u okolini izmerene vrednosti ("interval poverenja").

ARITEMTIKA TROUGAONIH FAZI BROJEVA

Trougaoni fazi broj  $A(a_1, a_2, a_3)$ ;  $\mu(a_2) = 1$  je opisan sledećim analitičkim izrazom

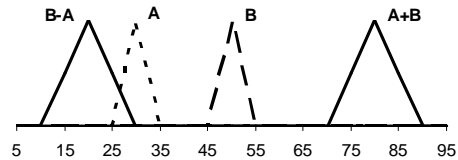
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ -\frac{x - a_3}{a_3 - a_2} & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & x \geq a_3 \end{cases} \quad (7.24)$$

Neka su data dva trougaona fazi broja  $A(a_1, a_2, a_3)$  i  $B(b_1, b_2, b_3)$ . Osnovne aritmetičke operacije nad ovim brojevima definišu se na sledeći način.

- SABIRANJE -  $A+B=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$
- ODUZIMANJE -  $A-B=(a_1-b_3, a_2-b_2, a_3-b_1)$

PR. 7-9

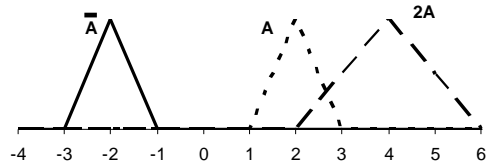
Neka je  $A(25,30,35)$  i  $B(45,50,55)$ , tada je  
 $A+B=(70,80,90)$   
 $B-A=(10,20,30)$



- NEGACIJA -  $\bar{A}=(-a_3, -a_2, -a_1)$
- MNOŽENJE KONSTANTOM -  $cA=(ca_1, ca_2, ca_3)$

PR. 7-10

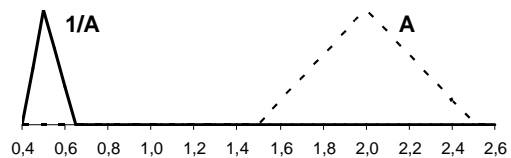
Neka je  $A=(1,2,3)$ , tada je  
 $\bar{A}=(-3,-2,-1)$   
 $2A=(2,4,6)$



- RECIPROČNA VREDNOST -  $1/A=(1/a_3, 1/a_2, 1/a_1)$

PR. 7-11

Neka je  $A=(1.5, 2, 2.5)$ , tada je  
 $1/A=(0.4, 0.5, 0.66)$

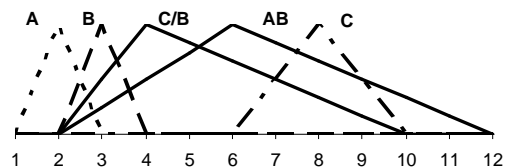


- MNOŽENJE -  $AB=(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)$
- DELIENJE -  $A/B=(a_1/b_3, a_2/b_2, a_3/b_1)$

**PR. 7-12**

Neka je  $A=(1,2,3)$   $B=(2,3,4)$   $C=(6,8,10)$ , tada je  
 $AB=(2,6,12)$   
 $C/A=(2,4,10)$

Potrebno je zapaziti da operacija deljenja striktno gledano ne daje trougaoni broj, ali se rezultat uvek aproksimira trougaonim brojem.

**7.3 Fazi model sistema**

*"U svaku sređenu šemu kojom se uređuje ljudski život neophodno je uneti izvestan stepen anarhizma"*

*Bertrand Russel, Eseji o skepticizmu*

**7.3.1 OKVIR SPOZNAJE - FAZI SKUP ULAZA I IZLAZA SISTEMA**

U principu svaki model sistema, pa samim tim i fazi model, uspostavlja neku vezu između ulaza i izlaza sistema. Samo se po sebi razume da formiranje fazi modela podrazumeva da se i ulaz i izlaz sistema izraze u formi fazi skupova.

Polazeći od koncepta fazi skupa čini se da je prirodno da se i ulazne i izlazne promenljive izraze pojmovno preko atributa signala koji se prate na izlazu, odnosno koji se menjaju na ulazu da bi se postigli željeni efekti. Tako na primer veličine koje se mere na izlazu mogu biti *velike, male, srednje, veoma velike* itd, ili *odgovarajuće, neodgovarajuće, delimično odgovarajuće* i slično. Slična situacija je i sa ulaznim promenljivim koje predstavljaju signale pobude.

Formiranje fazi skupa ulaza i izlaza zahteva da se kao prvo odabere ukupni broj atributa sa kojim će se signal opisati, a zatim da se svakom atributu pridruži odgovarajuća funkcija pripadnosti. Specifikacija funkcije pripadnosti podrazumeva da se odabere interval brojnih vrednosti na kome je ovaj atribut, bar u nekoj meri, ispunjen. Tako je u Pr. 7-5 atributu PRIJATNA TEMPERATURA pridružen fazi skup prikazan na Sl. 7-6.

Skup svih atributa kojima se opisuje jedan signal čini *okvir spoznaje* tog signala. Formalno fazi skup  $A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  je *okvir spoznaje* pojma X ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- A pokriva univerzum X - svaki element pojma X pridružen je bar jednom fazi skupu sa nenultim stepenom pripadnosti
- $\forall x \in X, \exists \mu_{A_i}(x) > \varepsilon \quad \varepsilon > 0$  određuje nivo pokrivanja
- Elementi skupa A su unimodalni skupovi (postoji oblast x koja ima jasno semantičko značenje i u kojoj samo jedan od fazi skupova  $A_i$  ima izrazito veliku funkciju pripadnosti)
- Fazi skupovi se delimično prekrivaju – (veliko prekrivanje – zamagljuje situaciju, malo prekrivanje vodi ka bivalentnoj logici).

Okvir spoznaje zavisi od broja atributa koji se želi koristiti za specificiranje posmatrane veličine<sup>1</sup>.

**PR. 7-13****ZADATAK**

Definisati fazi okvir spoznaje veličine TEMPERATURA

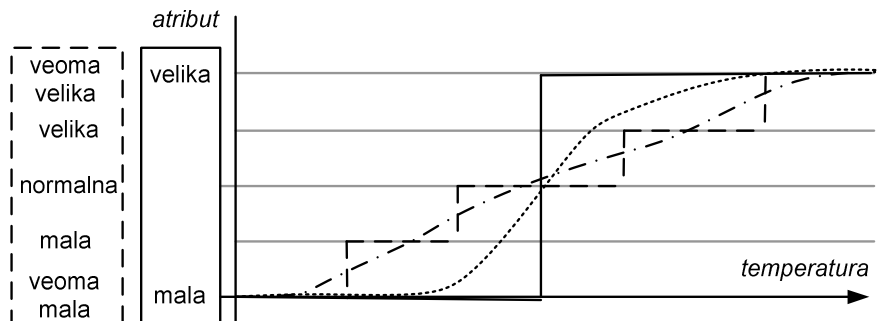
**REŠENJE**

Temperatura može biti VELIKA ili MALA, ali takođe i VEOMA MALA, MALA, NORMALNA, VELIKA i VEOMA VELIKA,

<sup>1</sup> Imajući u vidu da se smatra da je ljudsko biće u stanju da koristi  $7 \pm 2$  konceptata, izvesno je da sa brojem atributa ne treba preterivati.

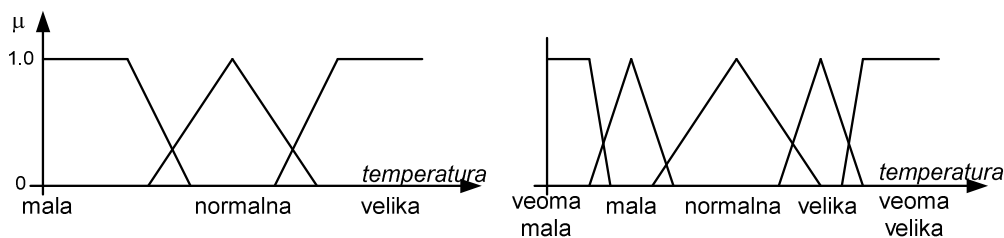
i tako redom. Granice između atributa zavise od lične procene i iskustva. U principu one se izražavaju u jedinicama u kojima se posmatrana veličina meri. S obzirom da se ovde radi o temperaturi logično je da se granice izražavaju u °C.

Same granice mogu biti krute – binarne, kao što je to prikazano na (Sl. 7-13), ili elastične – fazi (Sl. 7-14). Potrebno je zapaziti da sa povećavanjem broja atributa binarna granica od izlomljene linije prelazi u krivu liniju. Međutim, ona i dalje ostaje kruta, jer svakoj tački krive linije odgovara drugačiji atribut, odnosno svaki atribut je prikazan jednom brojnom vrednosti ili segmentom vrednosti.



SL. 7-13 BINARNA SPECIFIKACIJA ATRIBUTA VELIČINE TEMPERATURA

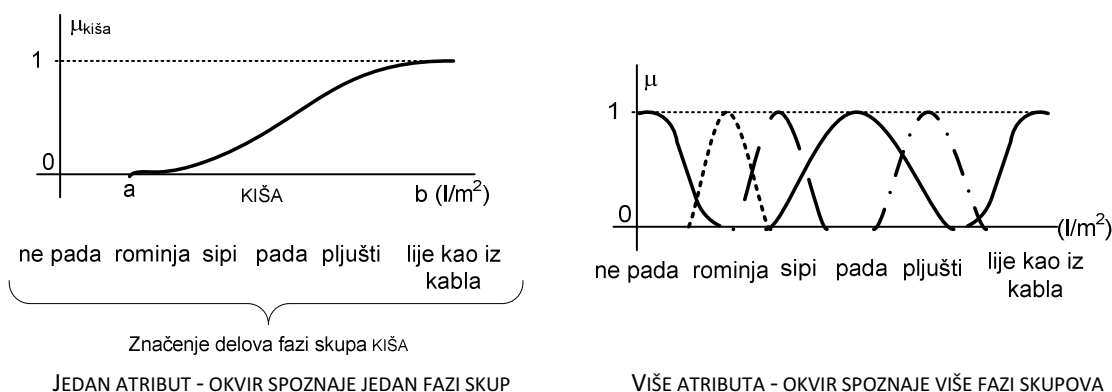
Oba fazi skupa prikazana na Sl. 7-14 ispunjavaju sve uslove specificirane za okvir spoznaje, što znači da predstavljaju dva okvira spoznaje veličine TEMPERATURA. Za razliku od njih skupovi prikazani na Sl. 7-13 ne predstavljaju okvir spoznaje jer se međusobno ne prekrivaju.



SL. 7-14 FAZI SPECIFIKACIJA VELIČINE TEMPERATURA

PR. 7-14

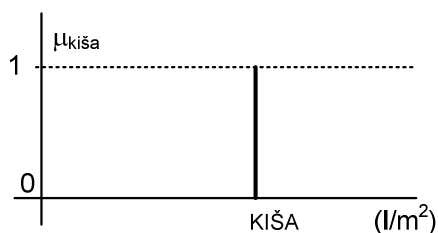
Neke veličine mogu se na zadovoljavajući način opisati i pomoću samo jednog atributa. takav je, na primer, slučaj sa veličinom KIŠA, koja se u potpunosti može opisati skupom koji je prikazan na Sl. 7-15. Imajući u vidu o kojoj se veličini radi granice skupa treba da predstavljaju količinu padavina izraženu recimo u litrama po m<sup>2</sup>.



SL. 7-15 DVA OKVIRA SPOZNAJE FAZI SKUPA KIŠA

Formirani skup koji predstavlja okvir spoznaje veličine KIŠA iskazuje da ako je količina padavina manja od *a* onda se smatra da kiša uopšte ne pada, ako je veća od *b* onda "lije kao iz kabla". Sledeći ovu logiku očigledno je da početak uzlaznog dela krive, gde funkcije pripadnosti imaju male vrednosti u stvari znači da kiša "rominja" ili "sipi". Veće funkcije pripadnosti odgovaraju situaciji u kojima se kaže da kiša

"pada", i "pljušti".



SL. 7-16 SINGLTON FAZI SKUP KIŠA

Ukoliko se, iz nekog razloga želi daleko preciznije da posmatra pojava padanja kiše onda je pogodno da se okvir spoznaje formira na drugačiji način, odnosno da se svakom od pomenutih atributa pridruži poseban fazi skup (Sl. 7-15).

Konačno, pretpostavimo da je u nekom trenutku izmereno tačno koliko je litara kiše palo na jedan metar kvadratni. Konzistentnost fazi pristupa zahteva da se i ova vrednost izrazi fazi skupom. U tom cilju koristi se singleton fazi skup definisan pomoću relacije (7.6). Ovaj skup prikazan je na Sl. 7-16. Potrebno je zapaziti da on ne predstavlja okvir spoznaje zato što njime nisu obuhvaćene sve vrednosti količine padavina.

### 7.3.2 FAZI RELACIJA – KODIRANJE FAZI PRAVILA

Kao što je već istaknuto fazi skup je uveden u cilju specifikacije pojedinih pojmova koji neće biti definisani u bivalentnoj logici već će omogućavati da se iskažu različite nijanse njihovog značenja. Sa gledišta teorije sistema, ovaj koncept omogućava da se ulazni i izlazni signali, umesto brojnih vrednosti prikažu preko odgovarajućih fazi skupova. Ako se, pri tome, podsetimo da model procesa određuje preslikavanje ulaznih veličina na izlazne, onda bi, u skladu sa izloženim konceptom, fazi model trebalo da uspostavi neku relaciju između dva fazi skupa. Otuda je neophodno, da se kao prvo definiše pojam fazi relacije.

#### FAZI RELACIJA

Neka su  $V$  i  $W$  dva univerzuma. Fazi relacija  $S$  između  $V$  i  $W$  je fazi skup definisan u prostoru proizvoda

$$V \otimes W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\} \quad (7.25)$$

Ovaj skup okarakterisan je funkcijom pripadnosti

$$\mu_S : V \otimes W \rightarrow [0, 1] \quad (7.26)$$

Ukoliko su fazi skupovi diskretni, fazi relacija se specificira u *matričnoj formi*

$$S = [s_{ij}] = [\mu_S(v_i, w_j)]$$

dok se kada su fazi skupovi kontinualni relacija specificira *analitički*

$$S = \mu_S(v, w) = f(v, w)$$

#### KORELACIJA FAZI SKUPOVA

Posmatrajući definiciju relacije vidi se da sve ranije definisane operacije nad fazi skupovima takođe predstavljaju relacije. Razlika je samo u tome što su posmatrana dva skupa nad istim univerzumom, tako da je rezultujući fazi skup jednodimenzionalan. Konačno i sam fazi skup predstavlja relaciju sa univerzumom kao jediničnim elementom.

Sa gledišta modeliranja sistema, međutim, od interesa su relacije koje omogućavaju da se uspostavi korelacija između ulaza i izlaza sistema. Ova korelacija se iskazuje pomoću *fazi pravila*, odnosno implikacija tipa

*Ako je A, tada je B.*

Pri tome, imajući u vidu da su pojmovi  $A$  i  $B$  predstavljeni fazi skupovima nesumnjivo je da se ovo pravilo mora kodirati pomoću fazi relacije. Rezultat relacije treba da bude skup funkcija pripadnosti koje daju meru tačnosti modeliranog iskaza. Intuitivno je jasno da relacija pomoću koje se kodira pravilo mora biti takva da što je funkcija pripadnosti uslova bliža jedinici, to i funkcija pripadnosti implikacije mora da bude bliža jedinici. U skladu sa time čini se da je prirodno da se implikacija kodira nekom formom preseka dva skupa. U tu svrhu se definišu korelacione max-min ili max-proizvod relacije<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Korelaciona matrica se naziva i FAM matrica (fazi asocijativna matrica)

KORELACIONI MINIMUM – FAZI SPOLJNI PROIZVOD<sup>1</sup>

Neka su A i B dva fazi skupa definisana nad univerzumima V i W. Neka su, nadalje, oni predstavljeni vrsta vektorima (dimenzija n i m respektivno) ako su skupovi diskretni, odnosno funkcijama pripadnosti ako su skupovi kontinualni. Tada se relacija korelacionog minimuma definiše kao

DISKRETNi SKUPOVI

$$S = A^T \circ B = [s_{ij}]; s_{ij} = \min(a_i, b_j) \tag{7.27}$$

KONTINUALNI SKUPOVI

$$S = A^T \circ B = \mu_S(v, w) = \min(\mu_A(v), \mu_B(w)) \tag{7.28}$$

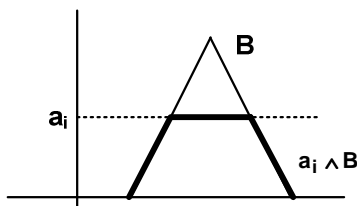
Iz definicije ove relacije vidi se da matrica S ima sledeće osobine.

- i. i-ti red matrice S predstavlja minimum elementa ai i svih elemenata vektora B
- ii. j-ta kolona matrice S predstavlja minimum elementa bj i svih elemenata vektora A

U skladu sa time matrica S se može prikazati kao

$$S = \begin{bmatrix} a_1 \wedge B \\ a_2 \wedge B \\ \vdots \\ a_n \wedge B \end{bmatrix} = [b_1 \wedge A^T \quad b_2 \wedge A^T \quad \dots \quad b_m \wedge A^T] \tag{7.29}$$

gde je  $a_i \wedge b_j = \min(a_i, b_j)$



SL. 7-17 GRAFIČKA INTERPRETACIJA KORELACIONOG MINIMUMA

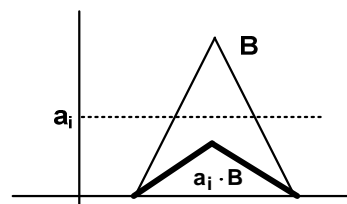
Relacija (7.29) omogućava i jednostavnu grafičku interpretaciju korelacionog minimuma. Naime, svaki red matrice S se zapravo dobija odsecanjem skupa B pomoću odgovarajućeg elementa skupa A (Sl. 7-17).

Zapazimo da se u skladu sa datom relacijom vidi da važe i sledeće osobine matrice S

- iii. ako je  $a_k=1$  tada je k-ti red matrice S jednak vektoru B ( $s_{ki} = b_i$ )
- iv. ako je  $b_j=1$  tada je j-ta kolona matrice S jednaka vektoru A ( $s_{ij} = a_i$ )
- v. ako je za neko k i za svako j,  $a_k \geq b_j$  tada je k-ti red matrice S jednak vektoru B.

KORELACIONI PROIZVOD

Neka su A i B dva fazi skupa definisana nad univerzumima X i Y. Neka su, nadalje, oni predstavljeni vrsta vektorima (dimenzija n i m respektivno) ako su skupovi diskretni, odnosno funkcijama pripadnosti ako su skupovi kontinualni. Tada se relacija korelacionog proizvoda definiše kao



SL. 7-18 GRAFIČKA INTERPRETACIJA KORELACIONOG PROIZVODA

$$S = A^T \bullet B = [s_{ij}]; s_{ij} = a_i \cdot b_j \tag{7.30}$$

odnosno, ako su skupovi kontinualni

$$S = A^T \bullet B = \mu_S(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) \tag{7.31}$$

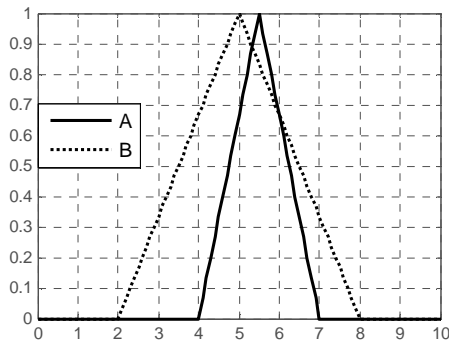
U skladu sa relacijom (7.30) vidi se da se svaki red matrice S dobija tako što se vektor B skalira sa odgovarajućim elementom vektora A.

$$(i\text{-ti red matrice } A^T) \bullet B \Rightarrow a_i \cdot B$$

na taj način, za razliku od korelacionog minimuma, ovde se radi o operaciji skaliranja, tako da se u izvesnom smislu zadržava oblik funkcije (Sl. 7-18).

<sup>1</sup> Korelaciona matrica se često označava kao "FAM HEB matrica". Ovaj naziv potiče od ideje o asocijativnom učenju - "hebian learning" - pojma koji je prvi uveo Mamdani (1977), a kasnije razrađivao Togai (1983).





SL. 7-19 FAZI SKUPOVI A I B

**PR. 7-15**  
**Zadatak**

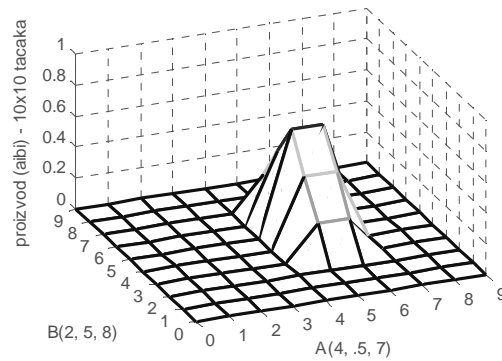
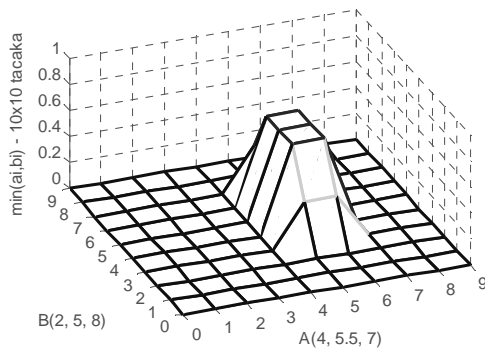
Pojam "A" definisan je trougaonim fazi skupom  $A(4, 5.5, 7)$ , a pojam "B" trougaonim fazi skupom  $B(2, 5, 8)$ . Oba skupa prikazana su na Sl. 7-19. Modelirati iskaz "Ako je A tada B"

**Rešenje**

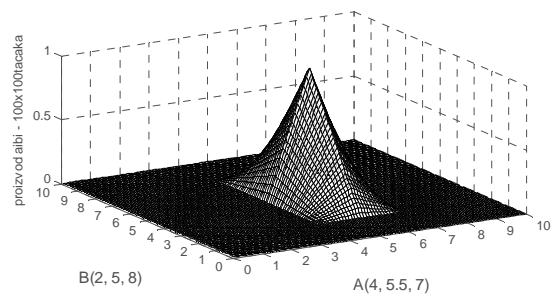
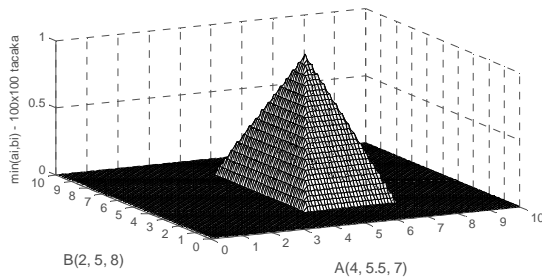
Ako se oba skupa predstave kao diskretni skupovi sa po deset elemenata

$$A = [\mu(x_i)]_{1 \times 10}; B = [\mu(y_i)]_{1 \times 10}; x_i = y_i = i, i = 1, 2, \dots, 9$$

tada relacije korelacioni minimum i korelacioni proizvod nad ovim skupovima imaju izgled prikazan na (Sl. 7-20). Sa slika se vidi da relacija korelacioni proizvod daje finije, više nijansirane ivice relacije, za razliku od korelacionog minimuma, koji zbog odsecanja dovodi do oštrijih ivica. Ovaj fenomen je još očigledniji ako se oba skupa diskretizuju sa po 100 tačaka (Sl. 7-21).



SL. 7-20 KORELACIONI MINIMUM I KORELACIONI PROIZVOD PRI DISKRETIZACIJI SA 10 TAČAKA



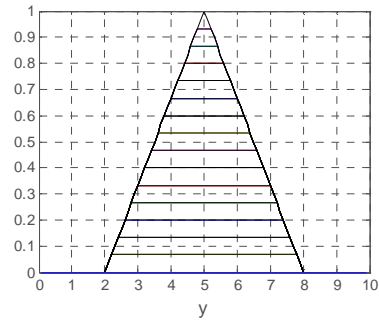
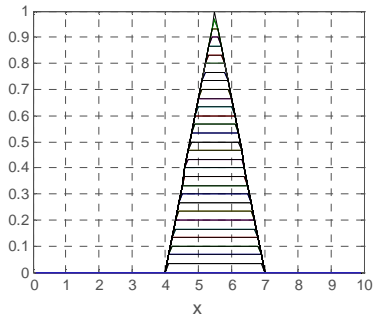
SL. 7-21 KORELACIONI MINIMUM I KORELACIONI PROIZVOD PRI DISKRETIZACIJI SA 100 TAČAKA

**Značenje relacije**

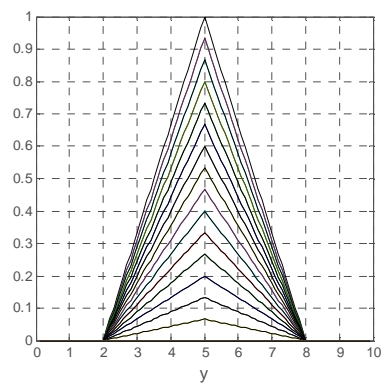
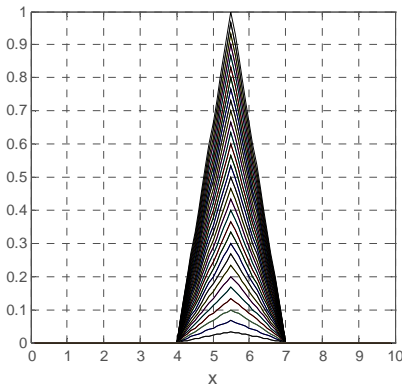
Svaka tačka na z-osi predstavlja funkciju pripadnosti uspostavljene relacije između skupova A i B, odnosno svojevrsnu meru tačnosti iskaza "Ako je A tada B". Naime ako bi se dati primer posmatrao u binarnoj logici onda bi A imalo vrednost 5.5, a B bi bilo jednako 5. U tom smislu relacija bi glasila „Ako je  $A=5.5$  tada je  $B=5$ ". Međutim, u fazi logici pojmu A se pridružuje šire značenje iskazano funkcijama pripadnosti. Otuda se za svaki broj koji se nalazi u opsegu između 4 i 7 smatra da pripada pojmu A, odnosno da u nekoj meri ima vrednost 5.5. Na isti način svi brojevi u opsegu od 2 do 8 imaju u nekoj meri vrednost 5. Shodno tome i iskaz „Ako je A tada B“ mora da važi u nekoj meri na jednom opsegu brojeva. Uspostavljanjem korelacije između skupova određuje se, prema tome, mera istinitosti iskaza u svakoj tački ravni (x,y).

Ako se pogledaju poprečni preseki uspostavljene relacije prikazani na Sl. 7-22 vidi se da funkcija pripadnosti ima vrednost 1 u tački (x,y)=(5.5, 5). Ova tačka je zapravo određena vrednostima u kojima skup

A ima funkciju pripadnosti 1 ( $x=5.5$ ) i skup B ima funkciju pripadnosti 1 ( $y=5$ )<sup>1</sup>. U svim ostalim tačkama funkcije pripadnosti su manje od 1, što znači da je posmatrani iskaz u nekoj meri tačan.



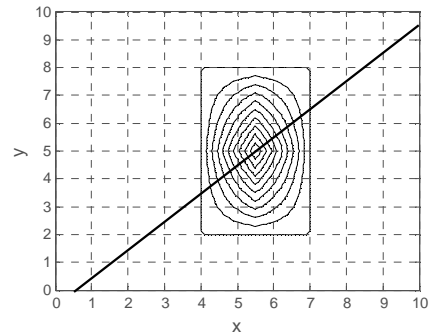
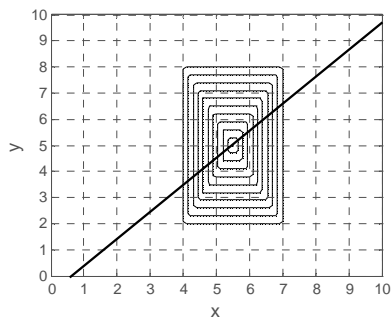
KORELACIONI MINIMUM



KORELACIONI PROIZVOD

SL. 7-22 POPREČNI PRESECI RELACIJE KORELACIJE DUŽ OSA X I Y

S obzirom na opseg definisanosti skupova A i B prirodno je da su sve funkcije pripadnosti izvan pravougaonika određenog sa  $x \in [4,7]$ ;  $y \in [2,8]$  jednake 0. Tačke unutar pravougaonika određuju prostor u kome je iskaz tačan do neke mere kao što se to vidi sa konturnih dijagrama prikazanih na Sl. 7-23.



SL. 7-23 KONTURNI DIJAGRAMI KORELACIONOG MINIMUMA I KORELACIONOG PROIZVODA I ODGOVARAJUĆI BIVALENTNI MODEL

Dobijeni konturni dijagrami možda najbolje ilustruju razliku između fazi pravila i bivalentnog modeliranja uzroka i posledice. Naime, ukoliko bi želeli da daju iskaz modelirano analitički u okviru bivalentne logike onda bi bilo neophodno da uspostavimo neku funkcionalnu zavisnost između posledice y i uzroka x. U posmatranom primeru ta relacija bi mogla da ima oblik

$$y = x - 0.5$$

To znači da bi za razliku od fazi modela koji određuje jednu površ u ravni (x,y), bivalentni model bio definisan linijom. Otuda će svaka nepreciznost, prouzrokovana recimo merenjem, nužno dovesti do odstupanja od linije bivalentnog modela, ali će zato i dalje ostati unutar oblasti fazi modela.

<sup>1</sup> Vrednost funkcije pripadnosti u relaciji dobijenoj diskretizacijom sa 10x10 tačaka nije ni u jednoj tački 1 zato što skup ne uključuje koordinatu 5.5.

**PR. 7-16 – MODELIRANJE ISKAZA****Zadatak**

Dat je iskaz

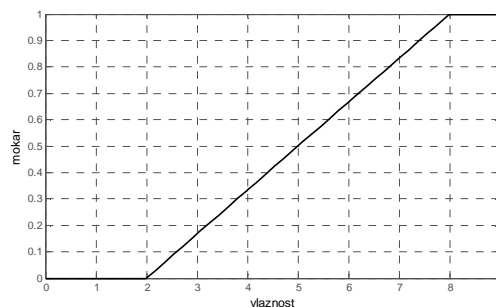
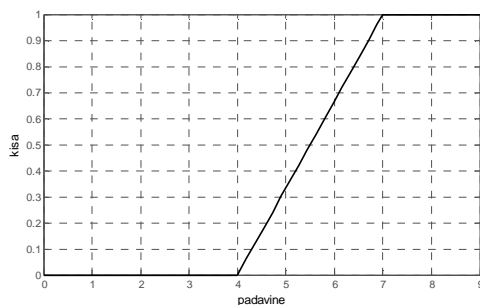
**"Ako pada KIŠA tada ćete biti MOKRI"**

Potrebno je odrediti fazi model ovog iskaza i uporediti dobijeni rezultat sa odgovarajućim analitičkim modelom.

**Rešenje**

▪ **Specifikacija fazi skupova promenljivih**

Traženi model treba da uspostavi relaciju između fazi promenljive KIŠA i fazi promenljive MOKAR. Otuda je, kao prvo neophodno da se specificiraju odgovarajući fazi skupovi.

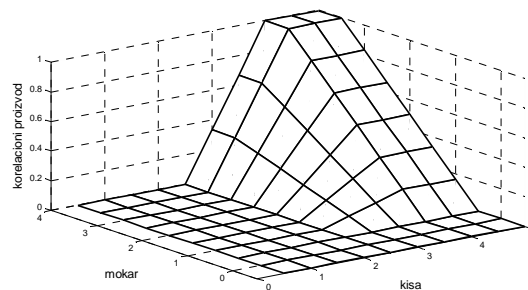
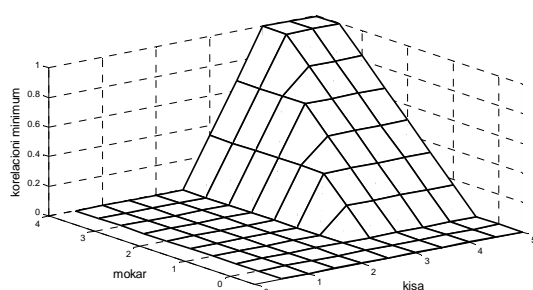


**SL. 7-24 FAZI SKUPOVI "KISA" I "MOKAR"**

Kao što je već rečeno KIŠA može da pada u različitim nijansama od "rominja" do "lije kao iz kabla". Ukoliko se opredelimo za samo jedan atribut "*količina padavina*" u okviru spoznaje onda KIŠA može da se modelira pomoću samo jednog fazi skupa koji ima izgled prikazan na Sl. 7-24. Pri tome je usvojeno da brojevi na osi predstavljaju neku meru padavina ( $l/m^2$ ), skaliranu na opseg od 0 do 10. Samo se po sebi razume da nije neophodno da skup bude definisan pravom linijom. Umesto nje mogla se usvojiti neka "S" kriva ili nešto slično.

Osoba na kiši može da bude u različitim stanjima od "orošena" do "pokisla kao miš". Sledeći istu logiku i ovaj fazi skup se može okarakterisati samo jednim atributom "*vlažnost*" koja se izražava u  $l/m^3$ , skaliranim na isti opseg. Velika vlažnost, odnosno natopljenost tkanine vodom znači da je osoba zaista mokra te se tom opsegu vrednosti pridružuje funkcija pripadnosti 1. Maloj vlažnosti odgovara funkcija pripadnosti mula, dok su sve ostale gradacije pojma MOKAR okarakterisane funkcijama pripadnosti između 0 i 1 (Sl. 7-24).

U nekoj realnoj situaciji granice oba fazi skupa bi bile određene uz konsultacije sa meteorologom koji bi znao da oceni u kojim razmerama se mogu kretati padavine u području za koje se model pravi, kao i sa tehnologom koji poznaje osobine materijala i stepen njihove higroskopnosti.



**SL. 7-25 FAZI MODELI ISKAZA "AKO PADA KIŠA TADA ĆETE BITI MOKRI"**

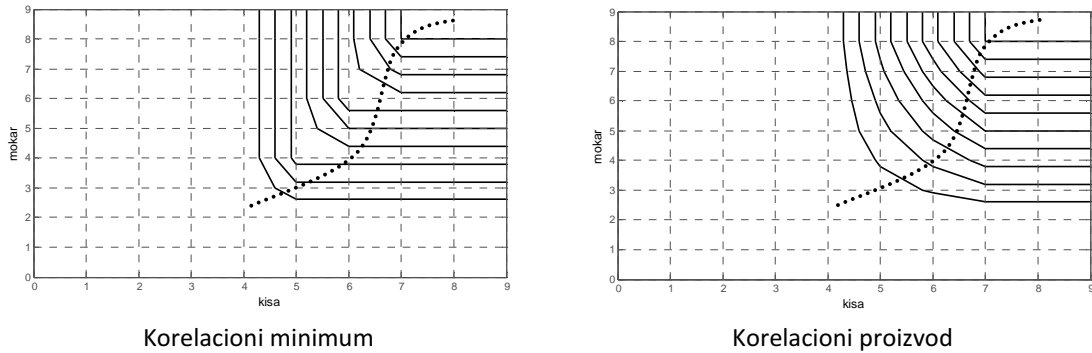
• **Formiranje modela**

Fazi model određen je relacijom korelacionog proizvoda ili korelacionog minimuma između fazi skupa uslova (ulaza) i posledice (izlaza).

$$S_{\min} = (kisa)^T \circ (mokar)$$

$$S_{\text{prod}} = (kisa)^T \bullet (mokar)$$

Dva modela dobijena korelacijom fazi skupova KIŠA i MOKAR prikazana su na Sl. 7-25. Odgovarajući konturni dijagrami u ravni (*uslov, posledica*) prikazani su na Sl. 7-26. Uz njih je nacrtana i hipotetična bivalentna relacija  $y=f(x)$  između stepena vlažnosti ( $y$ ) i količine padavina ( $x$ ).



**SL. 7-26 KONTURNI DIJAGRAMI FAZI MODELA ISKAZA "AKO PADA KIŠA TADA ĆETE BITI MOKRI"**

**PR. 7-17 – MODELIRANJE VIŠE POVEZANIH USLOVA U ISKAZU**

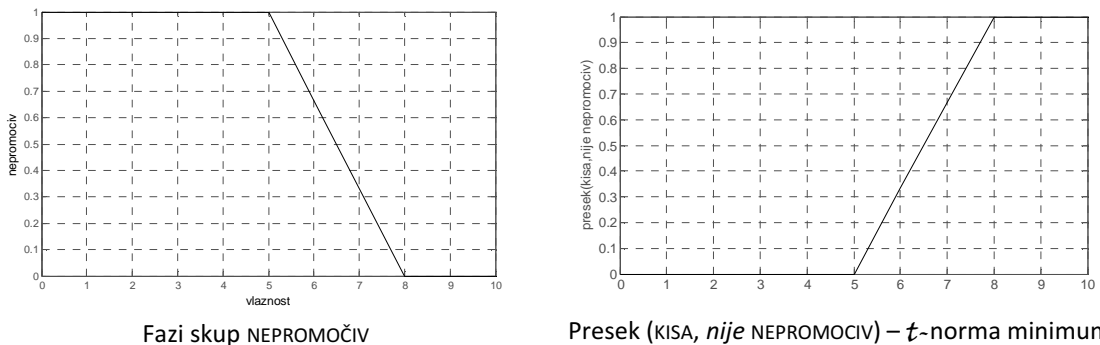
*Zadatak*

Modelirati iskaz "**Ako pada KIŠA i ako Vaš kaput nije NEPROMOČIV tada ćete biti MOKRI**".

*Rešenje*

Neka su fazi skupovi KIŠA i MOKAR definisani na isti način kao i u prethodnom primeru. Fazi skup NEPROMOČIV odnosi se, kao i skup mokar, na natopljenost tkanine vodom. Otuda je on definisan nad istim skupom vrednosti ( $l/m^3$ ). Budući da pojmu NEPROMOČIV odgovara mala natopljenost tkanine, ovaj fazi skup mora da ima suprotan nagib od skupa MOKAR (Sl. 7-27).

Kao što je već rečeno, fazi model se formira uspostavljanjem relacije korelacioni proizvod ili korelacioni minimum između uslova i posledice. Međutim, budući da u ovom slučaju iskaz sadrži dva uslova neophodno je da se kao prvo odredi fazi skup koji objedinjuje oba uslova. Kako su ona povezana relacijom "i" to je evidentno da se rezultujući skup dobija primenom operacije *preseka*. Pored toga, budući da u iskazu stoji negacija - *nije nepromočiv* – neophodno je da se presek izvrši nad negacijom fazi skupa NEPROMOČIV (Sl. 7-27).



**SL. 7-27 FAZI SKUP NEPROMOČIV I PRESEK SKUPOVA USLOVA**

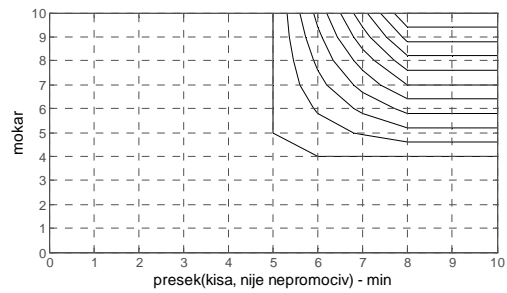
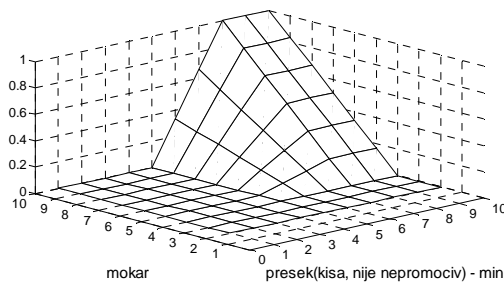
U skladu sa izloženim relacija koja opisuje fazi model ima oblik

$$S_{\min} = (kisa \ \bar{t} \ \text{nepromociv})^T \circ (mokar)$$

$$S_{\text{prod}} = (kisa \ \bar{t} \ \text{nepromociv})^T \bullet (mokar)$$

gde relacija može da bude korelacioni proizvod ili korelacioni minimum. Na Sl. 7-28Sl. 7-27 prikazan je fazi

model dobijen korelacionim proizvodom, pri čemu je presek formiran sa  $t$ -normom minimum.



**SL. 7-28 FAZI MODEL ISKAZA DOBIJEN KORELACIONIM PROIZVODOM I ODGOVARAJUĆI KONTURNI DIJAGRAM**

Potrebno je zapaziti da bi analitički model koji odgovara datom iskazu sada bio funkcija dve promenljive

$$y=f(x_1,x_2)$$

Za formiranje ovog modela bilo bi neophodno da se uspostavi neka korelacija između intenziteta kiše i kvaliteta materijala od koga je kaput napravljen. Očigledno je da to ne bi bio nimalo jednostavan zadatak.

**PR. 7-18 - MODELIRANJE VIŠE NEZAVISNIH USLOVA U ISKAZU**

Zadatak

Modelirati iskaz "**Ako pada KIŠA ILI ako se nađete u BLIZINI prskalice za travu tada ćete biti MOKRI**"

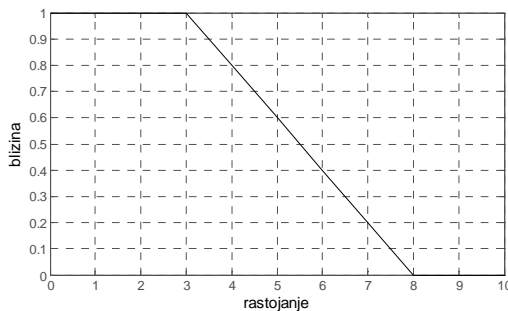
Rešenje

Sada je kao prvo neophodno da se formira fazi skup blizina prskalice (BLIZINA). Pojam udaljenosti se izražava rastojanjem (m). Samo se po sebi razume da što je rastojanje manje to je blizina veća (Sl. 7-29). U skladu sa time pojmu velike blizine kome odgovara malo rastojanje pridružena je funkcija pripadnosti jednaka jedan. Kao i druge veličine i rastojanje je skalirano na opseg od 0 do 10.

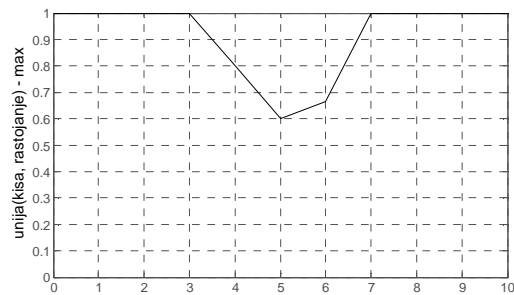
Budući da su uslovi u iskazu nezavisni ("ili") logično je da se oni povežu operacijom unije. Otuda je odgovarajući fazi model dat izrazom

$$S_{\min} = (\text{kisa} \ \& \ \text{blizina})^T \circ (\text{mokar})$$

$$S_{\text{prod}} = (\text{kisa} \ \& \ \text{blizina})^T \bullet (\text{mokar})$$



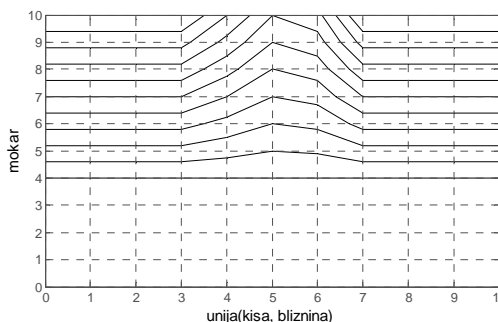
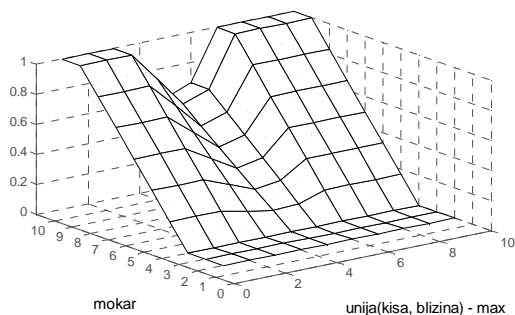
Fazi skup BLIZINA



Unija (KISA,BLIZINA) –  $\&$ -norma maksimum

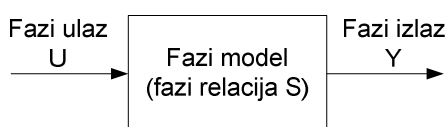
**SL. 7-29 FAZI SKUP BLIZINA I UNIJA FAZI SKUPOVA "BLIZINA" I "KISA"**

Rezultujući model dobijen korelacionim proizvodom u kome je kao  $\&$ -norma usvojen maksimum prikazan je na Sl. 7-30. Samo se po sebi razume da bi u ovom slučaju bilo još teže napraviti analitički model koji bi na neki način trebalo da poveže dva potpuno nezavisna uslova.



SL. 7-30 FAZI MODEL ISKAZA DOBIJEN KORELACIONIM PROIZVODOM I ODGOVARAJUĆI KONTURNI DIJAGRAM

7.3.3 ODREĐIVANJE IZLAZA FAZI MODELA - KOMPOZICIJA FAZI RELACIJA



SL. 7-31 FAZI MODEL SISTEMA

Fazi modeliranje iskaza ukazuje na mogućnost da se fazi model nekog sistema formira kao skup iskaza kojima se izražava ponašanje izlaza u slučaju delovanja odgovarajućih ulaza, odnosno kao niz pravila kojima se opisuje ponašanje sistema. Broj takvih pravila zavisice svakako od vrste sistema koji se posmatra.

Ostavljajući za sada po strani pitanje broja pravila i načina na koji se ona formiraju, neophodno je da se, kao prvo, utvrdi na koji način bi se tako formiran model mogao upotrebiti. Naime, osnovna svrha formiranja modela sistema je da se pomoću njega za dati ulazni signal izvrši predikcija izlaza. Nema nikakve sumnje da i fazi model mora da ispuni istu funkciju. To zapravo znači da je neophodno da se definiše neka operacija kojom bi se mogli povezati fazi skup ulaza (U) i fazi relacija (S) koja određuje model sistema tako da se dobije fazi skup izlaza (Sl. 7-31). Drugim rečima traži se neka fazi relacija oblika

$$Y = \text{Fazirelacija}(U, S)$$

koja ispunjava uslov

$$S = \text{Korelacija}(U, Y) \Rightarrow Y = \text{Fazirelacija}(U, S)$$

Pokazuje se da se, pod određenim uslovima, fazi skup izlaza može odrediti pomoću max  $t$ -kompozicije. Otuda je neophodno da se pre svega definiše ova operacija.

Max-  $t$ -kompozicija<sup>1</sup> fazi relacija

Ako je U fazi skup nad univerzumom V, a S relacija nad univerzumima V i W, tada se max- $t$ -kompozicija definiše na sledeći način.

DISKRETNi FAZI SKUPOVI

$$U = [u_i] ; S = [s_{ij}]$$

$$Y = U \otimes S = [y_i] ; y_i = \max_k \{ (u_k \ t s_{ki}) \}$$
(7.32)

KONTINUALNI FAZI SKUPOVI

$$U = \mu_U(v) ; S = \mu_S(v, w)$$

$$Y = U \otimes S = \mu_{U \otimes S}(w) = \mu_Y(w) = \max_{v \in V} \{ \mu_U(v) \ t \mu_S(v, w) \}$$
(7.33)

U principu,  $t$ -norma može biti bilo koja norma koja ispunjava ranije definisane uslove.

<sup>1</sup> Max-t-kompozicija se u najopštijem slučaju definiše nad dve relacije kada je i rezultat operacije fazi relacija. Ovde se posmatra poseban slučaj kada je jedna od relacija fazi skup.

Najčešće se koriste minimum i proizvod, tako da se govori o

$$\text{max-min kompoziciji} - Y_{\text{max-min}} = U \oplus S,$$

$$\text{max-proizvod kompoziciji} - Y_{\text{max-prod}} = U \times S$$

**PR. 7-19**

Neka je A fazi skup definisan nad univerzumom V, predstavljen vrsta vektorom kao

$$A = [0.3 \quad 0.4 \quad 0.8 \quad 1]$$

i neka je S relacija definisana nad V i W

$$S = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

tada se fazi skup P koji je određen max-min kompozicijom dobija na sledeći način

$$p_i = \max_k \{ \min(a_k, s_{ki}) \}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \max \{ \min(a_1, s_{11}), \min(a_2, s_{21}), \min(a_3, s_{31}), \min(a_4, s_{41}) \} \\ &= \max \{ \min(0.3, 0.2), \min(0.4, 0.7), \min(0.8, 0.8), \min(1.0, 0.0) \} = \max \{ 0.2, 0.4, 0.8, 0.0 \} = 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \max \{ \min(a_1, s_{12}), \min(a_2, s_{22}), \min(a_3, s_{32}), \min(a_4, s_{42}) \} = \\ &= \max \{ \min(0.3, 0.8), \min(0.4, 0.6), \min(0.8, 0.1), \min(1.0, 0.2) \} = \max \{ 0.3, 0.4, 0.1, 0.2 \} = 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= \max \{ \min(a_1, s_{13}), \min(a_2, s_{23}), \min(a_3, s_{33}), \min(a_4, s_{43}) \} \\ &= \max \{ \min(0.3, 0.7), \min(0.4, 0.6), \min(0.8, 0.5), \min(1.0, 0.3) \} = \max \{ 0.3, 0.4, 0.5, 0.3 \} = 0.5 \end{aligned}$$

$$A \oplus S = [0.3 \quad 0.4 \quad 0.8 \quad 1] \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} = [0.8 \quad 0.4 \quad 0.5] = P$$

Ukoliko se, međutim, umesto min  $t$ -norme, koristi proizvod tada se dobija max-proizvod kompozicija

$$A \times S = Q; q_j = \max_i (a_i \cdot s_{ij})$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \max \{ a_1 \cdot s_{11}, a_2 \cdot s_{21}, a_3 \cdot s_{31}, a_4 \cdot s_{41} \} \\ &= \max \{ 0.3 \cdot 0.2, 0.4 \cdot 0.7, 0.8 \cdot 0.8, 1.0 \cdot 0.0 \} = \max \{ 0.06, 0.28, 0.64, 0.0 \} = 0.64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \max \{ a_1 \cdot s_{12}, a_2 \cdot s_{22}, a_3 \cdot s_{32}, a_4 \cdot s_{42} \} = \\ &= \max \{ 0.3 \cdot 0.8, 0.4 \cdot 0.6, 0.8 \cdot 0.1, 1.0 \cdot 0.2 \} = \max \{ 0.24, 0.24, 0.08, 0.2 \} = 0.24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_3 &= \max \{ a_1 \cdot s_{13}, a_2 \cdot s_{23}, a_3 \cdot s_{33}, a_4 \cdot s_{43} \} \\ &= \max \{ 0.3 \cdot 0.7, 0.4 \cdot 0.6, 0.8 \cdot 0.5, 1.0 \cdot 0.3 \} = \max \{ 0.21, 0.24, 0.40, 0.3 \} = 0.4 \end{aligned}$$

$$A \times S = [0.3 \quad 0.4 \quad 0.8 \quad 1] \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.7 \\ 0.7 & 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} = [0.64 \quad 0.24 \quad 0.40] = Q$$

**PR. 7-20**

*Zadatak*

Neka je A fazi skup definisan nad univerzumom V, predstavljen vrsta vektorom kao

$$A = (0.3, 0.4, 0.8, 1)$$

i neka je B fazi skup nad univerzumom W definisan vrsta vektorom

$$B = (0.2, 0.7, 0.8, 0)$$

odrediti max-min kompozicije ovih skupova.

*Rešenje*

Već je istaknuto da je relacija formirana sa univerzalnim skupom zapravo fazi skup, odnosno vektor, a ne matrica. U tom slučaju max-min-kompozicija određuje sledeće relacije.

DISKRETNI FAZI SKUPOVI

$$U = [u_i]; S = [s_i]$$

$$U \otimes S^T = Z = \max \{u_i t s_i\} - \text{skalar}$$

$$U^T \otimes S = Y = [y_{ij}]; y_{ij} = u_i t s_j$$

KONTINUALNI FAZI SKUPOVI

$$U = \mu_U(v); S = \mu_S(w)$$

$$U \otimes S = Y = \mu_{U \otimes S}(v, w) = \mu_Y(v, w) = \mu_U(v) t \mu_S(w)$$

U skladu sa navedenim relacijama, za date skupove A i B moguće je formirati dve max-min kompozicije.

$$\begin{aligned} A \otimes B^T &= \max \{ \min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2), \min(a_3, b_3), \min(a_4, b_4) \} = \\ &= \max \{ \min(0.3, 0.2), \min(0.4, 0.7), \min(0.8, 0.8), \min(1.0, 0.0) \} = \max(0.2, 0.4, 0.8, 0) = 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^T \otimes B &= \begin{bmatrix} \min(a_1, b_1) & \min(a_1, b_2) & \min(a_1, b_3) & \min(a_1, b_4) \\ \min(a_2, b_1) & \min(a_2, b_2) & \min(a_2, b_3) & \min(a_2, b_4) \\ \min(a_3, b_1) & \min(a_3, b_2) & \min(a_3, b_3) & \min(a_3, b_4) \\ \min(a_4, b_1) & \min(a_4, b_2) & \min(a_4, b_3) & \min(a_4, b_4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \min(0.3, 0.2) & \min(0.3, 0.7) & \min(0.3, 0.8) & \min(0.3, 0.0) \\ \min(0.4, 0.2) & \min(0.4, 0.7) & \min(0.4, 0.8) & \min(0.4, 0.0) \\ \min(0.8, 0.2) & \min(0.8, 0.7) & \min(0.8, 0.8) & \min(0.8, 0.0) \\ \min(1.0, 0.2) & \min(1.0, 0.7) & \min(1.0, 0.8) & \min(1.0, 0.0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

NORMA FAZI SKUPA I AUTOKORELACIONA MATRICA

Potrebno je zapaziti da je max-min kompozicijom nad fazi skupovima obuhvaćena i definicija visine (fazi norme) skupa, kao i autokorelacione matrice.

$$A \otimes A^T = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] \otimes \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \max_i \min(a_i, a_i) = \max_i (a_i) = h(A)$$

$$A^T \otimes A = M = [m_{ij}]; m_{ij} = a_i t a_j$$

### Max- $t$ -kompozicija kao inverzna operacija

Iz definicije max- $t$ -kompozicije vidi se da ona omogućava da se odredi jedan fazi skup kao funkcija drugog fazi skupa i korelacione relacije fazi skupova. Sa gledišta određivanja fazi skupa izlaza neophodno je još da se ispita max- $t$  kompozicija može da igra ulogu inverzne operacije u odnosu na operaciju korelacionog proizvoda i korelacionog minimuma, odnosno da li važe sledeće implikacije

$$S_{\min} = U^T \circ Y \Rightarrow Y = U \oplus S_{\min}$$

$$S_{\text{prod}} = U^T \bullet Y \Rightarrow Y = U \times S_{\text{prod}}$$

Bidirekzione FAM teoreme pokazuju da je dovoljan uslov za određivanje izlaza fazi



modela, kao i za određivanje ulaza pomoću inverznog fazi modela, da oba fazi skupa budu normalna. To znači da, pod uslovom da je fazi model formiran nad dva normalna skupa, max- $\bar{t}$  kompozicija određuje fazi skup izlaza, odnosno predstavlja inverznu operaciju fazi relacije.

---

*Bidirekciona FAM teorema za korelacioni minimum*

Ako je  $S_{\min} = U^T \circ Y$  tada

(i)  $Y = U \oplus S_{\min}$  ako i samo ako je  $h(U) \geq h(Y)$

(ii)  $U = Y \oplus S_{\min}^T$  ako i samo ako je  $h(Y) \geq h(U)$

(iii)  $\tilde{U} \oplus S_{\min} \subset Y$  za svako  $\tilde{U} \subset V$

(iv)  $\tilde{Y} \oplus S_{\min}^T \subset U$  za svako  $\tilde{Y} \subset W$

Korolarija: ako su  $U$  i  $Y$  normalni ( $h(U) = h(Y) = 1$ ) tada važi  $Y = U \circ S$  i  $U = Y \circ S^T$

Dokaz tvrdnje (i)

$$U \circ S_{\min} = U \oplus (U^T \circ Y) = (U \oplus U^T) \circ Y = h(U) \circ Y = \left( \min_i (h(U), y_i) \right)_{1 \times m} = h(A) \wedge Y$$

ako je  $\forall i, h(U) \geq y_i \Leftrightarrow h(A) \geq h(Y)$  tada  $\min_i (h(U), y_i) = y_i \Rightarrow \left( \min_i (h(A), y_i) \right) = Y$

Dokaz tvrdnje (iii)

Neka je  $\tilde{U} \subset V$  tada je

$$\tilde{U} \oplus S_{\min} = \tilde{U} \oplus (U^T \circ Y) = \left( \underbrace{\tilde{U} \oplus U^T}_{\text{skalar} \leq 1} \right) \circ Y = \left( \min_i ((\tilde{U} \oplus U^T), y_i) \right)_{1 \times m} = (\tilde{U} \oplus U^T) \wedge Y$$

pošto je  $\forall i, \min_i ((\tilde{U} \oplus U^T), y_i) \leq y_i \Rightarrow \left( \min_i ((\tilde{U} \oplus U^T), y_i) \right) \subset Y$

Tvrdnje (ii) i (iv) se dokazuju na isti način ako se koristi činjenica da je

$$S_{\min}^T = Y^T \circ U \Rightarrow Y \oplus S_{\min}^T = Y \oplus (Y^T \circ U) = (Y \oplus Y^T) \circ U = h(Y) \circ U = h(Y) \wedge U$$

---

*Bidirekciona FAM teorema za korelacioni proizvod*

Ako je  $S_{\text{prod}} = U^T \bullet Y$  tada je

(i)  $Y = U \times S_{\text{prod}}$  ako i samo ako je  $h(U) = 1$

(ii)  $U = Y \bullet S_{\text{prod}}^T$  ako i samo ako je  $h(Y) = 1$

(iii)  $\tilde{U} \bullet S_{\text{prod}} \subset Y$  za svako  $\tilde{U} \subset V$

(iv)  $\tilde{Y} \bullet S_{\text{prod}}^T \subset U$  za svako  $\tilde{Y} \subset W$

Dokaz tvrdnje (i)

$$U \times S_{\text{prod}} = U \times (U^T \bullet Y) = (U \times U^T) \bullet Y = h(U) \bullet Y = (h(U) \cdot y_i)_{1 \times m}$$

za  $h(U) = 1 \Rightarrow h(U) \cdot y_i = y_i \Rightarrow (h(U) \cdot y_i) = Y$

Dokaz tvrdnje (iii)

Neka je  $\tilde{U} \subset V$ ;  $\tilde{U} \bullet S_{\text{prod}} = \tilde{U} \bullet (U^T \bullet Y) = \left( \underbrace{\tilde{U} \times U^T}_{\text{skalar} \leq 1} \right) \bullet Y = \left( (\tilde{U} \circ U^T) \cdot y_i \right)_{1 \times m}$

pošto je  $\forall i, (\tilde{U} \times U^T) \cdot y_i \leq y_i \Rightarrow \left( (\tilde{U} \bullet U^T) \cdot y_i \right) \subset Y$

Tvrdnje (ii) i (iv) se dokazuju na isti način kao i kod korelacionog minimuma.

---

**PR. 7-21**

Neka je nad skupovima  $U = [0.3 \ 0.4 \ 0.7 \ 0.2]$  i  $Y = [0.8 \ 0.4 \ 0.5]$  uspostavljena relacija korelacionog minimuma  $S = U^T \circ Y$ . Pokazati da ne važi implikacija  $Y = U \oplus S$ , a važi implikacija

$$U = Y \oplus S^T.$$

Ova tvrdnja sledi i iz date teoreme, s obzirom da je visina skupa Y veća od visine skupa U ( $h(U)=0.7, h(Y)=0.8$ ). Isti rezultat se dobija i direktnom primenom definicije operacija kompozicije i relacije

Pošto je

$$S = U^T \circ Y = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.2 \end{bmatrix} \circ [0.8 \quad 0.4 \quad 0.5] = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \text{vidi se da je}$$

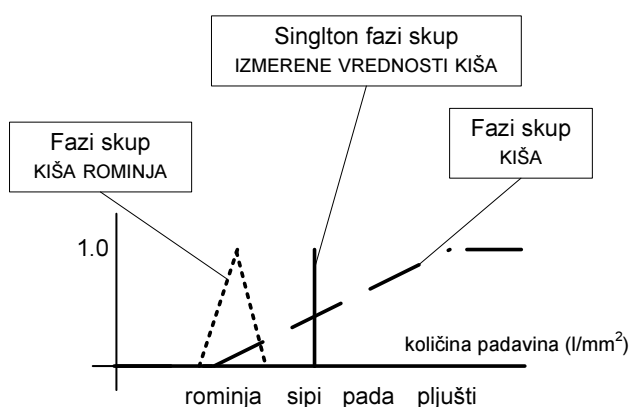
$$U \oplus S = [0.3 \quad 0.4 \quad 0.7 \quad 0.2] \oplus \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.7 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} = [0.7 \quad 0.4 \quad 0.5] \neq Y$$

$$Y \oplus S^T = [0.7 \quad 0.4 \quad 0.5] \oplus \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} = [0.3 \quad 0.4 \quad 0.7 \quad 0.2] = U$$

#### 7.3.4 ODREĐIVANJE FAZI SKUPA IZLAZA SISTEMA ZA IZMERENU VELIČINU ULAZA

Već je pokazano da, pod određenim uslovima, max- $\mathcal{L}$ -kompozicija, omogućava da se fazi model sistema upotrebi za određivanje fazi skupa izlaza, na osnovu poznatog fazi skupa ulaza. Sada se postavlja pitanje na koji način se ova činjenica može koristiti u nekoj realnoj situaciji u kojoj je ulazna veličina neka jasno definisana, izmerena, brojna vrednost.

Budući da primena max- $\mathcal{L}$ -kompozicije zahteva da ulazna veličina bude predstavljena fazi skupom, očigledno je da se mora ustanoviti koji fazi skup bi najviše odgovarao nekoj izmerenoj veličini. U traženju odgovora na ovo pitanje, podsetimo se da je fazi skup okarakterisan funkcijom pripadnosti koja govori o tome u kojoj meri neka veličina pripada pojmu koji je definisan preko fazi skupa. Tako se, na primer, ukoliko se sprema kiša ili tek počinje da rominja nekome može učiniti da kiša "još ne pada", a nekome drugome da je kiša "već počela da pada". U skladu sa time pojavi "kiša rominja" dodeljen je određeni opseg stepena pripadnosti u fazi skupu KIŠA. Pri tome, ukoliko bi želeli da tu pojavu okarakterišemo posebnim fazi skupom, onda bi nesumnjivo mogli da konstruišemo jedan fazi skup u okolini brojnih vrednosti koje odgovaraju maloj količini padavina (Sl. 7-32).



SL. 7-32 ILUSTRACIJA FAZI SKUPA POJMOVA I IZMERENE BROJNE VREDNOSTI

Problem, međutim nastaje ako se tačno izmeri određena količina padavina. Ona će svakako naći odgovarajući stepen pripadnosti u fazi skupu KIŠA, moguće i u fazi skupu ROMINJA, ali nas u ovom trenutku ne zanima taj stepen pripadnosti. Nama je zapravo cilj da ustanovimo koji fazi skup izlaza odgovara baš toj izmerenoj vrednosti. Budući da je već pokazano da se fazi skup izlaza formira primenom max- $\mathcal{L}$ -kompozicije sa fazi skupom ulaza, neophodno je da formiramo fazi skup koji odgovara toj izmerenoj vrednosti. Činjenica da raspolažemo sa tačno utvrđenom brojnom vrednosti za količinu padavina, nameće potrebu da toj vrednosti dodelimo funkciju

pripadnosti koja je jednaka 1. Nadalje, pošto nijedna druga brojna vrednost ne odgovara izmerenoj vrednosti, odgovarajuće funkcije pripadnosti moraju biti jednake nuli. Otuda se izmerena vrednost mora predstaviti singleton fazi skupom visine 1. Otuda sledi da je

- Diskretni singleton fazi skup izmerene vrednosti

$$U_a = [u_{ai}]; u_{ai} = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ 1 & i = n \end{cases} \quad (7.34)$$

- Kontinualni singleton fazi skup izmerene vrednosti

$$U_a = \mu_{U_a}(v); \mu_{U_a}(v) = \begin{cases} 1 & v = v_0 \\ 0 & v \neq v_0 \end{cases} \quad (7.35)$$

Ako se sada pretpostavi da je fazi model sistema opisan relacijom S nad skupovima U i Y, tada se fazi model izlaza koji odgovara izmerenoj vrednosti ulaza (fazi skup  $U_a$ ), primenom max- $\bar{t}$  kompozicije, dobija na sledeći način

- DISKRETNi FAZI SKUP IZLAZA

Pošto je

$$u_{ak} \bar{t} s_{ki} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases} \bar{t} s_{ki} = s_{ni}; S = [s_{ij}]_{n \times m}$$

sledi da je fazi skup izlaza koji odgovara izmerenoj vrednosti

$$Y_a = U_a \otimes S = [y_{ai}]; y_{ai} = \max_k \{u_{ak} \bar{t} s_{ki}\} = s_{ni} \quad (7.36)$$

Iz relacije (7.36) se vidi da je je fazi skup izlaza jednak n-tom redu korelacione matrice S. U skladu sa relacijama (7.29) i (7.30), n-ti red korelacione matrice dobija se tako što se odredi minimum, (ili proizvod) komponente  $u_n$  fazi skupa U, sa fazi skupom Y (Sl. 7-17 i Sl. 7-18).

$$y_{ai} = s_{ni} = \min(u_n, y_i), \quad \text{ili} \quad y_{ai} = s_{ni} = u_n y_i \quad (7.37)$$

- KONTINUALNI FAZI SKUP IZLAZA

Pošto je

$$\mu_{U_a}(v) \bar{t} \mu_S(v, w) = \begin{cases} 0 & \mu_S(v, w) = 0 \quad v \neq v_0 \\ 1 & \mu_S(v, w) = \mu_S(v, w) \quad v = v_0 \end{cases}; S = \mu_S(v, w)$$

sledi da je kontinualni fazi skup izlaza

$$Y_a = U_a \otimes S; Y_a = \mu_{Y_a}(w) = \max_{v \in V} \{\mu_{U_a}(v) \bar{t} \mu_S(v, w)\} = \mu_S(v_0, w) \quad (7.38)$$

Budući da je u ovom slučaju fazi skup izlaza funkcija jedne promenljive (w) njegova funkcija pripadnosti se izračunava prema relaciji

$$\mu_{Y_a}(w) = \mu_S(v_0, w) = \min(\mu_U(v_0), \mu_Y(w)), \quad \text{ili} \quad (7.39)$$

$$\mu_{Y_a}(w) = \mu_S(v_0, w) = \mu_U(v_0) \mu_Y(w)$$

## Pr. 7-22

### Zadatak

Dat je iskaz modeliran u primeru Pr. 7-16, gde su fazi skupovi uslova (KIŠA – U) i posledice (MOKAR – Y) modelirani prema relacijama

$$U = \mu_U(v) = \begin{cases} 0 & v < 4 \\ \frac{1}{3}(v-4) & 4 \leq v \leq 7 \\ 1 & v > 7 \end{cases}; Y = \mu_Y(w) = \begin{cases} 0 & w < 2 \\ \frac{1}{6}(w-2) & 2 \leq w \leq 8 \\ 1 & w > 8 \end{cases}$$

Merenjem je utvrđeno da vlažnost ima vrednost 5. Odrediti fazi skup izlaza koji odgovara izvršenom merenju.

### Rešenje

Izmerena vrednost može se predstaviti singleton fazi skupom

$$U_a = \mu_{U_a}(v); \quad \mu_{U_a}(v) = \begin{cases} 1 & v = 5 \\ 0 & v \neq 5 \end{cases}$$

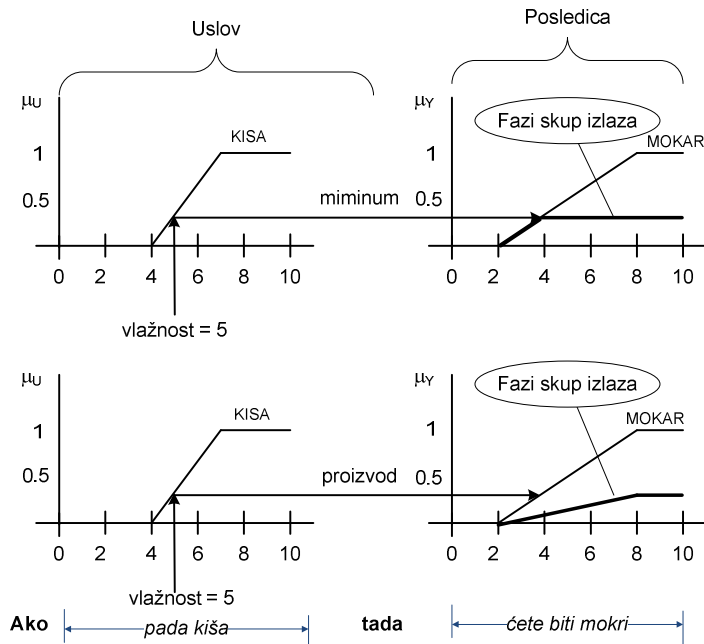
U skladu sa relacijama (7.39), u zavisnosti od izbora  $\mathcal{T}$  norme moguće je dobiti dva fazi skupa izlaza

$$Y_{a \min}(U_a) = \mu_{Y_{a \min}}(w) = \mu_S(5, w) = \min(\mu_U(5), \mu_Y(w)) =$$

$$= \min\left(\frac{1}{3}, \mu_Y(w)\right) = \begin{cases} 0 & w < 2 \\ \frac{1}{6}(w-2) & 2 \leq w \leq 4 \\ \frac{1}{3} & w > 4 \end{cases}$$

$$Y_{a \text{prod}}(U_a) = \mu_{Y_{a \text{prod}}}(w) = \mu_S(5, w) = \mu_U(5)\mu_Y(w) = \frac{1}{3}\mu_Y(w)$$

Grafička interpretacija rezultata



SL. 7-33 FAZI SKUP IZLAZA ISKAZA "AKO PADA KIŠA BIĆETE MOKRI" KADA JE KIŠA=5

Određivanje fazi skupa izlaza može se realizovati i grafički kao što je to prikazano na Sl. 7-33. Sa slike se vide da je za određivanje izlaznog fazi skupa od ključne važnosti mera u kojoj izmerena vrednost aktivira uslov, odnosno pravilo koje povezuje uslov i posledicu. Ukoliko izmerena vrednost uopšte ne aktivira pravilo (ima funkciju pripadnosti nula u skupu uslova) tada su sve funkcije pripadnosti fazi skupa izlaza jednake nuli.

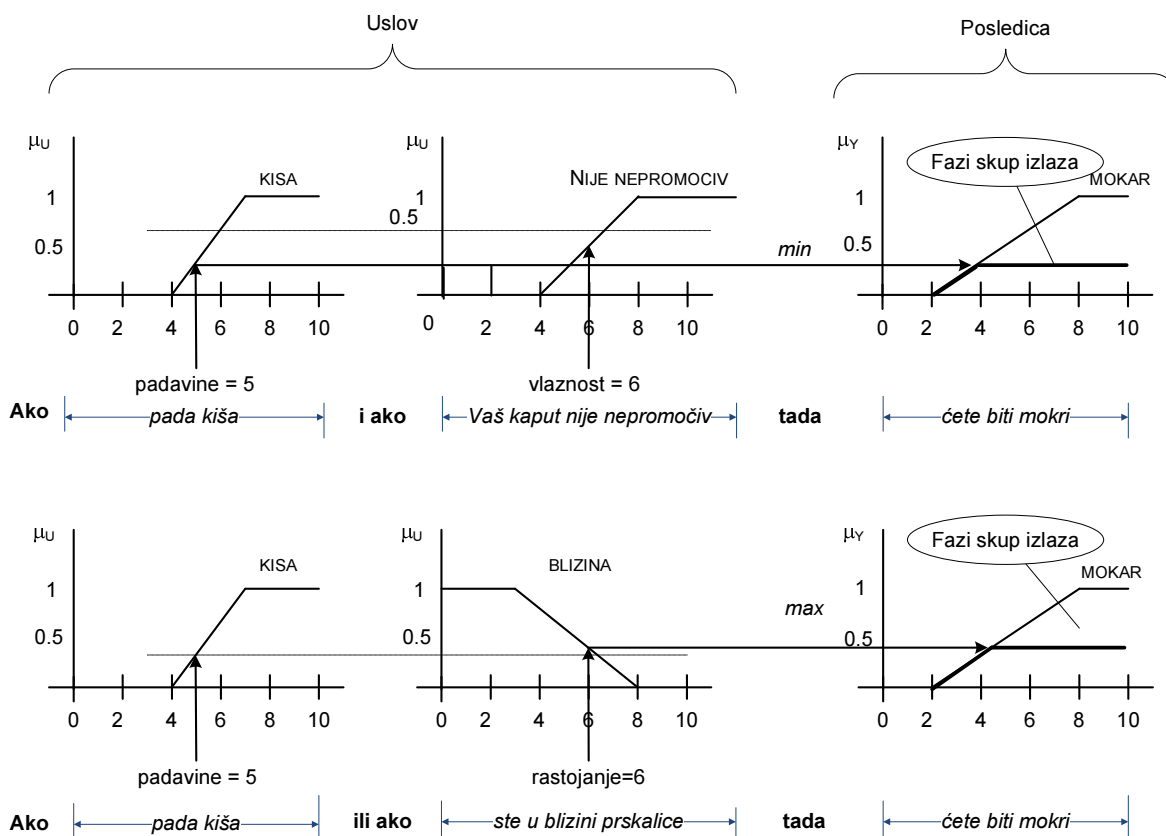
**PR. 7-23**

Zadatak

Usvajajući da je  $\mathcal{T}$ -norma minimum, a  $\mathcal{S}$ -norma maksimum, grafički odrediti fazi skup izlaza iskaza modeliranih u Pr. 7-17 i Pr. 7-18, za slučaj da izmerene promenljive imaju sledeće vrednosti padavine=5, vlažnost=6, rastojanje=6

Rešenje

Budući da se ovde radi o kombinaciji uslova sada je neophodno da se, kao prvo, odredi odgovarajuća relacija između njih (presek ili unija). Pošto se u ovom slučaju unija i presek realizuju preko maksimuma, odnosno minimuma, relacija će, za date brojne vrednosti (singleton skupove), izdvojiti jedan od dva ulazna skupa. Skup koji bude izdvojen aktivira izlazni skup (Sl. 7-34).



SL. 7-34 GRAFIČKO ODREĐIVANJE FAZI SKUPA IZLAZA

Upoređivanjem odgovarajućih funkcija pripadnosti vidi se da je u prvom iskazu, povezanom "i" uslovom vrednost funkcije pripadnosti skupa KIŠA manja od vrednosti funkcije pripadnosti negacije skupa NEPROMOČIV. Otuda prvi skup KIŠA određuje izgled funkcije pripadnosti fazi skupa izlaza.

U drugom iskazu, za date izmerene vrednosti ulaza, vrednost funkcije pripadnosti skupa KIŠA je veća od vrednosti funkcije pripadnosti skupa BLIZINA. Budući da se u ovom slučaju realizuje operacija unije fazi skup BLIZINA ima presudnu ulogu u određivanju izlaza.

### 7.3.5 ODREĐIVANJE BROJNE VREDNOSTI PROMENLJIVE - DEFAZIFIKACIJA

Postoje situacije u kojima je neophodno da se neki fazi skup zameni jednom brojnom vrednosti, odnosno da se izvrši *defazifikacija* promenljive predstavljene pomoću fazi skupa. U skladu sa usvojenim značenjem fazi skupa čini se da bi najprirodnije bilo da se odabere ona brojna vrednost za koju promenljiva ima najveću funkciju pripadnosti. Problem međutim nastaje ukoliko postoje više tačaka fazi skupa koje imaju istu maksimalnu vrednost ili ukoliko postoji ceo segment sa istom maksimalnom vrednošću. U nastojanju da se prevaziđu navedeni problemi predloženo je nekoliko postupaka defazifikacije koji se kreću od jednostavnog usvajanja jednog od maksimuma do složenijih izračunavanja koja uzimaju u obzir oblik fazi skupa i svakoj tački unutar njega daju određenu težinu.

Sa gledišta praktične primene ovih postupaka osnovna razlika je u pogledu složenosti postupka izračunavanja, dok se u najvećem broju slučajeva dobijene vrednosti ne razlikuju značajno. Naime, razlika može biti izražena samo kod izuzetno složenih oblika fazi skupova.

#### MAKSIMUM FAZI SKUPA - MAMDANI

Ovaj postupak defazifikacije zahteva da se odrede svi maksimumi fazi skupa  $U_a$  na segmentu definisanosti promenljive  $u$  ( $u \in [u_l, u_d]$ )

$$u_i = \max_{u \in [u_l, u_d]} (\mu_{U_a}(u)) \quad ; i=1,2,\dots,k \quad (7.40)$$

Mamdani je predložio tri varijante defazifikacije.

- *Najmanji maksimum (SOM – smallest of maxima)* – najmanja vrednost promenljive za koju fazi skup ima maksimum

$$\text{SOM: } u_0 = \min_i(u_i) \quad (7.41)$$

- *Najveći maksimum (LOM – largest of maxima)* - najveća vrednost promenljive za koju fazi skup ima maksimum

$$\text{LOM: } u_0 = \max_i(u_i) \quad (7.42)$$

- *Srednja vrednost maksimuma (MOM – mean of maxima)*

$$\text{MOM: } u_0 = \frac{\sum_{i=1}^k u_i}{k} \quad (7.43)$$

Ako je fazi skup takav da nema maksimum u tačkama već na segmentima, odnosno ako je  $\max_u(\mu_{U_a}(u)) = [a_i, b_i]$  ;  $i = 1, 2, \dots, k$  (7.44)

tada se defazifikacija vrši na sledeći način

$$\begin{aligned} \text{SOM: } u_0 &= \min_i(a_i) \\ \text{LOM: } u_0 &= \max_i(b_i) \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\text{MOM: } u_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{b_i + a_i}{2}$$

Osnovni problem kod ovog postupka defazifikacije sastoji se u tome što se ni na koji način ne uzima u obzir sam oblik izlaznog fazi skupa. Pored toga, sve tri metode imaju problem ukoliko je fazi skup takav da su sve funkcije pripadnosti jednake 0, što znači da nijedna vrednost promenljive ne odgovara pojmu koji predstavlja. Formalno gledano u tom slučaju maksimumi skupa (koji su jednaki 0) obuhvataju ceo opseg promenljive. Iako bi, sledeći izloženu definiciju trebalo da se kao najmanji maksimum usvoji donja granica ( $u_i$ ), a kao najveći gornja granica ( $u_d$ ), usvojeno je da se za sve tri metode usvaja srednja vrednost segmenta.

#### BISKETRISA FAZI SKUPA - MAMDANI

Jedan od načina da se pri defazifikaciji kontinualnog fazi skupa uzme u obzir njegov oblik je da se odredi bisektrisa skupa. Brojna vrednost  $u_0$  se određuje tako da površine obuhvaćene fazi skupom levo i desno od  $u_0$  budu jednake

$$\mu_{U_a}(u) \neq 0, \quad \text{za } u \in [a, b] \quad ; u_0 : \begin{cases} \int_{u_1}^{u_0} \mu_{U_a}(u) du = \int_{u_0}^{u_d} \mu_{U_a}(u) du & \exists u, \mu_{U_a}(u) \neq 0 \\ \frac{u_1 + u_d}{2} & \mu_{U_a}(u) \equiv 0 \end{cases} \quad (7.46)$$

Osnovni nedostatak ovog postupka je relativno komplikovano izračunavanje upravljačkog signala  $u_0$ .

Potrebno je zapaziti da će bisektrisa fazi skupa čije su sve funkcije pripadnosti jednake nuli biti tačno na sredini segmenta na kome je definisana promenljiva.

#### CENTAR GRAVITACIJE – MAMDANI

Alternativa defazifikaciji preko bisektrise izlaznog fazi skupa je određivanje centra gravitacije fazi skupa.

▪ DISKRETNI FAZI SKUP

$$u_0 = \begin{cases} \frac{\sum_i u_i \cdot \mu_{U_a}(u_i)}{\sum_i \mu_{U_a}(u_i)} & \exists u_i, \mu_{U_a}(u_i) \neq 0 \\ \frac{u_l + u_d}{2} & \mu_{U_a}(u_i) \equiv 0 \end{cases} \quad (7.47)$$

▪ KONTINUALNI FAZI SKUP

$$u_0 = \begin{cases} \frac{\int_{u_l}^{u_d} u \cdot \mu_{U_a}(u) du}{\int_{u_l}^{u_d} \mu_{U_a}(u) du} & \exists u, \mu_{U_a}(u) \neq 0 \\ \frac{u_l + u_d}{2} & \mu_{U_a}(u) \equiv 0 \end{cases} \quad (7.48)$$

Iako centar gravitacije, verovatno, najbolje opisuje dati fazi skup, ovaj postupak je neobično zahtevan u pogledu korišćenja resursa kao i vremena potrebnog za izračunavanje.

Formalno gledano centar gravitacije se ne može izračunati ako su sve funkcije pripadnosti jednake 0. Otuda je i usvojeno da se u tom slučaju vrednost promenljive određuje kao srednja vrednost segmenta.

**PR. 7-24**

*Zadatak*

Izvršiti defazifikaciju fazi skupa dobijenog na osnovu iskaza "ako pada kiša tada ćete biti mokri" za slučaj kada je izmerena vrednost padavina jednaka 5.

*Rešenje*

U primeru Pr. 7-22 je pokazano da je izlazni fazi skup dobijen *max-min kompozicijom* određen relacijom

$$\mu_{Y_{\min}}(w) = \min\left(\frac{1}{3}, \mu_Y(w)\right) = \begin{cases} 0 & w < 2 \\ \frac{1}{6}(w-2) & 2 \leq w \leq 4 \\ \frac{1}{3} & w > 4 \end{cases}$$

U skladu sa time dobijaju se sledeće vrednosti defazifikacije

LOM:  $w_0 = 10$

SOM:  $w_0 = 4$

MOM:  $w_0 = \frac{4+10}{2} = 7$

Bisektrisa:  $\frac{1}{3} \int_2^4 (w-2) dw + \frac{1}{3} \int_4^{w_0} dw = \frac{1}{3} \int_{w_0}^{10} dw \Rightarrow w_0 = 6.5$

Centroid:  $w_0 = \frac{\frac{1}{6} \int_2^4 w(w-2) dw + \frac{1}{3} \int_4^{10} w dw}{\frac{1}{6} \int_2^4 (w-2) dw + \frac{1}{3} \int_4^{10} dw} = 6.5$

Ukoliko se izlazni fazi skup određuje *max-proizvod kompozicijom* tada se dobija

$$\mu_{Y_{\text{aprod}}}(w) = \frac{1}{3}\mu_Y(w) = \frac{1}{3} \begin{cases} 0 & w \leq 2 \\ \frac{1}{6}(w-2) & 2 \leq w \leq 8 \\ 1 & w \geq 8 \end{cases}$$

tako da se dobijaju sledeće vrednosti izlaza

LOM:  $w_0 = 10$

SOM:  $w_0 = 8$

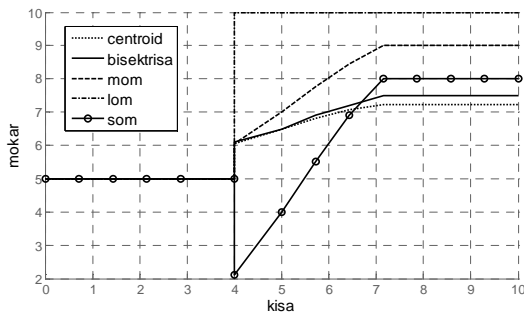
MOM:  $w_0 = \frac{8+10}{2} = 9$

Bisektrisa:  $\frac{1}{3} \int_2^{w_0} \frac{1}{6}(w-2)dw = \frac{1}{3} \int_{w_0}^8 \frac{1}{6}(w-2)dw + \frac{1}{3} \int_8^{10} dw \Rightarrow w_0 = 7.5$

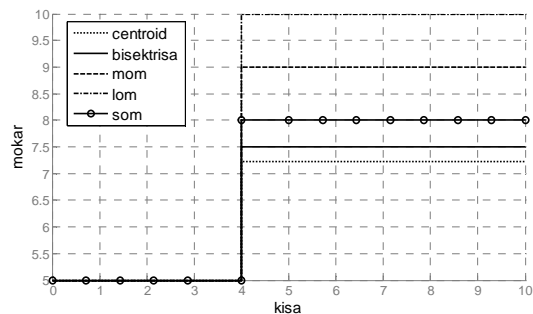
Centroid:  $w_0 = \frac{\frac{1}{18} \int_2^8 w(w-2)dw + \frac{1}{3} \int_8^{10} wdw}{\frac{1}{18} \int_2^8 (w-2)dw + \frac{1}{3} \int_8^{10} dw} = 7.23$

**Primedba**

Budući da je kod primene max-proizvod kompozicije rezultujući fazi skup jednak skaliranom fazi skupu posledice defazifikacija bilo kojom od metoda daće isti rezultat za sve vrednosti promenljive uslova, jer se skala faktor skraćuje. Ovaj rezultat jednak je maksimumu, bisektrisi, odnosno centroidu originalnog fazi skupa uslova.



Max-minimum kompozicija



Max-proizvod kompozicija

**SL. 7-35 KRIVE ODLUČIVANJA ISKAZA "AKO PADA KIŠA TADA ČETE BITI MOKRI"**

Ako se primenom max kompozicije odrede fazi skupovi izlaza za sve dozvoljene vrednosti promenljive kiša tada je moguće da se svaki od ovih fazi skupova defazifikuje primenom neke od navedenih metoda. Na taj način se dobija *kriva odlučivanja* koja daje zavisnost brojne vrednosti izlaza od ulaza. Ove krive dobijene primenom max proizvod kompozicije i max minimum kompozicije prikazane su na Sl. 7-35. Sa slike se vidi da je za sve vrednosti padavina koje su manje od 4 za koje je fazi skup izlaza jednak 0, izlaz jednak srednjoj vrednosti opsega promenljive vlažnost kojom se opisuje fazi skup MOKAR. Pored toga, za sve vrednosti padavina koje su veće od 4 za koje fazi skup izlaza nije jednak nuli, max-proizvod kompozicija daje konstantne krive odlučivanja.

**PR. 7-25 POVRŠINA ODLUČIVANJA**

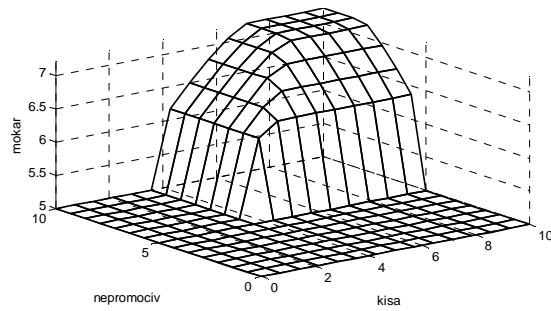
Površina odlučivanja se dobija na isti način kao i linija odlučivanja. Razlika je samo u tome što uslov sadrži dve promenljive što znači da se svi izlazni fazi skupovi dobijaju za sve dozvoljene vrednosti obe promenljive. Defazifikacijom svakog od ovih skupova dobija se po jedna brojna vrednost koja je funkcija odgovarajućih brojnih vrednosti obe ulazne promenljive. Sve brojne vrednosti izlaza čine *površinu odlučivanja*. Na Sl. 7-36 prikazane su površine odlučivanja iskaza

"ako pada kiša i ako vaš kaput nije nepromočiv tada ćete biti mokri" i

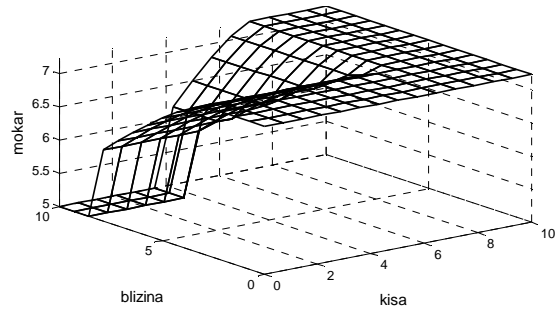
"ako pada kiša ili ako se nađete u blizini prskalice tada ćete biti mokri"

Dobijene primenom max-min kompozicije i centroid defazifikacije.





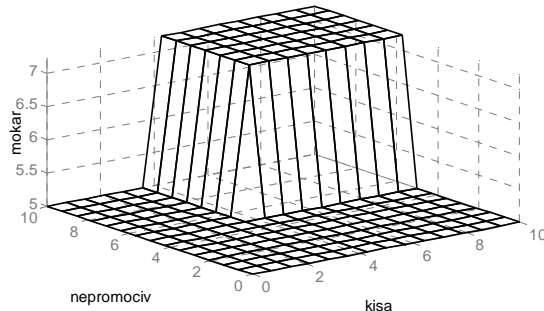
*Ako pada kiša i ako vaš kaput nije nepromočiv ...*



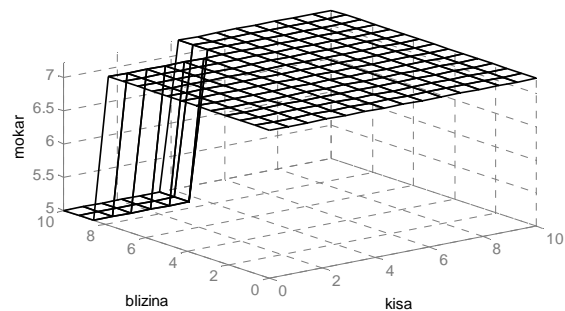
*Ako pada kiša ili ako ste u blizini prskalice...*

**SL. 7-36 POVRŠINE ODLUČIVANJA – MAX-MIN KOMPOZICIJA, CENTROID DEFAZIFIKACIJA**

Kao što je već istaknuto ako se kao implikacija koristi max-proizvod kompozicija onda se postupkom defazifikacije dobijaju iste vrednosti upravljanja na čitavom segmentu promenljivih uslova (Sl. 7-37). Na taj način sama implikacija gubi smisao.



*Ako pada kiša i ako vaš kaput nije nepromočiv ...*



*Ako pada kiša ili ako ste u blizini prskalice...*

**SL. 7-37 POVRŠINE ODLUČIVANJA – MAX-PROIZVOD KOMPOZICIJA, CENTROID DEFAZIFIKACIJA**

## 7.4 Projektovanje fazi kontrolera

*Čovek zaključuje na bazi oskudnih dokaza, maglovitih koncepata, heurističkih silogizama, prethodnih činjenica, "odokativnih" pravila, nedefinisanih intuicija, sumnji, verovanja, procena, pogađanja, ... mi koristimo rezultate egzaktne nauke, ali kao alate ili pomoćna sredstva u odlučivanju, dok konačna odluka (upravljanje) ostaje fazi.*

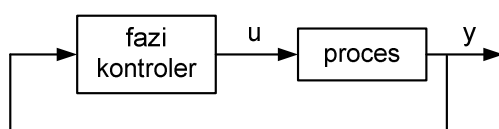
*Bart Kosko, Fuzzy Thinking*

### 7.4.1 OPŠTI POSTUPAK PROJEKTOVANJA KONTROLERA

Nema nikakve sumnje da se postupak projektovanja kontrolera razlikuje u zavisnosti od metodologije koja se želi primeniti. Ipak, gledano potpuno opšte u procesu projektovanja se jasno izdvajaju sledeći koraci:

- i. Specifikacija promenljivih procesa (ulaz, izlaz i eventualno stanje)
- i. Specifikacija performanse
- ii. Određivanje funkcije upravljanja (uz identifikaciju matematičkog modela)
- iii. Implementacija zakona upravljanja
- iv. Testiranje i verifikacija rešenja

Da bi se istakla konceptualna razlika između klasičnog i fazi pristupa u svakom od ovih koraka ceo proces projektovanja biće ilustrovan na jednom primeru.



**PR. 7-26**

Posmatra se prostorija u kojoj se želi održavati prijatna temperatura. Potrebno je projektovati upravljanje u zatvorenoj sprezi sistemom za hlađenje koji obavlja

postavljeni zadatak.

### i. Specifikacija promenljivih procesa

Ovaj korak je uvek isti, nezavisan od usvojene metodologije projektovanja. On zahteva da se sagleda sam procesa, raspoloživa merna oprema i izvršni organi. Ovi elementi jednoznačno određuju ulazne i izlazne promenljive. Sama priroda procesa diktira izbor promenljivih stanja.

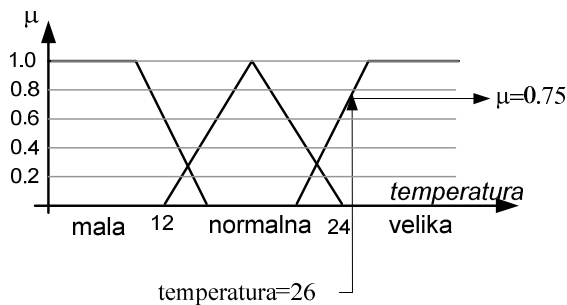
Klasično i fazi

Prostorija se hladi pomoću rashladnog uređaja kojim upravlja motor, kao izvršni organ. Temperatura vazduha u prostoriji se meri pomoću termosprega. To znači da će proces imati jedan ulazni signal – pobuda motora ( $u$ ) i jedan izlazni signal – temperatura vazduha ( $y$ ).

## 7.4.2 SPECIFIKACIJA PERFORMANSE

KLASIČNI PRISTUP

U klasičnom pristupu projektovanju specifikacija performanse započinje definisanjem željenog odziva sistema u stacionarnom stanju na neki zadani referentni signal. Referentni signal se, po pravilu, zadaje analitički. Ukoliko se želi regulacija izlazne veličine, onda je referentni signal odskočna funkcija čiji intenzitet zavisi od željene vrednosti izlaza. Kada je usvojeno stacionarno stanje, onda se, u zavisnosti od prirode samog sistema, specificiraju karakteristike prelaznog procesa, čime se zapravo određuje način na koji će sistem prići tom stacionarnom stanju. Podrazumeva se, pri tome, da će projektovani sistem biti stabilan, odnosno da će i ući u stacionarno stanje.



SL. 7-38 ILUSTRACIJA PROCESA FAZIFIKACIJE

U principu, parametri kojima se definiše željeno stacionarno stanje i prelazni proces, određuju i metodologiju projektovanja kontrolera. Potrebno je zapaziti da su sve metodologije zasnovane na dostizanju nekih unapred zadanih brojnih vrednosti pojedinih signala.

Klasično projektovanje

U posmatranom primeru referentni ponašanje je opisano atributom izlaznog signala -"prijatan". Sistem dakle treba da održava prijatnu temperaturu. Ovom atributu treba da se pridruži određena brojna vrednost. Kao što je već ranije istaknuto (Pr. 7-5) to se može učiniti zadavanjem referentne tačke (Sl. 7-4), odnosno referentnog intervala (Sl. 7-5).

Nezavisno do toga koji se od ova dva načina usvoji, celokupni, preostali napor u projektovanju upravljanja usmeren je ka postizanju tog referentnog cilja. Ukoliko se, na primer, usvoji referentna tačka na 20°C kontroler će uložiti ogroman napor da održi temperaturu vazduha na toj vrednosti i ako niko (sem njega) neće znati da je ona recimo pala na 19,5°C.

FAZI PRISTUP – ODREĐIVANJE OKVIRA SPOZNAJE

Kao što je već istaknuto fazi pristup projektovanju kontrolera počiva na ideji da je neophodno da se promeni način na koji se definiše referentno ponašanje sistema. Naime, efekat koji se želi postići pri upravljanju nekim procesom se, po pravilu, uvek izražava rečima – lingvističkim promenljivim (brz, prijatan, visok itd.), koje predstavljaju attribute nekog signala. U klasičnom pristupu projektovanju ovim atributima se pridružuju brojne vrednosti, odnosno oni se kodiraju binarno. Kao alternativa binarnom kodiranju predlaže se fazi kodiranje u kome se

svakom atributu pridružuje fazi skup sa jasnim semantičkim značenjem. Skup svih atributa, odnosno fazi skupova kojima se oni izražavaju čini okvir spoznaje.

Specifikacija performanse sistema preko okvira spoznaje zahteva i da se koristi drugačiji način izražavanja mernih i upravljačkih signala. Naime, i merni instrumenti i izvršni organi formirani su tako da se veličina ovih signala izražava brojnim vrednostima u skladu sa usvojenim jedinicama fizičke veličine koja se meri ili generiše kao upravljanje. U kontekstu usvojenog okvira spoznaje ova vrednost se mora izraziti stepenom pripadnosti svakom od fazi skupova kojima su definisani atributi. Postupak utvrđivanja stepena pripadnosti se naziva *fazifikacija* signala.

Na slici Sl. 7-38 ilustrovan je okvir spoznaje promenljive temperatura, kao i postupak fazifikacije izmerene temperature od 26°C. Kao što se vidi ova temperatura ima stepen pripadnosti 0 fazi skupovima "mala temperatura" i "normalna temperatura", i stepen pripadnosti 0.75 fazi skupu "velika temperatura". Drugim rečima, procenjuje se da se izmerena temperatura u velikoj meri može okarakterisati kao "velika", odnosno da je neophodno da se ona smanji da bi se dobila "prijatna temperatura".

Na osnovu svega što je rečeno može se zaključiti da se kod projektovanja fazi kontrolera specifikacija performanse sistema svodi na usvajanje skupa atributa kojima se definiše okvir spoznaje neke veličine i pridruživanje odgovarajućeg fazi skupa svakom od atributa. Za svaki od ovih skupova odabere se opseg brojnih vrednosti promenljive koje odgovaraju usvojenom atributu. Zatim se odabira oblik funkcije pripadnosti (trougao, trapez, S-funkcija, P-funkcija itd.), čime se automatski svakoj brojnoj vrednosti promenljive pridružuju funkcije pripadnosti u svakom fazi skupu iz okvira spoznaje.

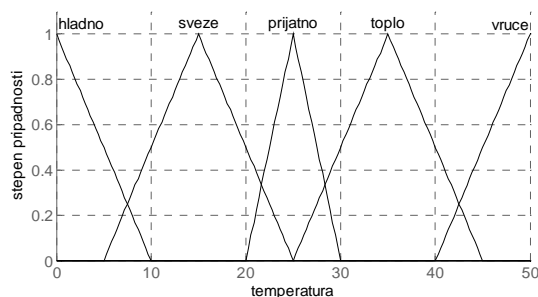
Fazi projektovanje – usvajanje okvira spoznaje

U posmatranom primeru rashladnog uređaja usvojicemo sledeće okvire spoznaje.

### Temperatura – Y

Pridružimo pojmu temperatura attribute: HLADNO, SVEŽE, PRIJATNO, TOPLO i VRUĆE.

To znači da će okvir spoznaje temperature Y biti definisan kao



SL. 7-39 OKVIR SPOZNAJE POJMA TEMPERATURA

$$Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5\}$$

gde skupovi  $Y_i$  imaju sledeće značenje

$Y_1$  – HLADNO ( $t < 10^\circ\text{C}$ )

$Y_2$  – SVEŽE ( $10^\circ\text{C} < t < 25^\circ\text{C}$ )

$Y_3$  – PRIJATNO ( $20^\circ\text{C} < t < 30^\circ\text{C}$ )

$Y_4$  – TOPLO ( $25^\circ\text{C} < t < 45^\circ\text{C}$ )

$Y_5$  – VRUĆE ( $t > 40^\circ\text{C}$ )

Ukoliko se opredelimo za trougaone fazi skupove onda oni imaju izgled kao što je to prikazano na Sl. 7-39.

### Diskretni fazi skupovi

Ukoliko želimo da okvir spoznaje predstavimo diskretnim fazi skupovima onda je neophodno da usvojimo granice pojma za koji se definiše okvir spoznaje, kao i inkrement promene (ukoliko je promenljiva kontinualna).

Neka se temperatura prostorije kreće u opsegu od 0°C do 50°C i neka je korak promene temperature  $\Delta y = 5^\circ\text{C}$ . U skladu sa ovim, svaki fazi skup biće predstavljen vektorom koji ima 11 elemenata.

$$Y_i = [\mu_{Y_i}(0) \mu_{Y_i}(5) \mu_{Y_i}(10) \dots \mu_{Y_i}(45) \mu_{Y_i}(50)]$$

Polazeći od usvojenog okvira spoznaje (Sl. 7-39) fazi skupovi su definisani na sledeći način

$$Y_1 = [1 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$Y_2 = [0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$Y_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$Y_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0]$$

$$Y_5 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1]$$

(7.49)

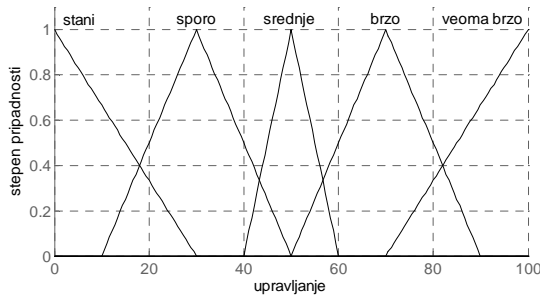
**Kontinualni fazi skupovi**

U skladu sa usvojenim okvirom spoznaje kontinualni fazi skupovi opisani su sledećim relacijama

$$\begin{aligned}
 Y_1 : \mu_{Y_1}(y) &= \begin{cases} 1 & y < 0 \\ -0.1(y-10) & 0 \leq y \leq 10; \\ 0 & y > 10 \end{cases}; & Y_2 : \mu_{Y_2}(y) &= \begin{cases} 0 & y < 5 \\ 0.1(y-5) & 5 \leq y \leq 15 \\ -0.1(y-25) & 15 \leq y \leq 25 \\ 0 & y > 25 \end{cases} \\
 Y_3 : \mu_{Y_3}(y) &= \begin{cases} 0 & y < 20 \\ 0.2(y-20) & 20 \leq y \leq 25; \\ -0.2(y-30) & 25 \leq y \leq 30; \\ 0 & y > 30 \end{cases}; & Y_4 : \mu_{Y_4}(y) &= \begin{cases} 0 & y < 25 \\ 0.1(y-25) & 25 \leq y \leq 35 \\ -0.1(y-45) & 35 \leq y \leq 45 \\ 0 & y > 45 \end{cases} \\
 Y_5 : \mu_{Y_5}(y) &= \begin{cases} 0 & y < 40 \\ 0.1(y-40) & 40 \leq y \leq 50 \\ 1 & y > 50 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

**Brzina motora - U**

Pridružimo pojmu brzina motora sledeće atribute: STANI, SPORO, SREDNJE, BRZO i VEOMA BRZO. Pretpostavimo pri tome da se pobuda motora zadaje kao procenat od maksimalne vrednosti pobude. To znači da će okvir spoznaje temperature U biti definisan kao



SL. 7-40 OKVIR SPOZNAJE POJMA BRZINA MOTORA

$$U = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5\}$$

gde skupovi  $U_i$  imaju sledeće značenje

- $U_1$  – STANI ( $u < 30$ )
- $U_2$  – SPORO ( $10 < u < 50$ )
- $U_3$  – SREDNJE ( $40 < u < 60$ )
- $U_4$  – BRZO ( $50 < u < 90$ )
- $U_5$  – VEOMA BRZO ( $u > 70$ )

Ako se opredelimo za trougaone fazi skupove onda oni imaju izgled kao što je to prikazano na Sl. 7-40.

**Diskretni fazi skupovi**

Budući da je usvojeno da su brzina motora izražava u procentima od maksimalne brzine, ona se kreće u opsegu od 0 do 100. Ako se kao korak promene brzine usvoji  $\Delta u=10$ , onda je diskretni fazi skup predstavljen vektorom koji ima 11 elemenata.

$$U_i = [\mu_{U_i}(0) \mu_{U_i}(10) \mu_{U_i}(20) \dots \mu_{U_i}(90) \mu_{U_i}(100)]$$

U skladu sa usvojenim okvirom spoznaje, diskretni fazi skupovi su definisani na sledeći način.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= [ 1 \quad 0.66 \quad 0.33 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] \\
 U_2 &= [ 0 \quad 0 \quad 0.50 \quad 1 \quad 0.50 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] \\
 U_3 &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.00 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] \\
 U_4 &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.50 \quad 1 \quad 0.50 \quad 0 \quad 0 ] \\
 U_5 &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.33 \quad 0.66 \quad 1 ]
 \end{aligned} \tag{7.51}$$

**Kontinualni fazi skupovi**

Prema okviru spoznaje na Sl. 7-40, kontinualni fazi skupovi su dati sledećim relacijama.

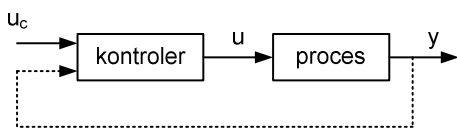
$$U_1 : \mu_{U_1}(u) = \begin{cases} 1 & u < 0 \\ -\frac{1}{30}(u-30) & 0 \leq u \leq 30; \\ 0 & u > 30 \end{cases}; \quad U_2 : \mu_{U_2}(u) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ 0.05(u-10) & 10 \leq u \leq 30 \\ -0.05(u-50) & 30 \leq u \leq 50 \\ 0 & u > 50 \end{cases}$$

$$U_3 : \mu_{U_3}(u) = \begin{cases} 0 & u < 40 \\ 0.1(u-40) & 40 \leq u \leq 50 \\ -0.1(u-60) & 50 \leq u \leq 60 \\ 0 & u > 60 \end{cases}; \quad U_4 : \mu_{U_4}(u) = \begin{cases} 0 & u < 50 \\ 0.05(u-50) & 50 \leq u \leq 70 \\ -0.05(u-90) & 70 \leq u \leq 90 \\ 0 & u > 90 \end{cases} \quad (7.52)$$

$$U_5 : \mu_{U_5}(u) = \begin{cases} 0 & u < 70 \\ \frac{1}{30}(u-70) & 70 \leq u \leq 100 \\ 1 & u > 100 \end{cases}$$

### 7.4.3 ODREĐIVANJE FUNKCIJE UPRAVLJANJA (UZ IDENTIFIKACIJU MATEMATIČKOG MODELA)

#### KLASIČAN PRISTUP PROJEKTOVANJU

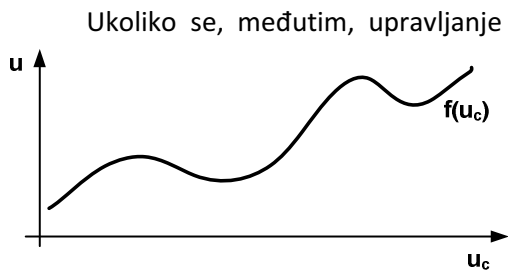


SL. 7-41 UPRAVLJANJE U OTVORENOJ ILI ZATVORENOJ SPREZI

Nezavisno od toga da li se sistemom upravlja u zatvorenoj ili otvorenoj sprezi klasična teorija upravljanja pretpostavlja poznavanje matematičkog modela procesa na osnovu koga se određuje zakon upravljanja.

Ukoliko se sistemom upravlja u otvorenoj sprezi onda zakon upravljanja definiše preslikavanje referentnog ulaznog signala  $u_c$  u upravljački signal  $u$

$$u_c \rightarrow u \Rightarrow u = f(u_c) \quad (7.53)$$



SL. 7-42 TRAJEKTORIJA UPRAVLJANJA

Ukoliko se, međutim, upravljanje realizuje u zatvorenoj sprezi tada zakon upravljanja definiše preslikavanje signala greške u upravljački signal

$$e \rightarrow u \Rightarrow u = f(e), \quad e = \varphi(u_c, y) \quad (7.54)$$

Nezavisno, dakle, od toga da li se upravlja u otvorenoj ili u zatvorenoj sprezi projektovanje kontrolera može da se interpretira kao određivanje nepoznate funkcije preslikavanja  $f$ , odnosno kao aproksimacija nepoznate funkcije (Sl. 7-42).

Kao što je već istaknuto u klasičnoj teoriji upravljanja razvijen je čitav niz metoda određivanja funkcije  $f$ . Sve ove metode su zasnovane na poznavanju matematičkog modela procesa, tako da se one zajednički označavaju i kao – estimacija na osnovu modela.

#### Klasično projektovanje

U posmatranom primeru, temperaturski proces bi mogao biti modeliran kao sistem prvog reda sa astatizmom i transportnim kašnjenjem, što znači da je odgovarajuća funkcija prenosa

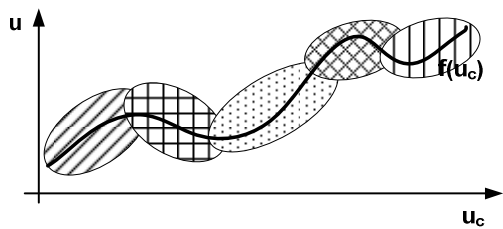
$$G_p(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(1+sT_p)}$$

pri čemu se parametri  $K$ ,  $\tau$ , i  $T_p$  određuju eksperimentalno snimanjem odziva procesa za različite karakteristične pobude.

Budući da je temperaturni proces, po svojoj prirodi nelinearan, izvesno je da bi ovaj model opisivao proces samo u okolini odabrane radne tačke. Činjenica da model samo aproksimira proces prouzrokuje niz problema u samoj realizaciji upravljanja koji će se rešavati odgovarajućim metodama, veću zavisnosti od toga kako se kontroler bude ponašao kada bude implementiran na procesu. Poseban problem će, svakako, predstavljati i transportno kašnjenje.

Često se, u nastojanju da se popravi performansa sistema, pokušava sa određivanjem preciznijeg modela procesa, što onda nužno dovodi i do složenijeg algoritma upravljanja.

## FAZI PRISTUP PROJEKTOVANJU



SL. 7-43 FAZI APROKSIMACIJA TRAJEKTORIJE UPRAVLJANJA

Polazeći od stava da je trajektorija dobijena na osnovu matematičkog modela isuviše detaljan opis sistema, fazi na svojevrsan način proširuje prostor u kome se određuje upravljanje. Nepoznata trajektorija upravljanja se aproksimira pravilima koje se dobijaju na osnovu iskustva operatera u vođenju posmatranog procesa. Ova pravila određuju niz konturnih dijagrama fazi relacija korelacionog minimuma ili korelacionog proizvoda, kao što je to ilustrovano na Sl. 7-43. Gruba okvirna pravila daju velike površine, precizna pravila daju male površine,

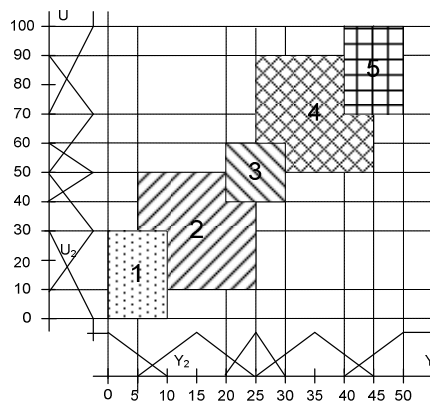
ali je izvesno da ona uvek u potpunosti obuhvataju željenu trajektoriju upravljanja<sup>1</sup>.

U skladu sa izloženim pristupom, određivanje funkcije upravljanja fazi kontrolera sastoji se iz tri koraka:

- specifikacija pravila
- kodiranje pravila - određivanje fazi modela kontrolera
- donošenje odluke – određivanje izlaza kontrolera

### Specifikacija pravila

Samo se po sebi razume da nije moguće definisati neki opšti metod za specifikaciju pravila. Pravila izražavaju koju vrstu pobude, pri trenutnom izlazu procesa, treba primeniti na proces da bi se dobilo željeno ponašanje. U principu se može reći da se pravila formiraju na osnovu logike rada procesa ili sistema koji se posmatra. Pri tome je intuitivno jasno da će pravila biti utoliko adekvatnije formulisana ukoliko je iskustvo u praktičnom radu sistema veće.



SL. 7-44 VIZUELIZACIJA USVOJENIH PRAVILA

### Fazi projektovanje

U posmatranom primeru sistema za hlađenje sama priroda rada sistema diktira pravila njegovog upravljanja. Po logici stvari, ako je u prostoriji hladno, sistem za hlađenje neće raditi, a ako je vruće on treba da radi maksimalnom snagom. U skladu sa time pravila se mogu formulisati na sledeći način.

- **ako je Y hladno tada je U stani**
- **ako je Y sveže tada je U sporo**
- **ako je Y prijatno tada je U srednje**
- **ako je Y toplo tada je U brzo**
- **ako je Y vruće tada je U veoma brzo**

Skup svih definisanih pravila utvrđuje postojanje korelacije između pojedinih fazi skupova ulaza i izlaza, Kao što je to ilustrovano na Sl. 7-44).

Teško je očekivati da će prvi pokušaj formulisanja pravila dati zadovoljavajuće rezultate. Praksa pokazuje da je, najčešće neophodno da se pravila doteruju eksperimentima na samom procesu. U zavisnosti od obima i vrste problema često je potrebno da prođe i nekoliko meseci dok se pravila ne doteraju tako da kontroler ima zadovoljavajuću performansu<sup>2</sup>. Pored promene pravila, često se pristupa i redefinisanju okvira spoznaje u smislu uvođenja drugačijeg broja

<sup>1</sup> FAT teoremu je definisao i dokazao B.Kosko 1990 godine. Detaljno je izložena u radu "Fuzzy Systems as Universal Approximators", Proc. of the First IEEE Conf. on Fuzzy Systems (FUZZ-92), 1153-62, San Diego, March 1992.

<sup>2</sup> Fazi kamere, mašine za pranje veša i slični aparati imaju samo po nekoliko fazi pravila, za čije doterivanje je inženjerima bilo potrebno nekoliko meseci. Podezmnna železnica u gradu Sendai u Japanu koristi 54 pravila za čije doterivanje je bilo potrebno nekoliko godina.

atributa ili redefinisana njima odgovarajućih fazi skupova. Alternativa ovom pristupu je korišćenje neuralnih mreža koje kroz proces samoobučavanja generišu fazi pravila.

Na ovom mestu bi se moglo postaviti pitanje koja je prednost u korišćenju fazi kontrolera ukoliko se njegova pravila tako mukotrpno doteruju? Iako se opšti odgovori na ovu vrstu pitanja teško mogu dati, činjenica da jedanput podešen fazi kontroler efikasno upravlja složenim procesima u veoma širokom dijapazonu radnih uslova, koje ne pokriva nijedan klasičan kontroler nesumnjivo opravdava njegovo korišćenje.

### Kodiranje pravila

Već je istaknuto da fazi pravilo zapravo određuje relaciju nad dva fazi skupa. To znači da se svakom definisanom pravilu mora pridružiti relacija korelacionog minimuma ili korelacionog proizvoda između fazi skupa  $Y_j$  koji izražava uslov  $i$  skupa  $U_k$  koji izražava posledicu datog pravila. Otuda se  $i$ -to pravilo kodira na sledeći način

$$S_{\min}^i = Y_j^T \circ U_k \quad (7.55)$$

$$S_{\text{prod}}^i = Y_j^T \bullet U_k \quad (7.56)$$

Podsetimo se pri tome da je pokazano da konturni dijagrami ovih relacija obuhvataju jednu površinu, odnosno čine jedan deo fazi upravljачke trajektorije.

Samo se po sebi razume da ukoliko sistem ima više ulaznih promenljivih pravilo može da bude složenije. Tako bi se, na primer, izvesni efekti PID regulatora mogli opisati sledećim pravilima:

**Ako je greška mala i ako se brzo menja tada je upravljanje malo**

**Ako je greška velika ili se sporo menja tada je upravljanje veliko**

Način na koji su ova pravila iskazana ukazuje na to da će se pre uspostavljanja relacije nad ulaznim fazi skupovima (greška i brzina promene greške) izvršiti operacija preseka ("i"), odnosno unije ("ili"). U skladu sa time relacija kojom se kodira pravilo, u opštem slučaju, definiše se na sledeći način.

$$S^i = \left( \bigcap_{\ell} Y_{\ell,j}^T \right) \otimes U_k \text{ ukoliko su uslovi konjunktivni} \quad (7.57)$$

$$S^i = \left( \bigcup_{\ell} Y_{\ell,j}^T \right) \otimes U_k \text{ ukoliko su uslovi disjunktivni}$$

gde  $\cap$  označava bilo koju  $t$ -normu, a  $\cup$  bilo koju  $s$ -normu.

Budući da svako pravilo sadrži odgovarajuću posledicu, odnosno zahtev upućen kontroleru, izvesno je da se sva pravila moraju na neki način grupisati jednom agregatnom relacijom. Imajući na umu da se pravila međusobno ne isključuju, već se dopunjuju, prirodno je da se njihova agregacija vrši pomoću operacije unije. To znači da se grupno pravilo dobija pomoću sledeće relacije

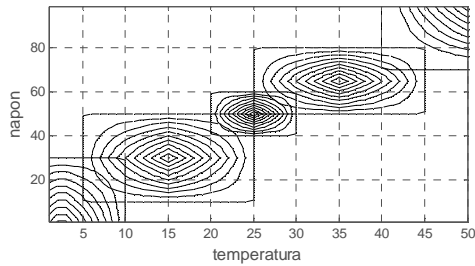
$$S = \bigcup_i S^i \quad (7.58)$$

gde  $U$  označava bilo koju  $s$ -normu. Kao što je već rečeno, fazi matrica  $S$ , odnosno odgovarajuća funkcija dve promenljive, koja se dobija kao rezultat ove relacije predstavlja, zapravo, *fazi model* kontrolera.

### Fazi projektovanje

Konturni dijagrami svih fazi relacija kojima su predstavljena data pravila čine fazi trajektoriju. U slučaju korišćenja korelacionog proizvoda ova trajektorija ima izgled prikazan na Sl. 7-45. Odgovarajući skupovi  $S_i$  prikazani su na Sl. 7-46.

Sve tačke na trajektoriji određuju se primenom relacije za korelacioni proizvod. Ako se na primer uoči tačka (7,15) onda se sa slike Sl. 7-45 vidi da je ona pokrivena pravilom broj 1 i pravilom broj 2. Ovo se, naravno, vidi i iz analitičkih izraza koji odgovaraju definisanim pravilima. Za kodiranje pomoću korelacionog



proizvoda se dobija

$$\mu_{S_{prod}^1}(7,15) = \mu_{Y_1}(7) \cdot \mu_{U_1}(15) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$$

$$\mu_{S_{prod}^2}(7,15) = \mu_{Y_2}(7) \cdot \mu_{U_2}(15) = 0.2 \cdot 0.25 = 0.05$$

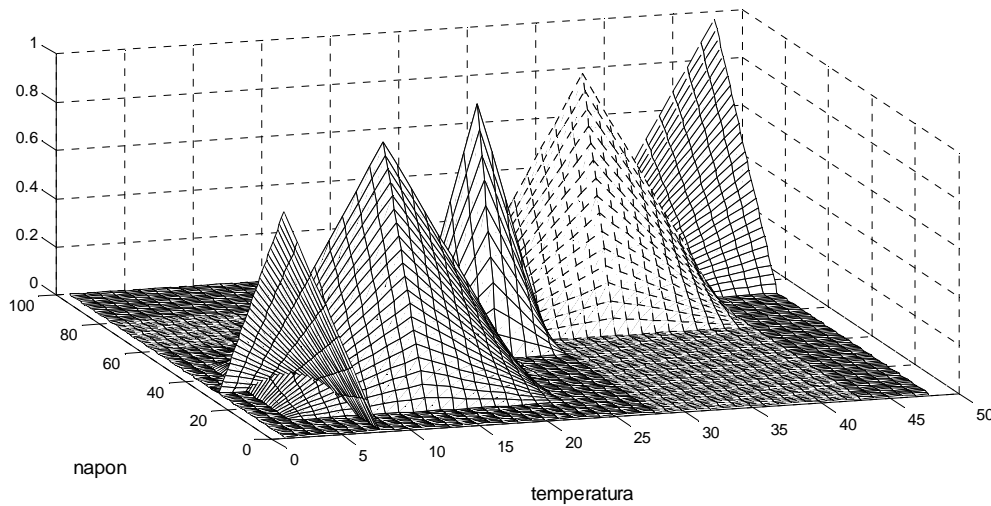
$$\mu_{S_{prod}^i}(7,15) = \mu_{Y_i}(7) \cdot \mu_{U_i}(15) = 0; i = 3, 4, 5$$

U skladu sa time agregatna relacija je određena kao

SL. 7-45 FAZI TRAJEKTORIJA UPRAVLJANJA

$$\mu_{S_{prod}}(7,15) = \bigcup_{i=1}^5 \mu_{S_{prod}^i}(7,15) = \begin{cases} \max(\mu_{S_{prod}^1}(7,15), \mu_{S_{prod}^2}(7,15)) = 0.15 & \text{max} \\ \min(1, \mu_{S_{prod}^1}(7,15) + \mu_{S_{prod}^2}(7,15)) = 0.2 & \text{Lukašijević} \end{cases}$$

Naglasimo da se umesto maksimuma ili Lukašijevićeve relacije mogla koristiti i bilo koja druga & norma. Isto tako se umesto relacije korelacionog proizvoda mogao koristiti korelacioni minimum.



SL. 7-46 FAZI RELACIJE KOJE ODGOVARAJU USVOJENIM PRAVILIMA (KORELACIONI PROIZVOD)

**Odlučivanje (implikacija)**

Iako je formiranje fazi trajektorije nesumnjivo značajan korak u projektovanju kontrolera, preostaje ipak da se utvrdi na koji način se određuje njegov izlaz.

U odgovoru na ovo pitanje podsetimo se da je pokazano da se max- $\mathcal{T}$  kompozicija fazi skupa i relacije može interpretirati kao fazi model sistema u kome je fazi skup koji učestvuje u kompoziciji, ulaz sistema, a rezultat operacije njegov izlaz (Sl. 7-31). To zapravo znači da ako je kontroler modeliran relacijom S i ako je ulaz kontrolera neki fazi skup  $Y_a$  onda se fazi izlaz kontrolera dobija na osnovu max- $\mathcal{T}$ kompozicije

$$U_a = Y_a \otimes S \tag{7.59}$$

U skladu sa definicijom agregatne relacije (7.58) fazi izlaz kontrolera je

$$U_a = Y_a \otimes \bigcup_i S^i \tag{7.60}$$

Konačno, budući da je operacija unije asocijativna, poslednja relacija se može izraziti i kao

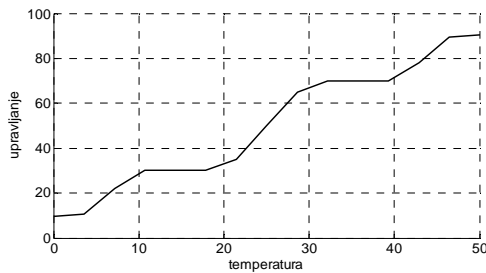
$$U_a = \bigcup_i (Y_a \otimes S^i) = \bigcup_i U_{ai} \tag{7.61}$$

gde je sa  $U_{ai}$  označen fazi skup upravljanja koji se dobija na osnovu fazi skupa ulaza  $Y_a$  uz primenu



i-tog pravila

$$U_{ai} = Y_a \otimes S^i \tag{7.62}$$



SL. 7-47 KRIVA ODLUČIVANJA

Fazi projektovanje

Ako se kao  $\tau$ -norma u max- $\tau$  kompoziciji usvoji minimum, a kao agregacija maksimum tada se uz centroid defazifikaciju dobija kriva odlučivanja prikazana na Sl. 7-47.

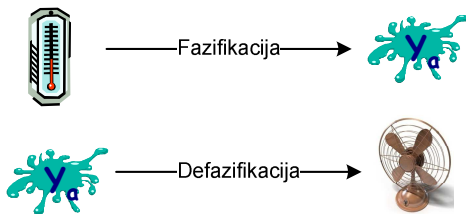
S obzirom na jednostavnost usvojenih pravila gotovo identična kriva odlučivanja dobija se ako se kao  $\tau$ -norma usvoji proizvod, a kao agregacija suma.

### 7.4.4 IMPLEMENTACIJA KONTROLERA

KLASIČNI PRISTUP

Budući da je klasični kontroler projektovan u formi matematičkog modela, odnosno dinamičke jednačine koja određuje veličinu izlaznog signala na osnovu primljenog ulaznog signala, nema nekih posebnih specifičnosti u njegovoj realizaciji. Izuzetak je svakako računarska implementacija kontrolera kod koje se mora voditi računa o usvojenom vremenu odabiranja, načinu realizacije algoritma, fenomenu navijanja itd.

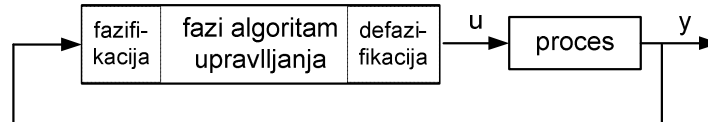
FAZI PRISTUP PROJEKTOVANJU



SL. 7-48 FAZIFIKACIJA I DEFZIFIKACIJA

Izloženi postupak formiranja fazi skupova izlaza preko modela formiranog na osnovu uzročno-posledičnih veza koje opisuju suštinu rada sistema, intuitivno je privlačan, ali je u ovom obliku neprimenljiv. Pre svega, projektovanje fazi kontrolera podrazumeva da će ulazna veličina biti predstavljena pomoću fazi skupa, dok je jedina raspoloživa informacija, dobijena merenjem realni fizički signal. Otuda je u cilju implementacije kontrolera neophodno da se izvrši pretvaranje izmerene vrednosti u ulazni fazi skup. Pored toga, svi izvršni organi konstruisani su tako da očekuju konkretni fizički signal na svom ulazu, što znači da je neophodno da se na osnovu dobijenog izlaznog fazi skupa odredi veličina upravljačkog signala kojim će se pobuditi izvršni organ (Sl. 7-48).

U skladu sa izloženim fazi kontroler se sastoji iz tri celine. Prva celina obavlja fazifikaciju ulaznog signala. U drugoj celini se korišćenjem relacije (7.61) određuje fazi skup izlaza. Konačno se u trećoj celini izvršava defazifikacija izlaznog signala čime se generiše realni signal koji predstavlja izlaz kontrolera (Sl. 7-49).



SL. 7-49 IMPLEMENTACIJA FAZI KONTROLERA

#### Fazifikacija ulaznog signala

Kao što je već rečeno izmerena vrednost  $y_a$  predstavlja jedan jasno definisan broj. Otuda se ona mora fazifikovati singleton skupom. U skladu sa time, za svako merenje  $y_a$  formira se ulazni fazi skup  $Y_a$  na sledeći način.

$$\blacksquare \text{ DISKRETNi ULAZNI FAZI SKUP } Y_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \underset{\ell-1}{1} & \underset{\ell}{0} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (7.63)$$

pri čemu je pretpostavljeno da je izmerena vrednost jednaka  $\ell$ -toj komponenti vektora koji predstavlja diskretni fazi skup  $Y$ , odnosno da je  $y_a = y_\ell$

$$\blacksquare \text{ KONTINUALNI ULAZNI FAZI SKUP } \mu_{Y_a}(y) = \begin{cases} 0 & y \neq y_a \\ 1 & y = y_a \end{cases} \quad (7.64)$$

### Fazi algoritam upravljanja - određivanje fazi skupa za jedno pravilo

Budući da fazi skup izlaza predstavlja uniju rezultata primene pojedinačnih pravila, pogodno je da se kao prvo razmotri na koji način se dobijaju fazi skupovi izlaza koji odgovaraju pojedinim pravilima.

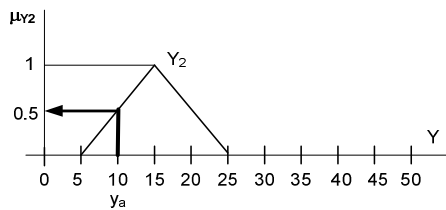
#### $U_{ai}$ - KONTINUALNI SKUPOVI

Podsetimo se da se  $\max$ - $\tau$  kompozicija primenjena na singleton skup svodi na sledeću relaciju

$$U_{ai} = Y_a \otimes S^i$$

$$U_{ai} = \mu_{U_{ai}}(y_a) = \max_{y \in Y} \{ (\mu_{Y_a}(y_a) \tau \mu_{S^i}(y_a, u)) \} = 1 \tau \mu_{S^i}(y_a, u) = \mu_{S^i}(y_a, u) \quad (7.65)$$

#### Fazi projektovanje – kontinualni izlazni fazi skup za jedno pravilo



**Sl. 7-50 STEPEN AKTIVACIJE USLOVA ZA IZMERENU PROMENLJIVU  $Y_A$**

Neka je izmerena vrednost temperature  $y_a = 10$ . Odredićemo fazi skup izlaza koji odgovara pravilu broj 2.

Za datu izmerenu vrednost odgovarajući singleton fazi skup ulaza je

$$\mu_{Y_a}(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 10 \\ 1 & y = 10 \end{cases}$$

tako da je

$$U_{a2} = \mu_{U_{a2}}(u) = \mu_{S^i}(y_a, u) = \max_y (\mu_{Y_2}(y_a) \tau \mu_{U_2}(u)) = \mu_{Y_2}(y_a) \tau \mu_{U_2}(u)$$

Za izračunavanje gornjeg izraza neophodno je da se, kao prvo odredi  $\mu_{Y_2}(y_a)$ . Na osnovu definisanog okvira spoznaje vidi se da je

$$\mu_{Y_2}(y_a) = \mu_{Y_2}(10) = 0.5$$

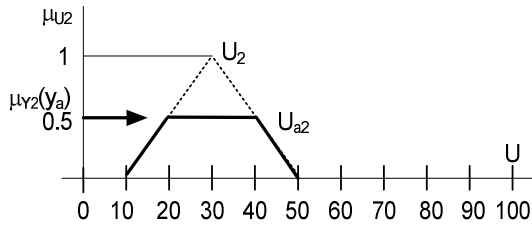
Što znači da izmerena vrednost temperature aktivira pravilo broj 2 sa stepenom 0.5. Odgovarajući fazi skup upravljanja zavisice od usvojenog izraza za  $\tau$  normu.

#### Korelacioni minimum (Sl. 7-51)

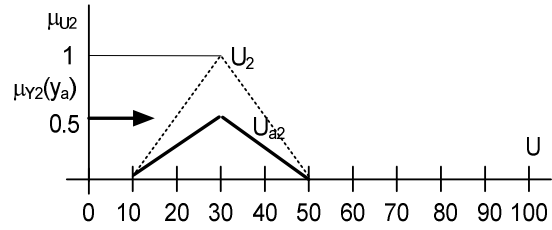
$$\mu_{U_{a2}}^{\min}(u) = \min(0.5, \mu_{U_2}(u)) = \min \left( 0.5, \begin{cases} 0 & u < 10 \\ 0.05(u-10) & 10 \leq u \leq 30 \\ -0.05(u-50) & 30 \leq u \leq 50 \\ 0 & u > 50 \end{cases} \right) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ 0.05(u-10) & 10 \leq u \leq 30 \\ 0.5 & 30 \leq u \leq 40 \\ -0.05(u-50) & 40 \leq u \leq 50 \\ 0 & u > 50 \end{cases}$$

#### Korelacioni proizvod (Sl. 7-52)

$$\mu_{U_{a2}}^{\text{prod}}(u) = 0.5 \cdot \mu_{U_2}(u) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ 0.025(u-10) & 10 \leq u \leq 30 \\ -0.025(u-50) & 30 \leq u \leq 50 \\ 0 & u > 50 \end{cases}$$



SL. 7-51 FAZI IZLAZ KAO KORELACIONI MINIMUM



SL. 7-52 FAZI IZLAZ KAO KORELACIONI PROIZVOD

$U_{a_i}$  - DISKRETNISKUPOVI

Ukoliko su skupovi diskretni, onda se fazi skup izlaza

$$U_{a_i} = (u_{ai1} \ u_{ai2} \ \dots \ u_{ain})$$

koji, za izmerenu vrednost  $y_a$  odgovara pravilu broj  $i$ , dobija kao

$$U_{a_i} = Y_a \otimes S^i ; S^i = [s_{kj}^i]$$

$$U_{a_i} = [u_{a_i,j}] ; u_{a_i,j} = \max_k \{ (y_{ak} \ t s_{kj}^i) \} = \max_k \begin{cases} 1 \ t s_{\ell j}^i & k = \ell \\ 0 \ t s_{kj}^i & k \neq \ell \end{cases} = \max_k \begin{cases} s_{\ell j}^i & k = \ell \\ 0 & k \neq \ell \end{cases} = s_{\ell j}^i$$

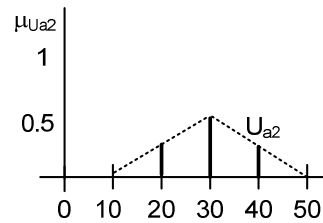
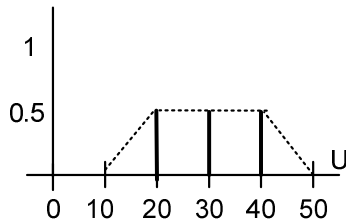
Što znači da je  $U_{a_i}$   $\ell$ -ta vrsta matrice  $S^i$ .

Fazi projektovanje – diskretni izlazni fazi skup za jedno pravilo

Neka je izmerena vrednost izlaza procesa  $y_a=10$ . Tada je odgovarajući fazi skup ulaza

$$Y_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ell=3 \end{bmatrix}$$

što znači da je fazi skup  $U_{a_i}$  treća vrsta matrice  $S_i$ .



SL. 7-53 FAZI KORELACIONI MINIMUM I PROIZVOD ZA DISKRETNE SKUPOVE

*Korelacioni minimum*

Za pravilo broj 2 dobija se

$$S_{\min}^2 = Y_2^T \circ U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \circ [0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 0 \ \dots \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Otuda je

$$U_{a_2}^{\min} = [0 \ 0 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

*Korelacioni proizvod*

Za pravilo broj 2 dobija se

$$S_{\text{prod}}^2 = Y_2^T \bullet U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \bullet [0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 0.5 \ 0 \ \dots \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow$$

tako da je

$$U_{a2}^{\text{prod}} = [0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.25 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \leftarrow$$

### Fazi algoritam upravljanja - Agregacija izlaznih fazi skupova

Kao što je već rečeno izlazni fazi skup se dobija agregacijom svih izlaznih skupova (odluka) koje odgovaraju pojedinačnim pravilima (7.61). To zapravo znači da se u svakom trenutku sva pravila aktiviraju, ali samo do određenog stepena.

#### Izmerena temperatura $y_a=25$

$$\mu_{S_i}(25, u) = \begin{cases} 0 & i \neq 3 \\ \mu_{S_3}(25, u) & i = 3 \end{cases} \Rightarrow \mu_{U_a}(u) = \bigcup_{i=1}^5 \mu_{S_i}(25, u) = \mu_{S_3}(25, u)$$

Očigledno je da će biti aktivirano samo jedno pravilo, pri čemu je stepen aktivacije određen funkcijom  $\mu_{S_3}(25, u)$  ..

Pošto je  $\mu_{Y_3}(25) = 1$  biće

$$\mu_{S_3}(25, u) = \mu_{Y_3}(25) \mu_{U_3}(u) = 1 \mu_{U_3}(u) = \mu_{U_3}(u) \Rightarrow \mu_{U_a}(u) = \mu_{U_3}(u) \Rightarrow U_a = U_3$$

#### Izmerena temperatura $y_a=23$

Iz vrednosti funkcije pripadnosti u okviru spoznaje, koje odgovaraju ovoj temperaturi

$$\mu_{Y_i}(23) = \begin{cases} 0 & i \neq 2, 3 \\ -0.1(23-25) = 0.2 & i = 2 \\ 0.2(23-20) = 0.6 & i = 3 \end{cases}$$

vidi se da su aktivirana pravila broj 2 i 3. Stepen aktivacije svakog od njih određuje partikularni fazi izlaz. Agregacijom svih ovih izlaznih skupova dobija se konačni oblik izlaza. Ovaj postupak je ilustrovan na Sl. 7-54, gde je korišćena min-max operacija.

Za određivanje izlaznog skupa neophodno je da se prvo utvrde fazi relacije koje odgovaraju izmerenoj vrednosti ulaza.

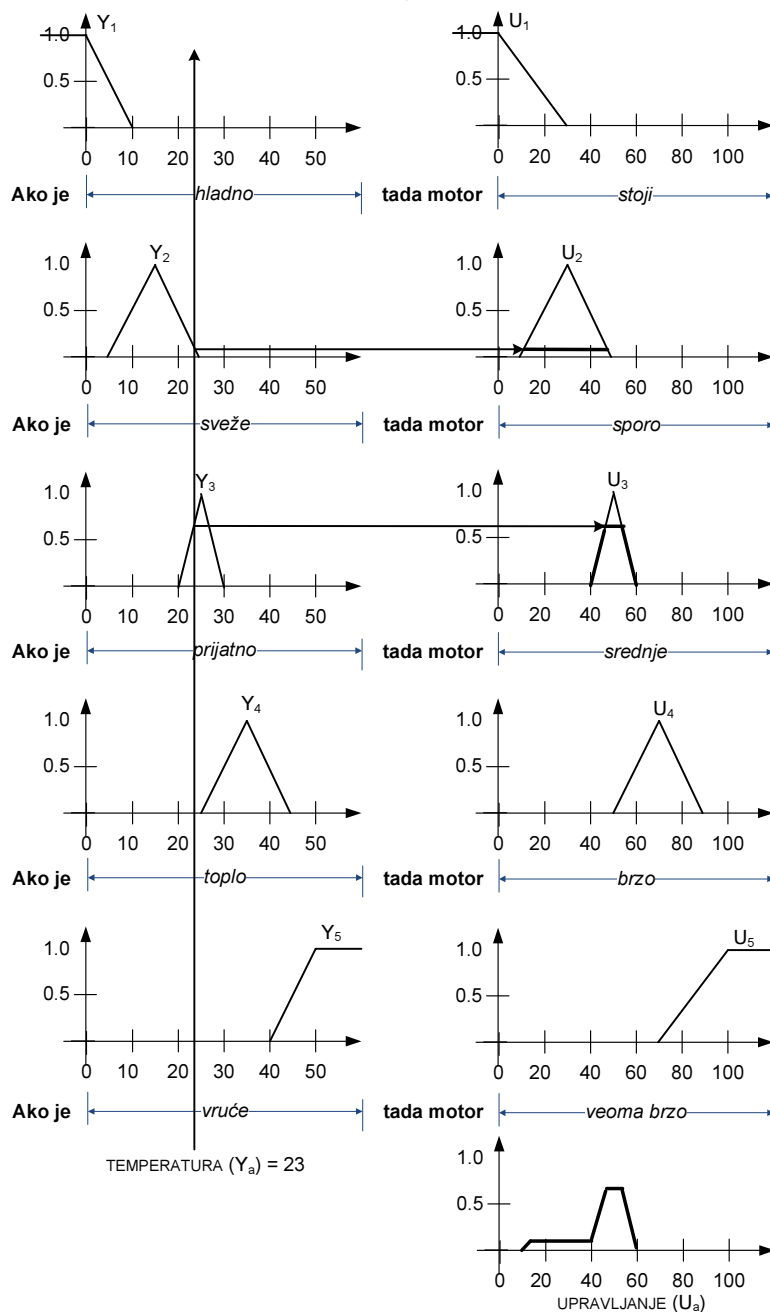
$$\mu_{S_i}(23, u) = \begin{cases} 0 & i \neq 2, 3 \\ 0.2 \mu_{U_2}(u) & i = 2 \\ 0.6 \mu_{U_3}(u) & i = 3 \end{cases}$$

$$\mu_{S^2}(23, u) = 0.2 \mu_{U_2}(u) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ (0.2 \mu_{U_2}(u)) & 10 \leq u \leq 30 \\ (0.2 \mu_{U_2}(u) - 0.05(u-50)) & 30 \leq u \leq 50 \\ 0 & u > 50 \end{cases}$$

$$\mu_{S^3}(23, u) = 0.6 \mu_{U_3}(u) = \begin{cases} 0 & u < 40 \\ (0.6 \mu_{U_3}(u)) & 40 \leq u \leq 50 \\ (0.6 \mu_{U_3}(u) - 0.1(u-60)) & 50 \leq u \leq 60 \\ 0 & u > 60 \end{cases}$$

U skladu sa time fazi skup izlaza je

$$\mu_{U_a}(u) = \bigcup_{i=1}^5 \mu_{S_i}(23, u) = \mu_{S^2}(23, u) \triangleright \mu_{S^3}(23, u) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ (0.2t - 0.05 \cdot (u - 10)) & 10 \leq u \leq 30 \\ (0.2t - 0.05 \cdot (u - 50)) & 30 \leq u \leq 40 \\ (0.2t - 0.05 \cdot (u - 50)) \wp (0.6t - 0.1 \cdot (u - 40)) & 40 \leq u \leq 50 \\ (0.6t - 0.1 \cdot (u - 60)) & 50 \leq u \leq 60 \\ 0 & u > 60 \end{cases}$$



Agregacija

SL. 7-54 ODLUČIVANJE ZA  $Y_a=23$

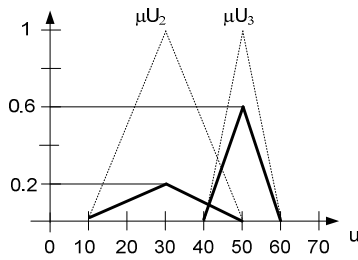
Konkretne vrednosti fazi skupa izlaza zavise od načina na koji se odaberu  $\wp$  i  $t$  norme.

**$t$ -norma proizvod**

Izlazni fazi skup se formira primenom  $\wp$ -norme na dva fazi skupa dobijena iz drugog i trećeg pravila uz uslov da je  $t$ -norma proizvod (Sl. 7-55).

Tačka preseka dva fazi skupa određuje se iz izraza

$$-0.01(u - 50) = 0.06(u - 40) \Rightarrow 0.5 - 0.01u = 0.06u - 2.4 \Rightarrow 0.07u = 2.9 \Rightarrow u = 41.429$$



**Sl. 7-55 FAZI SKUPOVI KOJI FORMIRAJU IZLAZNI FAZI SKUP -  $\mathcal{T}$ -NORMA PROIZVOD**

Funkcija pripadnosti fazi skupa izlaza dobija se iz sledeće relacije

$$\mu_{U_a}(u) = 0.2 \cdot \mu_{U_2}(u) \mathcal{S} 0.6 \cdot \mu_{U_3}(u) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ 0.01 \cdot (u - 10) & 10 \leq u \leq 30 \\ -0.01 \cdot (u - 50) & 30 \leq u \leq 40 \\ (-0.01(u - 50)) \mathcal{S} (0.06(u - 40)) & 40 \leq u \leq 50 \\ -0.1 \cdot (u - 60) & 50 \leq u \leq 60 \\ 0 & u > 60 \end{cases}$$

Konačni oblik fazi skupa zavisi od izbora  $\mathcal{S}$ -norme.

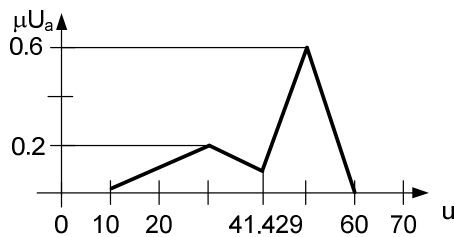
- $\mathcal{L}$ -norma proizvod,  $\mathcal{S}$ -norma maksimum (Sl. 7-56)

$$\mu_{U_a}(u) = \max(0.2 \cdot \mu_{U_2}(u), 0.6 \cdot \mu_{U_3}(u)) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ 0.01 \cdot (u - 10) & 10 \leq u \leq 30 \\ -0.01 \cdot (u - 50) & 30 \leq u \leq 40 \\ \max(-0.01 \cdot (u - 50), (0.06 \cdot (u - 40))) & 40 \leq u \leq 50 \\ -0.06 \cdot (u - 60) & 50 \leq u \leq 60 \\ 0 & u > 60 \end{cases}$$

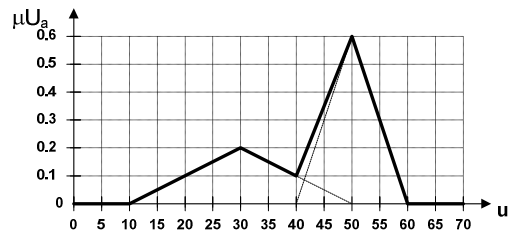
$$\max(-0.01(u - 50), (0.06(u - 40))) = \begin{cases} -0.01(u - 50) & 40 \leq u \leq 41.429 \\ 0.06(u - 40) & 41.429 \leq u \leq 50 \end{cases}$$

- $\mathcal{L}$ -norma proizvod,  $\mathcal{S}$ -norma Lukašijevič (Sl. 7-57)

$$\mu_{U_a}(u) = \max(1, 0.2 \cdot \mu_{U_2}(u) + 0.6 \cdot \mu_{U_3}(u)) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ 0.01 \cdot (u - 10) & 10 \leq u \leq 30 \\ -0.01 \cdot (u - 50) & 30 \leq u \leq 40 \\ -0.01 \cdot (u - 50) + 0.06 \cdot (u - 40) = 0.05 \cdot u - 1.9 & 40 \leq u \leq 50 \\ -0.1 \cdot (u - 60) & 50 \leq u \leq 60 \\ 0 & u > 60 \end{cases}$$



**Sl. 7-56 FAZI IZLAZNI SKUP -  $\mathcal{T}$ -NORMA PROIZVOD,  $\mathcal{S}$ -NORMA MAKSIMUM**



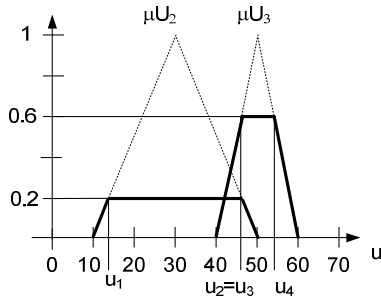
**Sl. 7-57 FAZI IZLAZNI SKUP -  $\mathcal{T}$ -NORMA PROIZVOD,  $\mathcal{S}$ -NORMA LUKAŠIJEVIČ**

**$\mathcal{L}$ -norma minimum**

Dva izlazna fazi skupa imaju izgled prikazan na Sl. 7-58. Tačke preseka ovih skupova određuju se iz sledećih relacija

$$0.05 \cdot (u - 10) = 0.2 \Rightarrow u_1 = \frac{0.7}{0.05} = 14; \quad -0.05 \cdot (u - 50) = 0.2 \Rightarrow u_2 = \frac{2.3}{0.05} = 46$$

$$0.1 \cdot (u - 40) = 0.6 \Rightarrow u_3 = \frac{4.6}{0.1} = 46; \quad -0.1(u - 60) = 0.6 \Rightarrow u_4 = \frac{5.4}{0.1} = 54$$



**SL. 7-58 FAZI SKUPOVI KOJI FORMIRAJU IZLAZNI FAZI SKUP - T-NORMA MIN**

U skladu sa time, agregacija fazi skupa izlaza određena je relacijom

$$\mu_{U_a}(u) = \min(0.2, \mu_{U_2}(u)) \& \min(0.6, \mu_{U_3}(u)) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ 0.05 \cdot (u - 10) & 10 \leq u \leq 14 \\ 0.2 & 14 \leq u \leq 40 \\ 0.2 \& (0.1 \cdot (u - 40)) & 40 \leq u \leq 46 \\ (-0.05 \cdot (u - 50)) \& 0.6 & 46 \leq u \leq 50 \\ 0.6 & 50 \leq u \leq 54 \\ -0.1 \cdot (u - 60) & 54 \leq u \leq 60 \\ 0 & u > 60 \end{cases}$$

- *t*-norma minimum, *s*-norma maksimum (Sl. 7-59)

Tačka preseka

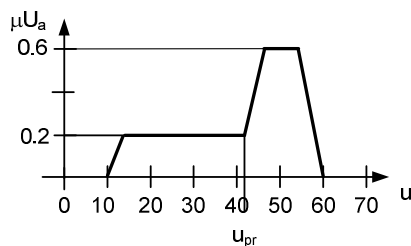
$$0.1(u - 40) = 0.2 \Rightarrow u_{pr} = 42$$

Funkcija pripadnosti izlaznog skupa

$$\mu_{U_a}(u) = \max(\min(0.2, \mu_{U_2}(u)), \min(0.6, \mu_{U_3}(u))) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ 0.05 \cdot (u - 10) & 10 \leq u \leq 14 \\ 0.2 & 14 \leq u \leq 42 \\ 0.1 \cdot (u - 40) & 42 \leq u \leq 46 \\ 0.6 & 46 \leq u \leq 54 \\ -0.1 \cdot (u - 60) & 54 \leq u \leq 60 \\ 0 & u > 60 \end{cases}$$

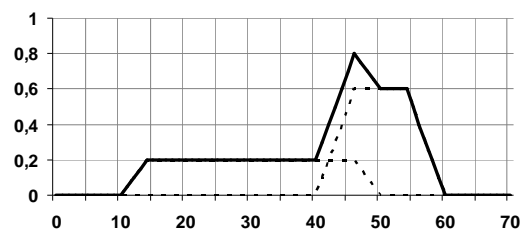
- *t*-norma minimum, *s*-norma Lukašijević (Sl. 7-60)

$$\mu_{U_a}(u) = \max(1, \min(0.2, \mu_{U_2}(u)) + \min(0.6, \mu_{U_3}(u))) = \begin{cases} 0 & u < 10 \\ 0.05 \cdot (u - 10) & 10 \leq u \leq 14 \\ 0.2 & 14 \leq u \leq 40 \\ 0.2 + (0.1 \cdot (u - 40)) & 40 \leq u \leq 46 \\ (-0.05 \cdot (u - 50)) + 0.6 & 46 \leq u \leq 50 \\ 0.6 & 50 \leq u \leq 54 \\ -0.1 \cdot (u - 60) & 54 \leq u \leq 60 \\ 0 & u > 60 \end{cases}$$



**SL. 7-59 FAZI IZLAZNI SKUP – T-NORMA MINIMUM, S-NORMA**

**MAKSIMUM**

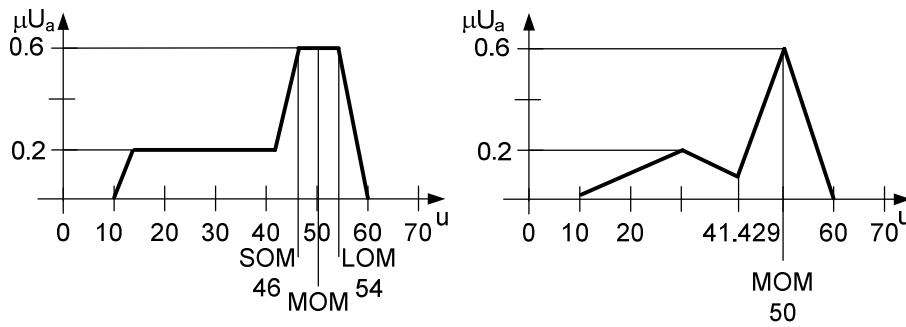


**SL. 7-60 FAZI IZLAZNI SKUP – T-NORMA MINIMUM, S-NORMA**

**LUKAŠIJEVIČ**

*Defazifikacija – određivanje vrednosti upravljačkog signala*

Na Sl. 7-61 su prikazane sve tri vrste defazifikacije za izlazne fazi skupove dobijene min-max (Sl. 7-59) i proizvod-max metodom (Sl. 7-56)



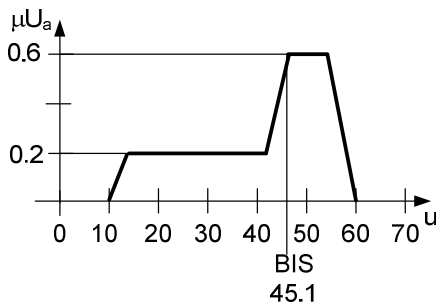
SL. 7-61 DEFAZIFIKACIJA NA OSNOVU MAKSIMUMA

Da bi se ilustrovao postupak određivanja bisektrise posmatračće se izlazni fazi skup dobijen min-max metodom (Sl. 7-59). S obzirom na oblik funkcije pripadnosti koja definiše izlazni fazi skup ukupna površina je

$$\int_{10}^{60} \mu_{U_a}(u)du = \int_{10}^{14} \mu_{U_a}(u)du + \int_{14}^{42} \mu_{U_a}(u)du + \int_{42}^{46} \mu_{U_a}(u)du + \int_{46}^{54} \mu_{U_a}(u)du + \int_{54}^{60} \mu_{U_a}(u)du =$$

$$= \frac{4 \cdot 0.2}{2} + 28 \cdot 0.2 + \frac{0.2+0.6}{2} \cdot 4 + 8 \cdot 0.6 + \frac{6 \cdot 0.6}{2} = 0.4 + 5.6 + 1.6 + 4.8 + 1.8 = 14.2$$

Iz dobijenog rezultata se vidi da se polovina ove površine (bisektrisa) nalazi na segmentu [42,46] kome odgovara vrednost integrala od 1.6. Sada se može postaviti uslov Error! Reference source not found. iz koga se dobija



SL. 7-62 DEFAZIFIKACIJA BISEKTRISOM

$$0.4 + 5.6 + \int_{42}^{u_0} \mu_{U_a}(u)du = \int_{u_0}^{46} \mu_{U_a}(u)du + 4.8 + 1.8$$

$$6 + \int_{42}^{u_0} 0.1(u - 40)du = \int_{u_0}^{46} 0.1(u - 40)du + 6.6$$

$$\frac{0.1u_0^2}{2} - \frac{0.1 \cdot 42^2}{2} - 4(u_0 - 42) =$$

$$= \frac{0.1 \cdot 46^2}{2} - \frac{0.1u_0^2}{2} - 4(46 - u_0) + 0.6$$

$$u_0^2 - 80u_0 + 1574 = 0 \Rightarrow u_0 = 45.099$$

Centar gravitacije za izlazni fazi skup dobijen min-max metodom (Sl. 7-59) dobija se na sledeći način.



$$\int_{10}^{60} \mu_{U_a}(u) du = 14.2$$

$$\int_{10}^{60} u \cdot \mu_{U_a}(u) du = \int_{10}^{14} u \cdot 0.05(u-10) du + \int_{14}^{42} 0.2u du + \int_{42}^{46} u \cdot 0.1(u-40) du +$$

$$+ \int_{46}^{54} 0.6u du - \int_{54}^{60} u \cdot 0.1(u-60) du = 573.6$$

$$u_0 = \frac{\int_{10}^{60} u \cdot \mu_{U_a}(u) du}{\int_{10}^{60} \mu_{U_a}(u) du} = \frac{573.6}{14.2} = 40.4$$

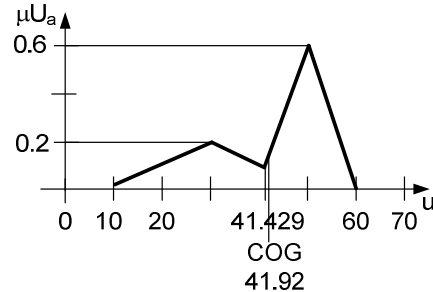
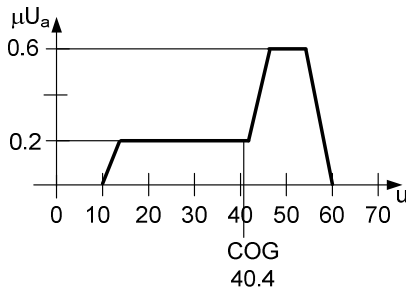
Centar gravitacije za izlazni fazi skup dobijen proizvod-max metodom (Sl. 7-56) je

$$\int_{10}^{60} \mu_{U_a}(u) du = 9.5712$$

$$\int_{10}^{60} u \cdot \mu_{U_a}(u) du = \int_{10}^{30} u \cdot 0.01(u-10) du - \int_{30}^{41.429} u \cdot 0.01(u-50) du +$$

$$+ \int_{41.429}^{50} u \cdot 0.06(u-40) du - \int_{50}^{60} u \cdot 0.06(u-60) du = 401.2245$$

$$u_0 = \frac{\int_{10}^{60} u \cdot \mu_{U_a}(u) du}{\int_{10}^{60} \mu_{U_a}(u) du} = \frac{401.2245}{9.5712} = 41.92$$



**SL. 7-63** DEFAZIFIKACIJA ODREĐIVANJEM CENTRA GRAVITACIJE ZA MIN-MAX FAZI IZLAZNI SKUP      **SL. 7-64** DEFAZIFIKACIJA ODREĐIVANJEM CENTRA GRAVITACIJE ZA PROIZVOD-MAX FAZI IZLAZNI SKUP

Interesantno je zapaziti da se centar gravitacije može jednostavno odrediti ukoliko su fazi skupovi trougaoni brojevi i pri tome se kao  $\mathcal{F}$ -norma koristi Lukašjevičeva norma. U tom slučaju važi sledeća relacija

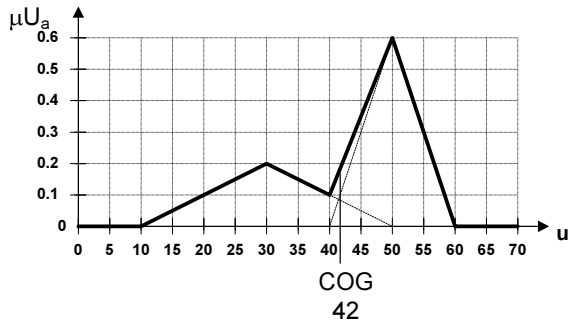
$$u_0 = \frac{\sum_i \lambda_i c_i I_i}{\sum_i \lambda_i I_i} \quad (7.66)$$

gde su

$\lambda_i = \mu_{Y_i}(y_a)$  - stepen aktivacije i-tog pravila

$c_i$  = središte i-tog skupa

$I_i$  – površina i-tog trougaonog skupa



SL. 7-65 DEFAZIFIKACIJA ODREĐIVANJEM CENTRA GRAVITACIJE ZA PROIZVOD-LUKAŠIJEVIČ FAZI IZLAZNI SKUP

Ispravnost izračunavanja centra gravitacije kod Lukašijevičeve  $\gamma$ -norme preko relacije (7.66) može se proveriti na proizvod-Lukašijevičevom izlaznom fazi skupu (Sl. 7-57).

$$y_a = 23$$

$$\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \quad ; \lambda_2 = 0.2 \quad ; \lambda_3 = 0.6$$

$$c_2 = 30 \quad ; c_3 = 50 \quad ; I_2 = 20 \quad ; I_3 = 10$$

$$u_0 = \frac{\sum_i \lambda_i c_i I_i}{\sum_i \lambda_i I_i} = \frac{0.2 \cdot 30 \cdot 20 + 0.6 \cdot 50 \cdot 10}{0.2 \cdot 20 + 0.6 \cdot 10} = 42$$

Izračunavanjem centra gravitacije preko definicionog izraza Error! Reference source not found. dobija se

identični rezultat

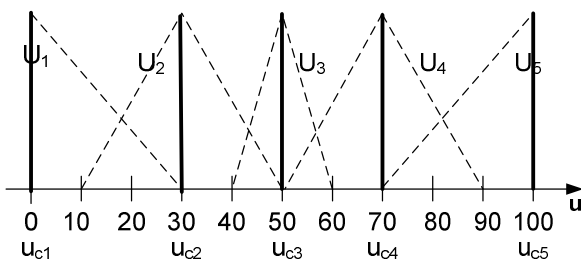
$$\int_{10}^{60} \mu_{U_a}(u) du = 10$$

$$\int_{10}^{60} u \cdot \mu_{U_a}(u) du = \int_{10}^{30} u \cdot 0.01(u-10) du - \int_{30}^{40} u \cdot 0.01(u-50)(u) du +$$

$$+ \int_{40}^{50} u \cdot (0.05u - 1.9) du - \int_{50}^{60} u \cdot 0.06(u-60) du = 420$$

$$u_0 = \frac{\int_{10}^{60} u \cdot \mu_{U_a}(u) du}{\int_{10}^{60} \mu_{U_a}(u) du} = \frac{420}{10} = 42$$

SINGLTON FAZI SKUPOVI UPRAVLJANJA – SUGENO MULTI RED



SL. 7-66 SINGLTON SKUP KAO CENTAR GRAVITACIJE SIMETRIČNIH FAZI SKUPOVA

U cilju pojednostavljenja praktičnog sprovođenja defazifikacije, Sugeno je predložio da se fazifikacija upravljanja vrši pomoću singleton skupova. Zapazimo, pri tome, da se svaki singleton skup može interpretirati kao centar gravitacije simetričnog skupa kome je odgovarajući singleton skup postavljen na osi simetrije, kao što je to ilustrovano na Sl. 7-66, za fazi skup upravljanja (Sl. 7-40). Čak i ako fazi skupovi nisu simetrični, još uvek se odgovarajući singleton skup može dobiti kao skup centara gravitacije svake od funkcija pripadnosti.

Ukoliko je, dakle, okvir spoznaje, upravljačkog signala predstavljen singleton skupovima ( $u_{ci}$ ), nezavisno od toga kako su oni određeni, tada se defazifikacija vrši prema relaciji

$$u_0 = \frac{\sum_i \lambda_i u_{ci}}{\sum_i \lambda_i} \tag{7.67}$$

gde je  $\lambda_i = \mu_{Y_i}(y_a)$  - stepen aktivacije i-tog pravila.

Budući da relacija (7.67) zapravo predstavlja određivanje centra gravitacije za singleton fazi skup, ova metoda defazifikacije se može shvatiti i kao svojevrsna modifikacija metode određivanja centra gravitacije koju je predložio Mamdani. Modifikacija se sastoji u tome što se svaki fazi skup

zameni svojim centrom gravitacije. Otuda se ova metoda često označava i kao MCOG (Modified center of gravity).

U posmatranom primeru vidi se da je

$$u_{c1} = 0 \quad ; u_{c2} = 30 \quad ; u_{c3} = 50 \quad ; u_{c4} = 70 \quad ; u_{c5} = 100$$

Budući da su za  $\gamma_a = 23$  stepeni aktivacije pojedinih pravila

$$\lambda_1 = 0 \quad ; \lambda_2 = 0.2 \quad ; \lambda_3 = 0.6 \quad ; \lambda_4 = 0 \quad ; \lambda_5 = 0$$

odgovarajuće upravljanje se dobija kao

$$u_0 = \frac{\lambda_2 u_{c2} + \lambda_3 u_{c3}}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{0.2 \cdot 30 + 0.6 \cdot 50}{0.8} = 45$$

#### POMERAJUĆI SINGLETON FAZI SKUPOVI- SUGENO PRVI RED

Da bi se donekle ublažio efekat usvajanja okvira spoznaje upravljanja kao singleton skupova, Sugeno je predložio da se ovi skupovi posmatraju kao "pomerajućii" singleton skupovi, pri čemu položaj singleton linije zavisi od trenutne vrednosti ulazne promenljive ( $y$ )

$$u_{ci} = a_i y + b_i \quad (7.68)$$

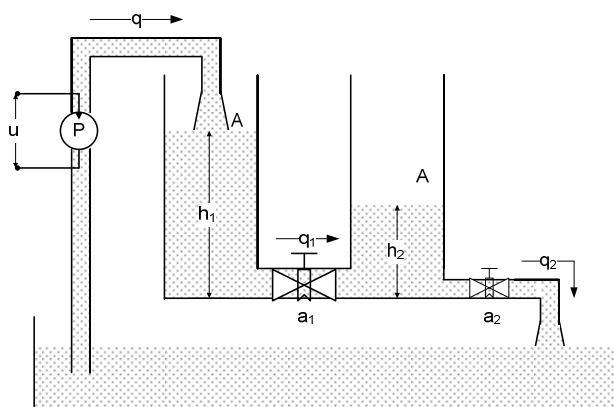
Defazifikacija se i dalje vrši prema relaciji (7.67).

Ideja da se uspostavi linearna zavisnost izlaznog fazi skupa kontrolera i ulaznih promenljivih (merenja izlaza procesa) omogućava da se ovaj metod primeni na nivou supervajzorskog upravljanja. Naime, poznato je da se upravljanje nelinearnim dinamičkim sistemom može realizovati tako što se izvrši linearizacija sistema u određenom broju radnih tačaka i za svaki od linearnih modela projektuje odgovarajući kontroler. U tom slučaju se u svakoj radnoj tački, vrši interpolacija izlaza linearnih kontrolera koji se nalaze u okolini te radne tačke. Ovaj zadatak se, po pravilu, obavlja na supervajzorskom nivou. U praksi se uvek postavlja pitanje izbora odgovarajuće metode interpolacije. Otuda se pomerajućii singleton skupovi, definisani tako da prate izlaze kontrolera (koji su, bar u statičkom smislu, linearna funkcija ulaza), javljaju kao prirodni i efikasni metod za interpolaciju.

Potrebno je zapaziti da ovaj pristup, zapravo, predstavlja potpuno prirodno "podešavanje pojačanja" (gain scheduler). Isti pristup može da se koristi i za modeliranje nelinearnih sistema pomoću interpolacije više linearnih modela.

Naglasimo, na kraju, da se u skladu sa relacijom (7.68), singleton skupovi kod kojih je položaj funkcija pripadnosti konstantan, mogu shvatiti kao linearne funkcije nultog reda. Otuda se i originalna Sugenova metoda, često naziva metodom nultog reda.

## 7.5 Primer projektovanja fazi regulatora



SL. 7-67 ŠEMATSKI PRIKAZ SISTEMA SA DVA REZERVOARA

### Sistem spojenih rezervoara

#### Opis problema

Na Sl. 7-67 je prikazan sistem dva spojena cilindrična rezervoara u kome se želi upravljati nivoom tečnosti u drugom rezervoaru ( $h_2$ ). Ulazom tečnosti u sistem, odnosno protokom  $q$  se upravlja preko pumpe (P) koja se pobuđuje naponom  $u$ . Tečnost iz prvog rezervoara otiče u drugi. Protok te tečnosti ( $q_1$ ) je funkcija razlike nivoa tečnosti u prvom i drugom rezervoaru ( $h_1$  i  $h_2$ ). Iz drugog rezervoara tečnost nesmetano ističe protokom  $q_2$ , koji je funkcija nivoa tečnosti ( $h_2$ ).

Eksperimentalnim merenjima na procesu utvrđene su sledeće vrednosti parametara procesa.

- Poprečni presek rezervoara:  $A = 0.0154 \text{ m}^2$

- Poprečni presek cevi koja spaja rezervoare 1 i 2:  $a_1 = 1.9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$
- Poprečni presek cevi na izlazu rezervoara 2:  $a_2 = 1.245 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$
- Pumpa je konstruisana tako da je protok linearna funkcija pobudnog napona, sa koeficijentom  $k=10^5 (\text{m}^3/\text{Vs})$ . Pri tome, pumpa stoji kada je pobudni napon 0, a ulazi u zasićenje pri pobudnom naponu od 10V.

### Matematički model procesa

Ako se sa  $V_1(t)$  i  $V_2(t)$  označe zapremine tečnosti u prvom i drugom rezervoaru, respektivno, tada je prema zakonu o održanju masa promena ovih zapremina

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= q(t) - q_1(t) \\ \frac{dV_2(t)}{dt} &= q_1(t) - q_2(t) \end{aligned} \quad (7.69)$$

Budući da su oba rezervoara cilindričnog oblika i imaju isti poprečni presek  $A$  promena zapremine rezervoara zapravo zavisi od promene nivoa tečnosti, što znači da je

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = A \frac{dh_i(t)}{dt} (\text{m}^3/\text{s}); \quad i = 1, 2 \quad (7.70)$$

Protok na ulazu u rezervoar 1, koji daje pumpa je linearna funkcija pobudnog napona

$$q(t) = ku(t) (\text{m}^3/\text{s}) \quad (7.71)$$

Kako je, nadalje, brzina tečnosti ( $v$ ) pri isticanju iz rezervoara u kome je nivo tečnosti ( $h$ ) određena relacijom

$$v(t) = \sqrt{2gh} (\text{m}/\text{s}) \quad (7.72)$$

gde je  $g=9.81\text{m/s}^2$  ubrzanje sile zemljine teže, to se protoci tečnosti kroz cevi mogu odrediti prema sledećim relacijama.

$$\begin{aligned} q_1(t) &= a_1 \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} (\text{m}^3/\text{s}) \\ q_2(t) &= a_2 \sqrt{2gh_2(t)} (\text{m}^3/\text{s}) \end{aligned} \quad (7.73)$$

Na osnovu datih parametara i relacija, matematički model procesa kojim se upravlja postaje

$$\begin{aligned} A\dot{h}_1(t) &= q(t) - q_1(t) = ku(t) - a_1 \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \\ A\dot{h}_2(t) &= q_1(t) - q_2(t) = a_1 \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} - a_2 \sqrt{2gh_2(t)} \end{aligned} \quad (7.74)$$

### Projektovanje klasičnog PID kontrolera

Dobijeni model je nelinearan što znači da je u cilju određivanja parametara PID kontrolera neophodno da se izvrši njegova linearizacija u okolini odabrane radne tačke. Ako se kao radna tačka usvoji pobudni napon  $u^0$  kome u stacionarnom režimu odgovaraju nivoi tečnosti  $h_1^0$  i  $h_2^0$ , tako da su svi protoci konstantni i jednaki, tada važi jednačina ravnoteže

$$ku^0 = a_1 \sqrt{2g(h_1^0 - h_2^0)} = a_2 \sqrt{2gh_2^0} \quad (7.75)$$

Razvijanjem jednačina modela u Tajlorov red u okolini radne tačke, uz zadržavanje linearnih članova i korišćenje jednačine ravnoteže dobija se

$$\begin{aligned} A \frac{d(h_1^0 + \Delta h_1)}{dt} &= k(u^0 + \Delta u) - a_1 \sqrt{2g(h_1^0 - h_2^0)} - \frac{a_1 g}{\sqrt{2g(h_1^0 - h_2^0)}} \Delta h_1 + \frac{a_1 g}{\sqrt{2g(h_1^0 - h_2^0)}} \Delta h_2 \Rightarrow \\ A \frac{d(\Delta h_1)}{dt} &= k\Delta u - \frac{a_1^2 g}{ku^0} \Delta h_1 + \frac{a_1^2 g}{ku^0} \Delta h_2 \\ A \frac{d(h_2^0 + \Delta h_2)}{dt} &= a_1 \sqrt{2g(h_1^0 - h_2^0)} + \frac{a_1 g}{\sqrt{2g(h_1^0 - h_2^0)}} \Delta h_1 - \frac{a_1 g}{\sqrt{2g(h_1^0 - h_2^0)}} \Delta h_2 - \\ &- a_2 \sqrt{2gh_2^0} - \frac{a_2 g}{\sqrt{2gh_2^0}} \Delta h_2 \Rightarrow \end{aligned} \quad (7.76)$$

$$A \frac{d(\Delta h_2)}{dt} = \frac{a_1^2 g}{ku^0} \Delta h_1 - \frac{(a_1^2 + a_2^2)g}{ku^0} \Delta h_2 \quad (7.77)$$

Usvajajući da je

$$\Delta h_1(t) = x_1(t); \quad \Delta h_2(t) = x_2(t) = y(t);$$

$$\alpha = \frac{a_1^2 g}{Aku^0} = \frac{0.023}{u^0}; \quad \beta = \frac{a_2^2 g}{Aku^0} = \frac{0.01}{u^0},$$

linearizovani model procesa u okolini radne tačke postaje

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha - \beta \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (7.78)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] x(t)$$

Ovom modelu odgovara funkcija prenosa

$$G(s) = \frac{\alpha}{s^2 + (2\alpha + \beta)s + \alpha\beta} = \frac{0.023/u^0}{s^2 + (0.056/u^0)s + 0.023/(u^0)^2} \quad (7.79)$$

Ako se usvoji da je  $u^0 = 2.5V$ , tada su stacionarni nivoi u obe cevi  $h_1^0 = 0.2938m$  i  $h_2^0 = 0.2055m$ , tako da je funkcija prenosa linearizovanog modela u okolini ove radne tačke

$$G(s) = \frac{0.0092}{s^2 + 0.0223s + 3.6330 \cdot 10^{-5}}$$

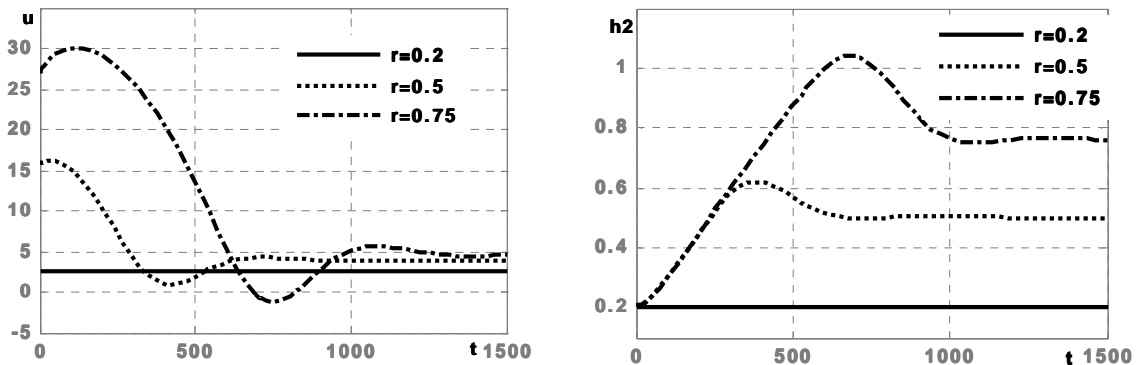
Usvojena radna tačka odgovara referentnom signalu  $r = h_2^0 = 0.2055m$ , odnosno pošto se upravlja odstupanjem od radne tačke  $\Delta r = 0$ .

Simulacionim eksperimentima za ovaj model određeni su sledeći parametri PID kontrolera:

$$K = 45, T_i = 300, T_d = 20/9.$$

Pri tome je, pre uključivanja PIDa proces doveden u usvojenu radnu tačku.

Sistem je simuliran sa referentnim ulaznim signalom  $r = 0.2055, 0.5$  i  $0.75$ . Ukupne vrednosti ulaznog i izlaznog signala (a ne samo odstupanja od radne tačke) prikazani su na Sl. 7-68. Prema očekivanju, sistem radi izuzetno dobro ukoliko je referenca  $r = 0.2055$ , odnosno ukoliko se od kontrolera očekuje da sistem drži u okolini zadane radne tačke. Sa povećanjem referentnog signala, sistem se udaljava od okoline u kojoj važi linearani model, te su njegove performanse sve lošije.



SL. 7-68 UPRAVLJANJE I IZLAZ SISTEMA KOJI RADI SA PID KONTROLEROM PROJEKTOVANIM ZA LINEARNI MODEL, PRI RAZLIČITIM VREDNOSTIMA REFERENTNOG SIGNALA

### Projekotvanje fazi kontrolera

#### SPECIFIKACIJA PROMENLJIVIH PROCESA

Budući da se zahteva da se visina u drugom rezervoaru održava na zadanoj referentnoj vrednosti prirodno je da se kao jedan ulazni signal usvoji razlika ove dve vrednosti. Pri tome se, za razliku od PID kontrolera ovde ne koristi linearizovani model što znači da se signal greške dobija oduzimanjem izmerene vrednosti od zadane reference odnosno da je

$$e_t = r - h_{2t}$$

Budući da se u fazi upravljanju veličina greške izražava pomoću atributa neophodno je da se ona na neki način uniformiše, odnosno da se pojam "veliki" ili "mali" učine nezavisnim od veličine referentnog signala.

Otuda je usvojeno da se kao jedan ulaz u kontroler posmatra procenat odstupanja izlaza od referentnog signala

$$\text{GREŠKA } e_t (\%) = \frac{r - h_{2t}}{r} \times 100$$

Imajući u vidu da se radi o procesu koji ima kašnjenje izvesno je da je neophodno da se vodi računa o tendenciji promene izlaza, kako bi se na osnovu toga blagovremeno prilagodio upravljački signal. U skladu sa time usvojeno je da se tendencija prati preko izvoda signala greške.

$$\frac{de_t}{dt}$$

Uniformisanje veličine ovog signala izvršeno je određivanjem procenta nagiba signala greške, tako da je kao drugi ulaz u kontroler odabran signal

$$\text{PROMENA GREŠKE } \Delta e_t = \frac{\arctg\left(\frac{de_t}{dt}\right)}{\frac{\pi}{2}} \times 100$$

Formalno gledano sa ova dva ulazna signala kontroler je PD tipa. Potrebno je ipak da se istakne da kontroler radi po drugačijem – fazi – principu. To zapravo znači da će činjenica da su odabrani ulazi PD tipa uticati zapravo na formiranje pravila na osnovu kojih kontroler radi. Drugim rečima, razumevanje rada PD kontrolera, odnosno uticaja koje na performansu sistema imaju proporcionalno i diferencijalno dejstvo biti od pomoći pri specifikiranju implikacija.

Konačno, pošto se procesom upravlja pomoću pumpe, kontroler ima samo jedan izlazni signal – napon pumpe (u).

**SPECIFIKACIJA PERFORMANSE**

*Okvir spoznaje i funkcije pripadnosti*

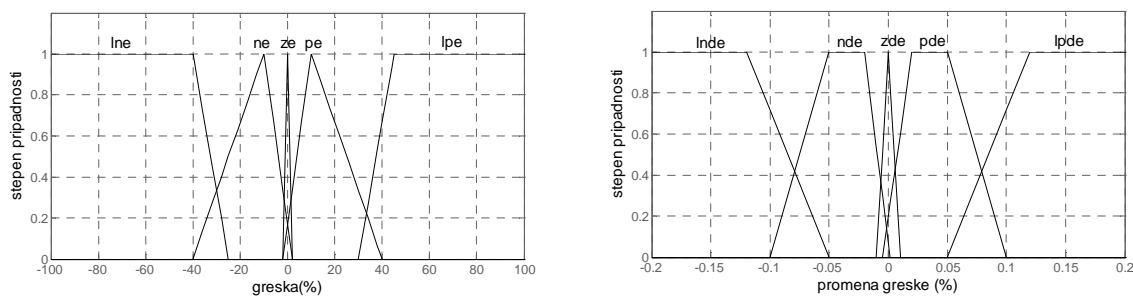
Pošto se i signal greške i promena signala greške kreću u opsegu od -100 do 100 ovaj opseg je usvojen kao okvir spoznaje. U principu, minimalan broj atributa koje ima smisla koristiti je 3 (nula, pozitivan i negativan). Pokazalo se da je u ovom primeru pogodno da se okvir spoznaje opiše pomoću 5 atributa

GREŠKA:           velika negativna (*lne*), negativna (*ne*), nula (*ze*), pozitivna (*pe*), velika pozitivna (*lpe*)

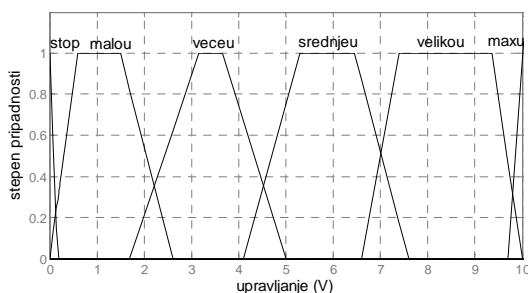
PROMENA GREŠKE: velika negativna (*lnde*), negativna (*nde*), nula (*zde*), pozitivna (*pde*), velika pozitivna (*lpde*)

Pri određivanju okvira spoznaje izlaza kontrolera pošlo se od činjenice da se napon na motoru pumpe kreće od 0 do 100, pri čemu se rad pumpe kreće u opsegu od "ne radi" do "radi punom snagom". Ovaj opseg je opisan sa 6 atributa

UPRAVLJANJE: *stop, malou, veceu, srednjeu, velikou, maxu*



**SL. 7-69 FAZI SKUPOVI ULAZA KONTROLERA**



**SL. 7-70 FAZI SKUPOVI IZLAZA KONTROLERA**

Fazifikacija usvojenih lingvističkih promenljivih izvršena je pomoću trougaonih i trapezoidnih funkcija (Sl. 7-69). Specifikaciji fazi skupova prethodila je analiza rada sistema u toku koje je ustanovljeno da se izlaz sistema, a samim tim i greška menjaju izuzetno sporo i da procenat promene ugla nikada ne prelazi 0.2. Otuda je opseg promene greške sveden na segment od [-0.2,0.2]. Posle niza eksperimenata usvojeni su fazi skupovi ulaza kontrolera prikazani na (Sl. 7-69), kao i

fazi skup izlaza kontrolera (Sl. 7-70).

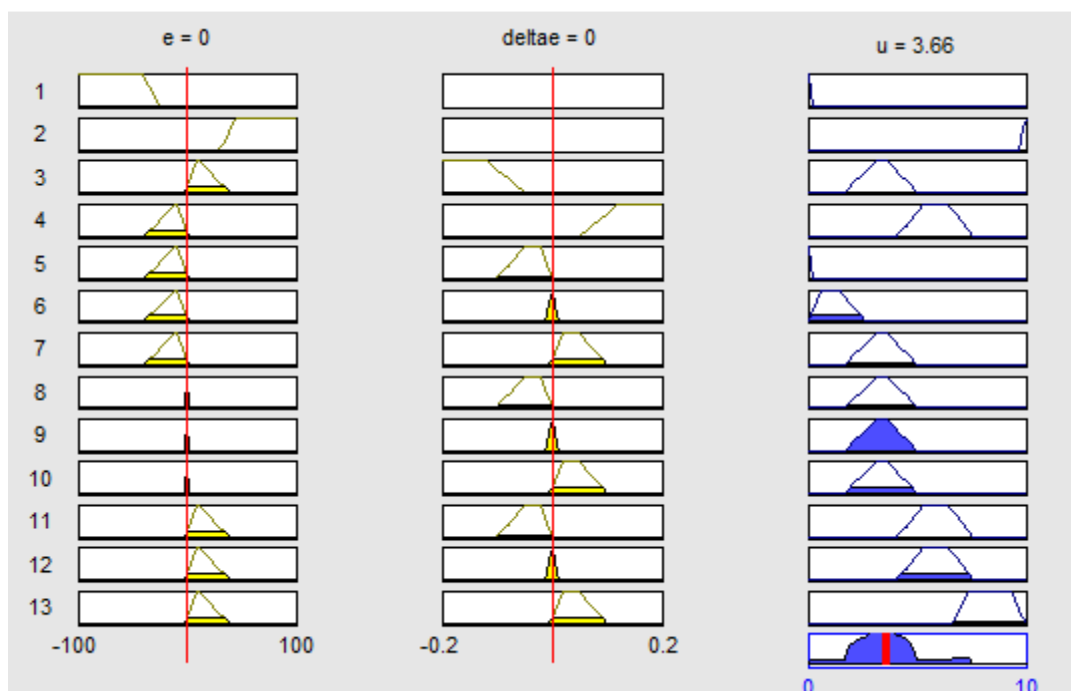
ODREĐIVANJE FUNKCIJE UPRAVLJANJA – MODELIRANJE KONTROLERA

*Specifikacija pravila*

Početa ideja pri formiranju pravila bila je da sve dok greška ne uđe u opseg od  $\pm 30\%$  upravljanje treba da bude maksimalno, odnosno minimalno moguće. To znači da sva ostala pravila treba da postanu aktivna tek kada se greška približi datom opsegu. Pored toga, imajući u vidu izrazito kašnjenje, usvojeno je da se pri brzom približavanju izlaza referenci upravljanje smanjuje, ako je greška pozitivna, odnosno povećava ako je negativna, kako bi se smanjio potencijalni preskok. Ostala pravila prate logiku rada PD regulatora. Usvojena pravila su prikazana u sledećoj tabeli i ilustrovana su na Sl. 7-71.

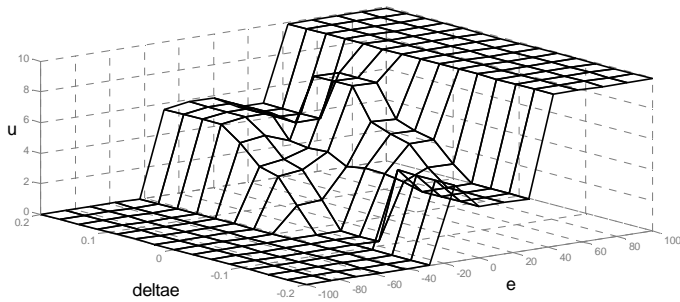
Samo se po sebi razume da su pravila kao i funkcije pripadnosti doterivana su u toku simulacije. Za ovo podešavanje nema nekih opštih pravila. U praksi se ipak pokazuje da ključnu ulogu igra praćenje aktivacije pravila i odstupanja koje pri tome nastaje između odziva i referentnog signala u različitim režimima rada. Na taj način se ustanovljava koji opseg ulaznih i izlaznih signala ima značajniji uticaj u nekom režimu rada, pa se vrši prilagođavanje odgovarajućih funkcija pripadnosti. Posebno je potrebno da se povede računa da u svakom trenutku bar jedno pravilo bude aktivirano, jer će u protivnom defazifikacija da rezultuje konstantnim upravljanjem koje se veštački postavlja na srednju vrednost opsega.

		GRESKA		PROMENA GRESKE		UPRAVLJANJE
1	ako je	lne	i		tada je	stop
2		lpe				maxu
3		pe		Inde		veceu
4		ne		lpde		srednjeu
5		ne		nde		stop
6		ne		zde		malou
7		ne		pde		veceu
8		ze		nde		veceu
9		ze		zde		veceu
10		ze		pde		veceu
11		pe		nde		srednjeu
12		pe		zde		srednjeu
13		pe		pde		velikou



SL. 7-71 GRAFIČKI PRIKAZ USVOJENIH PRAVILA

Kao  $\epsilon$ -norma za povezivanje uslova "i" usvojen je proizvod. Implikacija "tada" je realizovana kao



SL. 7-72 POVRŠINA UPRAVLJANJA

minimum, što znači da je svako pravilo modelirano korelacionim minimumom, odnosno da se Izlazni fazi skup svakog pravila dobija max-min operacijom. Za agregaciju pravila usvojena je suma.

Potrebno je da se istakne da je korišćenje proizvoda za implikaciju dalo nešto slabije rezultate. Ipak, ranije istaknuti problemi vezani za defazifikaciju ovde su zbog većeg broja pravila manje izraženi.

IMPLEMENTACIJA ZAKONA UPRAVLJANJA

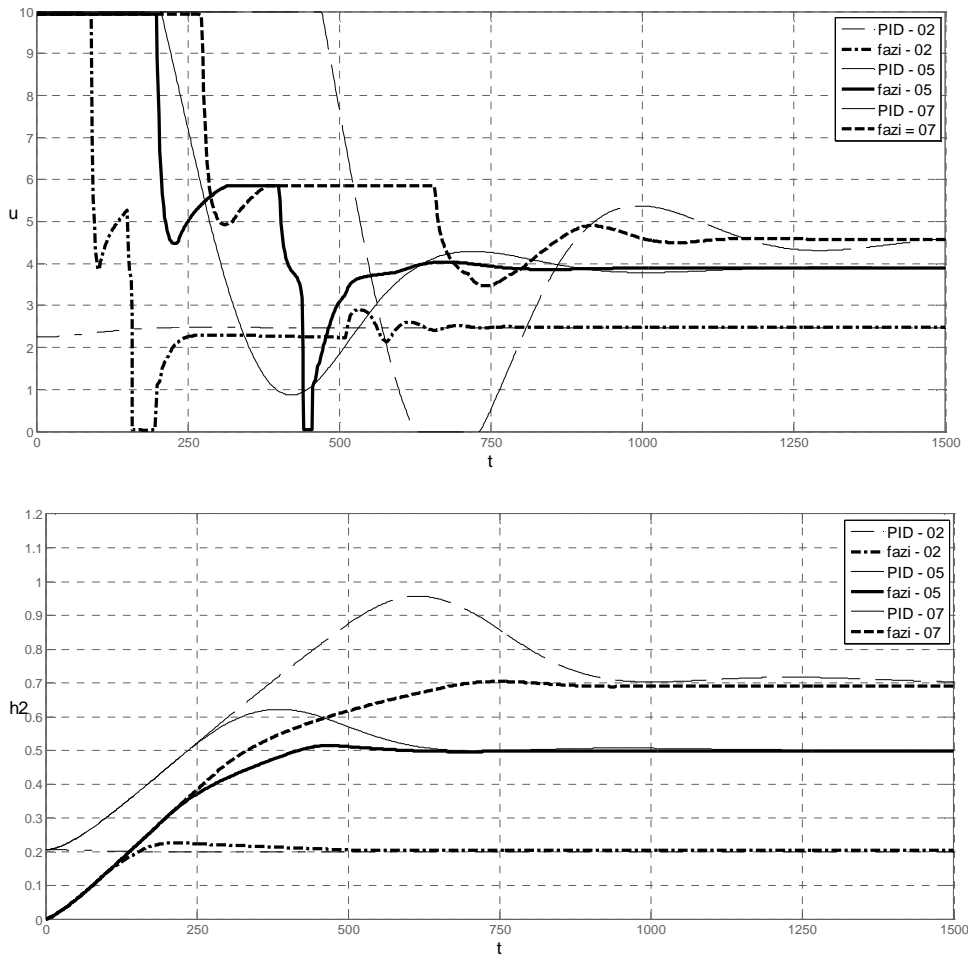
Defazifikacija izlaznog fazi skupa obavlja se pomoću metode centroida čime je dobijena površina upravljanja prikazana na Sl. 7-72.

REZULTATI SIMULACIJE — POREĐENJE PIDA I FAZI REGULATORA

Pri simulaciji procesa upravljanog fazi kontrolerom pretpostavljeno je da su svi početni uslovi nula. Drugim rečima, kontroler nije projektovan ni za jednu posebnu radnu tačku, već se očekuje da on daje zadovoljavajuću performansu na celom opsegu radnih uslova.

Da bi poređenje sa PID kontrolerom bilo korektno, on je simuliran tako što je proces prethodno doveden u radnu tačku za koju je PID projektovan.

Iz dobijenih rezultata upravljanja i izlaza (Sl. 7-73) vidi se da fazi regulator daje značajno bolju performansu sistema i povoljnije upravljačke signale. Ovo je prirodna posledica nelinearne površine odlučivanja koja se može daleko bolje uklopiti u nelinearnu prirodu samog procesa.



SL. 7-73 UPRAVLJANJE I IZLAZ SISTEMA UPRAVLJANOG PID KONTROLEROM I FAZI PD KONTROLEROM



## 8 Dodatak A – Osnovni rezultati teorije pasivnosti i pozitivnosti

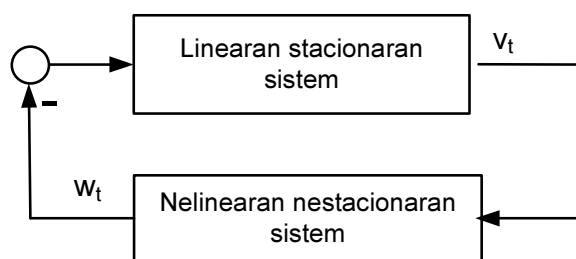
### 8.1 Razlozi za uvođenje koncepta pasivnosti i pozitivnosti

U svim metodama projektovanja stabilnost rezultujućeg sistema se uvek postavlja kao ključni preduslov, bez čijeg ispunjenja uopšte i nema smisla da se rešenje dalje razmatra.

Činjenica da kod linearnih stacionarnih sistema postoji jasna veza između položaja polova funkcije prenosa i stabilnosti omogućila je razvoj niza metoda projektovanja koje se zasnivaju na realizaciji odgovarajuće funkcije prenosa sistema sa zatvorenim spregom. Ova ideja je, u izvesnom smislu, proširena i na nestacionarne linearne sisteme koji se opisuju pomoću jediničnog impulsnog odziva ma koje se primenjuju rezultati matematičke analize koji se odnose na kernele.

Za razliku od linearnih sistema, stabilnost nelinearnih sistema nije tako jednostavna za analizu. Naime, iako se primenom funkcije Ljapunova može ispitivati njihova stabilnost, problem predstavlja činjenica da se time dobija "post-festum" odgovor. To znači da se može ispitati da li je rezultujući sistem stabilan ili ne, ali u opštem slučaju, ne postoji konzistentna metodologija projektovanja koja bi garantovala da će dobijeno rešenje biti stabilno. Otuda je prirodno da se ovom pitanju uvek posvećivala posebna pažnja.

Polazeći, sa jedne strane, od činjenice da je analiza složenog nelinearnog sistema izuzetno zametna, a sa druge strane od jednostavnosti posmatranja stabilnosti kroz funkciju prenosa,



SL. 8-1 STRUKTURA SISTEMA KOJI ZADOVOLJAVA NEJEDNAČINU POPOVA

odnosno odgovarajući kernel, došlo se do ideje da se posmatraju određene strukture nelinearnih sistema čija bi se stabilnost mogla analizirati deobom na pojedine blokove.

U sklopu ovih ideja, Popov je posmatrao sisteme sa zatvorenim spregom kod kojih je blok u direktnoj grani linearan i stacionaran, dakle opisan funkcijom prenosa, dok je blok u povratnoj grani nelinearan i nestacionaran (Sl. 8-1). U prvo vreme nelinearna grana je bila ograničena na nelinearnosti tipa zasićenja, da bi, kasnije, taj koncept bio proširen na opštu

nelinearnost.

Analiza ponašanja pojedinog bloka zasniva se na analogiji sa električnim kolima kod kojih

izraz  $\sum_{i=0}^t v_i^T w_i$  ima značenje enrgije, koja će izvesno biti konačna ako je sistem stabilan. U tom

smislu dokazano je da će posmatrani sistem biti globalno asimptotski stabilan ukoliko je blok u direktnoj grani stabilan i ako blok u povratnoj grani zadovoljava nejednačinu Popova

$$\eta(0, t) = \sum_{i=0}^t v_i^T w_i \geq -\gamma_0^2 ; \forall t \geq 0 \quad (8.1)$$

Sistemi koji ispunjavaju ovaj uslov označeni su kao slabi hiperstabilni sistemi<sup>1</sup>. Daljim poopštavanjem ovog pristupa uvedeni su pojmovi hiperstabilnih i asimptotski hiperstabilnih sistema i onda su ispitivane njihove različite kombinacije koje dovode do globalno stabilnih sistema sa zatvorenim povratnom spregom.

U isto vreme, činjeni su naponi da se generališu rezultati teorije električnih kola vezani za

<sup>1</sup> Sam izraz "hiperstabilnost" ne treba tumačiti kao neku posebnu stabilnost koja je u nekom smislu "veća" od obične stabilnosti. Naime, iz prvih radova Popova vidi se da je on zapravo samo hteo da ukaže na jednu posebnu klasu sistema i to tako što bi istakao da se klasa odlikuje određenim karakteristikama koje su u vezi sa stabilnošću.

linearna stacionarna pasivna kola (koja sadrže samo otpornosti, kapacitivnosti i induktivnosti) okarakterisana impedansom koja je realna pozitivna funkcija. Tako je nastala teorija pasivnosti sistema iz koje su kasnije, između ostalog, izvedeni i određeni adaptivni algoritmi.

Napomenimo, na kraju, da se i teorija hiperstabilnosti i teorija pasivnosti odnose isključivo na sisteme koji imaju jednak broj ulaza i izlaza. Otuda je prirodno je da se postavi pitanje u kojoj meri to predstavlja ograničavajući faktor.

U cilju pronalaženja odgovora na postavljeno pitanje, posmatrajmo sistem sa jednakim brojem ulaza i izlaza i predpostavimo krajnje simplifikovan slučaj u kome je sistem potpuno raspregnut, tako da svaki ulaz deluje samo na jedan izlaz. Nema nikakve sumnje da bi u takvom sistemu bilo moguće da se odredi kontroler i to tako što bi svaki upravljački signal delovao samo na po jedan izlaz i obezbeđivao da on prati zadanu trajektoriju.

Predpostavimo sada da taj raspregnut sistem ima više izlaza nego ulaza. U tom slučaju je izvesno da neće postojati mogućnost da se projektuje kontroler tako da svaki od izlaza prati neku unapred zadanu trajektoriju. Problem se, dakle ne može rešiti projektovanjem kontrolera na bazi referentnog modela, već samo tako što će se formirati odgovarajuća funkcija kriterijuma u kojoj će se pogodno odabranim težinskim faktorom potencirati oni izlazi za koje je posebno važno da prate neku željenu trajektoriju. Za tako formiranu funkciju kriterijuma formiraće se optimalno upravljanje.

U slučaju kada sistem ima više ulaza nego izlaza, izvesno je da nije neophodno da se koriste svi ulazni signali. Pre otpočinjanja projektovanja izvršiće se izbor ulaznih signala i to tako da sistem zadrži osobinu kontrolabilnosti, a da se pri tome, u izvesnoj meri, minimiziraju troškovi upravljanja.

## 8.2 Pozitivno realne funkcije prenosa

### 8.2.1 KONTINUALNI SISTEMI

Neka je  $G(s)$  matrica funkcija prenosa kontinualnog linearnog stacionarnog sistema sa jednakim brojem ulaza i izlaza.

Definicija

Funkcija  $G(s)$  je pozitivno realna funkcija (PR) ukoliko su ispunjeni sledeći uslovi

- i.  $\forall s \in \mathfrak{R} \Rightarrow G(s) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$
- ii.  $\operatorname{Re} G(s) \geq 0$  za  $\operatorname{Re} s \geq 0$
- iii. Ukoliko je  $G(s-\varepsilon)$  pozitivno realna funkcija za neku realnu pozitivnu vrednost  $\varepsilon > 0$ , tada je  $G(s)$  striktno pozitivna realna funkcija (SPR)
- iv.  $\forall s \in \mathfrak{R} \Rightarrow G(s) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$
- v. Elementi matrice  $G(s)$  nemaju polova izvan leve poluravni  $s$ -ravni
- vi. Ukoliko postoje polovi na imaginarnoj osi, oni su prosti i rezidumi u njima su nenegativne hermitske forme
- vii. U svim tačkama na imaginarnoj osi koje nisu polovi sistema važi
- viii.  $\forall x \in C^n$  ;  $x^H \left[ G(j\omega) + G^H(j\omega) \right] x \geq 0$

Funkcija  $G(s)$  je striktno pozitivno realna funkcija ukoliko su ispunjeni prethodni uslovi, s tim što funkcija nema polova na imaginarnoj osi, što znači da u svim tačkama na imaginarnoj osi važi

$$\forall x \in C^n \quad ; \quad x^H \left[ G(j\omega) + G^H(j\omega) \right] x > 0$$

### 8.2.2 DISKRETNI SISTEMI

Neka je  $D(z)$  matrica funkcija prenosa diskretnog linearnog stacionarnog sistema sa

jednakim brojem ulaza i izlaza.

*Definicija*

Funkcija  $D(z)$  je pozitivno realna funkcija (PR) ukoliko su ispunjeni sledeći ekvivalentni uslovi

- i.  $\forall z \in \mathfrak{R} \Rightarrow D(z) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$
- ii.  $\operatorname{Re} D(z) \geq 0$  za  $\operatorname{Re} z \geq 0$
- iii. Ukoliko je  $D(z-\varepsilon)$  pozitivno realna funkcija za neku realnu pozitivnu vrednost  $\varepsilon > 0$ , tada je  $D(z)$  striktno pozitivna realna funkcija (SPR)
- iv.  $\forall z \in \mathfrak{R} \Rightarrow D(z) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$
- v. Elementi matrice  $D(z)$  nemaju polova izvan jediničnog kruga u  $z$ -ravni
- vi. Ukoliko postoje polovi na jediničnom krugu, oni su prosti i rezidumi u njima su nenegativne hermitske forme
- vii. U svim tačkama na jediničnom krugu koje nisu polovi sistema važi
- viii.  $\forall x \in \mathbb{C}^n$  ;  $x^H \left[ D(e^{j\omega T}) + D^H(e^{j\omega T}) \right] x \geq 0$

Funkcija  $D(z)$  je striktno pozitivno realna funkcija (SPR) ukoliko su ispunjeni prethodni uslovi, s tim što funkcija nema polova na jediničnom krugu, što znači da u svim tačkama na jediničnom krugu važi

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad ; \quad x^H \left[ D(e^{j\omega T}) + D^H(e^{j\omega T}) \right] x > 0$$

### 8.3 Pozitivni sistemi

#### 8.3.1 KONTINUALNI SISTEMI

Posmatra se linearan kontinualni, kontrolabilan i observabilan nestacionaran sistem sa jednakim brojem ulaza i izlaza, opisan modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) ; A(t) \in \mathfrak{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathfrak{R}^{n \times m} \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) ; C(t) \in \mathfrak{R}^{m \times n}, D(t) \in \mathfrak{R}^{m \times m} \end{aligned} \quad (8.2)$$

*Definicija*

Sistem je pozitivno realan (PR) ukoliko su ispunjene sledeće ekvivalentne tvrdnje

Postoji vremenski promenljiva simetrična pozitivno definitna, vremenski promenljiva matrica  $P(t)$  koja je rešenje Rikatijske diferencijalne jednačine i proizvoljne vremenski promenljive matrice  $L(t)$  i  $W(t)$  takve da je

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) &= -L(t)L^T(t) \\ B^T(t)P(t) + W^T(t)L^T(t) &= C(t) \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$W^T(t)W(t) = D(t) + D^T(t)$$

Svako rešenje sistema zadovoljava sledeći uslov

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau &= \\ &= x^T(t)P(t)x(t) - x^T(0)P(0)x(0) + \int_0^t \left( x^T(\tau)Q(\tau)x(\tau) + 2u^T(\tau)S(\tau)x(\tau) \right) dt \end{aligned} \quad (8.4)$$

gde je  $P(t)$  simetrična pozitivno definitna matrica i matrice  $Q(t)$ ,  $R(t)$  i  $S(t)$  su takve da je matrica

$$\begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S^T(t) & R(t) \end{bmatrix} \text{ pozitivno semidefinitna.}$$

*Primedba*

Ovaj uslov je ispunjen ukoliko je

$$Q(t) = L(t)L^T(t) \quad ; S(t) = L(t)W(t) \quad ; R(t) = W^T(t)W(t)$$

gde su matrice  $L(t)$  i  $W(t)$  proizvoljne matrice. Ovo ujedno znači i da se relacije (8.3) mogu izraziti i na drugi način

Svako rešenje sistema, za  $x(0)=0$ , zadovoljava sledeći uslov

$$\forall t, \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau \geq 0 \quad (8.5)$$

### Stacionarni sistem

Ukoliko su matrice  $A, B, C$  i  $D$  konstantne, tada su i odgovarajuće matrice  $P, Q, R, S, L$  i  $W$  konstantne. Ekvivalentni uslovi (ii) i (iii) za pozitivnu realnost sistema ostaju isti, dok se uslov (i) menja tako da glasi

#### KALMAN - YAKUBOVIČ LEMA

Postoji simetrično, pozitivno definitna matrica  $P$ , pozitivno semidefinitne matrica  $Q$  i  $R$  i proizvoljna matrica  $S$  za koje važi

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -Q \\ B^T P + S^T &= C \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$R = D + D^T$$

Alternativno ova lema se može izraziti i kao

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -LL^T \\ B^T P + W^T L^T &= C \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$W^T W = D + D^T$$

gde su konstantne matrice  $L$  i  $W$  proizvoljne.

Kod stacionarnih sistema postoji još jedan ekvivalentan uslov:

*Sistem je pozitivan ukoliko je matrica funkcija prenosa*

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (8.8)$$

*pozitivno realna funkcija*

#### Definicija

Sistem opisan jednačinama (8.2) je striktno pozitivno realan (SPR) ukoliko se u svim navedenim uslovima umesto pozitivne semidefinitnosti zahteva pozitivna definitnost, odnosno ukoliko se zahteva da matrica funkcija prenosa bude striktno pozitivno realna.

Zapazimo da uslov pozitivne definitnosti istovremeno znači i da matrice  $W$  i  $L$  moraju biti takve da su matrice  $L(t)L^T(t)$  i  $W^T(t)W(t)$  pozitivno definitne.

### 8.3.2 DISKRETNI SISTEMI

Posmatra se linearan diskretan, kontrolabilan i observabilan nestacionaran sistem sa jednakim brojem ulaza i izlaza, opisan modelom u prostoru stanja

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= A_t x_t + B_t u_t \quad ; A_t \in \mathfrak{R}^{n \times n}, B_t \in \mathfrak{R}^{n \times m} \\ y_t &= C_t x_t + D_t u_t \quad ; C_t \in \mathfrak{R}^{m \times n}, D_t \in \mathfrak{R}^{m \times m} \end{aligned} \quad (8.9)$$

#### Definicija

Sistem je pozitivno realan (PR) ukoliko su ispunjene sledeće ekvivalentne tvrdnje

Postoji vremenski promenljiva simetrična pozitivno definitna vremenski promenljiva matrica  $P_t$  koja je rešenje Rikatijske diferentne jednačine i proizvoljni nizovi matrica  $L_t$  i  $W_t$  takvi da je

$$\begin{aligned} A_t^T P_{t+1} A_t - P_t &= -L_t L_t^T \\ B_t^T P_{t+1} A_t + W_t^T L_t^T &= C_t \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$W_t^T W_t = D_t^T + D_t - B_t^T P_{t+1} B_t$$

Svako rešenje sistema zadovoljava sledeći uslov

$$2 \sum_{i=0}^t y_i^T u_i = x_{t+1}^T P_{t+1} x_{t+1} - x_0^T P_0 x_0 + \sum_{i=0}^t \left( x_i^T Q_i x_i + 2u_i^T S_i x_i + u_i^T R_i u_i \right) \quad (8.11)$$

gde je  $P_t$  simetrična pozitivno definitna matrica i matrice  $Q_t$ ,  $R_t$  i  $S_t$  su takve da je matrica

$$\begin{bmatrix} Q_t & S_t \\ S_t^T & R_t \end{bmatrix} \text{ pozitivno semidefinitna.}$$

#### Primedba

Ovaj uslov je ispunjen ukoliko je

$$Q_t = L_t L_t^T \quad ; S_t = L_t W_t \quad ; R_t = W_t^T W_t$$

Svako rešenje sistema, za  $x(0)=0$ , zadovoljava sledeći uslov

$$\forall t, \int_0^t y^T(\tau) u(\tau) d\tau \geq 0 \quad (8.12)$$

#### Stacionarni sistem

Ukoliko su matrice  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  konstantne, tada su i odgovarajuće matrice  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $L$  i  $W$  konstantne. Ekvivalentni uslovi (ii) i (iii) za pozitivnu realnost sistema ostaju isti, dok se uslov (i) menja tako da glasi

#### POPOV - KALMAN - SZEGO LEMA

Postoji simetrično, pozitivno definitna matrica  $P$ , pozitivno semidefinitne matrica  $Q$  i  $R$  i proizvoljna matrica  $S$  za koje važi

$$\begin{aligned} A^T P A - P &= -Q \\ B^T P A + S^T &= C \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$R = D^T + D - B^T P B$$

Alternativno ova lema se može izraziti i kao

$$\begin{aligned} A^T P A - P &= -L L^T \\ B^T P A + W^T L^T &= C \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$W^T W = D^T + D - B^T P B$$

gde su matrice  $L$  i  $W$  proizvoljne.

Kod stacionarnih sistema postoji još jedan ekvivalentan uslov

*Sistem je pozitivan ukoliko je matrica funkcija prenosa*

$$D(z) = C(zI - A)^{-1} B + D \quad (8.15)$$

*pozitivno realna funkcija*

#### Definicija

Sistem opisan jednačinama (8.2) je striktno pozitivno realan (SPR) ukoliko se u svim navedenim uslovima umesto pozitivne semidefinitnosti zahteva pozitivna definitnost, odnosno ukoliko se zahteva da matrica funkcija prenosa bude striktno pozitivno realna.

Zapazimo da uslov pozitivne definitnosti istovremeno znači i da matrice  $W$  i  $L$  moraju biti takve da su matrice  $L_t L_t^T$  i  $W_t W_t^T$  pozitivno definitne.

## 8.4 Pregled rezultata teorije pasivnosti

Kao što je već rečeno polazna osnova u razvoju koncepta pasivnosti bila su pasivna električna kola, kao kola koja ne proizvode energiju, a imaju sposobnost da je skladište.

Posmatra se proizvoljan dinamički sistem opisan preslikavanjem skupa ulaznih funkcija ( $u$ ) na skup izlaznih funkcija ( $y$ )

$$G: \{u\} \rightarrow \{y\}$$

Polazeći od skalarnog proizvoda ulaza i izlaza sistema kao generalisane energije u sistemu na nekom intervalu vremena  $\tau$ , jednačina energetske bilansa u sistemu se definiše na sledeći način

$$E(u, y, \tau) = \langle y, Qy \rangle_{\tau} + 2 \langle y, Su \rangle_{\tau} + \langle u, Ru \rangle_{\tau} \quad (8.16)$$

gde su

$Q$  i  $R$  simetrične, a  $S$  proizvoljna matrica odgovarajućih dimenzija

$$\langle x, Mx \rangle_{\tau} = \int_0^{\tau} x^T(\lambda) Mx(\lambda) d\lambda \quad \text{za kontinualne sisteme i signale}$$

$$\langle x, Mx \rangle_{\tau} = \sum_{i=0}^{\tau-1} x_i^T Mx_i \quad \text{za diskretne sisteme i signale.}$$

Primetimo da ovako izražen energetske bilans u principu mora biti veći ili jednak od razlike između energije koju sistem ima u trenutku vremena  $\tau$  i energije koju je imao u početnom trenutku. Ako se sa  $x$  označi stanje sistema, i ako je  $P$  pozitivno definitna matrica tada se ova činjenica može izraziti sledećom relacijom

$$E(u, y, \tau) \geq \underbrace{x_{\tau}^T P x_{\tau}}_{\text{krajnja energija}} - \underbrace{x_0^T P x_0}_{\text{početna energija}}$$

Ukoliko sistem ne proizvodi energiju, već je samo skladišti onda ova razlika mora biti pozitivna. Za sistem se kaže da je disipativan ukoliko važi

$$\forall u, \forall \tau, \forall x_0, \quad E(u, Gu, \tau) \geq 0 \quad (8.17)$$

Iz ove opšte definicije, za različite izbore matrica  $Q$ ,  $R$  i  $S$  dobijaju se sledeći posebni slučajevi.

*Pasivnost (P)*

$$Q=R=0, S=1/2I \Rightarrow \langle y, u \rangle_{\tau} \geq 0$$

*Striktna ulazna pasivnost (ISP)*

$$Q=0, S=1/2I, R=-\epsilon I \Rightarrow \langle y, u \rangle_{\tau} \geq \epsilon \|u\|_{\tau}^2$$

*Striktna izlazna pasivnost (OSP)*

$$Q=-\delta I, S=1/2I, R=0 \Rightarrow \langle y, u \rangle_{\tau} \geq \delta \|y\|_{\tau}^2$$

*Izuzetno striktna pasivnost (VSP)*

$$Q=-\delta I, S=1/2I, R=-\epsilon I \Rightarrow \langle y, u \rangle_{\tau} \geq \epsilon \|u\|_{\tau}^2 + \delta \|y\|_{\tau}^2$$

*Stabilnost konačnog pojačanja*

$$Q=-I, S=0, R=k^2 I \Leftrightarrow \exists k, \quad \forall u \quad \|y\|_{\tau} \leq k \|u\|_{\tau} \Rightarrow \|y\|_{\tau}^2 \leq k^2 \|u\|_{\tau}^2$$

Ako se navedene definicije uporede sa definicijama pozitivno realnih funkcija onda se vidi da za linearni sistem važe sledeće tvrdnje

Linearni sistem je pasivan ako je njegova matrica funkcija prenosa pozitivno realna

Linearni sistem je striktno izlazno pasivan ako je njegova matrica funkcija prenosa striktno pozitivno realna

Ako se sa  $G$  označi funkcija preslikavanja ulaza na izlaz onda, se iz definicionih izraza vidi

da važe sledeće implikacije i ekvivalencije

$$1^0 \quad G \in \text{ISP} \cup \text{OSP} \cup \text{VSP} \Rightarrow G \in \text{P}$$

$$2^0 \quad G \in \text{VSP} \Leftrightarrow G \in \text{ISP} \cap \text{OSP}$$

$$3^0 \quad G \in \text{OSP} \Rightarrow G \in \text{FGS}$$

Pored toga ukoliko sistem ima inverznu funkciju prelikavanja tada važi i

$$\text{ako } \exists G^{-1} \Rightarrow$$

$$1^0 \quad G \in \text{P} \Rightarrow G^{-1} \in \text{P}$$

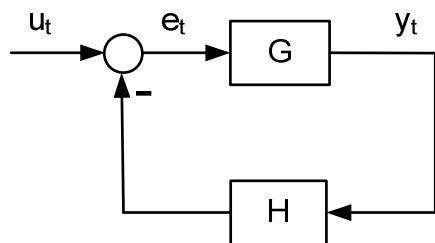
$$2^0 \quad G \in \text{VSP} \Rightarrow G^{-1} \in \text{VSP}$$

$$3^0 \quad G \in \text{ISP} \Rightarrow G^{-1} \in \text{OSP}$$

$$4^0 \quad G \in \text{OSP} \Rightarrow G^{-1} \in \text{ISP}$$

$$5^0 \quad G \text{ i } G^{-1} \in \text{ISP} \Leftrightarrow G \text{ i } G^{-1} \in \text{OSP} \Leftrightarrow G \in \text{VSP}$$

U skladu sa ovim definicijama sad se mogu analizirati različite sprege sistema koji imaju neku od ovih osobina. Sa gledišta algoritma adaptacije posebno je značajna sledeća teorema.



#### TEOREMA PASIVNOSTI

Posmatra se sistem opisan sledećim relacijama

$$e = u - Hy$$

$$y = Ge$$

Ako je G ulazno i izlazno striktno pasivan sistem, i H pasivan sistem tada je posmatrani sistem BIBO stabilan.

Ukoliko su G i H linearni sistemi, tada se ovaj zahtev svodi na to da funkcija prenosa G bude striktno pozitivno realna, a funkcija H pozitivno realna.

**SL. 8-2** SISTEM U ZATVORENOJ SPREZI ČIJA SE STABILNOST ISPITUJE





## 9 Literatura

- [ 1] Stojić, M., *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Naučna Knjiga, Beograd, 1972.
- [ 2] Stojić, M., *Digitalni sistemi upravljanja*, Nauka, Beograd, 1990.
- [ 3] Thaler, G.J, *Automatic Control Systems*, West Publishing Comp., St.Paul, 1989.
- [ 4] Kuo, B.C., *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs., N.J.,1982.
- [ 5] Chen, C., *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart, and Winston, N.Y., 1984.
- [ 6] Philips, C.L.,H.T. Nagle, *Digital Control System Analysis and Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs., N.J.,1984.
- [ 7] Astrom, K., Wittenmark, B., *Computer Controlled Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs., N.J., 1984
- [ 8] J.R.Leigh, *Applied Digital Control*, Prentice-Hall, 1985
- [ 9] Anderson, B., J., Moore, *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs., N.J.,1971.
- [10] Kirk, D, *Optimal Control Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs., N.J., 1970.
- [11] Gelb, A., *Applied Optimal Estimation*, The MIT Press, Cambridge, Ma., 1986
- [12] K.J.Astrom, B.Witenmark, *Adaptive Control*, Addison Wesley, 1989.
- [13] L.Ljung, T.Söderström, *Theory and Practice of Recursive Identification*, The M.I.T. Press, Cambridge, Ma., 1986.
- [14] Goodwin, G.C., K.S. Sin, *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs., N.J., 1984.
- [15] Harris, C.J., S.A. Billings (Eds.), *Self-tuning and Adaptive Control*, Peter Peregrinus, 1981.
- [16] B.Kosko, *Fuzzy thinking*, Hyperion, N.Y., 1993.
- [17] W.Pedrycz, *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*, John Wiley & Sons Inc., N.Y., 199
- [18] Kosko, B., *Neural Networks and Fuzzy Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs., N.J., 1992.
- [19] Guanrong, C., T.P. Trung, *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Control Systems*, CRC Press, 2000.
- [20] Espinosa, J., *Fuzzy Logic, Identification and Predictive Control*, Springer-Verlag, 2005
- [21] Zak, S.H., *Systems and Control*, Oxford University Press, 2003.
- [22] Dutton, K., *The Art of Control Engineering*, Addison Wesley Longman, 1997.
- [23] Kalani, G., *Industrial Process Control: Advances and Applications*, Elsevier Science, 2002.
- [24] Goodwin, S.G., S.F. Graebe, M.E. Salgado, *Control System Design*, Prentice-Hall, 2001
- [25] Leigh, J. R., *Control Theory: A Guided Tour*, IEE, 2004.