Statistika

Testiranje statističkih hipoteza

1. Testira se hipoteza da vjerovatnoća događaja A iznosi 0.25 protiv alternative da je $\frac{1}{3}$. Određeno je sljedeće pravilo testiranja: ako je broj pojavljivanja događaja A u uzorku od 100 eksperimenata između 20 i 30, prihvatiti nultu hipotezu, a inače odbaciti nultu hipotezu. Naći vjerovatnoće greške prve i druge vrste.

◀
Testiramo $H_0(p=0.25)$ protiv $H_1(p=\frac{1}{3})$. Neka je S_{100} broj pojavljivanja događaja A u uzorku od 100 eksperimenata. Tada je $S_{100} : \mathscr{B}(100,p)$. Kritična oblast je po uslovu zadatka data sa

$$C = \{(x_1,\dots,x_{100}) : s_{100} < 20 \ \vee \ s_{100} > 30\}.$$

$$\begin{aligned}
\alpha = \mathsf{P}_{H_0}\{(X_1,\dots,X_{100}) \in C\} &= \mathsf{P}_{H_0}\{S_{100} < 20 \ \vee \ S_{100} > 30\} \\
&= \mathsf{P}_{H_0}\{S_{100} < 20\} + \mathsf{P}_{H_0}\{S_{100} > 30\} \\
&= \mathsf{P}_{H_0}\left\{\frac{S_{100} - 100\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}} < \frac{20 - 100\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}}\right\} \\
&\quad + \mathsf{P}_{H_0}\left\{\frac{S_{100} - 100\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}} > \frac{30 - 100\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}}\right\} \\
&= \mathsf{P}_{H_0}\{X^* < -1.16\} + \mathsf{P}_{H_0}\{X^* > 1.16\} \\
&\approx 1 - 2\Phi^*(1.16) \approx 1 - 2\cdot 0.377 = 0.246.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta = \mathsf{P}_{H_1}\{(X_1,\dots,X_{100}) \in C^c\} &= \mathsf{P}_{H_1}\{20 \leqslant S_{100} \leqslant 30\} \\
&= \mathsf{P}_{H_1}\left\{\frac{20 - 100\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}} \leqslant \frac{S_{100} - 100\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}} \leqslant \frac{30 - 100\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}}\right\} \\
&= \mathsf{P}_{H_1}\{-2.77 \leqslant Y^* \leqslant -0.64\} \\
&\approx \Phi^*(2.77) - \Phi^*(0.64) \approx 0.4972 - 0.2389 = 0.2583.
\end{aligned}$$

▶

2. Za testiranje hipoteze H_0 da je vjerovatnoća događaja A jednaka 0.25, određeno je sljedeće pravilo testiranja: ako je broj pojavljivanja događaja A u uzorku od 10 eksperimenata 2, 3 ili 4 prihvatiti hipotezu H_0, a inače odbaciti hipotezu H_0. Naći vjerovatnoću greške prve vrste i vjerovatnoću greške druge vrste ako je alternativna hipoteza $H_1(p=0.5)$.

◀

Testiramo $H_0(p=0.25)$ protiv $H_1(p\neq 0.25)$. Neka je S_{10} broj pojavljivanja događaja A u uzorku od 10 eksperimenata. Tada je $S_{10}:\mathscr{B}(10,p)$. Kritična oblast je po uslovu zadatka data sa

$$C=\{(x_1,\dots,x_{10}): s_{10}=0\ \vee\ s_{10}=1\vee\ 5\leqslant s_{10}\leqslant 10\}.$$

$$\begin{aligned}\alpha=\mathsf{P}_{H_0}\{(X_1,\dots,X_{10})\in C\} &=1-\mathsf{P}_{H_0}\{S_{10}=2\ \vee\ S_{10}=3\ \vee\ S_{10}=4\}\\ &=1-\sum_{k=2}^{4}\mathsf{P}_{H_0}\{S_{10}=k\}\\ &=1-\sum_{k=2}^{4}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}\\ &=1-(0.2816+0.2503+0.146)\\ &=0.3221.\end{aligned}$$

Vjerovatnoća greške druge vrste β, ako je $H_1(p=0.5)$:

$$\beta=\mathsf{P}_{H_1}\{(X_1,\dots,X_{10})\in C^c\}=\mathsf{P}_{H_1}\{S_{10}=2\ \vee\ S_{10}=3\ \vee\ S_{10}=4\}=\sum_{k=2}^{4}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=0.3662.$$

▶

3. Na osnovu ranijih rezultata, vjerovatnoća da strijelac A pogodi cilj je procijenjena na 0.9. Izvršeno je probno gađanje u kome je strijelac imao 92 pogotka od 100 gađanja. Sa pragom značajnosti $\alpha=0.05$, testirati hipotezu da je vjerovatnoća pogotka ostala ista protiv alternative da je povećana.

◀

Neka je p vjerovatnoća pogotka.

Testira se hipoteza $H_0(p=0.9)$ protiv alternative $H_1(p>0.9)$.

Neka je S_{100} broj pogodaka u seriji od 100 gađanja. Tada je $S_{100}:\mathscr{B}(100,p)$. Ako je hipoteza H_0 tačna S_{100} ima $\mathscr{B}(100,0.9)$ raspodjelu. Posmatrajući alternativnu hipotezu, uočavamo da za hipotezu H_0 nije povoljno da je razlika $S_{100}-90$ velika, pa ćemo za kritičnu oblast uzeti

$$C=\{(x_1,\dots,x_{100}):\ s_{100}-90>k\},\quad k>0.$$

k određujemo iz uslova

$$0.05=\mathsf{P}_{H_0}\{S_{100}-90>k\}.$$

Primjenjujući centralnu graničnu teoremu, iz

$$0.05=\mathsf{P}_{H_0}\{S_{100}-90>k\}=\mathsf{P}_{H_0}\left\{\frac{S_{100}-90}{3}>\frac{k}{3}\right\}=\mathsf{P}_{H_0}\left\{X^*>\frac{k}{3}\right\}$$

dobijamo $\Phi^*\left(\frac{k}{3}\right) = 0.45$, odnosno $\frac{k}{3} = 1.65$, tj. $k = 4.95$, pa je $C = \{(x_1, \ldots, x_{100}) : s_{100} - 90 > 4.95\}$. Na osnovu realziovanog uzorka, $s_{100} - 90 = 2 < 4.95$, pa sa pragom značajnosti 0.05 prihvatamo hipotezu H_0.

►

4. Obilježje X je broj godišnjih pojava grada na nekom lokalitetu. Prirodno je smatrati da obilježje raspodijeljeno sa $X : \mathscr{P}(\lambda)$. Na osnovu podataka iz prethodnih $n = 12$ godina želi se testirati hipoteza $H_0(\lambda = 0.5)$ protiv alternative $H_1(\lambda < 0.5)$. Koristi se kritična oblast $C = \{(x_1, \ldots, x_{12}) | \, s_{12} = x_1 + \cdots + x_{12} < 2\}$. Naći funkciju moći testa i vjerovatnoću greške prve vrste α.

◄

Ako je $(X_1, \ldots, X_n)$ uzorak obilježja X, onda je $S_{12} = \sum_{i=1}^{12} X_i : \mathscr{P}(12\lambda)$, jer su slučajne veličine $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako raspodijeljene kao obilježje.

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \mathsf{P}_\lambda \{(X_1, \ldots, X_n) \in C\} \\ &= \mathsf{P}_\lambda\{S_{12} < 2\} \\ &= \mathsf{P}_\lambda\{S_{12} = 0\} + \mathsf{P}_\lambda\{S_{12} = 1\} \\ &= e^{-12\lambda} + 12\lambda \cdot e^{-12\lambda} \\ &= e^{-12\lambda}(1 + 12\lambda), \quad 0 < \lambda \leqslant 0.5. \end{aligned}$$

$$\alpha = M(0.5) = e^{-6}(1 + 6) = 7e^{-6}.$$

►

5. Masa proizvoda ima normalnu raspodjelu $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$. Slučajno je izabrano 10 proizvoda i dobijeni su sljedeći podaci o njihovoj masi: 58, 56, 57, 52, 62, 55, 60, 55, 61, 58. Sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ testirati hipotezu $H_0(m = 52)$ protiv alternative

(a) $H_1(m > 52)$;

(b) $H_1(m < 52)$;

(c) $H_1(m \neq 52)$.

6. Plaćanje za prekovremeni rad (za sat prekovremenog rada) u firmi M dato je tabelom

Cijena (€)	[7,8)	[8,9)	[9,10)	[10,11)	[11,12)	[12,15]
Broj radnika	1	5	9	18	12	5

Sa pragom značajnosti $\alpha = 0.02$, testirati hipotezu da očekivana vrijednost cijene prekovremenog sata u toj firmi iznosi 10€, pretpostavljajući da je cijena prekovremenog sata normalno raspodijeljena.