

## 8. OCJENA KVALITETA PONAŠANJA SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA I KRITERIJI ZA SINTEZU

[15, 31, 54, 66, 69, 70, 71, 77, 83, 84]

Pri projektovanju sistema automatskog upravljanja moraju se analizirati određeni uslovi rada, te pokušati zadovoljiti prema sljedećem redosljedu: stabilan rad sistema se mora obezbijediti; dobro ponašanje odziva-stanja sistema u stacionarnom režimu, koji nastupa dovoljno dugo vremena nakon početnog trenutka dejstva ulaznog signala ili poremećaja; kvalitetan prelazni režim sistema; i brz odziv.

Ovim redosljedom se vrši analiza i sinteza sistema, jer nema smisla govoriti o odzivu sistema u stacionarnom režimu ako posmatrani sistem nije stabilan (kod nestabilnih sistema stacionarni režim po prirodi je različit od željenog). Takođe se ne može govoriti o kvalitetu prelaznog režima ako nisu ispunjeni uslovi za rad sistema u stacionarnom režimu rada.

Tehnika projektovanja sistema automatskog upravljanja se svodi na zadovoljavanje jednog ili više kriterija, koji u praksi mogu biti zasnovani na:

- *ocjeni tačnosti i odstupanju* objekta upravljanja od zadanog i/ili poželjnog stanja, na šta ukazuje regulaciona greška. Poznato je, da je greška neminovna u toku prelaznog režima, ali se često pojavljuje i poslije prelaska objekta upravljanja u novo stacionarno stanje, kada se govori o *statičkoj greški*. Takođe se može govoriti i o komponentama *dinamičke greške*, od kojih svoju fizikalnost imaju greške koje su posljedica promjena brzine i ubrzanja zadane vrijednosti;
- *procjeni prigušenja* objekta upravljanja, što u biti predstavlja procjenu odstojanja objekta upravljanja od granice stabilnosti; i
- istovremenom ocjenjivanju više pokazatelja o ponašanju objekta upravljanja, što omogućavaju *kompleksni* ili *integralni* kriteriji.

Svi navedeni kriteriji se baziraju na pretpostavci o poznavanju dinamike objekta upravljanja, kao i potrebnom zadovoljenju zadanog i definisanog pokazatelja kvaliteta upravljanja. To znači da se moraju imati određene informacije o objektu upravljanja na osnovu kojih će se izvesti projektovanje sistema automatskog upravljanja. U zavisnosti od toga koje se informacije o objektu poznaju, projektovanje se može izvesti na osnovu:

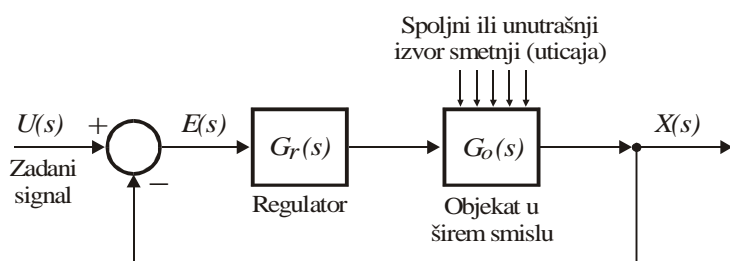
- poznate prenosne funkcije  $G(s) = P_m(s)/Q_n(s)$ , odnosno same karakteristične jednačine  $Q_n(s) = 0$ ;
- poznate amplitudno fazne karakteristike ili poznatih Bodeovih dijagrama; i
- analize dijagrama vremenskog odziva na poznati pobudni signal, kao što su odskočni, impulsni i/ili prostoperiodični odziv.

Prije svega, zgodno je razmotriti osnovnu i najčešće susretanu strukturnu šemu rada sistema upravljanja. U direktnoj grani se ima serijska veza bloka regulatora i bloka objekta

upravljanja u širem smislu, a zatvoreni su jediničnom negativnom povratnom spregom, slika 8.1.

Na slici 8.1 je:  $U(s)$  kompleksni lik zadane vrijednosti signala na ulazu  $u(t)$ ;  $G_r(s)$  prenosna funkcija regulatora;  $G_o(s)$  prenosna funkcija objekta u širem smislu, što u praksi predstavlja serijsku vezu prenosnih funkcija izvršnog organa, samog objekta upravljanja i transmitera;  $X(s)$  kompleksni lik upravljanog signala koji je mjerni ekvivalent upravljanje veličine  $x(t)$ ;  $E(s)$  kompleksni lik signala greške  $e(t)$  ili regulacionog odstupanja koje treba učiniti što manjim. Sa slike je očigledno:

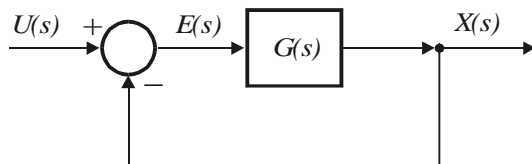
$$e(t) = u(t) - x(t) \quad (8.1)$$



Slika 8.1. Strukturna šema rada sistema upravljanja

Idealno bi bilo da se uspije zadovoljiti uslov da je  $e(t) \equiv 0, \forall t$ , što je teško ispuniti jer svaki elemenat u strukturi upravljanja ima inerciju. Zadani signal  $u(t)$  se još naziva *referentnim signalom*. Sistemi automatskog upravljanja (SAU) se mogu, prema namjeni, podijeliti na određene skupine.

- Sisteme stabilizacije.** Ovi sistemi imaju  $u(t) = konst.$ , a osnovni zadatak im je da izlaznu veličinu održavaju konstantnom. Tako je za analizu, bez umanjavanja opštosti, moguće traženi konstantni nivo smatrati *nultim* i usvojiti da je  $u(t) \equiv 0$ . Zato se može pretpostaviti da se ima struktura sistema kao na slici 8.2.



Slika 8.2. Pojednostavljena struktura upravljanja

Na slici 8.2 prenosnu funkciju otvorenog sistema  $G(s)$  čini serijska veza regulatora i objekta upravljanja u širem smislu, pa je određena proizvodom ovih prenosnih funkcija, tj.  $G(s) = G_r(s)G_o(s)$ . Sa slike 8.2 se vidi da je:

$$X(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} U(s) \quad (8.2)$$

Dalje je:

$$E(s) = U(s) - X(s) = U(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)} U(s) = \frac{1}{1 + G(s)} U(s) \quad (8.3)$$

Za svaki sistem upravljanja u praksi se mora obezbijediti uslov stabilnosti, tj. da sistem nakon početne perturbacije pređe u novo stacionarno stanje. Zato se na relaciju (8.3) mora moći primjeniti osobina Laplaceove transformacije o izračunavanju krajnje vrijednosti, čijom se primjenom dobija da je:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [u(t) - x(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \left[ \frac{sU(s)}{1 + G(s)} \right]_{s \rightarrow 0} \quad (8.4)$$

gdje je  $e(\infty)$  greška u novom stacionarnom stanju ili statička greška, koja zavisi od prenosne funkcije sistema u otvorenom, a koja se može predstaviti u obliku razlomljene racionalne funkcije:

$$G(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (8.5)$$

a pošto je u praksi  $n > m$ , to je:

$$G(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{b_m}{a_n} = K_p \quad (8.6)$$

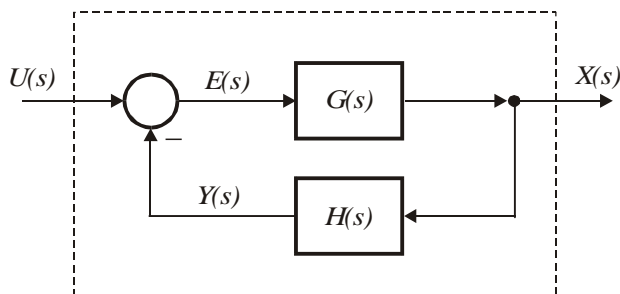
gdje je  $K_p$  koeficijent pojačanja ili konstanta položaja. U slučaju da se u povratnoj grani na slici 8.2 ima blok  $H(s)$ , blok struktura bi izgledala kao na slici 8.3. U ovom slučaju relacija (8.3) bi imala oblik:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} U(s) \quad (8.7)$$

dok bi relacija (8.4) imala oblik:

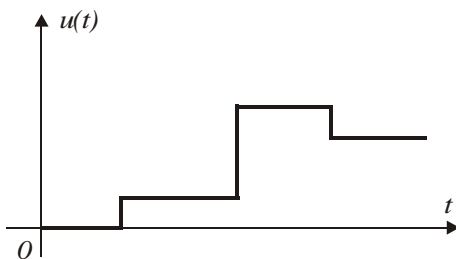
$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [u(t) - x(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \left[ \frac{sU(s)}{1 + G(s)H(s)} \right]_{s \rightarrow 0} \quad (8.8)$$

odakle se zaključuje da bi se na isti način određivala tačnost ponašanja sistema u novom stacionarnom stanju.



Slika 8.3. Blok struktura sistema upravljanja kada se u direktnoj grani nalazi blok  $G(s)$  a u grani povratne sprege blok  $H(s)$

2. **Sistemi pozicionog upravljanja.** Kod ovih sistema pobuda  $u(t)$  je konstantna u pojedinim intervalima vremena, tj.  $u(t)$  se mijenja prema zakonu odskočne funkcije i ima konstantnu amplitudu u pojedinim intervalima vremena  $t$ , što se može prikazati kao na slici 8.4.



Slika 8.4. Izgled pobudnog signala kod sistema pozicionog upravljanja

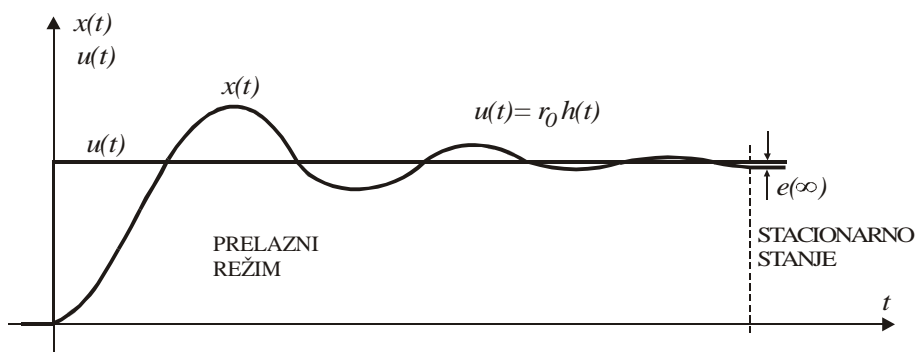
Izlaz sistema treba da prati ulaz, ali zbog inercije sistemu je potrebno neko vrijeme da bi se zauzelo novo stanje. Tipični primjeri ovih sistema su servomotori kao npr. promjena položaja osovine. Ovi sistemi imaju svoju *konstantu položaja*. Neka je, po pretpostavci, ulazna funkcija u obliku odskočne funkcije amplitude  $r_0$ . Ako se jedinična odskočna funkcija označi kao  $h(t)$ , tada se u pojedinim vremenskim intervalima može pisati da je:

$$u(t) = r_0 h(t) \Rightarrow U(s) = \frac{r_0}{s} \quad (8.9)$$

pa se na osnovu (8.4) dobija da je greška u novom stacionarnom stanju:

$$e(\infty) = \left[ \frac{s(r_0 / s)}{I + G(s)} \right]_{s \rightarrow 0} = \frac{r_0}{I + K_p} \quad (8.10)$$

gdje je  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$  konstanta položaja. Ako sistem nema astatizma tada je  $r = 0$ , pa je  $e(\infty) \neq 0$  ali konačno, razmatrani sistem je statički, odnosno javlja se konačna statička greška. Grafik pobudnog signala i odziva sistema s jasno naznačenim prelaznim režimom i stacionarnim stanjem, je prikazan na slici 8.5. Statička greška je označena kao  $e(\infty)$  i predstavlja razliku između pobude i odziva sistema u novom stacionarnom stanju. Sa slike 8.5 se vidi da je ovo primjer kod kojeg statička greška nije eliminisana, tj.  $e(\infty) \neq 0$ .



Slika 8.5. Prikaz prelaznog režima i stacionarnog stanja

- 3. Sistemi upravljanja po brzini (brzinski servosistemi).** Ovi sistemi imaju zadatak da upravljaju npr. brzinom vrtnje motora. Upravljajući brzinom, oni zadržavaju poziciju koja se mijenja u segmentima vremena po nekom linearnom zakonu. Ako se pretpostavi da je ulazna funkcija u obliku nagibne funkcije ili "rampe", pri čemu je  $h(t)$  jedinična odskočna funkcija:

$$u(t) = v_0 \cdot t \cdot h(t), \quad v_0 = \text{const.} \quad (8.11)$$

tada je kompleksni lik ulaza:

$$U(s) = v_0 / s^2 \quad (8.12)$$

pa je stacionarna greška:

$$e(\infty) = \left[ \frac{s(v_0 / s^2)}{I + G(s)} \right]_{s \rightarrow 0} = \frac{v_0}{K_v} \quad (8.13)$$

## 8. Ocjena kvaliteta ponašanja SAU i kriteriji za sintezu

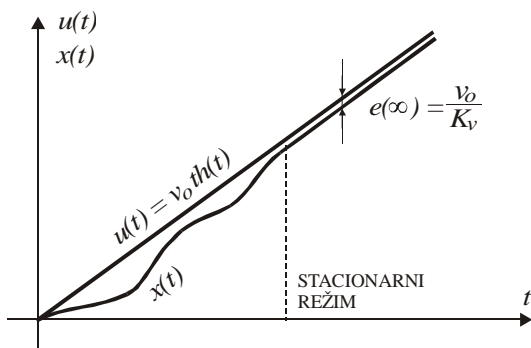
gdje je:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (8.14)$$

i naziva se *konstanta pojačanja po brzini* ili *brzinska konstanta sistema*. Ako je ulazna funkcija rampa, tada (8.13) daje konačnu vrijednost samo za sisteme  $G(s)$  koji imaju astatizam prvog reda, odnosno kada je  $r = 1$ , tj.:

$$G(s) = K \frac{P_m(s)}{sQ_{n-1}(s)} \quad (8.15)$$

Za slučaj da sistem  $G(s)$  nema astatizma, tj. kada je  $r = 0$ , greška bi bila beskonačno velika, dok u slučaju da je  $r > 1$  greška bi bila  $e(\infty) = 0$ , ali u oba ova slučaja nije moguće postići željeni kvalitet upravljanja. Slučaj kada je  $r = 1$  prikazan je na slici 8.6.



Slika 8.6. Grafik ulaza i izlaza brzinskog servomehanizma kada u direktnoj grani imamo astatizam prvog reda

Neka sada, prema pretpostavci, na ulazu sistema koji je prikazan na slici 8.2 djeluje funkcija koja se mijenja po zakonu:

$$u(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 h(t) \quad (8.16)$$

pri čemu je  $h(t)$  jedinična odskočna funkcija. U ovom slučaju se može definisati *konstanta pojačanja po ubrzanju*, ako je  $a_0 = const.$ . Sada je kompleksni lik ulaza:

$$U(s) = a_0 / s^3 \quad (8.17)$$

pa se statička greška  $e(\infty)$  može odrediti kao:

$$e(\infty) = \left[ \frac{s(a_0 / s^3)}{1 + G(s)} \right]_{s \rightarrow 0} = \frac{a_0}{K_a} \quad (8.18)$$

gdje je:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (8.19)$$

i naziva se *konstanta pojačanja po ubrzanju sistema*. Ona će imati konstantnu vrijednost samo u slučaju kada sistem u direktnoj grani ima astatizam drugog reda, tj. za  $r = 2$ . Ako je red astatizma  $r < 2$  ova komponenta greške bi bila beskonačno velika, dok u slučaju da je red astatizma  $r > 2$  ova komponenta greške bi bila ravna nuli.

**4. Sistemi programskog upravljanja.** Kod ovih sistema  $u(t)$  je unaprijed zadana programirana funkcija.

### 8.1. Komponente greške koje su posljedica promjene ulaza i dejstva smetnje

U prvu grupu grešaka koje karakterišu  $e(t)$  spadaju greške u stacionarnom stanju, a nastaju kao promjena  $u(t)$  ili kao posljedica djelovanja jednokratne smetnje. Ako u sistemu automatskog upravljanja dejstvuje neka smetnja  $F_k(s)$ , što se vidi na slici 8.7a, tada je istu poželjno preslikati na izlaz, slika 8.7b, ili na ulaz, slika 8.7c.

Tako je na osnovu slike 8.7 moguće dobiti dvije ekvivalentne šeme, na kojima su smetnje koje djeluju na objekat u širem smislu preslikane na izlaz, slika 8.8a, ili na ulaz, slika 8.8b. U obadvije šeme na slici 8.8 je:

$$G(s) = G_r(s)G_o(s) \quad (8.20)$$

Za šemu sa slike 8.8a se može odrediti  $E(s)$  i na nju primjeniti osobina Laplaceove transformacije za izračunavanje konačne vrijednosti. Pošto se radi o klasi *linearnih* sistema, tada će vrijediti princip superpozicije. Tako je prvo moguće pretpostaviti da na sistem ne djeluju smetnje, tj. da je:

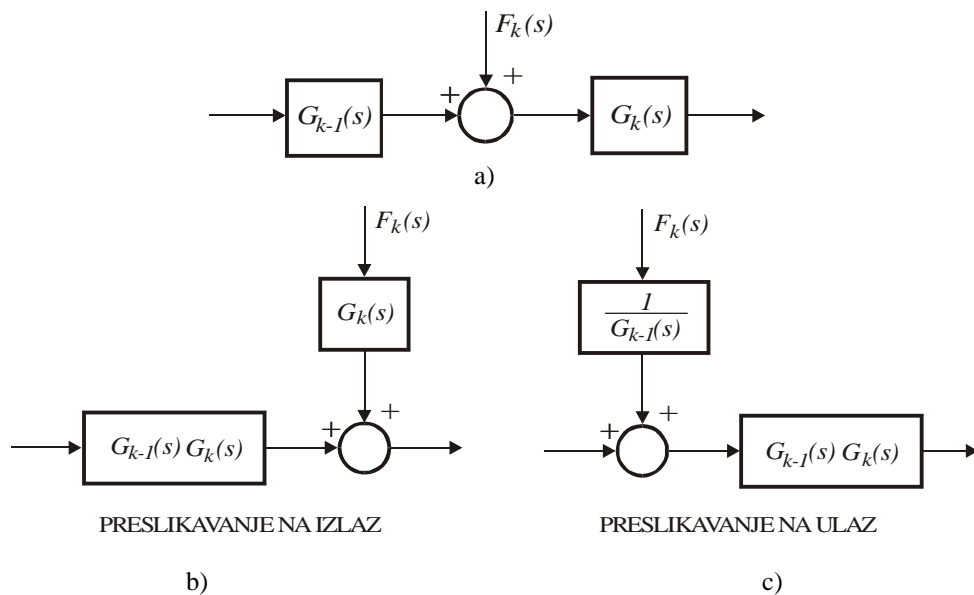
$$f_i(t) \equiv 0; i=1,2,\dots,n \quad (8.21)$$

i odrediti prvu komponentu greške  $E_1(s)$  koju je prouzrokovala promjena  $U(s)$ . Sada je:

$$X(s) = G(s)E_1(s)$$

8. Ocjena kvaliteta ponašanja SAU i kriteriji za sintezu

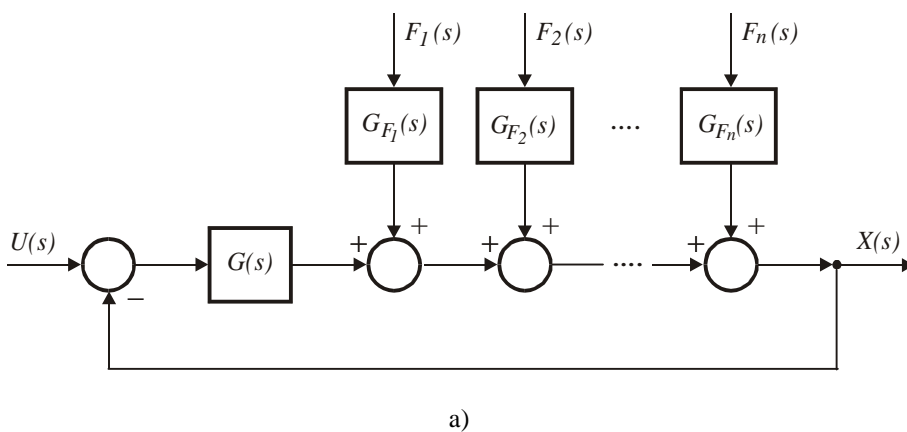
$$E_I(s) = U(s) - X(s) = U(s) - G(s)E_I(s) \quad (8.22)$$



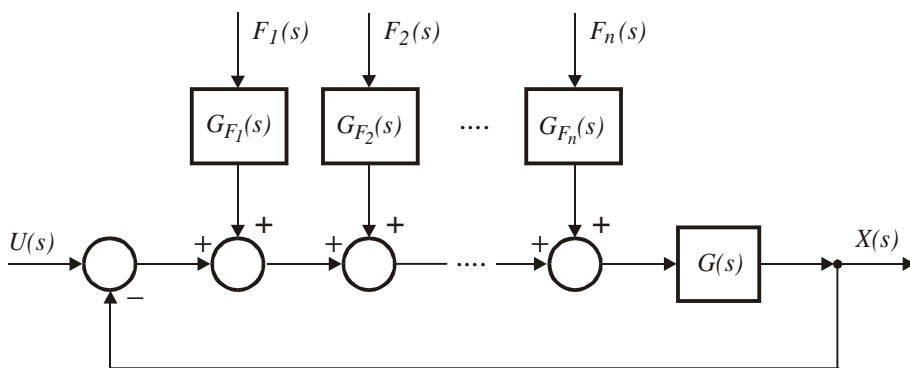
Slika 8.7. Dejstvo smetnje na sistem (a) i njeno preslikavanje na izlaz (b) i/ili na ulaz (c)

Iz (8.22) se dobija da je promjena  $E(s)$ , usljed promjene  $U(s)$  pri  $f_i(t) \equiv 0$ , ravna:

$$E_I(s) = \frac{1}{1 + G(s)} U(s) \quad (8.23)$$







b)

Slika 8.8. Preslikavanje smetnji koje djeluju na objekat upravljanja u širem smislu na izlaz (a) i/ili na ulaz (b)

U drugom slučaju se predpostavlja da je  $U(s) = 0$ , a potom odredi komponenta greške  $E_2(s)$  koja je posljedica dejstva smetnji na sistem. Sada je:

$$\begin{aligned}
 -E_2(s) &= X(s) = G(s)E_2(s) + \sum_{i=1}^n G_{F_i}(s)F_i(s) \Rightarrow \\
 \Rightarrow -E_2(s)[1 + G(s)] &= \sum_{i=1}^n G_{F_i}(s)F_i(s) \quad (8.24)
 \end{aligned}$$

pa je komponenta greške  $E_2(s)$ , koja je posljedica dejstva smetnji na sistem, ravna:

$$E_2(s) = -\frac{\sum_{i=1}^n G_{F_i}(s)F_i(s)}{1 + G(s)} \quad (8.25)$$

Po principu superpozicije, ukupna greška  $E(s)$  je ravna:

$$E(s) = E_1(s) + E_2(s) \quad (8.26)$$

Neka se, prema predpostavci, ima specijalan slučaj kada nema dejstva smetnji na sistem. Neka je do trenutka  $t = 0$ , kada se počinje posmatrati sistem, bilo i  $e(t) = 0$  i neka je u tom trenutku došlo do promjene zadane-referentne vrijednosti  $u(t)$ . Sada se posmatra šta se dešava nakon vremena potrebnog da se uspostavi stacionarno stanje, tj. nakon *prelaznog procesa*. Neka je dejstvo na sistem u obliku odskočne funkcije:

$$u(t) = r_0 h(t) \Rightarrow U(s) = L\{r_0 h(t)\} = \frac{r_0}{s} \quad (8.27)$$

gdje je  $h(t)$  jedinična odskočna funkcija:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (8.28)$$

to je:

$$e_I(t) = L^{-1}\{E_I(s)\} \quad (8.29)$$

Tako se na osnovu osobine Laplaceove transformacije o krajnjoj vrijednosti, koja može biti iskazana relacijom  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_I(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_I(s)$ , dobija da je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_I(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{r_0}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{1+G(s)} \quad (8.30)$$

Poželjno je da vrijednost limesa (8.30) bude ravna nuli. U slučaju kada je vrijednost limesa (8.30) različita od nule tada se sklop ne može vratiti u prvobitno stanje, tj. ne može izvršiti rekonstrukciju ulaznog signala (zadane vrijednosti). Zbog toga je značajan tzv. *stepen astatizma* otvorenog sistema. Neka, po pretpostavci, prenosna funkcija  $G(s)$  ima oblik:

$$G(s) = K \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = K \frac{P_m(s)}{s^r Q_{n-r}(s)}, \quad m < n \quad (8.31)$$

Broj  $r$  se zove *stepen astatizma* otvorenog sistema. Za  $r=0$  stepen astatizma je *nultog* reda, odnosno takav sistem je astatički. Sada je:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_I(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{1 + K \frac{P_m(s)}{s^r Q_{n-r}(s)}} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0 s^r Q_{n-r}(s)}{s^r Q_{n-r}(s) + K P_m(s)} = \begin{cases} 0, & r > 0 \\ \neq 0, & r = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (8.32)$$

Ako se uvede oznaka:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K P_m(s)}{s^r Q_{n-r}(s)} \quad (8.33)$$

tada je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_I(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{1 + G(s)} = \frac{r_0}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{r_0}{1 + K_p} \quad (8.34)$$

Vidi se da u slučaju kada analizirani sistem posjeduje astatizam,  $r \neq 0$ , i npr. ako se ima astatizam bar prvog reda tada je  $K_p = \infty$ , pa je greška poslije završetka prelaznog procesa ravna nuli:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_I(t) = 0 \quad (8.35)$$

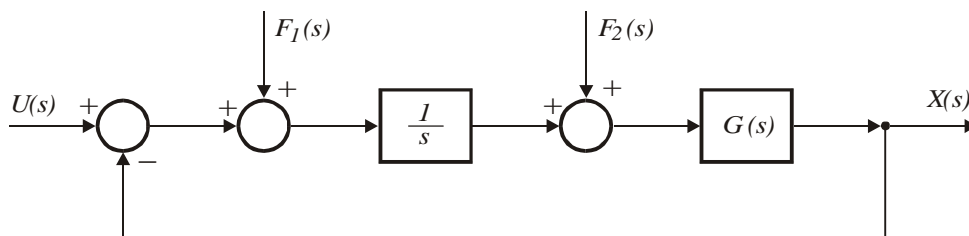
i nema greške u stacionarnom stanju, tj. statička greška je nulta. Za slučaj kada je  $r = 0$ , koeficijent  $K_p$  ima neku konačnu vrijednost i naziva se *koeficijent pojačanja sistema*. Pošto je  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_I(t) = r_0 / (1 + K_p)$ , to slijedi da se statička greška može smanjiti *povećanjem pojačanja regulatora*. Međutim, ovo pojačanje se ne može povećavati u beskonačnost, kada bi se u potpunosti eliminisala greška u novom stacionarnom stanju, ali se možda može svesti u tehnologijom dozvoljene granice odstupanja oko zadane vrijednosti. Druga mogućnost uticaja, pa i potpunog eliminisanja statičke greške, je preko astatizma sistema. Kako objekti obično ne posjeduju astatizam, to je neophodno u regulator koji je opisan prenosnom funkcijom  $G_r(s)$ , uvesti astatizam bar prvog reda, tj. potrebno je koristiti npr. *PI regulator*.

Još je potrebno posmatrati uticaj promjena smetnje, npr. po zakonu odskočne funkcije, tj.:

$$F_k(s) = f_{k0} \frac{1}{s} \quad (8.36)$$

gdje je  $f_{k0}$  amplituda tih promjena.

U ovom slučaju prenosna funkcija u odnosu na grešku mora imati astatizam bar prvog reda da se nebi unosila trajna statička greška. Ako se pogleda sliku 8.9, tada smetnja  $F_2(s)$  neće reprodukovati trajnu statičku grešku, dok će smetnja  $F_1(s)$  proizvoditi trajnu statičku grešku ako sistem, koji je opisan prenosnom funkcijom  $G(s)$ , ne posjeduje astatizam.



Slika 8.9. Dejstvo smetnji na sistem u obliku odskočne funkcije i njihov uticaj na statičku grešku

Neka se sada ima *brzinski servomehanizam* za koji je:

$$u(t) = v_0 t h(t) \quad (8.37)$$

Ako je  $v_0 = \text{const.}$ ,  $t$  tekuće vrijeme, a  $h(t)$  jedinična odskočna funkcija, tada je  $U(s) = v_0 / s^2$ , to bi komponenta greške koja je posljedica eventualnih promjena brzine bila:

$$E_I(s) = \frac{v_0}{s^2 (1 + G(s))} \quad (8.38)$$

pa bi statička greška, razlika između zadane i stvarne vrijednosti poslije završetka prelaznog procesa, bila:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_I(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s E_I(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{v_0}{1 + G(s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v_0}{s + sG(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v_0}{sG(s)} = \frac{v_0}{K_v} \end{aligned} \quad (8.39)$$

Da bi ova granična vrijednost bila ravna nuli potrebno je da  $G(s)$  ima astatizam bar drugog reda. U posljednjoj relaciji je:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (8.40)$$

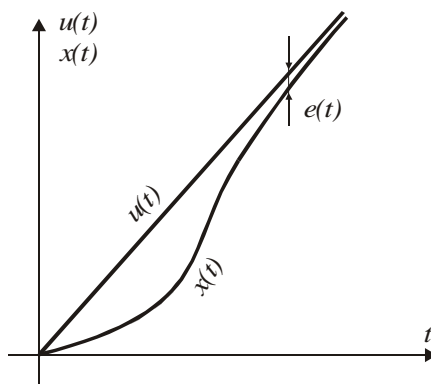
i naziva se *konstanta pojačanja po brzini*. Za konačne vrijednosti  $K_v$  stvarna vrijednost će biti različita od zadane. Za slučaj da je  $K_v = 0$ ,  $G(s)$  nema astatizma, tj.  $r = 0$ , greška će težiti u beskonačnost. Za prenosne funkcije koje imaju astatizam prvog reda  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_I(t)$  će imati konačnu vrijednost, koja je različita od nule, odnosno,  $x(t)$  će pratiti  $u(t)$  sa konačnim odstupanjem. Tada se javlja konstantna brzinska greška. Ova greška se može smanjiti povećavanjem koeficijenta pojačanja, ali samo do određene rezerve stabilnosti (koeficijent pojačanja pripada klasi realnih i fizički ostvarivih sistema i ne može se povećavati u beskonačnost). Dejstvo, odziv i pojava greške kod brzinskog servomehanizma je prikazana na slici 8.10.

Takođe je moguće posmatrati i grešku koja nastaje usljed *promjene ubrzanja* referentnog signala. Neka je, prema pretpostavci, dat referentni signal:

$$u(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 h(t) \quad (8.41)$$

gdje je  $a_0 = \text{konst.}$ ,  $t$  je tekuće vrijeme, a  $h(t)$  jedinična odskočna funkcija. Sada je:

$$U(s) = \frac{a_0}{s^3} \quad (8.42)$$



Slika 8.10. Dejstvo, odziv i greška kod brzinskog servomehanizma

Tako se dobija da je:

$$sE_I(s) = \frac{a_0}{s^2 + s^2 G(s)} \quad (8.43)$$

Iz relacije (8.43) slijedi da je:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_I(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_I(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_0}{s^2 + s^2 G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_0}{s^2 G(s)} = \frac{a_0}{K_a} \quad (8.44)$$

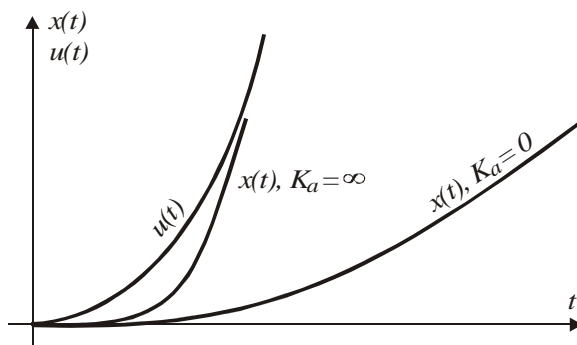
pri čemu je:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (8.45)$$

Kada je  $K_a = \infty$  komponenta greške teži nuli, ali u ovome slučaju  $G(s)$  mora imati astatizam bar trećeg reda  $r=3$ . Za slučaj kada je  $K_a \in R \setminus \{0\}$  statička greška nije ravna nuli ali ima konačnu vrijednost. U ovom slučaju  $G(s)$  mora imati astatizam drugog reda. Za slučaj da je  $K_a = 0$  greška divergira. Ove mogućnosti su prikazane na slici 8.11.

Neka se sada posmatra opšti slučaj kada je  $u(t)$  proizvoljna funkcija koja pripada klasi funkcija tipa početnih uslova i čiji je kompleksni lik  $U(s)$ . Već je određena greška koja potiče od promjena ulaznog signala:

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}U(s) \quad (8.46)$$



Slika 8.11. Dejstvo, odziv i greška koja je posljedica promjene ubrzanja referentnog signala

Statička greška može biti određena primjenom osobine Laplaceove transformacije o konačnoj vrijednosti:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (8.47)$$

Poznato je da stacionarna greška zavisi od spoljašnjeg dejstva, strukture samog sistema i parametara sistema. U slučaju da je ulazna funkcija  $u(t)$  diferencijabilna u intervalu  $0 < t < \infty$ , tada se  $e(t)$  može razviti u Taylorov red:

$$e(t) = C_0 u(t) + C_1 \frac{du(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \dots + \frac{C_m}{m!} \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots \quad (8.48)$$

gdje su  $C_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m, \dots$ , generalisani koeficijenti statičke greške koji se određuju pomoću prenosne funkcije sistema u odnosu na signal greške. Za slučaj kada je:

$$E(s) = \frac{U(s)}{1+G(s)} \quad (8.49)$$

se ima:

$$E(s) = \left[ C_0 + C_1 s + \frac{1}{2!} C_2 s^2 + \dots + \frac{1}{m!} C_m s^m + \dots \right] U(s) \quad (8.50)$$

pri čemu se koeficijenti  $C_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m, \dots$ , određuju na sljedeći način:

$$C_0 = \left[ \frac{I}{I+G(s)} \right]_{s=0} ; C_1 = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{I}{I+G(s)} \right]_{s=0} ;$$

$$C_2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ \frac{I}{I+G(s)} \right]_{s=0} ; \dots ; C_m = \frac{\partial^m}{\partial s^m} \left[ \frac{I}{I+G(s)} \right]_{s=0} ; \dots \quad (8.51)$$

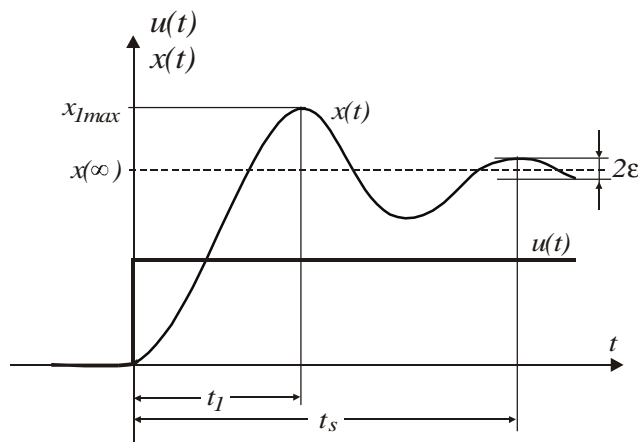
Generalisani koeficijent  $C_0$  se naziva koeficijent statičke greške, generalisani koeficijent  $C_1$  se naziva koeficijent greške po brzini, a generalisani koeficijent  $C_2$  se naziva koeficijent greške po ubrzanju. Recipročne vrijednosti generalisanih koeficijenata  $C_1$  i  $C_2$  se zovu koeficijenti dobrote po brzini i po ubrzanju, respektivno. Sada se mogu odrediti komponente greške:

$$e_0 = C_0 u(t) ; e_v = C_1 \frac{du(t)}{dt} ; e_a = C_2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} ; \dots ; e_m = C_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} ; \dots \quad (8.52)$$

pri čemu je  $e_0$  statička greška,  $e_v$  greška po brzini, a  $e_a$  greška po ubrzanju.

## 8.2. Procjena kvaliteta upravljanja na osnovu vremenskog toka upravljane veličine

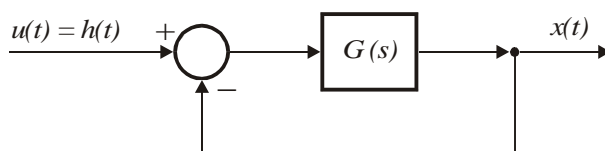
U praksi se često puta pojavljuju problemi zbog nepoznavanja prenosne funkcije u otvorenom  $G(s)$ , ili prenosne funkcije zatvorenog sistema  $W(s) = G(s)/(I+G(s))$ , ili karakteristične jednačine  $Q_n(s) = 0$ , ili amplitudno fazne karakteristike  $G(j\omega)$  ili Bodeovih dijagrama. U ovakvim slučajevima je najjednostavnije snimiti odziv sistema  $x(t)$  na odskočnu funkciju  $u(t)$ . Tipični odziv sistema je prikazan na slici 8.12.



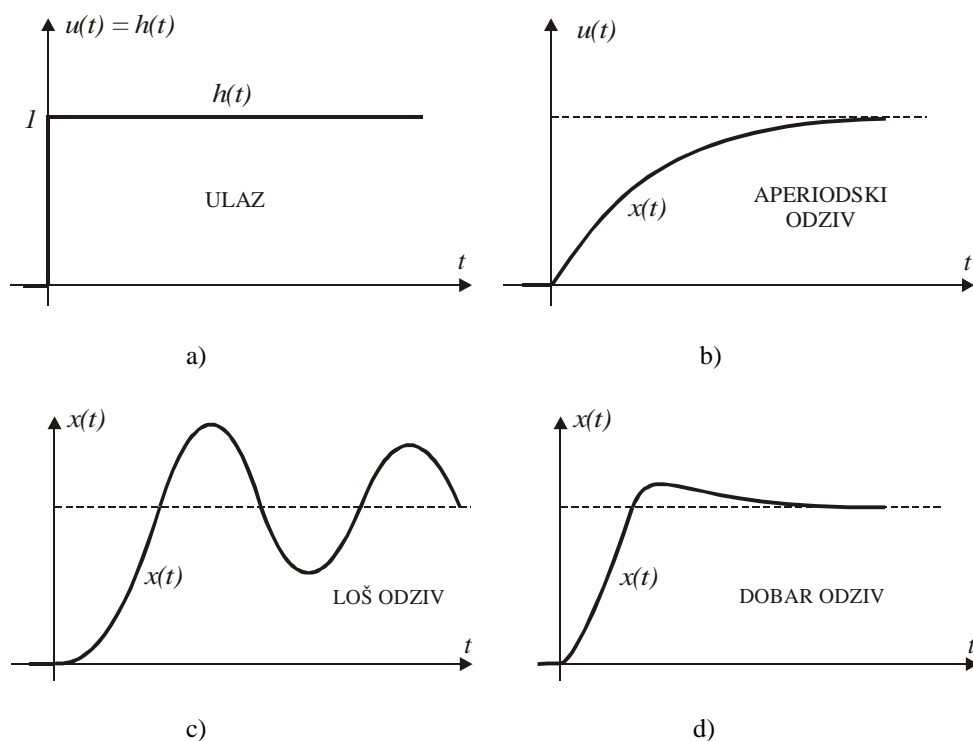
Slika 8.12. Odziv sistema na odskočnu funkciju

## 8. Ocjena kvaliteta ponašanja SAU i kriteriji za sintezu

Analizom dijagrama sa slike 8.12 se dobija čitavi niz korisnih pokazatelja o kvalitetu upravljanja procesom. Dijagrami odziva sistema mogu biti i drugačiji, pa su navedeni neki karakteristični primjeri prelaznih procesa koji se često pojavljuju u praksi. Neka se ima struktura upravljanja kao na slici 8.13, tada su tipični odzivi na jediničnu odskočnu funkciju  $h(t)$  prikazani na slici 8.14.



Slika 8.13. Blok struktura sistema upravljanja u praksi



Slika 8.14. Tipični odzivi sistema upravljanja na jediničnu odskočnu funkciju: jedinična odskočna funkcija (a), odziv aperiodskog bloka prvog reda (b), loš kvazioscillatorni odziv (c) i dobar odziv sa malim prvim preskokom (d)

Detaljan prikaz kvazioscillatornog odziva prikazan je na slici 8.15, gdje su kotirani neki od interesantnih parametara i dat grafički način njihovog određivanja. Na slici 8.15 je:  $t_u$  vrijeme uspona,  $t_k$  vrijeme kašnjenja,  $t_s$  vrijeme smirivanja prelaznog procesa,  $T_p$  kvazi

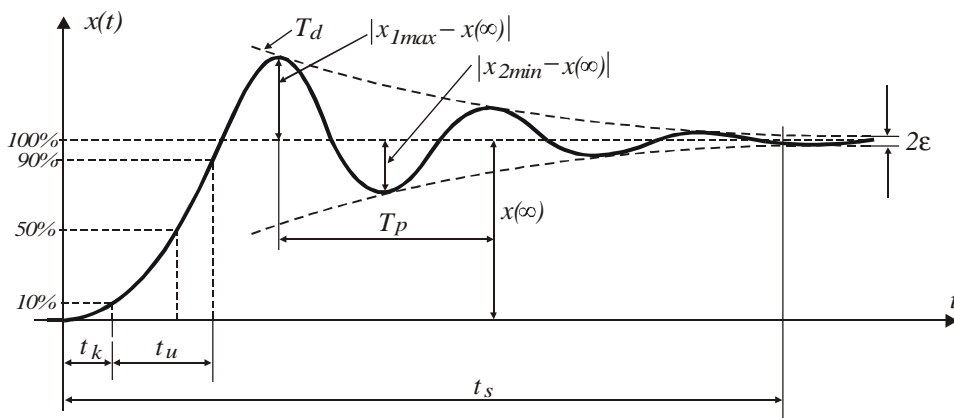


period,  $T_d$  dominantno vrijeme ili vremenska konstanta eksponencijalne ovojnice signala na izlazu,  $x(\infty)$  novo stacionarno stanje,  $|x_{1max} - x(\infty)|$  vrijednost prvog preskoka preko novog stacionarnog stanja i  $|x_{2min} - x(\infty)|$  vrijednost prvog preskoka ispod novog stacionarnog stanja.

Dijagram sa slike 8.15 je za praksu od posebne važnosti. Da bi se ovakav dijagram mogao snimiti u praksi to sistem upravljanja mora, prije svega, biti stabilan i mora imati određenu rezervu stabilnosti. Za praksu je bitno da odziv, a time i tipična vremena odziva budu unutar nekih propisanih ili tehnologijom zahtijevanih granica. Prije svega, da se oko novog stacionarnog stanja javljaju oscilacije čije su amplitude prigušene po envelopei koja je definisana dominantnim vremenom  $T_d$  i konstantnim kvaziperiodom oscilovanja  $T_p$ . Broj tih oscilacija je najčešće jedna do dvije, a jako rijetko smiju biti tri ili četiri. Brzina reagovanja sistema se približno procjenjuje na osnovu vremena smirenja  $t_s$ , a to je vrijeme koje protekne od trenutka kada je poremećaj djelovao na sistem do trenutka kada su se kvazioscilacije smirile unutar zone  $2\varepsilon$ , tj. do trenutka kada je zadovoljena relacija:

$$|x(t) - x(\infty)| \leq \varepsilon \cdot x(\infty) \quad (8.53)$$

pri čemu je  $\varepsilon$  unaprijed zadana mala vrijednost i obično iznosi  $\varepsilon = 0,01 \div 0,05$ .



Slika 8.15. Kvazioscilatorni odziv sistema i interesantni parametri

Sam sistem, čiji je odziv na odskočnu funkciju prikazan na slici 8.15, je sklon ka oscilovanju, pa je potrebno povesti računa o rezervama stabilnosti i prvom preskoku iznad novog stacionarnog stanja. Tako se definiše *eksponencijalni preskok* kao:

$$\delta[\%] = \frac{x_{1max} - x(\infty)}{x(\infty)} \cdot 100\% \quad (8.54)$$

## 8. Ocjena kvaliteta ponašanja SAU i kriteriji za sintezu

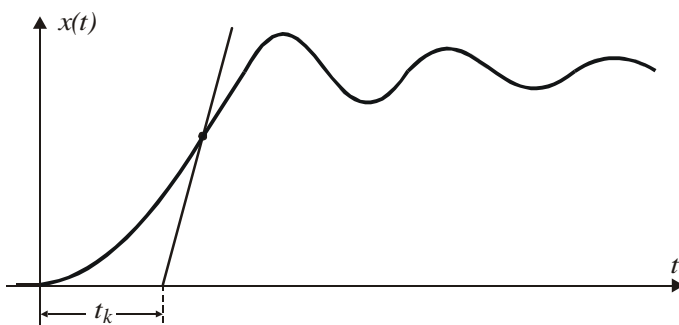
Dopuštene vrijednosti za  $\delta[\%]$  se dobiju u odgovarajućim priručnicima i tablicama. Najčešće se nalaze u granicama od 10% do 30%, a vrlo rijetko se mogu kretati i do 70%. Kod aperiodičnih odziva je  $\delta[\%] = 0\%$ .

Stepen oscilatornosti ili sklonost sistema ka oscilovanju se može definisati kao:

$$\rho[\%] = \frac{|x_{2min} - x(\infty)|}{|x_{1max} - x(\infty)|} \cdot 100\% \quad (8.55)$$

i poželjno je da ovaj faktor bude što manji. Manji stepen oscilatornosti kaže da je sistem manje sklon oscilovanju, da je prelazni režim kraći i da je veća brzina reagovanja.

Vrijeme kašnjenja  $t_k$  je moguće definisati i na način kako je to prikazano na slici 8.16. Sada je  $t_k$  određeno kao vrijeme koje protekne od trenutka dejstva poremećaja, u ovom slučaju odskočne funkcije, pa do trenutka kada pravac povučen u prevojnoj tački presjeca vremensku osu.



Slika 8.16. Drugi način određivanja vremena kašnjenja

**Primjer 8.1.** Većina sistema se u praksi kvalitativno ponaša kao zatvoreni sistem drugog reda, čija prenosna funkcija u  $s$  domenu ima oblik:

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad (8.56)$$

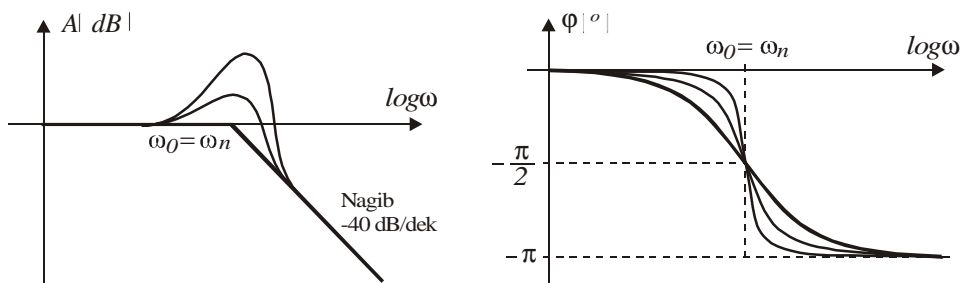
ili u  $j\omega$  domenu:

$$W(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n = 1/T \quad (8.57)$$

gdje je  $\omega_n$  prirodna učestanost, a  $\xi$  koeficijent prigušenja inercionog sistema drugog reda. Sada se mogu nacrtati logaritamске amplitudno frekventne (AF) i fazno frekventne (FF) karakteristike sistema (8.56), slika 8.17.

Sa slike 8.17 se vidi da se javlja karakteristični rezonantni vrh na AF karakteristici, a koji direktno utiče na propusni opseg. Ukoliko je propusni opseg veći, tj. ukoliko je  $\omega_n$  veće, utoliko je odziv brži a vrijeme uspona i kašnjenja manje. Ukoliko je na AF karakteristici rezonantni vrh veći, utoliko je veći i prvi preskok, a time je veće i vrijeme smirivanja. Maksimum na AF karakteristici određuje i karakteriše rezonantna učestanost  $\omega_{rez}$  i ona nije identički jednaka  $\omega_n$ . Dalje je očigledno da  $\xi$  kvalitativno povezuje parametre u frekventnom i vremenskom domenu. Ako na ulaz sistema djeluje odskočna funkcija:

$$u(t) = h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow U(s) = L\{h(t)\} = 1/s \quad (8.58)$$



Slika 8.17. AF i FF karakteristika inercionog sistema drugog reda

tada je odziv u domenu kompleksne promjenljive i vremenskom domenu dat kao:

$$X(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8.59)$$

$$\begin{aligned} x_h(t) &= L^{-1}\{X(s)\} = \\ &= \left\{ 1 + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left[ \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \arccos(-\xi) \right] \right\} h(t) \end{aligned} \quad (8.60)$$

gdje je  $\varphi = \arccos(-\xi)$  početna faza, dok je dominantno vrijeme  $T_d = 1/\xi\omega_n$ . Poznato je da se za vrijeme smirivanja može uzeti da iznosi  $t_s = (3 \div 5)T_d$ , pa se na ovaj način i određuje u praksi. Sam izgled funkcije  $x_h(t)$ , koja predstavlja odziv inercionog bloka drugog reda (8.56) na jediničnu odskočnu funkciju (8.58), je prikazan na slici 8.15.

Izvod funkcije  $x_h(t)$  predstavlja odziv sistema na impulsnu funkciju  $\delta(t)$ , jer je:

$$L\{\delta(t)\} = 1 \quad (8.61)$$

odnosno:

$$x_s(t) = L^{-1}\{W(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right\} = \frac{dx_h(t)}{dt} \quad (8.62)$$

Tako se dobija:

$$x_s(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t\right) h(t) \quad (8.63)$$

Iz ovih relacija se dobija vrijeme prvog preskoka u odskočnom odzivu:

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (8.64)$$

a kvazi period je:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (8.65)$$

Takođe je moguće dobiti i veličinu prvog preskoka u odskočnom odzivu. U slučaju kada je  $\xi = 0$  se ima čisto oscilatorni slučaj s maksimalnim preskokom od 100%, jer se oscilacije ne prigušuju, vrijeme smirivanja teoretski je beskonačno dugo, a maksimalna vrijednost izlaza je 2. Zavisnost prvog preskoka sistema od faktora prigušenja je data na slici 5.11 u poglavlju 5.

Ako se kompleksna promjenljiva u relaciji (8.56) zamijeni njenim imaginarnim dijelom,  $s = j\omega$ , tada se dobija:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 - T^2 \omega^2 + j2\xi T \omega} \quad (8.66)$$

odakle se dobijaju AF i FF karakteristike:

$$\begin{aligned} |W(j\omega)| &= 20 \log \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}} \quad [dB] \\ \arg W(j\omega) &= -\operatorname{arctg} \frac{2\xi T \omega}{1 - T^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (8.67)$$

Iz uslova:

$$\frac{d}{d\omega} |W(j\omega)| = 0 \quad (8.68)$$

se dobija rezonantna frekvencija:

$$\omega_{rez} = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (8.69)$$

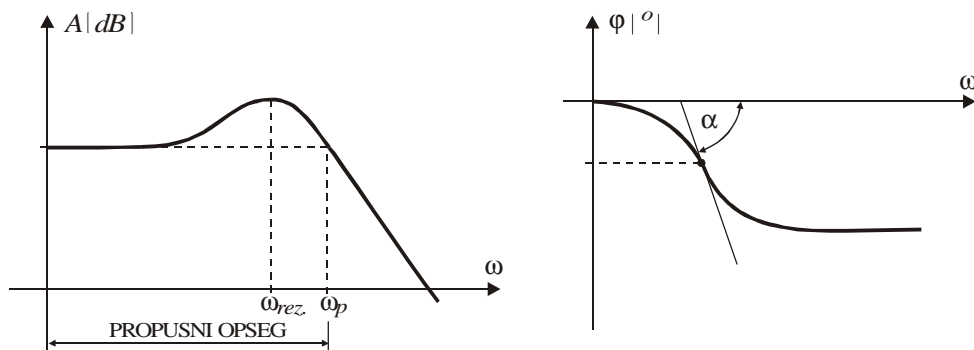
Pri tome je visina rezonantnog vrha:

$$M_{rez} = |W(j\omega_{rez})| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \text{ [dB]} \quad (8.70)$$

Vrijeme kašnjenja se može odrediti iz relacije:

$$t_k = - \left. \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \text{tg } \alpha \quad (8.71)$$

tj. određeno je nagibom u prevojnoj tački FF karakteristike, slika 8.18.



Slika 8.18. Određivanje propusnog opsega i vremena kašnjenja kod inercionog bloka drugog reda

### 8.3. Integralni kriteriji za ocjenu kvaliteta prelaznog procesa

Osnovni nedostatak svih kriterija koji su bazirani na vremenskom izgledu odziva sistema na odskočnu funkciju je *subjektivnost pri ocjenjivanju* od strane čovjeka. Zato se uvode i definišu kriteriji za ocjenu kvaliteta prelaznog procesa sa *kvantitativnim* i *objektivnim mjerama*. Osnovna zadaća svakog sistema upravljanja je *držanje upravljane veličine na*

unaprijed zadanoj vrijednosti, pa je regulaciona greška  $e(t)$  veličina koja nosi sve pokazatelje o kvalitetu prelaznog procesa. Zato u SAU nije samo važno da bude zadovoljena relacija  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , već da ona bude mala i u toku prelaznog procesa. Idealno bi bilo da je  $e(t) \equiv 0, \forall t$  nakon dejstva namjernog i/ili nenamjernog poremećaja. Najopštiji kriterij za "malost" greške je integralni kriterij, koji kaže da je greška mala ako integral:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (8.72)$$

ima malu vrijednost. Međutim, greška  $e(t)$  može biti i manja i veća od nule, kao što se vidi na slici 8.19c, pa se neke vrijednosti poništavaju u relaciji (8.72), što može navesti na pogrešne zaključke o kvalitetu prelaznog procesa. Zato su definisani i drugi kriteriji za ocjenu kvaliteta prelaznog procesa kao što su:

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (8.73)$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt \quad (8.74)$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (8.75)$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad (8.76)$$

$$I_6 = \int_0^{\infty} [e^2(t) + T^2 \dot{e}^2(t)] dt \quad (8.77)$$

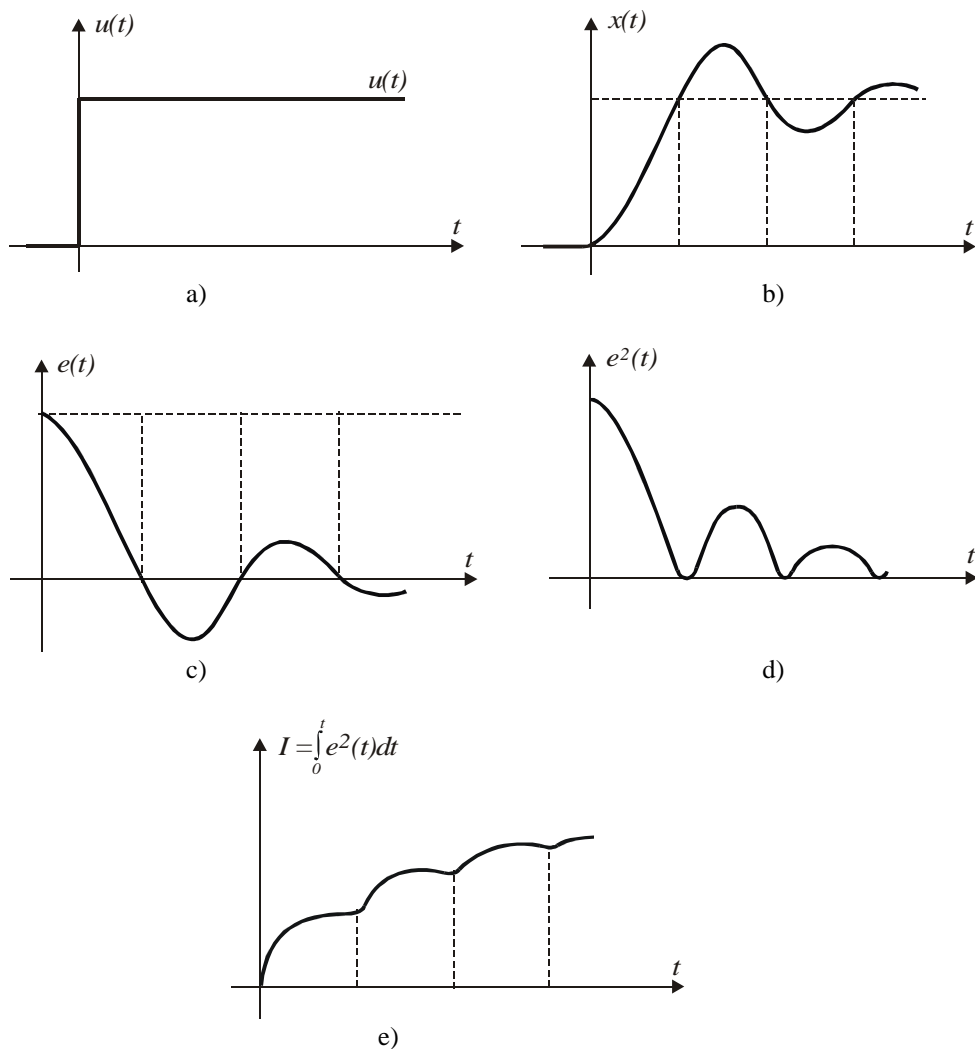
kao i slični kriteriji koji se mogu susresti u praksi. U relacijama (8.72)-(8.77) regulacionu grešku  $e(t)$  predstavlja razlika zadane vrijednosti  $u(t)$  i stanja objekta upravljanja  $x(t)$ :

$$e(t) = u(t) - x(t) \quad (8.78)$$

Izgled pojedinih interesantnih veličina se može prikazati dijagramima kao na slici 8.19.

Idealno bi bilo da je  $e(t) \equiv 0, \forall t$ , međutim, realni sistemi upravljanja se mogu samo približiti ovome zahtjevu. Postupak *minimizacije* integrala  $I_n, n = 1, 2, \dots, k$ , se svodi na "pravi" izbor parametara objekta upravljanja ili češće parametara regulatora. Ovi parametri se mogu označiti sa  $\lambda_i$ , pa se za regulacionu grešku može pisati:

$$e(t) = u(t) - x(t, \lambda_i) \quad (8.79)$$



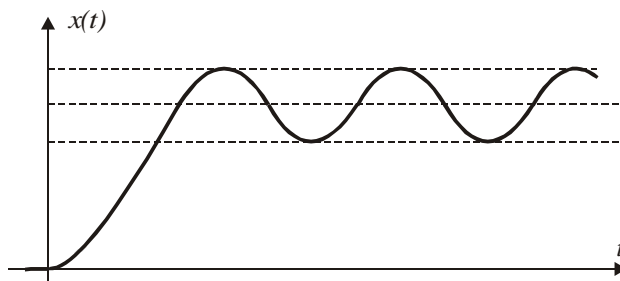
Slika 8.19. Vremenski dijagrami zadane vrijednosti (a), odziva sistema (b), regulacione greške (c), kvadrata regulacione greške (d) i integrala kvadrata regulacione greške (e)

jer odziv sistema zavisi od pobude, kao i od parametara objekta upravljanja i parametara regulatora. Zato je neophodno postupak minimizacije izvesti što jednostavnije, što je ponekad moguće uraditi rješavanjem samog integrala  $I_n$ . Tako na primjer, može se početi od integrala  $I_1$ , koji se smije pomnožiti jedinicom na sljedeći način:

$$I_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = E(0) \quad (8.80)$$

što omogućava direktno i jednostavno računanje ako je poznata prenosna funkcija sistema  $G(s)$  ili regulaciona greška  $E(s)$ . Pošto  $e(t)$  mijenja znak, to se  $I_{1min}$  može dobiti blisko nuli, čak i za objekat upravljanja koji se nalazi na granici stabilnosti, kao na slici 8.20.

Iz relacije  $\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , se dobijaju tražene vrijednosti parametara  $\lambda_i$  za koje je vrijednost integrala minimalna.



Slika 8.20. Objekat upravljanja koji se nalazi na granici stabilnosti

Identičan pristup se koristi i u slučaju kada se odabere kriterij ocjene kvaliteta prelaznog režima koji je definisan relacijom (8.73), kojom je definisan  $I_2$ . Sada je:

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^2(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = F(0) \quad (8.81)$$

pri čemu je  $f(t) = e^2(t)$  i  $F(s) = L\{e^2(t)\}$ .

Za izračunavanje integrala  $I_3$  koristi se osobina o diferenciranju kompleksnog lika  $F(s)$ , prema kojoj se ima:

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-st} dt = -L\{t f(t)\} \quad (8.82)$$

Tako vrijednost integrala  $I_3$  postaje:

$$I_3 = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} t e^2(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ - \frac{d}{ds} F(s) \right] \quad (8.83)$$



### 8.4. Kriterij podešavanja parametara prema Ziegleru i Nicholisu

Detaljno su razrađeni tipični objekti upravljanja koji se najčešće susreću i tipični regulatori koji se najčešće koriste u praksi. Pri tome su često puta nepoznati neki parametri objekta upravljanja  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , koji se moraju kvalitativno identificirati. Kao krajnji rezultat moraju se odrediti parametri regulatora  $\lambda_r$ , koji će obezbjediti traženi kvalitet objektu upravljanja. Ta zavisnost se može iskazati relacijom:

$$\lambda_r = f(\lambda_i) \quad (8.84)$$

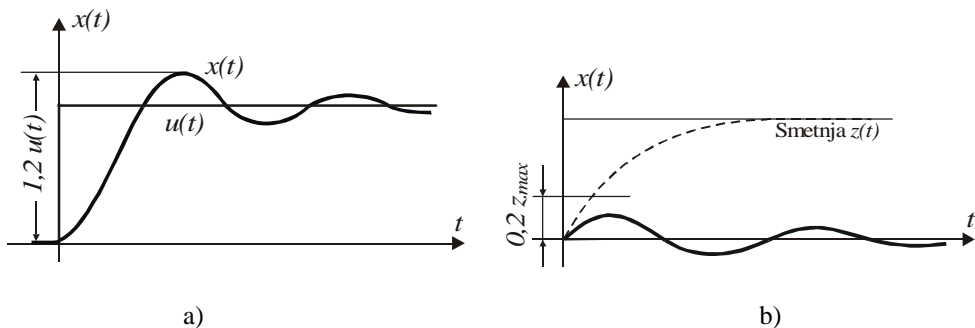
koja mora biti što jednostavnija, a po mogućnosti neka jednostavna algebarska jednačina ili jednostavna grafička zavisnost. U praksi se najčešće koristi kriterij podešavanja parametara prema Ziegleru i Nicholisu, koji za usvojeni tip daje lahko određivanje parametara regulatora. Ovaj kriterij je posebno pogodan za astatičke objekte prvog reda sa čistim transportnim kašnjenjem, a koji se mogu opisati prenosnim funkcijama (8.85) i (8.86):

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts} \quad (8.85)$$

i

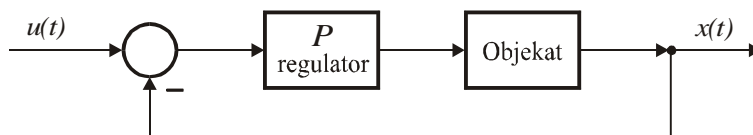
$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1} \quad (8.86)$$

ako se za njih koriste regulatori iz klase *PID*. Ovaj kriterij obezbjeđuje da objekat upravljanja ima kvazioscilatorni odziv, sa prvim preskokom do cca 20% i dvije do tri kvazi oscilacije, slika 8.21.



Slika 8.21. Kvazioscilatorni odziv sa prvim preskokom do 20% i dvije do tri kvazi oscilacije na odskočnu funkciju (a) i smetnju (b)

Sam kriterij polazi od strukture sistema koja je data na slici 8.22, sa koje se vidi da direktna grana sadrži regulator i objekat upravljanja, te da je sistem zatvoren jediničnom negativnom povratnom spregom.

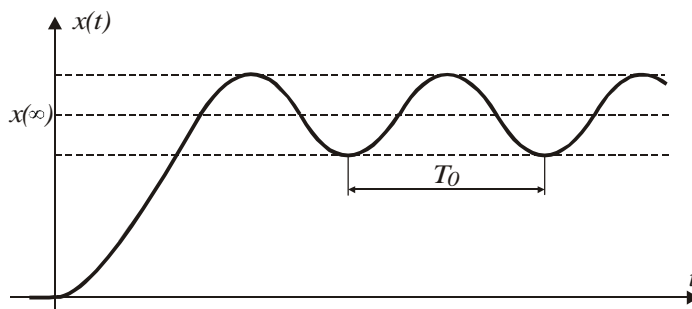


Slika 8.22. Struktura sistema za primjenu kriterija prema Ziegleru i Nicholsu

Na početku treba regulator podesiti tako da ostane samo  $P$  komponenta, bez obzira na to koji će regulator iz klase  $PID$  biti korišten. Zato, ako se koristi  $PID$  regulator, čija je prenosna funkcija:

$$G_r(s) = K \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] \quad (8.87)$$

treba uzeti da su  $T_d = 0$  i  $T_i = \infty$  (odnosno maksimalnu vrijednost  $T_{i\max}$ ). Zatim se na sistem upravljanja dovodi mala smetnja, što se u najvećem broju slučajeva izvodi promjenom ulaza  $u(t)$  za  $\Delta u$ . Zatim se mijenja vrijednost pojačanja regulatora  $K$  sve dok sistem ne dođe na granicu stabilnosti, kada će izlaz sistema doći u stanje oscilovanja sa konstantnom amplitudom i konstantnom kružnom učestanošću, slika 8.23.

Slika 8.23. Stacionarne oscilacije na izlazu sistema prilikom podešavanja  $PID$  regulatora

Prilikom izvođenja ovoga eksperimenta treba posebno voditi računa da poremećaji na ulazu sistema  $\Delta u$  budu mali, koji će na izlazu sistema izazvati oscilacije male amplitude. Ovaj zahtjev mora biti ispunjen, jer izvršni organ pri ovome oscilovanju ne smije dolaziti u krajnji položaj, što obezbjeđuje linearnost upravljanja. Neispunjenje ovog zahtjeva može dovesti do dobijanja pogrešnih rezultata.

Kada se u sistemu uspostavi *stacionarni režim oscilovanja*, tada se očita postavljena vrijednost na  $P$  regulatoru  $K_0$ , a sa dijagrama izlaza se odredi period oscilovanja  $T_0$ . Ova

dva parametra  $(K_0, T_0)$ , kritično kružno pojačanje i sopstveni period oscilovanja  $T_0 = 2\pi / \omega_0$ , predstavljaju podatke na osnovu kojih se izračunavaju parametri regulatora. Optimalno podešavanje parametara *PID* regulatora, prema metodi Zieglera i Nicholosa, dato je veoma jednostavnim algebarskim relacijama:

*P* regulator:

$$K_p = 0,5K_0 \quad (8.88)$$

*PI* regulator:

$$K_p = 0,45K_0, T_i = 0,85T_0 \quad (8.89)$$

*PD* regulator:

$$K_p = 0,55K_0, T_d = 0,125T_0 \quad (8.90)$$

*PID* regulator:

$$K_p = 0,53K_0, T_i = 0,5T_0, T_d = 0,12T_0 \quad (8.91)$$

## 8.5. Procjena kvaliteta upravljanja

Neka je, prema pretpostavci, poznata karakteristična jednačina objekta upravljanja i neka je data kao:

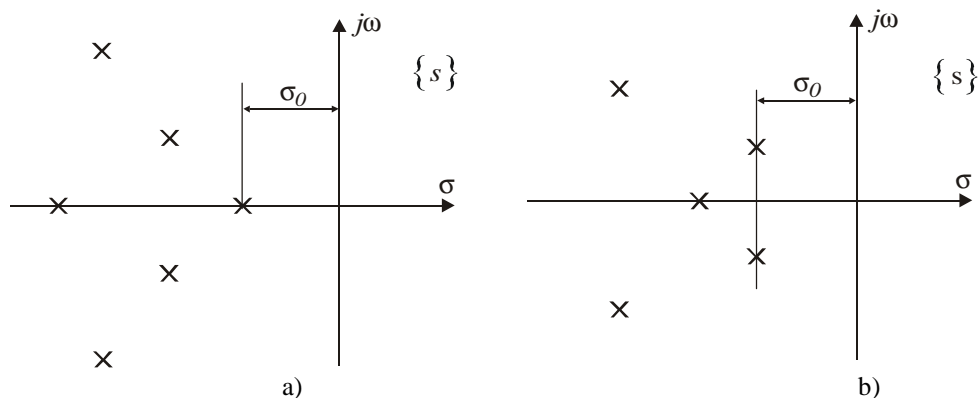
$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (8.92)$$

koja ima rješenja  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , koja mogu biti jednostruka ili višestruka kao i realna ili u obliku konjugovano kompleksnih parova. Da bi sistem bio stabilan ova rješenja moraju ležati u lijevoj poluravni kompleksne ravni  $\{s\}$ . Sama rješenja karakteristične jednačine predstavljaju polove prenosne funkcije  $G(s)$  i njihov tipični raspored kod stabilnih sistema izgleda kao na slici 8.24. Sama lokacija korjena karakteristične jednačine u kompleksnoj ravni  $\{s\}$  bitno utiče na karakter, oblik i tok stanja objekta upravljanja, na osnovu čega se definišu neki bitni parametri objekta upravljanja.

*Stepen stabilnosti* predstavlja apsolutnu vrijednost realnog dijela najbližeg korjena karakteristične jednačine  $Q_n(s) = 0$  od imaginarne ose. Tako se može imati aperiodski odziv, slika 8.24a, i kvazioscillatorni prigušeni odziv, slika 8.24b. Poznato je, da je prelazni proces stabilnih linearnih sistema dat sumom članova ili eksponencijalno opadajućih

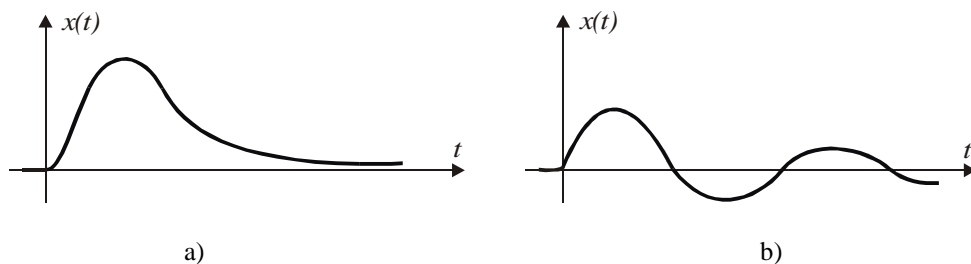
## 8. Ocjena kvaliteta ponašanja SAU i kriteriji za sintezu

funkcija ili prostoperiodičnih funkcija koje su prigušene po opadajućoj eksponencijalnoj funkciji. I jedne i druge eksponencijalne funkcije u eksponentu imaju realni dio rješenja karakteristične jednačine  $Q_n(s) = 0$ , od čega će direktno zavisiti prigušenje ili vremensko trajanje pojedinih članova u odzivu. Tako će najduže trajati član u odzivu koji je posljedica najbližeg korjena imaginarnoj osi  $j\omega$ , pa ovaj korjen ima najveći uticaj na prelazni proces i naziva se *dominantnim korjenom*.



Slika 8.24. Raspored korjena karakteristične jednačine kod aperiodskog odziva (a) i kvazioscillatornog prigušenog odziva (b)

To znači da se karakter prelaznog procesa može ocijeniti na osnovu poznavanja rasporeda korijena karakteristične jednačine u lijevoj poluravni kompleksne ravni  $\{s\}$ . Ako je najbliži korjen imaginarnoj osi  $j\omega$  realan, slika 8.24a, tada je član odziva koji je posljedica ovog korjena sa najdužim vremenskim trajanjem, pa je odziv aperiodično prigušen. Ako je najbliži korjen imaginarnoj osi  $j\omega$  u obliku konjugovano kompleksnog para, slika 8.24b, tada je član odziva koji je posljedica ovog korjena sa najdužim vremenskim trajanjem, pa je odziv kvazi oscilatorno prigušen. Grafici ovih odziva su dati na slici 8.25.



Slika 8.25. Aperiodski odziv (a) i kvazi oscilatorni odziv (b)

Amplitude kvazi oscilatornog odziva sistema opadaju po envelopei:

$$x(t) = X_0 e^{-\sigma t}, \quad \sigma > 0 \quad (8.93)$$

pa se prelazni proces može smatrati završenim kada vrijednost odziva  $x(t)$  opadne na neku unaprijed zadanu vrijednost  $X_0 \varepsilon$ . Iz relacije:

$$x(t_s) = X_0 \varepsilon \quad (8.94)$$

gdje je  $\varepsilon$  unaprijed određen mali pozitivni broj, obično iznosi do 5%, se određuje vrijeme smirenja  $t_s$  u zavisnosti od  $\sigma$  i  $\varepsilon$ . Ta zavisnost je:

$$t_s = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad (8.95)$$

što za granicu smirenja od 1%, koja se često koristi u praksi, da je  $\varepsilon = 0,01$ , odnosno:

$$t_s = \frac{1}{\sigma} \ln 100 = \frac{4,6}{\sigma} \quad (8.96)$$

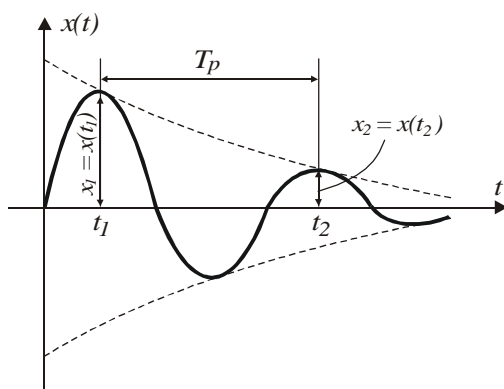
Ako se unaprijed zada vrijeme za koje treba da se završi prelazni proces  $t_s$ , tada se uvijek može formirati karakteristična jednačina čiji će najbliži korjen imaginarnoj osi  $j\omega$  zadovoljavati relaciju:

$$\sigma_{max} = \frac{4,6}{t_s} \Big|_{\varepsilon=0,01} \quad (8.97)$$

*Pojam oscilabilnosti* predstavlja sklonost sistema ka oscilovanju, te ga je potrebno unaprijed poznavati ili odrediti na osnovu tehnologije procesa. Zbog relativno velikih varijacija upravljane veličine može doći do *havarije* na objektu upravljanja, čak i kada se radi o stabilnom sistemu upravljanja. Ovo oscilovanje je posljedica postojanja jednog dominantnog konjugovano kompleksnog korjena  $s_0 = -\sigma_0 \pm j\omega_0$ . Zato se kao mjera sklonosti sistema ka oscilovanju uvodi pojam *oscilabilnosti*  $\mu$ , koja predstavlja količnik imaginarnog i realnog dijela tog dominantnog konjugovano kompleksnog korjena:

$$\mu = \frac{\omega_0}{\sigma_0} \quad (8.98)$$

Neka je  $\mu = 0$ , sistem nema dominantni konjugovano kompleksni par korjena, pa se radi o aperiodskom odzivu. Ako je  $\mu \neq 0$ , sistem ima dominantni konjugovano kompleksni korjen, pa se iz odziva prigušenih oscilacija može odrediti opadanje amplitude za vrijeme od jednog kvazi perioda  $T_p$ , pri čemu je  $T_p = 2\pi / \omega_0$ . Mogući kvazi oscilatorni odziv je prikazan na slici 8.26.



Slika 8.26. Kvazi oscilatorni odziv sistema

U trenutku  $t = t_1$  je prva maksimalna vrijednost odziva:

$$x_1 = x(t_1) = X_0 e^{-\sigma_0 t_1} \quad (8.99)$$

Nakon jednog kvazi perioda  $T_p$  je trenutak  $t = t_2$ :

$$t_2 = t_1 + \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (8.100)$$

u kome je vrijednost odziva nešto manja i iznosi:

$$x_2 = x(t_2) = X_0 e^{-\sigma_0(t_1 + 2\pi/\omega_0)} \quad (8.101)$$

Prigušenje u toku jednog kvazi perioda se može definisati kao relativni pad amplitude:

$$\chi = \frac{x_1 - x_2}{x_1} = 1 - e^{-2\pi/\mu} \quad (8.102)$$

pa se oscilabilnost procesa može izraziti kao:

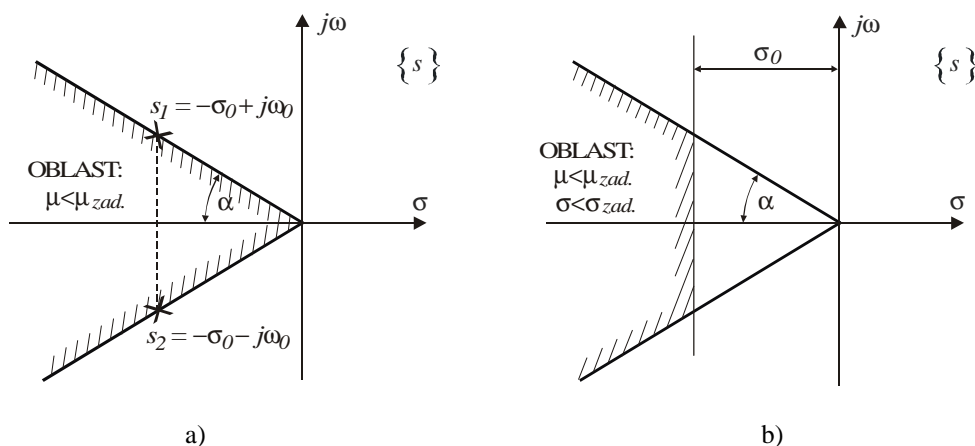
$$\mu = \frac{2\pi}{\ln(1 - \chi)} \quad (8.103)$$

U praksi se najčešće zahtijevaju visoke vrijednosti za  $\chi$ , pa se za unaprijed zadanu i/ili dobijenu iz tehnoloških uslova vrijednost  $\chi$  određuje oscilabilnost  $\mu = \omega_0 / \sigma_0$ .

Određena ili zadana vrijednost oscilabilnosti sistema  $\mu$  se može grafički predstaviti u kompleksnoj ravni  $\{s\}$ , u kojoj se lociraju korjeni karakteristične jednačine  $Q_n(s) = 0$ , slika 8.27a. Sa slike 8.27a se vidi da zahtjev na zadanu vrijednost oscilabilnosti  $\mu_{zad}$  dovodi do značajnog smanjenja lijeve poluravni kompleksne ravni  $\{s\}$ , u kojoj mogu biti locirana rješenja karakteristične jednačine. Ugao  $\alpha$  na slici 8.27a se određuje pomoću relacije:

$$\alpha = \arctg \mu_{zad} \quad (8.104)$$

Zahtjevu na zadanu oscilabilnost se dodaje zahtjev zadanog stepena stabilnosti  $\sigma_0$ . To dovodi do novog smanjenja lijeve poluravni kompleksne ravni  $\{s\}$ , u kojoj mogu biti locirana rješenja karakteristične jednačine, slika 8.27b.



Slika 8.27. Zahtjevi koji se nameću na oscilabilnost (a) i stepen stabilnosti (b)

Na ovaj način se dobija poželjna i nepoželjna oblast u kojoj mogu biti locirana rješenja karakteristične jednačine sistema  $Q_n(s) = 0$ , slika 8.28. Na ovoj slici pravac  $AB$  predstavlja zahtjev za potrebnim stepenom stabilnosti, dok pravci kroz koordinatni početak i  $C$  i  $D$  predstavljaju zahtjev za potrebnom oscilabilnošću sistema.

**Primjer 8.2.** Neka se posmatra sistem čija je prenosna funkcija:

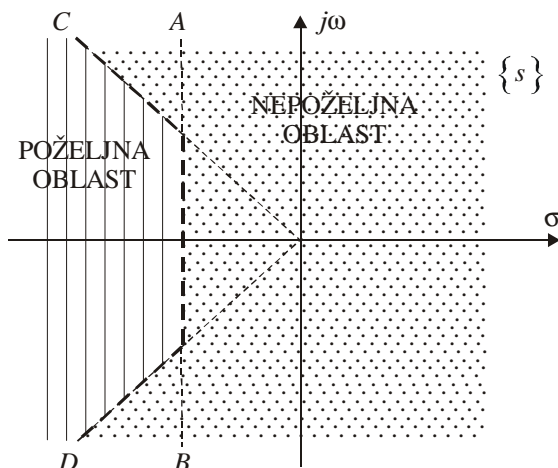
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8.105)$$

čija karakteristična jednačina ima oblik:

$$Q_2(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (8.106)$$

a koja ima rješenja:

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (8.107)$$



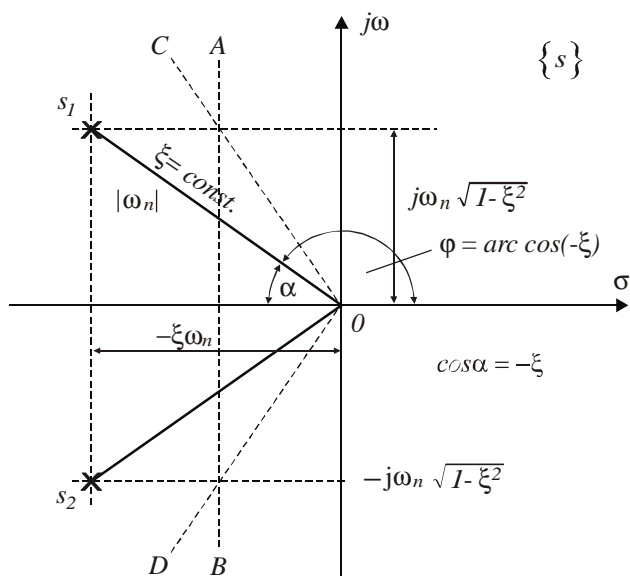
Slika 8.28. Poželjna i nepoželjna oblast lociranja rješenja karakteristične jednačine

Očigledno je  $|s_{1,2}| = |\omega_n|$ , za sve vrijednosti  $\xi$  iz segmenta  $0 \leq \xi \leq 1$ , što se može prikazati kao na slici 8.29. Na sve SAU se nameće uslov stabilnosti, tj. rješenja karakteristične jednačine moraju imati negativan realni dio  $\sigma < 0$ . Da bi vrijeme smirivanja bilo što manje, koje iznosi  $(3 \div 5)T_d$  i očigledno je ograničeno najvećim dozvoljenim vremenom smirivanja, to sva rješenja karakteristične jednačine moraju biti locirana lijevo od prave AB koja je paralelna imaginarnoj osi, slika 8.30a. Dobijena je dozvoljena površina u kojoj mogu biti locirana rješenja karakteristične jednačine, a koja će istovremeno zadovoljavati nametnuti uslov stabilnosti. Takođe je poznato, da prisustvo para kompleksnih korjena daje *oscilatorni karakter sistemu*, pa se, da odziv nebi "bio previše loš", moraju ograničiti maksimalne amplitude tih oscilacija. Ovo nameće dodatni uslov da korjeni karakteristične jednačine treba da leže ispod polupravca OC i iznad polupravca OD, slika 8.30b. Tako se dobija *poželjna oblast* u kojoj bi trebali da leže korjeni karakteristične jednačine, koja je prikazana na slici 8.28.

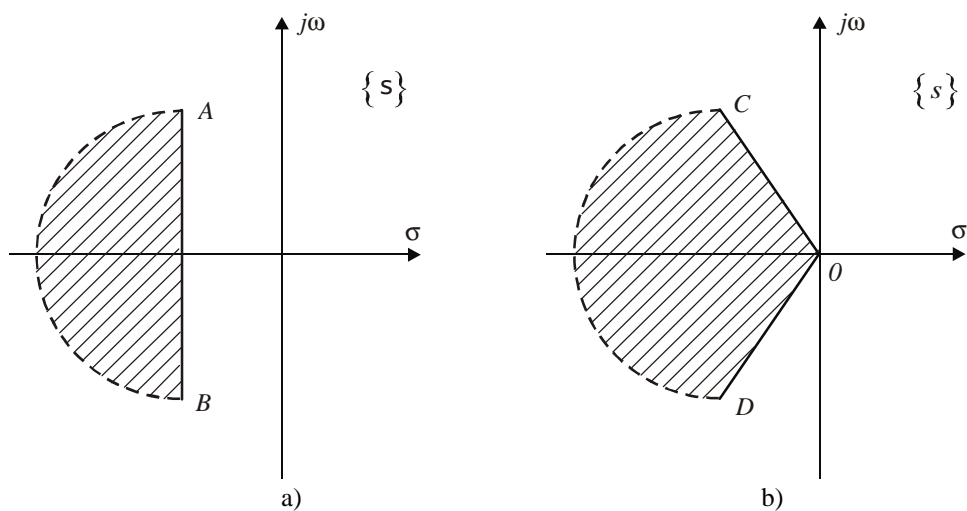
**Primjer 8.3.** Najčešće se jedan parametar sistema mijenja, npr. pojačanje  $K$ , a pri tome se posmatraju efekti promjena tog parametra. Drugim rječima, posmatra se promjena položaja korjena i tako dobija geometrijsko mjesto korjena unutar poželjne oblasti, na osnovu čega se zatim određuju vrijednosti parametra  $K$ . Kao primjer se može analizirati sistem čija je prenosna funkcija:

$$G(s) = K / s(s + a) \quad (8.108)$$





Slika 8.29. Raspored korjena karakteristične jednačine inercionog sistema drugog reda



Slika 8.30. Nametanje uslova da vrijeme smirivanja bude u dozvoljenim granicama (a) i da odziv ne bude previše loš (b)

gdje je  $K$  promjenljivi parametar. Prenosna funkcija sistema zatvorenog jediničnom negativnom povratnom spregom, koji u direktnoj grani ima blok  $G(s)$ , je:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s(s+a) + K} \quad (8.109)$$

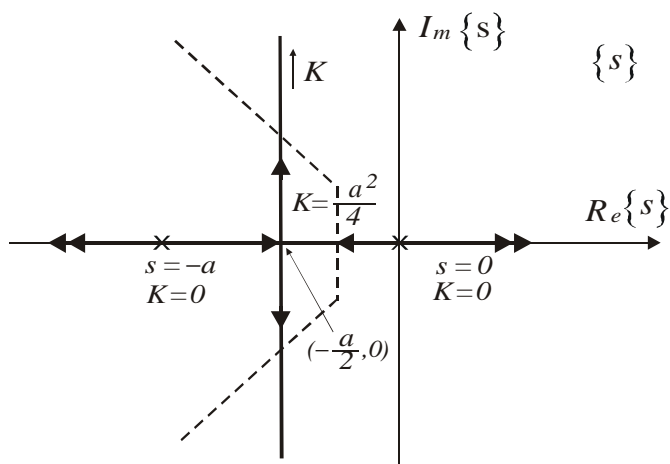
Karakteristična jednačina sada glasi:

$$s(s+a) + K = 0 \quad (8.110)$$

a njeni korjeni su:

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - K} = -\frac{a}{2} \pm j\sqrt{K - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad (8.111)$$

Dijagram promjene vrijednosti parametra  $K$  je dat na slici 8.31.



Slika 8.31. Dijagram promjene parametra  $K$  i poželjna oblast položaja korjena karakteristične jednačine

Vidi se da za sve vrijednosti parametra  $K$  trajektorija ostaje u lijevoj poluravni kompleksne ravni  $\{s\}$ , pa je dati sistem stabilan bez obzira na promjene parametra  $K$ . Međutim, prevelike vrijednosti parametra  $K$  loše utiču na kvalitet prelaznog procesa, što se zaključuje na osnovu poželjne oblasti.

Prednost ove metode je u mogućnosti određivanja granica poželjnih vrijednosti parametra  $K$ . Ove trajektorije se nazivaju *korjenskim hodografom*, a pravila za njegovo crtanje su urađena u poglavlju 7.

## 8.6. Indeks stabilnosti sistema

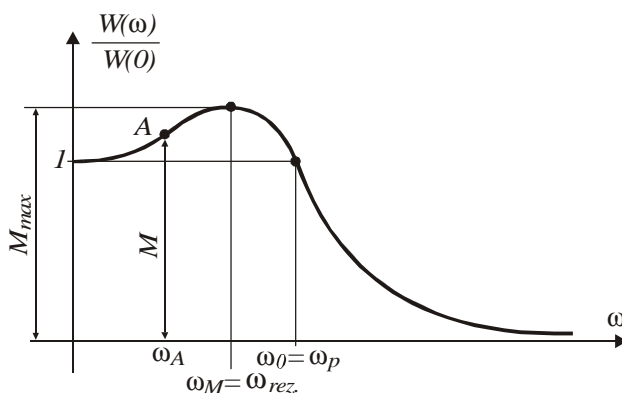
Nekada nije zgodno određivati rezerve stabilnosti po modulu i po fazi, nego se koristi *indeks stabilnosti* koji predstavlja integralnu rezervu stabilnosti, koja se određuje iz amplitudno fazne karakteristike sistema upravljanja u otvorenom. Amplitudno fazna karakteristika  $W(j\omega)$  sistema upravljanja zatvorenog jediničnom negativnom povranom spregom, kod koga je amplitudno fazna karakteristika direktna grane  $G(j\omega)$  - sistema u otvorenom, je:

$$W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \quad (8.112)$$

odakle se dobija da je amplitudno frekventna karakteristika ravna:

$$|W(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| \quad (8.113)$$

Amplitudno frekventna karakteristika linearnih stabilnih sistema ima karakterističan tok sa ili bez izrazitog maksimuma  $M_{max}$ , kao što je prikazano na slici 8.32.



Slika 8.32. Karakteristični izgled amplitudno frekventne karakteristike linearnih sistema

Maksimum funkcije na slici 8.32 određuje indeks stabilnosti sistema. Što je  $M_{max}$  veće, sistem je lošije prigušen i pokazuje veću sklonost ka oscilovanju. Dopuštena vrijednost za  $M_{max}$  zavisi od uslova eksploatacije sistema i u praksi kod dobro prigušenih sistema treba da se nalazi između 1,1 i 1,5. U specifičnim slučajevima, kada to dozvoljava tehnologija objekta upravljanja, prihvatljive su vrijednosti i do 2 ili 2,5.

Analiza prigušenja procesa pomoću indeksa stabilnosti je pogodna iz razloga što za njegovo određivanje nije potrebno crtati i računati funkciju  $|W(j\omega)|$ , nego se cijeli postupak izvodi

analizom amplitudno fazne karakteristike sistema u otvorenom. Naime, ordinata tačke  $A$  na slici 8.32 zavisi od modula funkcije  $W(j\omega)$ , tj.  $|W(j\omega)|$ :

$$M = M(\omega) = |W(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right|$$

pri čemu je  $G(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$  i predstavlja amplitudno faznu karakteristiku sistema u otvorenom.

Prenosna funkcija sistema, koji u direktnoj grani ima funkciju  $G(j\omega)$  i koji je zatvoren jediničnom negativnom povratnom spregom, se može predstaviti u polarnim koordinatama:

$$W(j\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{u(\omega) + jv(\omega)}{1 + u(\omega) + jv(\omega)} \quad (8.114)$$

Iz relacije (8.114) može se odrediti:

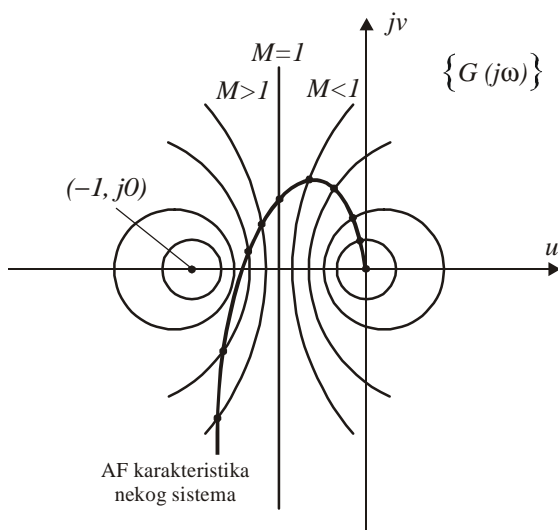
$$M(\omega) = \frac{|u(\omega) + jv(\omega)|}{|1 + u(\omega) + jv(\omega)|} = \frac{\sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)}}{\sqrt{(1 + u(\omega))^2 + v^2(\omega)}} \quad (8.115)$$

Sređivanjem relacije (8.115) se dobija jednačina familije kružnica:

$$\left( u(\omega) + \frac{M^2(\omega)}{M^2(\omega) - 1} \right)^2 + v^2(\omega) = \left( \frac{M(\omega)}{M^2(\omega) - 1} \right)^2 \quad (8.116)$$

Relacija (8.116) predstavlja jednačine kružnica čiji centri leže na realnoj osi, a koordinate tih centara su  $u(\omega) = -M^2(\omega)/(M^2(\omega) - 1)$  i  $v(\omega) = 0$ . Poluprečnik ovih kružnica je  $r = |M(\omega)/(M^2(\omega) - 1)|$ . Varirajući vrijednosti za  $M$ , u intervalu od  $0$  do  $\infty$ , može se nacrtati univerzalna familija  $M$  krugova koja ne zavisi od sistema koji se ispituje. Familija ovih kružnica je predstavljena na slici 8.33. Za  $M = 1$  krug se deformiše u pravu  $u = -1/2$  ili u krug beskonačno velikog poluprečnika, dok za  $M = 0$  krug se transformiše u tačku koja se nalazi u koordinatnom početku. Za  $M \rightarrow \infty$  krug se ponovo transformiše ali u tačku  $(-1, j0)$ .

Prilikom projektovanja sistema automatskog upravljanja potrebno je poznavati ili usvojiti maksimalno dozvojenu vrijednost za  $M$ , pa tada amplitudno fazna karakteristika sistema u otvorenom ne smije sjeći krug koji ima tu ili veću vrijednost  $M$ . Ovaj uslov treba biti ispunjen da bi sistem imao bolji indeks stabilnosti od tog unaprijed zadanog.

Slika 8.33. Familija  $M$  krugova

Identična razmatranja su moguća i preko fazno frekventne karakteristike sistema, koja se može odrediti kao:

$$N(\omega) = \operatorname{tg} \varphi(\omega) = \operatorname{tg} \arg W(j\omega) = \frac{\operatorname{Im} W(j\omega)}{\operatorname{Re} W(j\omega)} \quad (8.117)$$

U cilju određivanja vrijednosti (8.117) ponovo se polazi od:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{u(\omega) + jv(\omega)}{1 + u(\omega) + jv(\omega)} = \\ &= \frac{u^2(\omega) + u(\omega) + v^2(\omega)}{(1 + u(\omega))^2 + v^2(\omega)} - j \frac{v(\omega)}{(1 + u(\omega))^2 + v^2(\omega)} \end{aligned} \quad (8.118)$$

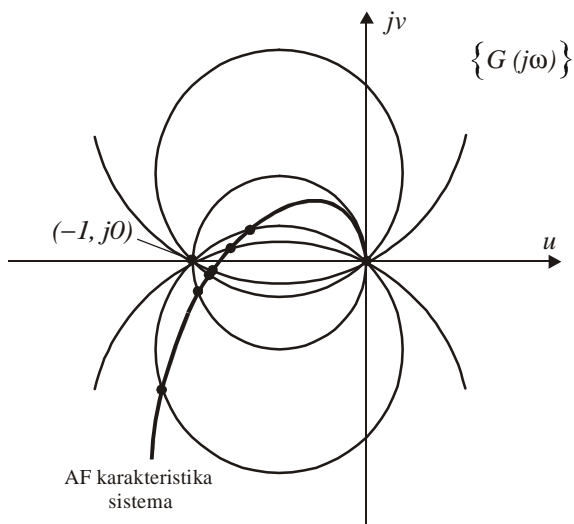
Iz jednačine (8.118) se dobija:

$$N(\omega) = - \frac{v(\omega)}{u^2(\omega) + u(\omega) + v^2(\omega)} \quad (8.119)$$

Sređivanjem relacije (8.119) se dobija jednačina familije kružnica:

$$\left( u(\omega) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( v(\omega) - \frac{1}{2N(\omega)} \right)^2 = \frac{N^2(\omega) + 1}{4N^2(\omega)} \quad (8.120)$$

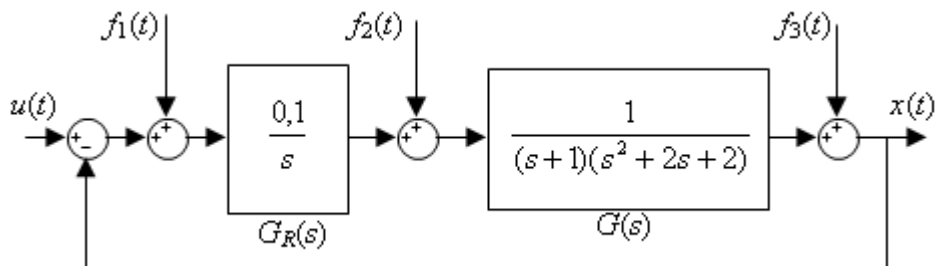
Relacija (8.120) predstavlja jednačine kružnica čiji centri leže u tačkama  $u(\omega) = -1/2$  i  $v(\omega) = 1/2N(\omega)$ , a čiji su poluprečnici  $r = \sqrt{1 + 1/N^2(\omega)}/2$ . Familija ovih kružnica može se predstaviti kao na slici 8.34. Na ovaj dijagram se može ucrtati amplitudno fazna karakteristika otvorenog sistema sa potrebnim ili nametnutim uslovima za fazno frekventnu karakteristiku.



Slika 8.34. Familija  $N$  krugova

### 8.7. Urađeni primjeri

**Primjer 10.** Analizirati regulacioni krug na slici u smislu praćenja odskočne promjene zadane vrijednosti  $u(t)$ , odnosno eliminisanja utjecaja smetnji  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  i  $f_3(t)$  koje su takođe odskočnog karaktera.



Slika p-1. Regulaciona kontura: regulator, objekat upravljanja, signali zadane vrijednosti i karakterističnih smetnji

Primjenom algebre blokova, ili koristeći princip superpozicije, lahko možemo dobiti slijedeću relaciju:

$$X(s) = \frac{G_R(s)G(s)}{1 + G_R(s)G(s)}U(s) + \frac{G_R(s)G(s)}{1 + G_R(s)G(s)}F_1(s) + \frac{G(s)}{1 + G_R(s)G(s)}F_2(s) + \frac{1}{1 + G_R(s)G(s)}F_3(s) \quad (\text{p-1})$$

Regulaciona greška se dobije kao:

$$E(s) = U(s) - X(s) = \frac{1}{1 + G_R(s)G(s)}U(s) - \frac{G_R(s)G(s)}{1 + G_R(s)G(s)}F_1(s) - \frac{G(s)}{1 + G_R(s)G(s)}F_2(s) - \frac{1}{1 + G_R(s)G(s)}F_3(s) \quad (\text{p-2})$$

Primjenom inverzne Laplace-ove transformacije, teoreme o konačnoj vrijednosti, i stavljajući:

$U(s) = \frac{a}{s}$ ,  $F_1(s) = \frac{b}{s}$ ,  $F_2(s) = \frac{c}{s}$ ,  $F_3(s) = \frac{d}{s}$ , gdje su  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  proizvoljne realne konstante, dobijemo:

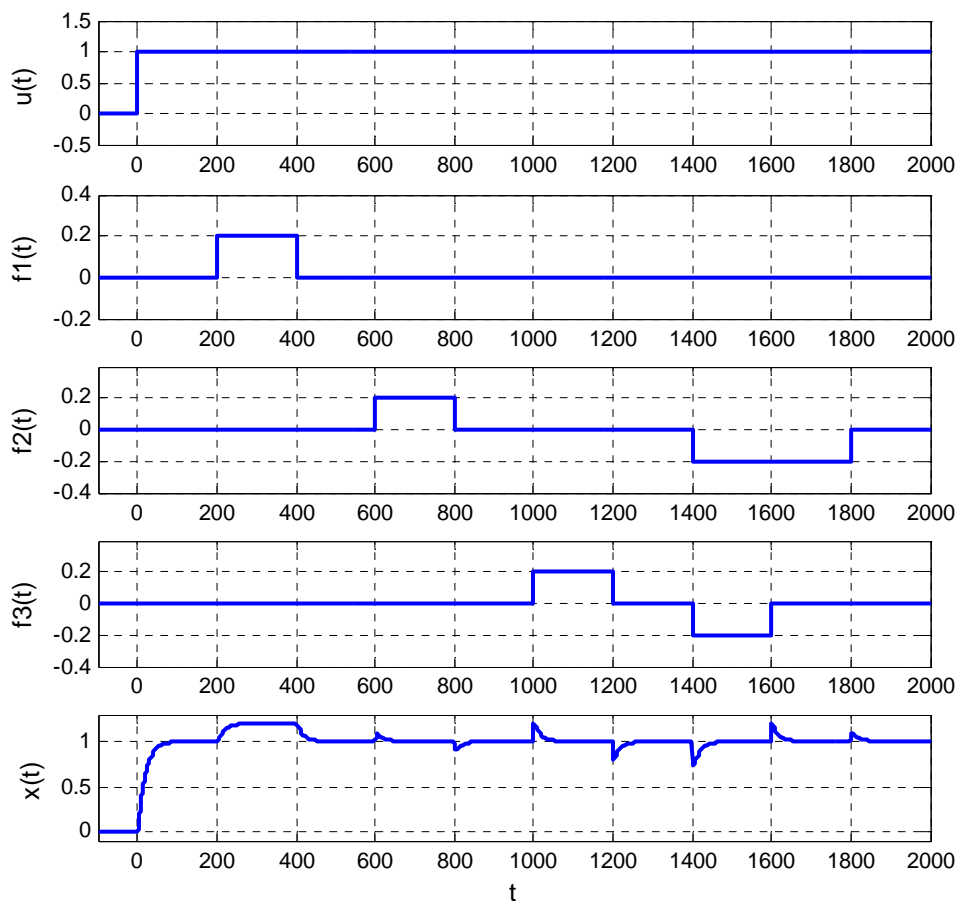
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s}{1 + \frac{0,1}{s(s+1)(s^2+2s+2)}} \cdot \frac{a}{s} \right) - \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s \frac{0,1}{s(s+1)(s^2+2s+2)}}{1 + \frac{0,1}{s(s+1)(s^2+2s+2)}} \cdot \frac{b}{s} \right) - \\ &- \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}}{1 + \frac{0,1}{s(s+1)(s^2+2s+2)}} \cdot \frac{c}{s} \right) - \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s}{1 + \frac{0,1}{s(s+1)(s^2+2s+2)}} \cdot \frac{d}{s} \right) \end{aligned} \quad (\text{p-3})$$

Rješavajući dobijene limese, imamo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 - b - 0 - 0 \quad (\text{p-4})$$

Iz posljednje jednačine se lahko vidi da data regulaciona kontura omogućuje praćenje skokovite promjene zadane vrijednosti  $u(t)$  bez statičke greške, te eliminisanje smetnji  $f_2(t)$  i  $f_3(t)$ , dok smetnju  $f_1(t)$  nije moguće otkloniti. Ovo je i očekivano, s obzirom da se smetnja  $f_1(t)$  može protumačiti kao "obmanjivanje" regulatora jer isti ne prima tačnu informaciju o regulacionom odstupanju  $e(t)$ .

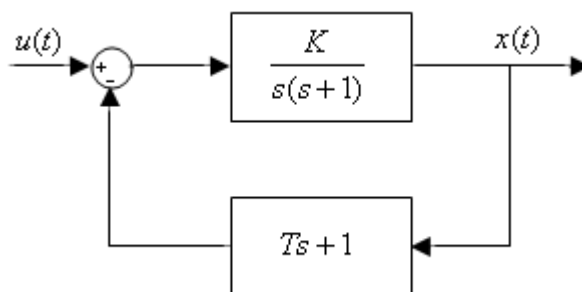
Rezultate provedene analize možemo potkrijepiti adekvatnom simulacijom datog sistema. Na slici p-2 je prikazano ponašanje sistema, za konkretne profile zadane vrijednosti i smetnji.



Slika p-2. Profili ulaza i smetnji na sistem i odziv sistema

**Primjer 2.** Za sistem automatskog upravljanja, dat na slici, pronaći vrijednost parametra  $T$ , koja minimizira kriterijalni funkcional  $I_2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$ , gdje je  $e(t) = u(t) - x(t)$ , a  $u(t) = \mathbf{1}(t)$ .





Slika p-3. Regulatorna kontura sa PD članom u povratnoj grani

Prenosna funkcija cjelokupnog sistema je:

$$G_z(s) = \frac{K}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K(Ts+1)}{s(s+1)}} = \frac{K}{s^2 + (KT+1)s + K} \quad (\text{p-5})$$

Uvedemo li smjene

$$K = \omega_n^2, \quad KT + 1 = 2\xi\omega_n \quad (\text{p-6})$$

dobijamo tipični prikaz sistema drugog reda čije je pojačanje jednako 1. Očito je da, za fiksno  $K$  (osobina objekta), promjenom parametra  $T$  (parametar kompenzatora) utičemo samo na koeficijent prigušenja  $\xi$ , te se problem svodi na nalaženje optimalne vrijednosti  $\xi$ , za fiksno  $\omega_n$ .

$$G_z(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{p-7})$$

Ukoliko je  $\xi \in (0,1)$ , tada je odziv na jediničnu odskočnu funkciju sistema čija je prenosna funkcija data sa (p-7) dat sa (kasnije će biti pokazano da optimalna vrijednost  $\xi$  stvarno leži u intervalu  $(0, 1)$ ):

$$x(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta\right) \cdot I(t), \quad \theta = \arccos(\xi) \quad (\text{p-8})$$

Koristeći činjenicu da za  $t \geq 0$  vrijedi  $e(t) = 1-x(t)$ , dobije se:

$$e^2(t) = \left[ \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta\right) \right]^2 = \frac{e^{-2\xi\omega_n t}}{1-\xi^2} \frac{\cos\left(2\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + 2\theta\right)}{2} \quad (\text{p-9})$$

Ukoliko kompleksna funkcija  $F(s)$  predstavlja Laplace-ovu transformaciju veličine date sa (p-9), lahko se može dobiti:

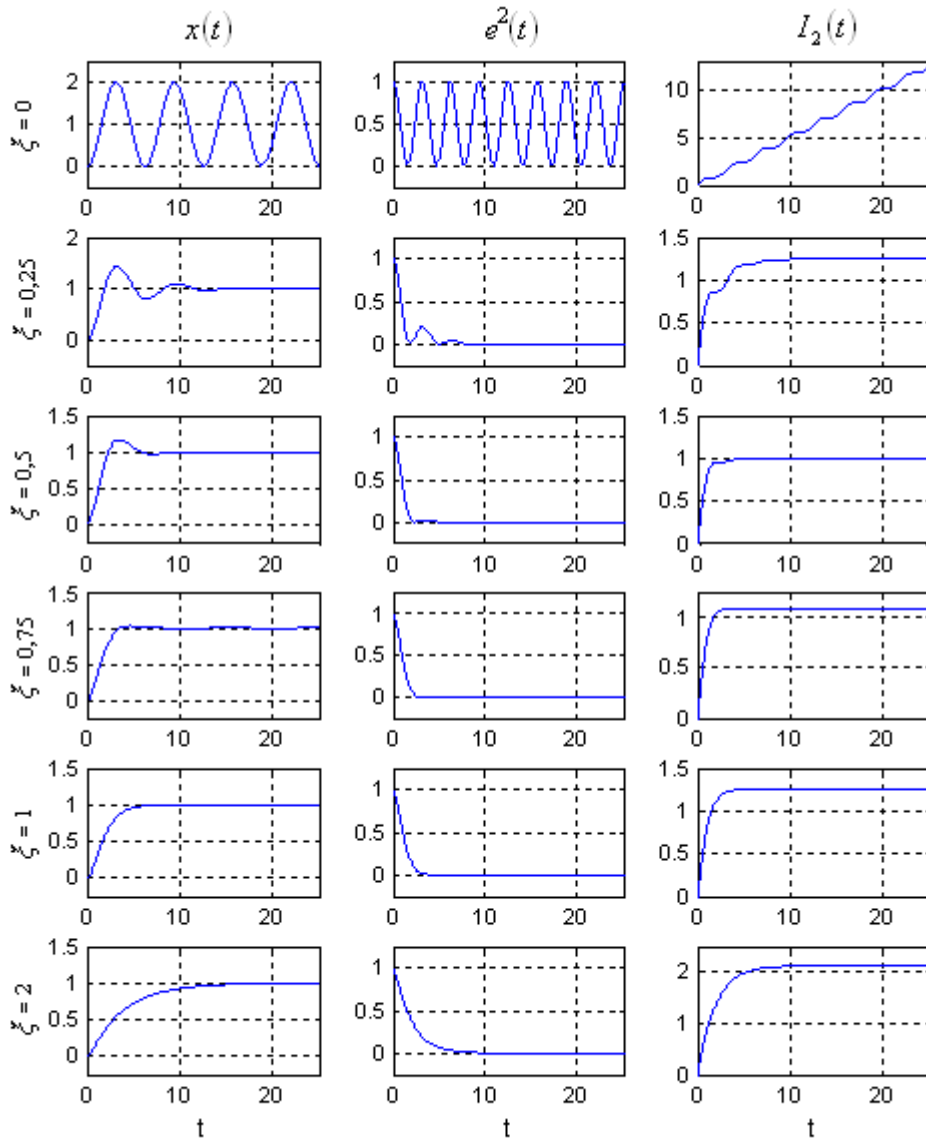
$$I_2 = F(0) = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{4\omega_n} \frac{1 + 3\xi^2 - 4\xi^4}{\xi(1 - \xi^2)} \quad (\text{p-10})$$

Posmatrajući desnu stranu (p-10) kao funkciju od  $\xi$ , upotrebom diferencijalnog računa možemo utvrditi da je  $\xi = 0,5$  vrijednost koja minimizira  $I_2$ .

U cilju verifikacije analize uz pomoć simulacionih rezultata, posmatrajmo funkciju gornje granice za razne vrijednosti parametra  $\xi$ :

$$I_2(t) = \int_0^t e^2(\tau) d\tau \quad (\text{p-11})$$

Za potrebe simulacije je, bez umanjena opštosti (vidi (p-10)) uzeto da je  $\omega_n = 1$ . Na slici p-4 je prikazano ponašanje funkcije  $I_2(t)$  za nekoliko vrijednosti  $\xi$ .



Slika p-4. Ponašanje kriterijalnog funkcionala, kao funkcije gronje granice, za razne vrijednosti koeficijenta prigušenja

