Vjerovatnoća i statistika

Nezavisnost događaja

1. Neka su A, B, C nezavisni u ukupnosti događaji. Dokazati da su tada nezavisni i događaji:

(a) A i B^c;
(b) A^c i B^c;
(c) A i $B \cup C$;
(d) $A \backslash B$ i C.

◀

(a) $\mathsf{P}(AB^c) = \mathsf{P}(A\backslash(AB)) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A)(1 - \mathsf{P}(B)) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B^c)$.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A^cB^c) = 1 - \mathsf{P}(A \cup B) &= 1 - \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(AB) \\
&= 1 - \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) \\
&= 1 - \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B)(1 - \mathsf{P}(A)) \\
&= (1 - \mathsf{P}(A))(1 - \mathsf{P}(B)) \\
&= \mathsf{P}(A^c)\mathsf{P}(B^c).
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A(B \cup C)) = \mathsf{P}(AB \cup AC) &= \mathsf{P}(AB) + \mathsf{P}(AC) - \mathsf{P}(ABC) \\
&= \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C) \\
&= \mathsf{P}(A)\big(\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)\big) \\
&= \mathsf{P}(A)\big(\mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(BC)\big) \\
&= \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B \cup C).
\end{aligned}$$

(d) za vježbu.

▶

2. n strijelaca nezavisno jedan od drugog gađaju istu metu jedanput, pri čemu je vjerovatnoća pogotka za svakog strijelca jednaka $p \in (0, 1)$. Za $q \in (0, 1)$ naći broj n tako da vjerovatnoća da meta bude bar jednom pogođena bude bar q.

◀

Neka je $A := \{\text{Meta je pogođena bar jednom}\}$. Definišimo događaje

$$A_i := \{i\text{-ti strijelac je pogodio metu}\},\ i = \overline{1, n}.$$

Tada je $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}\left(A_1^c \cdots A_n^c\right) &= 1 - \mathsf{P}(A_1^c) \cdots \mathsf{P}(A_n^c) \\
&= 1 - (1 - \mathsf{P}(A_1)) \cdots (1 - \mathsf{P}(A_n)) \\
&= 1 - (1 - p)^n.
\end{aligned}$$

Treba odrediti $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\mathsf{P}(A) \geqslant q$, tj. treba odrediti n tako da važi $1-(1-p)^n \geqslant q$. Dobijamo $n \geqslant \frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)}$.
▶

Slijede tri zadatka za vježbu iz uslovne vjerovatnoće.

1. Profesor je za ispit pripremio 10 pitanja. Student će položiti ispit ako tačno odgovori na dva proizvoljno odabrana pitanja ili ako tačno odgovori na jedno od njih i zatim odgovori tačno i na treće postavljeno pitanje. Na koliko pitanja student treba da zna odgovor da bi sa vjerovatnoćom većom od 0.8 položio ispit?

2. Tri prijateljice, Ivana, Ana i Maja, prijavile su se kao ekipa na kviz znanja. One se za odgovor na pitanje javljaju s vjerovatnoćama, redom, $\frac{1}{3}$, 0.5 i $\frac{1}{6}$. Na postavljeno pitanje odgovaraju tačno s vjerovatnoćama $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ i $\frac{5}{7}$. Ako na postavljeno pitanje nije tačno odgovoreno, naći vjerovatnoću da na pitanje nije odgovorila Maja.

3. Neka je $H_1, \ldots, H_n$ potpun sistem događaja, A i B događaji, takvi da je $\mathsf{P}(B) > 0$. Dokazati da važi

$$\mathsf{P}(A|B) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|BH_i) \cdot \mathsf{P}(H_i|B).$$