Vjerovatnoća i statistika

Slučajni vektori diskretnog tipa

1. Simetričan novčić se baca 3 puta. Neka je X broj palih pisama, a Y broj palih grbova. Naći raspodjelu slučajnog vektora (X, Y), a zatim i raspodjele za X, Y i $X \cdot Y$. Ispitati nezavisnost slučajnih veličina X i Y.

Rješenje.

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) \,:\, a_1, a_2, a_3 \in \{p, g\}\} \Longrightarrow |\Omega| = 8.$$

$$\mathcal{R}_X = \mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2, 3\}.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (0,0)\} = \mathsf{P}\{X = 0, Y = 0\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (0,1)\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (0,2)\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (0,3)\} = \mathsf{P}\{(g,g,g)\} = \frac{1}{8},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (1,0)\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (1,1)\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (1,2)\} = \mathsf{P}\{(p,g,g),(g,p,g),(g,g,p)\} = \frac{3}{8},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (1,3)\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (2,0)\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (2,1)\} = \mathsf{P}\{(p,p,g),(p,g,p),(g,p,p)\} = \frac{3}{8},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (2,2)\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (2,3)\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (3,0)\} = \mathsf{P}\{(p,p,p)\} = \frac{1}{8},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (3,1)\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (3,2)\} = 0,$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) = (3,3)\} = 0.$$

Odmah smo mogli uočiti da za $(x, y) \in \mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y$ za koje je $x + y \neq 3$, važi $\mathsf{P}\{(X,Y) = (x,y)\} = 0$.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	
0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	0	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

Marginalne raspodjele su

$$X:\begin{matrix}0&1&2&3\\ \frac{1}{8}&\frac{3}{8}&\frac{3}{8}&\frac{1}{8}\end{matrix}\,,\quad Y:\begin{matrix}0&1&2&3\\ \frac{1}{8}&\frac{3}{8}&\frac{3}{8}&\frac{1}{8}\end{matrix}\,.$$

Da bi odredili raspodjelu za $X \cdot Y$ posmatrajmo tabelu sa mogućim proizvodima

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	$\boxed{0}$
1	0	1	$\boxed{2}$	3
2	0	$\boxed{2}$	4	6
3	$\boxed{0}$	3	6	9

Uokvirene vrijednosti javljaju se sa nenultim vjerovatnoćama, pa je $\mathcal{R}_{X\cdot Y} = \{0, 2\}$.

$$\mathsf{P}\{X \cdot Y = 0\} = \mathsf{P}\{(X,Y) = (0,3)\} + \mathsf{P}\{(X,Y) = (3,0)\} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathsf{P}\{X \cdot Y = 2\} = \mathsf{P}\{(X,Y) = (1,2)\} + \mathsf{P}\{(X,Y) = (2,1)\} = \frac{3}{4}.$$

Dakle,

$$X\cdot Y:\begin{matrix}0&2\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{matrix}\,.$$

Važi

$$\mathsf{P}\{X = 0, Y = 0\} = 0 \neq \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = \mathsf{P}\{X = 0\}\cdot\mathsf{P}\{Y = 0\},$$

pa su X i Y zavisne slučajne veličine. □

2. Na stranama pravilnog tetraedra su zapisani brojevi 1, 2, 3 i 4. Tetraedar se baca 2 puta i registruju se brojevi na stranama na koje tetraedar padne. Neka je X broj koji se registruje kod prvog bacanja, a Y broj koji se registruje kod drugog bacanja. Definišimo slučajne veličine Z i V sa

$$Z = \min\{X, Y\}\,,\quad V = \max\{X, Y\}.$$

Naći raspodjelu slučajnog vektora (Z, V). Ispitati nezavisnost slučajnih veličina Z i V.

Rješenje.

$$\Omega = \{(a_1, a_2)\,:\, a_1, a_2 \in \{1,2,3,4\}\} \Longrightarrow |\Omega| = 16.$$

Očigledno, $\mathcal{R}_X = \mathcal{R}_Y = \mathcal{R}_Z = \mathcal{R}_V = \{1,2,3,4\}$.

X	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
Y	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Z	1	1	1	1	1	2	2	2	1	2	3	3	1	2	3	4
V	1	2	3	4	2	2	3	4	3	3	3	4	4	4	4	4

$Z \backslash V$	1	2	3	4	
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	

Marginalne raspodjele su

$$Z: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{7}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{array}, \quad V: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{7}{16} \end{array}.$$

Iz

$$\mathsf{P}\{(Z,V)=(1,2)\} = \frac{2}{16} \neq \frac{7}{16}\cdot\frac{3}{16} = \mathsf{P}\{Z=1\}\cdot\mathsf{P}\{V=2\}$$

slijedi da su slučajne veličine Z i V zavisne. □

3. Kocka za igru baca se 2 puta. Ako su oba dobijena broja parna, izvodi se još jedno bacanje. Neka je X broj četvorki, a Y broj petica, dobijenih u izvedenim bacanjima. Naći raspodjele za (X,Y), X i Y. Ispitati nezavisnost komponenti X i Y.

Rješenje. Ishodi bacanja kocke za igru dva puta:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	[(2,2)]	(2,3)	[(2,4)]	(2,5)	[(2,6)]
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	[(4,2)]	(4,3)	[(4,4)]	(4,5)	[(4,6)]
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	[(6,2)]	(6,3)	[(6,4)]	(6,5)	[(6,6)]

Ovdje su uokvireni oni ishodi u slučaju kojih se izvodi dodatno bacanje. Očigledno $\mathcal{R}_X = \{0,1,2,3\}$, $\mathcal{R}_Y = \{0,1,2\}$.

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(0,0)\} = \frac{4+2+4+2}{36} + \frac{4+4+4+4}{216} = \frac{88}{216}.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(0,1)\} = \frac{8}{36} + \frac{4}{216} = \frac{52}{216}.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(0,2)\} = \frac{1}{36} = \frac{6}{216}.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(1,0)\} = \frac{4}{36} + \frac{4+1+1+4+4+1+4+1}{216} = \frac{44}{216}.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(1,1)\} = \frac{2}{36} + \frac{1+1+1+1}{216} = \frac{16}{216}.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(1,2)\} = 0.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(2,0)\} = \frac{1+1+4+1+1}{216} = \frac{8}{216}.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(2,1)\} = \frac{1}{216}.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(2,2)\} = 0.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(3,0)\} = \frac{1}{216}.$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(3,1)\} = \mathsf{P}\{(X,Y)=(3,2)\} = 0.$$

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{88}{216}$	$\frac{52}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{146}{216}$
1	$\frac{44}{216}$	$\frac{16}{216}$	0	$\frac{60}{216}$
2	$\frac{8}{216}$	$\frac{1}{216}$	0	$\frac{9}{216}$
3	$\frac{1}{216}$	0	0	$\frac{1}{216}$
	$\frac{141}{216}$	$\frac{69}{216}$	$\frac{6}{216}$	

Kako je

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(3,1)\}=0\neq\frac{1}{216}\cdot\frac{141}{216}=\mathsf{P}\{X=3\}\cdot\mathsf{P}\{Y=1\},$$

to su X i Y zavisne slučajne veličine. □

4. Iz špila od 32 karte slučajno se a) po modelu bez vraćanja, b) po modelu sa vraćanjem, izvlače dvije karte. Neka je X broj izvučenih dama, a Y broj izvučenih krsta. Naći raspodjele za (X,Y), X, Y i ispitati nezavisnost komponenti X i Y.

Rješenje.

a)

$$\Omega=\{\text{Svi 2–podskupovi skupa od 32 karte}\}\Longrightarrow|\Omega|=\binom{32}{2}.$$

Očigledno, $\mathcal{R}_X=\mathcal{R}_Y=\{0,1,2\}$.

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(0,0)\}=\frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(0,1)\}=\frac{\binom{7}{1}\binom{21}{1}}{\binom{32}{2}},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(0,2)\}=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{32}{2}},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(1,0)\}=\frac{\binom{3}{1}\binom{21}{1}}{\binom{32}{2}},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(1,1)\}=\frac{\binom{1}{1}\binom{21}{1}+\binom{7}{1}\binom{3}{1}}{\binom{32}{2}},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(1,2)\}=\frac{\binom{1}{1}\binom{7}{1}}{\binom{32}{2}},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(2,0)\}=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{32}{2}},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(2,1)\}=\frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{32}{2}},$$

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(2,2)\}=0.$$

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{420}{992}$	$\frac{294}{992}$	$\frac{42}{992}$	$\frac{756}{992}$
1	$\frac{126}{992}$	$\frac{84}{992}$	$\frac{14}{992}$	$\frac{224}{992}$
2	$\frac{6}{992}$	$\frac{6}{992}$	0	$\frac{12}{992}$
	$\frac{552}{992}$	$\frac{384}{992}$	$\frac{56}{992}$	

Slučajne veličine X i Y su zavisne, jer je npr.

$$\mathsf{P}\{(X,Y)=(2,2)\} \neq \mathsf{P}\{X=2\}\cdot\mathsf{P}\{Y=2\}.$$

b) Za vježbu. □

5. Data je raspodjela za (X,Y):

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.2	0.08	0.12
1	0.3	0.12	0.18

(a) Ispitati nezavisnost slučajnih veličina X i Y.
(b) Naći $\mathsf{P}\big\{X \leqslant Y\big\}$.
(c) Ako je $U = X+Y$ i $V = X-Y$, naći raspodjelu za (U,V).

Rješenje.

(a)

$$X : \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{matrix},$$

$$Y : \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.6 \end{matrix},$$

Uočimo da za svako $i \in \{-1,1\}$ i svako $j \in \{0,1,2\}$ važi

$$\mathsf{P}\{X=i, Y=j\} = \mathsf{P}\{X=i\}\cdot\mathsf{P}\{Y=j\},$$

pa su slučajne veličine X i Y nezavisne.

(b) $\mathsf{P}\{X \leqslant Y\} = 1 - \mathsf{P}\{X > Y\} = 1 - 0.3 = 0.7$.

(c)

X	-1	-1	-1	1	1	1
Y	0	1	2	0	1	2
U	-1	0	1	1	2	3
V	-1	-2	-3	1	0	-1

$U \backslash V$	-3	-2	-1	0	1
-1	0	0	0.2	0	0
0	0	0.08	0	0	0
1	0.12	0	0	0	0.3
2	0	0	0	0.12	0
3	0	0	0.18	0	0

□