Pri algebarskim operacijama vektore tretiramo kao vektore kolone, $(a,b) = a^*b$; a^* transponovana matrica.

Karakteristična funkcija slučajnog vektora $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$ je

$$f_\zeta(r) := Ee^{i(r,\zeta)},\ r = (r_1, ..., r_n),\ r_i \in \mathrm{R},\ i = 1, 2, ..., n.$$

I u višedimenzionalnom slučaju važi teorema jedinstvenosti.

Slučajni vektor $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ nazivamo Gausovim (ili normalno raspodijeljenim) ako je njegova karakteristična funkcija

$$f_\xi(t) = e^{i(t,m) - \frac{1}{2}(Rt,t)},$$

gdje je $m = (m_1, ..., m_n)$, $R = (r_{k,l})$ je simetrična, pozitivno definitna matrica formata $n \times n$.

Pokazuje se da je ovo karakteristična funkcija vektora ξ čija je gustina

$$g_\xi(x) = ((2\pi)^n det(R))^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(R^{-1}(x-m),(x-m))}.$$

Koristi se zapis $\xi : \mathcal{N}(m, R)$ i čita se: vektor ξ ima Gausovu (normalnu) raspodjelu sa parametrima m i R. Pokazuje se da je $m_i = E\xi_i$, $r_{k,l} = cov(\xi_k, \xi_l)$ te je m vektor očekivanja, a R kovarijaciona matrica slučajnog vektora ξ.

Ekvivalentna definicija. Sučajni vektor ξ je Gausov ako je njegova gustina

$$g_\xi(x) = Ce^{-Q(x)},\ x = (x_1, ..., x_n)$$

gdje je $Q(x)$ pozitivno definitna kvadratna forma.

Svojstva Gausovog vektora.

1. Svaki podvektor Gausovog vektora je Gausov.

2. Kod Gausovog vektora nekoreliranost komponenti je ekvivalentna sa njihovom nezavisnošću.

3. Vektor $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ je Gausov ako i samo ako za svaki vektor $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathrm{R}$ slučajna promjenljiva $(\xi, \lambda) = \lambda_1\xi_1 + ... + \lambda_n\xi_n$ ima Gausovu raspodjelu.

4. Ako je $X : \mathcal{N}(m, C)$ tada je $Y = BX + b : \mathcal{N}(Bm + b, BCB^*)$.

5. Ako je $X : \mathcal{N}(m, R)$ tada važi: $X \doteq m + AZ$, (jednakost u raspodjeli) gdje je A kvadratni korijen iz R tj. $R = AA^*$, a $Z : \mathcal{N}(0, E)$, E je jedinična matrica.

6. $(X, Y) : \mathcal{N}(m, R)$, $m = (m_x, m_Y)$, $R = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$. Tada

$$Y|X = x : \mathcal{N}(m_Y + \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X); \sigma_Y^2(1 - \rho_{X,Y}^2)).$$

Višedimenzionalni slučaj Moivre Laplasove teoreme. U opitu pratimo tri događaja A_1, A_2, A_3, ovi događaji čine potpun sistem, odgovarajuće vjerovatnoće su p_1, p_2, p_3. Opit ponavljamo n puta i slučajne promjenljive $\nu_1 . \nu_2, \nu_3$ predstavljaju broj realizacija događaja A_1, A_2, A_3 u tih n ponavljanja. Važi:

$$(\frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{n}}, \frac{\nu_2 - np_2}{\sqrt{n}}) \xrightarrow{R} (\xi_1, \xi_2) : \mathcal{N}(0, R),\ R = \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1p_2 \\ -p_1p_2 & p_2(1 - p_2) \end{pmatrix}.$$

Višedimenzionalna CGT. Neka su $X_i = (X_{i,1}, ..., X_{i,n}), i = 1, 2, ...$ nezavisni, jednako raspodijeljeni slučajni vektori, $EX_{i,j} = m_j, j = 1, ..., n$, $cov(X_{i,k}, X_{i,l}) = b_{k,l}$. Tada važi:

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - m) \xrightarrow{R} \xi : \mathcal{N}(0, B),\ B = (b_{k,l}).$$

Konstrukcija Vinerovog procesa. Čestica se pomjera u trenucima $k\Delta t, k = 1, 2, ...$, pomjera se sa jednakim vjerovatnoćama za $\pm\Delta x$, $\Delta x > 0$. Slučajna promjenljiva $X(t)$ jednaka je položaju čestice nakon $n = \frac{t}{\delta t}$ koraka. Zbog Markovljevosti i homogenosti slučajne promjenljive $X(t) - X(s)$ i $X(s) - X(0)$ su nezavisne i slučajne promjenljive $X(t) - X(s)$ i $X(t - s) - X(0)$ su jednako raspodijeljene. Označimo $DX(t) = \sigma^2(t)$. Imamo

$$X(t) = X(s) - X(0) + X(t) - X(s) \Rightarrow \sigma^2(t) = \sigma^2(s) + \sigma^2(t - s),\ 0 < s < t \Rightarrow \sigma^2(t) = \sigma^2 t,$$

σ^2 je koeficijent difuzije.

Neka je S_n broj pomjeranja u desno do momenta t.

$$X(t) = S_n\Delta x - (n - S_n)\Delta x = (2S_n - n)\Delta x \Rightarrow DX(t) = \sigma^2 t = 4n\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}(\Delta x)^2 = \tfrac{t}{\Delta t}(\Delta x)^2 \Rightarrow$$
$$\sigma^2 = \tfrac{(\Delta x)^2}{\Delta t};\ S_n^* = \tfrac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \tfrac{2S_n - n}{\sqrt{n}} \Rightarrow X(t) = S_n^*\sqrt{n}\Delta x = S_n^*\sigma\sqrt{t} \Rightarrow X(t) \xrightarrow{R} W : \mathcal{N}(0, \sigma^2 t),\ n \to \infty.$$

Formalno, Vinerov proces se zadaje kao proces $W(T), t \geqslant 0$ za koji važi:

a) $W(0) \overset{si}{=} 0$,

b) priraštaji procesa na disjunktnim intervalima su nezavisni,

c) $W(t) - W(s) : \mathcal{N}(0, t-s), 0 \leqslant s < t$.

Egzistencija procesa sa ovim svojstvima se dokazuje primjenom Kolomogorovljeve teoreme.

Pretpostavimo da je preslikavanje $f : \mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}^n$ definisano sa $y_k = f_k(x_1, ..., x_n)$, $k = 1, ..., n$ obostrano jednoznačno. To znači da se iz

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, ..., x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, ..., x_n) \\ &. \\ &. \\ &. \\ y_n &= f_n(x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

mogu jednoznačno odrediti

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(y_1, ..., y_n) \\ x_2 &= g_2(y_1, ..., y_n) \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_n &= g_n(y_1, ..., y_n) \end{aligned}$$

Pretpostavimo da Jakobijan

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ . & . & . \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

ne mijenja znak. Neka je gustina vektora $(X_1, ..., X_n)$ funkcija $\varphi(x_1, ..., x_n)$. Gustina vektora $(Y_1, ..., Y_n)$ je

$$\psi(y_1, ..., y_n) = \varphi(g_1(y_1, ..., y_n), ..., \varphi(g_n(y_1, ..., y_n))|J|.$$

U primjerima koji slijede, $\sigma^2 = 1$.

Primjer. Naći raspodjelu vektora $(W(t_1), ..., W(t_k))$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k$.

Neka je $\eta_1 = W(t_1)$, $\eta_2 = W(t_2) - W(t_1), ..., \eta_k = W(t_k) - W(t_{k-1})$. Sada je $W(t_1) = \eta_1, W(t_2) = \eta_1 + \eta_2, ..., W(t_k) = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_k$. Formirali smo preslikavanja $\eta = (\eta_1, ..., \eta_k) \longrightarrow (W(t_1), ..., W(t_k)) = W$. Imamo

$$p_W(x_1, ..., x_k, t_1, ..., t_k) = p_\eta(x_1, x_2 - x_1, ..., x_k - x_{k-1}) = p_{\eta_1}(x_1) p_{\eta_2}(x_2 - x_1) ... p_{\eta_k}(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}}.$$

Ovim je pokazano da je Winerov proces Gausov.

Primjer. $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Dokazati

$$E\Big(\sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1} - W(t_i))^2 - (b-a)\Big)^2 \to 0, \text{ kad } \max(t_{i+1} - t_i) \to 0.$$

$E\Big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1} - W(t_i))^2\Big) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} D(W(t_{i+1} - W(t_i)) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = b - a$ te je na lijevoj strani jednakosti koju treba dokazati

$$D\Big(\sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1} - W(t_i))^2\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big[E(W(t_{i+1} - W(t_i))^4 - (E(W(t_{i+1} - W(t_i))^2)^2\Big] =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Big[3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2\Big] \leqslant 2 \max(t_{i+1} - t_i) \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = 2(b-a) \max(t_{i+1} - t_i) \to 0,$$

$$E(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_i)}} e^{-\frac{x^2}{2(t_{i+1} - t_i)}} dx = 2 \int_0^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1} - t_i)}} e^{-\frac{x^2}{2(t_{i+1} - t_i)}} dx =$$

$$\left(v = \frac{x^2}{2(t_{i+1} - t_i)}\right) = 4 \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^{1,5} e^{-v} dv = 4 \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big) = 3(t_{i+1} - t_i)^2.$$

Vinerova mjera na $C[0,1]$. $\mu(x(t) : x(t_1) \in I_1, ..., x(t_n) \in I_n) = \int\limits_{I_1} ... \int\limits_{I_n} p(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) dx_1 ... dx_n$.

Primjer. Izračunati $P\{W(\frac{1}{2}) > 0, W(1) > 0\}$.

$p_W(x_1, x_2; \frac{1}{2}, 1) = g(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} e^{-2x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2}$ te je

$$p = P\{W(\frac{1}{2}) > 0, W(1) > 0\} = \iint\limits_{x_1 > 0, x_2 > 0} g(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Nakon smjena $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi$ dobijamo $p = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\int\limits_0^{\infty} re^{-r^2A}dr)d\varphi$, gdje je $A = 2\cos^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi$. Kako je $\int\limits_0^{\infty} re^{-r^2A}dr = \frac{1}{2A}$ to je $p = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{A}$. Nakon uvođenja smijena $\tan\varphi = z$ i $u = z-1$ dobijamo $p = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{du}{u^2+1} = \frac{3}{8}$.

Primjer. Izračunati $E(W(s) \mid W(t))$ i $D(W(s) \mid W(t)), 0 < s < t$.

$g(x \mid y)$- gustina slučajne promjenljive $W(s)$ uz uslov da je $W(t) = y$.

$$g(x \mid y) = \frac{p(x,y;s,t)}{p(y;t)} = \Big(2\pi\frac{s}{t}(t-s)\Big)^{-0,5} exp\Bigg\{-\frac{\Big(x-y\frac{s}{t}\Big)^2}{2\frac{s}{t}(t-s)}\Bigg\} \Rightarrow$$

$E(W(s) \mid W(t) = y) = \frac{s}{t}y; E(W(s) \mid W(t)) = \frac{s}{t}W(t); D(W(s) \mid W(t)) = \frac{s}{t}(t-s)$.

Maksimum Vinerovog procesa

$\xi_t = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} W(s)$, $\tau_x = \min\{t : W(t) = x\}$. U analizi ćemo koristiti jako Markovljevo svojstvo (tj. procesi do momenta zaustavljanja (to je slučajni momenat) i od tog momenta su nezavisni) i skoro izvjesnu neprekidnost Vinerovog procesa.

Očigledno, $\{\xi_t \geqslant x\} = \{\tau_x \leqslant t\}$ i $\{W(t) \geqslant x\} \subset \{\tau_x \leqslant t\}$.

$$\frac{1}{2} = P\{W(t) \geqslant x \mid \tau_x \leqslant t\} = \frac{P\{W(t) \geqslant x\}}{P\{\tau_x \leqslant t\}} \Rightarrow P\{\tau_x \leqslant t\} = 2P\{W(t) \geqslant x\}.$$

Znamo $W(t) : \mathcal{N}(0,t)$.

$$P\{\xi_t \geqslant x\} = P\{\tau_x \leqslant t\} = 2P\{W(t) \geqslant x\} = 2\int\limits_x^{\infty}\frac{exp\{-\frac{u^2}{2t}\}}{\sqrt{2\pi t}}du \left(u = \sqrt{\tfrac{t}{z}}x\right)$$

$$\int\limits_0^t \frac{x}{\sqrt{2\pi}z^{1,5}}\exp\{-\tfrac{x^2}{2z}\}dz \Rightarrow g_{\tau_x}(z) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}z^{1,5}}\exp\{-\tfrac{x^2}{2z}\}dz,\ z > 0.$$

$$P\{\xi_t(x) \geqslant x\} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi t}}\int\limits_x^{\infty} exp\{-\tfrac{u^2}{2t}\}du \Rightarrow g_{\xi_t}(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi t}}\exp\{-\tfrac{x^2}{2t}\},\ x > 0.$$

Neka je τ tačka (vrijeme) dostizanja apsolutnog maksimuma procesa $W(u), 0 < u < t$. Ako je tačaka dostizanja više, biramo prvu tačku. Potražimo raspodjelu slučajne promjenljive τ. Prvo nađimo raspodjelu veltora (τ, ξ_t). $\xi_t \mid \tau_a = s$ ima istu raspodjelu kao $a + \max\limits_{0<u<t-s} W(u) =$

$a+\xi_{t-s}$ te je

$$p_{\xi_t}(x \mid s)=\sqrt{\tfrac{2}{\pi(t-s)}}\exp\{-\tfrac{(x-a)^2}{2(t-s)}\}.$$

$$p_{\tau_a,\xi_t}(s,x)=p_{\xi_t}(x \mid s)p_{\tau_a}(s)=\tfrac{a}{\pi s\sqrt{s(t-s)}}\exp\{-\tfrac{a^2}{2s}\}\exp\{-\tfrac{(x-a)^2}{2(t-s)}\}, 0<s<t,\, x\geqslant a.$$

$$P_{\tau,\xi_t}(s,a)=p_\tau(s \mid a)p_{\xi_t}(a)=p_{\tau_a}(s \mid a)p_{\xi_t}(a)=p_{\tau_a,\xi_t}(s,a)=\tfrac{a}{\pi s\sqrt{s(t-s)}}\exp\{-\tfrac{a^2}{2s}\},\ 0<s<t,\, a\geqslant 0.$$

$$P_\tau(s)=\int_0^\infty P_{\tau,\xi_t}(s,a)da=\tfrac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}},\ 0<s<t.$$

$$P\{\tau\leqslant s\}=\int_0^s\tfrac{du}{\pi\sqrt{u(t-u)}}=\tfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\tfrac{s}{t}}, 0<s<t.$$

Primjer. Dokazati da Vinerov proces skoro izvjesno dostiže svaki nivo $x, x>0$. (ranije ili kasnije, za konačno vrijeme)

$\{\tau_x<\infty\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\tau_x\leqslant n\}$, $\{\tau_x<n\}=A_n\uparrow$ te je

$$P\{\tau_x<\infty\}=\lim_{n\to\infty}P\{\tau_x\leqslant n\}=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\tfrac{x}{\sqrt{2\pi}z^{1,5}}\exp\{-\tfrac{x^2}{2z}\}dz=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty I_{(0,n)}\tfrac{x}{\sqrt{2\pi}z^{1,5}}\exp\{-\tfrac{x^2}{2z}\}dz$$

$$\text{(iz Bepo-Levijeve leme slijedi)}=\int_0^\infty\tfrac{x}{\sqrt{2\pi}z^{1,5}}\exp\{-\tfrac{x^2}{2z}\}dz=\left(\tfrac{x^2}{2z}=u\right)=\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\tfrac{1}{\sqrt{u}}e^{-u}du=1.$$

Koristili smo:

$$I_{(0,n)}\frac{x}{\sqrt{2\pi}z^{1,5}}\exp\{-\frac{x^2}{2z}\}=f_n(z)\uparrow f(z)=\frac{x}{\sqrt{2\pi}z^{1,5}}\exp\{-\frac{x^2}{2z}\},\ z>0.$$

Literatura.

Nikola Sarapa: Teorija vjerojatnosti (odlična knjiga, lijepo obrađena simetrična slučajna šetnja)

Mario Lefebvre: Applied Stochastic Processes

Shiryaev: Probability (opšte o procesima)

Rozanov: Random Processes, lijep uvod u Puasonov proces

Gnedenko: The Theory of Probabilty, konstrukcija Puasonovog procesa