ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОЕНЦИАЛА *q* И ФУНКЦИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ *α*

НИКОЛА МИХАЛЬЕВИЧ

Морской факультет, Университет Черногории
Котор, Черногория
e-mail: nikolamih@ac.me

Ключевые слова: Коэффициенты Фурье, оператор, потенциал, функция запаздывания

Аннотация. В этой статье мы исходим из тождеств

$$\int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 = = A_c^+(z) - \sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l} Q(T_l)P(T_l,z)\cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_l))dT_l \tag{1}$$

$$\int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1 = = A_c^-(z) - \sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l} Q(T_l)P(T_l,z)\cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_l))dT_l \tag{2}$$

$$\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 = = A_s^+(z) - \sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l} Q(T_l)P(T_l,z)\sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_l))dT_l \tag{3}$$

$$\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1 = = A_s^-(z) - \sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l} Q(T_l)P(T_l,z)\sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_l))dT_l, \tag{4}$$

полученных в статьях [1-17] (тождества (19) – (22)). Эти тождества использовались для формирования интегральных уравнений для неизвестных функций, зависящих от потенциала *q* и функции запаздывания *α*. В статье используется анализ Фурье.

FORMATION OF INTEGRAL EQUATIONS FOR THE POTENTIAL *q* AND FUNCTIONS OF DELAY *α*

NIKOLA MIHALJEVIC

Maritime Faculty, University of Montenegro
Kotor, Montenegro
e-mail: nikolamih@ac.me

Summary. In this paper we proceed from the identities

$$\int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 =$$

2010 Mathematics Subject Classification: 34B24, 35B05.
Key words and Phrases: Fourier coefficients, Operator, Potential, Function of delay.

$$= A_c^+(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_l)) dT_l \tag{1}$$

$$\int_0^{\pi} q(t_1) \cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 =$$

$$= A_c^-(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_l)) dT_l \tag{2}$$

$$\int_0^{\pi} q(t_1) \sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dt_1 =$$

$$= A_s^+(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_l)) dT_l \tag{3}$$

$$\int_0^{\pi} q(t_1) \sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 =$$

$$= A_s^-(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_l)) dT_l, \tag{4}$$

obtained in the articles [1-17] (identities (19) – (22)). These identities were used to form integral equations for unknown functions that depend on the potential q and the delay function α. The article uses Fourier analysis.

1 ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что заданы 4 последовательности собственных значений λ_{nij}, $n = 1,2,...,$ $i, j = 1,2$. Оператор $D_{ij}^{(2)}$ генерируется дифференциальным уравнением $-y''(x) + q(x)y(\alpha(x)) = \lambda y(x)$ с краевыми условиями $y'(0) - h_i y(0) = 0$ и $y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0$. Для определения оператора $D_{ij}^{(2)}$ необходимо определить коэффициенты h_i и H_j, $i, j = 1,2$ из краевых условий, что было сделано в работе [1 14], а также и потенциал q и функцию запаздывания α, которые будут определены в этой статье для формирования соответствующих интегральных уравнений.

Система тождеств (1), (2), (3) и (4) эквивалентна следующим четырем последовательностям численных равенств при $z = m$, $m \in N$

$$(-1)^m \int_0^{\pi} q(t_1) \cos m(t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 =$$

$$= A_c^+(m) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, m) \cos m(t_1 - \alpha(t_l)) dT_l \tag{5}$$

$$(-1)^m \int_0^{\pi} q(t_1) \cos m(t_1 + \alpha(t_1)) dt_1 =$$

$$= A_c^-(m) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, m) \cos m(t_1 + \alpha(t_l)) dT_l \tag{6}$$

$$(-1)^m \int_0^\pi q(t_1)\sin m(t_1-\alpha(t_1))dt_1 =$$

$$= A_s^+(m) - \sum_{l=2}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^{l-1}}\int_{D_l} Q(T_l)P(T_l,m)\sin m(t_1-\alpha(t_l))dT_l \tag{7}$$

$$(-1)^m \int_0^\pi q(t_1)\sin m(t_1+\alpha(t_1))dt_1 =$$

$$= A_s^-(m) - \sum_{l=2}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^{l-1}}\int_{D_l} Q(T_l)P(T_l,m)\sin m(t_1+\alpha(t_l))dT_l \tag{8}$$

Таким образом имеем

$$A_c^+(m) = \frac{1}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{m^2[F_{11}(m)+F_{22}(m)-F_{12}(m)-F_{21}(m)]+$$
$$+H_2[h_2F_{11}(m)-h_1F_{21}(m)]-H_1[h_2F_{12}(m)-h_1F_{22}(m)]\}$$

$$A_c^-(m) = \frac{1}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{H_2[h_2F_{11}(m)-h_1F_{21}(m)]-H_1[h_2F_{12}(m)-h_1F_{22}(m)]+$$
$$+m^2[F_{11}(m)+F_{22}(m)-F_{12}(m)-F_{21}(m)]\}$$

$$A_s^+(m) = \frac{m}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{h_2F_{11}(m)-h_1F_{21}(m)-h_2F_{12}(m)+h_1F_{22}(m)+$$
$$+H_2[F_{11}(m)-F_{21}(m)]+H_1[F_{12}(m)-F_{22}(m)]\}$$

$$A_s^+(m) = \frac{m}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{h_2F_{11}(m)-h_1F_{21}(m)-h_2F_{12}(m)+h_1F_{22}(m)+$$
$$+H_2[F_{11}(m)-F_{21}(m)]H_1[F_{12}(m)-F_{22}(m)]\}$$

Теорема 1. Для коэффициентов $A_c^+(m)$, $A_c^-(m)$, а также $A_s^+(m)$, $A_s^-(m)$ имеем

$$A_c^+(m) = A_c^-(m) = O\left(\frac{1}{m}\right), \qquad A_s^+(m) = A_s^-(m) = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad m\to\infty,\ m\in N.$$

Доказательство. На основе (23) из работы $[14]$ при $z=m$ и $m\to\infty$ следует

$$F_{ij}(m) = \frac{\pi\zeta_{0ij}}{2}(-1)^m - \frac{\zeta_1\pi}{2m}\sin m\alpha(\pi) + \frac{1}{m^2}\left[\left(\frac{\pi\zeta_{2ij}^{(1)}}{2} + \frac{\pi a(\pi)\zeta_{0ij}\zeta_1}{4}\right)\cos m\alpha(\pi) + \right.$$
$$\left. +(-1)^m\left(\frac{\pi\zeta_{2ij}^{(0)}}{2} - \frac{\pi^2\alpha(\pi)\zeta_{0ij}\zeta_1}{4} + \frac{3}{8}\pi\zeta_{0ij}^2 - \frac{\pi^2\zeta_{0ij}^3}{48} - \frac{\pi\zeta_{0ij}\lambda_{0ij}}{2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right).$$

Достаточно доказать, что $\delta_m = F_{11}(m) + F_{22}(m) - F_{12}(m) - F_{21}(m) = O\left(\frac{1}{m^3}\right)$.

Коэффициенты h_i и H_j, $i, j = 1,2$ определяются из уравнения $\frac{\pi}{2}\zeta_{0ij} = h_i + |\, H_j$. Поэтому

$$\zeta_{011} + \zeta_{022} - \zeta_{012} - \zeta_{021} = 0.$$

Так свободный член в выражении для δ_m равен нулю. При $\frac{1}{m}$ выражение не зависит от i и j, поэтому он равен нулю. Также нужно доказать, что и коэффициент при $\frac{1}{m^2}$ в выражении для δ_m также равен нулю. Так как

$$\zeta_{2ij}^{(1)} = -\frac{\alpha(\pi)\zeta_{0ij}\zeta_1}{2} + |\,\frac{H_j}{\pi}\left(\tilde{q}_1(\pi) + |\,\tilde{q}_2(\pi)\right) + \frac{h_i}{\pi}\left(\tilde{q}_1(\pi) - \tilde{q}_2(\pi)\right) - \frac{\tilde{\tilde{q}}_1(\pi) + \tilde{\tilde{q}}_2(\pi)}{2}$$

и

$$\zeta_{2ij}^{(0)} = \frac{\pi\alpha(\pi)\zeta_{0ij}}{2} - \frac{3}{4}\zeta_{0ij}^2 + |\,\frac{\pi^2\zeta_{0ij}^3}{24} + \lambda_{0ij}\zeta_{0ij} + \frac{\tilde{q}_2(0) - \tilde{q}_1(0)}{\pi} + \frac{H_j - 1}{\pi}\left(\tilde{\tilde{q}}_2(0) + \tilde{\tilde{q}}_1(0)\right)$$

то

$$\zeta_{211}^{(1)} + \zeta_{222}^{(1)} - \zeta_{212}^{(1)} - \zeta_{221}^{(1)} = 0.$$

Таким образом, коэффициент при $\cos m\alpha(\pi)$ равен нулю. Остается проверить, что коэффициент при $(-1)^m$ также равен нулю, как можно видеть из выражения для $\zeta_{2ij}^{(0)}$ и предыдущих равенств. Таким образом, мы доказали, что $\delta_m = O\left(\frac{1}{m^3}\right)$. Проведя другой элементарный расчет, заключаем, что $A_c^{\pm}(m) = O\left(\frac{1}{m}\right)$ и $A_s^{\pm}(m) = O\left(\frac{1}{m}\right)$.

Замечание 1. Результаты теоремы 1 играют важную роль в формировании заявленных интегральных уравнений. А именно, $A_c^{\pm}(m)$ и $A_s^{\pm}(m)$ можно рассматривать как коэффициенты Фурье некоторых функций из L_1 на соотвествующем промежутке.

2. ФОРМИРОВАНИЕ ИНЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введя сдвиги $\gamma_1(t_i) = t_i - \alpha(t_i) = \bar{t}_i$ мы имеем $t_i = \gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)$ и $dt_i = \left[\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)\right]' d\bar{t}_i$, $i \in \{1,2,...,l\}$. Введем функцию $\tilde{q}_1(\bar{t}_i)$

$$\tilde{q}_1(\bar{t}_i) = \begin{cases} 0 & , \quad \bar{t}_i \in (\gamma_1(\pi), 2\pi] \\ q\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)\right)\left[\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)\right]' & , \quad \bar{t}_i \in [0, \gamma_1(\pi)]. \end{cases}$$

Пусть $B_m^{(1)} = (-1)^{m+|1} A_c^+(m)$ и $A_m^{(1)} = (-1)^{m+|1} A_s^+(m)$. Теперь равенства (7) и (5) можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{q}_1(\bar{t}_1) \sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 =$$

$$= B_m^{(1)} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\overline{D}_l^{(1)}} \widetilde{Q}_1(\overline{T}_l) \overline{P}_1(\overline{T}_l, m) \sin m\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1) - \alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right) d\overline{T}_l, \tag{9}$$

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{q}_1(\bar{t}_1) \cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 =$$

$$= A_m^{(1)} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\overline{D}_l^{(1)}} \widetilde{Q}_1(\overline{T}_l) \overline{P}_1(\overline{T}_l, m) \cos m\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1) - \alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right) d\overline{T}_l, \tag{10}$$

где

$$\overline{D}_l^{(1)} = \left\{(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_l) \middle| 0 \le \bar{t}_1 \le \right.$$

$$\left. \le \gamma_1(\pi), 0 \le \bar{t}_2 \le \gamma_1\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right)\right), \ldots, \gamma_1\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right)\right)\right\},$$

$$\widetilde{Q}_1(\overline{T}_l) = \prod_{i=1}^{l} \widetilde{q}_1(\bar{t}_i), \quad \overline{P}_1(T_l, m) = \prod_{i=1}^{l-1} \sin m\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)\right) - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)$$

и

$$d\overline{T}_l = d\bar{t}_l d\bar{t}_{l-1} \ldots d\bar{t}_1.$$

Перемножая отношения (9) с $\frac{1}{\pi}\sin m\bar{x}$, и отношения (10) с $\frac{1}{\pi}\cos m\bar{x}$, $\bar{x} \in [0, 2\pi]$, а затем суммируя при $m = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{q}_1(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{q}_1(\bar{t}_1) \sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 \right] \sin m\bar{x} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{q}_1(\bar{t}_1) \cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 \right] \cos m\bar{x} \right\} = \frac{A_0^{(1)}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_m^{(1)} \sin m\bar{x} + A_m^{(1)} \cos m\bar{x} \right) -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{\overline{D}_l^{(1)}} \widetilde{Q}_1(\overline{T}_l) \prod_{i=1}^{l-1} \left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right) - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1}) \right) d\overline{T}_l -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\overline{D}_l^{(1)}} \widetilde{Q}_1(\overline{T}_l) \overline{P}_1(\overline{T}_l, m) \cos m\left(\bar{x} - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_1) + \alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right).$$

На основе теоремы 1 имеем

$$\frac{A_0^{(1)}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_m^{(1)} \sin m\bar{x} + A_m^{(1)} \cos m\bar{x} \right) = \widetilde{f}_1(\bar{x})$$

при этом свободный член функции Фурье $\widetilde{q}_1(\bar{t}_1)$ задается:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_1(\bar{t}_1)d\bar{t}_1 = \frac{A_0^{(1)}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\lim_{z\to\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l} Q(T_l)P(T_l,z)\cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_l))dT_l\,,$$

соотвественно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_1(\bar{t}_1)d\bar{t}_1 = \frac{A_0^{(1)}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{D_l} Q(T_l)\prod_{i=1}^{l-1}(\alpha(t_i) - t_{i+1})dT_l$$

т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_1(\bar{t}_1)d\bar{t}_1 = \frac{A_0^{(1)}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\overline{T}_l)\prod_{i=1}^{l-1}\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)\right) - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)d\overline{T}_l\,,$$

где $A_0^{(1)} = (\alpha_1(0) - \beta_1(0))/2$. Соотвественно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_1(\bar{t}_1)d\bar{t}_1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_1(\bar{t}_1)\sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1\right]\sin m\bar{x} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_1(\bar{t}_1)\cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1\right]\cos m\bar{x}\right\} = \tilde{q}_1(\bar{x}),\quad \bar{x}\in[0,2\pi].$$

Таким образом, приходим к интегральному уравнению для функции $\tilde{q}_1(\bar{x})$:

$$\tilde{q}_1(\tilde{x}) = \tilde{f}_1(\bar{x}) - \frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\overline{T}_l)\prod_{i=1}^{l-1}\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right) - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)d\overline{T}_l -$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\int_{\overline{D}_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\overline{T}_l)\overline{P}_1(\overline{T}_l,m)\cos m\left(\bar{x} - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_1) + \alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right). \tag{11}$$

Введем оператор $A_{1\alpha}$ следующим образом

$$A_{1\alpha}\tilde{q}_1(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\overline{T}_l)\prod_{i=1}^{l-1}\left(\alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)\right) - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)d\overline{T}_l -$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\int_{\overline{D}_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\overline{T}_l)\overline{P}_1(\overline{T}_l,m)\cos m\left(\bar{x} - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_1) + \alpha\left(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right). \tag{12}$$

Тогда интегральное уравнение (11) может быть записано в виде

$$\tilde{q}_1(\bar{x}) = \tilde{f}_1(\bar{x}) - A_{1\alpha}\tilde{q}_1(\bar{x}) \tag{13}$$

Кроме того, если мы сделали сдвиг $\gamma_2(t_i) = t_i + \alpha(t_i) = \bar{t}_i$, то имеем $t_i = \gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)$ и $dt_i = \left[\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)\right]' d\bar{t}_i$, $i\in\{1,2,\ldots,l\}$. Введем функцию $\tilde{q}_2(\bar{t}_i)$

$$\tilde{q}_2(\bar{t}_i) = \begin{cases} 0 & ,\quad \bar{t}_i\in(\gamma_2(\pi),2\pi] \\ q\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)\right)\left[\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)\right]' & ,\quad \bar{t}_i\in[0,\gamma_2(\pi)]. \end{cases}$$

Пусть $B_m^{(2)} = (-1)^{m+|1} A_s^-(m)$ и $A_m^{(1)} = (-1)^{m+|1} A_c^-(m)$. Теперь равенства (8) и (6) можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1)\sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 =$$

$$= B_m^{(2)} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\overline{D}_l^{(2)}} \widetilde{Q}_2(\overline{T}_l)\overline{P}_2(\overline{T}_l, m)\sin m\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1) + \alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right)d\overline{T}_l\,, \tag{14}$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1)\cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 =$$

$$= A_m^{(2)} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\overline{D}_l^{(2)}} \widetilde{Q}_2(\overline{T}_l)\overline{P}_2(\overline{T}_l, m)\cos m\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1) + \alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right)d\overline{T}_l\,, \tag{15}$$

где

$$\overline{D}_l^{(2)} = \left\{(\bar{t}_1, \bar{t}_2, ..., \bar{t}_l) \middle| 0 \le \bar{t}_1 \le\right.$$

$$\left.\le \gamma_2(\pi), 0 \le \bar{t}_2 \le \gamma_2\left(\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1)\right)\right), ..., \gamma_2\left(\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1)\right)\right)\right\},$$

$$\widetilde{Q}_2(\overline{T}_l) = \prod_{i=1}^{l} \tilde{q}_2(\bar{t}_i), \quad \overline{P}_2(T_l, m) = \prod_{i=1}^{l-1} \sin m\left(\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)\right) - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)$$

и

$$d\overline{T}_l = d\bar{t}_l d\bar{t}_{l-1} ... d\bar{t}_1\,.$$

Перемножая отношение (14) с $\dfrac{1}{\pi}\sin m\bar{x}$, и отношение (15) с $\dfrac{1}{\pi}\cos m\bar{x}$, $\bar{x} \in [0, 2\pi]$, а затем суммируя при $m = 1,2,...$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1)d\bar{t}_1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1)\sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1\right]\sin m\bar{x} +\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1)\cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1\right]\cos m\bar{x}\right\} = \frac{A_0^{(2)}}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(B_m^{(2)}\sin m\bar{x} + A_m^{(2)}\cos m\bar{x}\right) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(2)}} \widetilde{Q}_2(\overline{T}_l)\prod_{i=1}^{l-1}\left(\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1)\right) - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)d\overline{T}_l -$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\int_{\overline{D}_l^{(2)}} \widetilde{Q}_2(\overline{T}_l)\overline{P}_2(\overline{T}_l, m)\cos m\left(\bar{x} - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_1) - \alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right).$$

На основании теоремы 1 имеем

$$\frac{A_0^{(2)}}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(B_m^{(2)}\sin m\bar{x} + A_m^{(2)}\cos m\bar{x}\right) = \tilde{f}_2(\bar{x})$$

при этом свободный член функции Фурье $\tilde{q}_2(\bar{t}_1)$ задается:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_2(\bar{t}_1)d\bar{t}_1=\frac{A_0^{(2)}}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\lim_{z\to\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)P(T_l,z)\cos z(\pi-t_1-\alpha(t_l))dT_l\ ,$$

Соотвественно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_2(\bar{t}_1)d\bar{t}_1=\frac{A_0^{(2)}}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{D_l}Q(T_l)\prod_{i=1}^{l-1}(\alpha(t_i)-t_{i+1})dT_l$$

т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_2(\bar{t}_1)d\bar{t}_1=\frac{A_0^{(2)}}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(2)}}\tilde{Q}_2(\overline{T}_l)\prod_{i=1}^{l-1}\left(\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)\right)-\gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)d\overline{T}_l\ ,$$

где $A_0^{(2)}=(\alpha_2(0)-\beta_2(0))/2$. Соотвественно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_2(\bar{t}_1)d\bar{t}_1+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_2(\bar{t}_1)\sin m\bar{t}_1d\bar{t}_1\right]\sin m\bar{x}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{q}_2(\bar{t}_1)\cos m\bar{t}_1d\bar{t}_1\right]\cos m\bar{x}\right\}=\tilde{q}_2(\bar{x}),\quad \bar{x}\in[0,2\pi].$$

Таким образом, приходим к интегральному уравнению для функции $\tilde{q}_2(\bar{x})$:

$$\tilde{q}_2(\tilde{x})=\tilde{f}_2(\bar{x})-\frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(2)}}\tilde{Q}_2(\overline{T}_l)\prod_{i=1}^{l-1}\left(\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1)\right)-\gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)d\overline{T}_l-$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\int_{\overline{D}_l^{(2)}}\tilde{Q}_2(\overline{T}_l)\overline{P}_2(\overline{T}_l,m)\cos m\left(\bar{x}-\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1)-\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right). \tag{16}$$

Введем оператор $A_{2\alpha}$ следующим образом

$$A_{2\alpha}\tilde{q}_1(\bar{x})=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\overline{D}_l^{(2)}}\tilde{Q}_2(\overline{T}_l)\prod_{i=1}^{l-1}\left(\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1)\right)-\gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})\right)d\overline{T}_l-$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\int_{\overline{D}_l^{(2)}}\tilde{Q}_2(\overline{T}_l)\overline{P}_2(\overline{T}_l,m)\cos m\left(\bar{x}-\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1)-\alpha\left(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_l)\right)\right). \tag{17}$$

Тогда интегральное уравнение (16) может быть записано в виде

$$\tilde{q}_2(\bar{x})=\tilde{f}_2(\bar{x})-A_{2\alpha}\tilde{q}_2(\bar{x}) \tag{18}$$

Пусть $\varphi_1(\bar{x}),\ \bar{x}\in[0,\gamma_1(\pi)]$ и $\varphi_2(\bar{x}),\ \bar{x}\in[0,\gamma_2(\pi)]$ решения интегральных уравнений (13) и (18) соответствено. На основе ранее установленого сдвига применяется

$\dfrac{q\left(\gamma_1^{-1}(\bar{x})\right)}{1-\alpha'\left(\gamma_1^{-1}(\bar{x})\right)}$, $\bar{x}=\gamma_1(x)=x-\alpha(x)$ и $\dfrac{q\left(\gamma_2^{-1}(\bar{x})\right)}{1-\alpha'\left(\gamma_2^{-1}(\bar{x})\right)}$, $\bar{x}=\gamma_2(x)=x+\alpha(x)$ имеем

$q(x)=(1-\alpha'(x))\varphi_1(x-\alpha(x))$ и $q(x)=(1+\alpha'(x))\varphi_2(x+\alpha(x))$, $x\in[0,\pi]$. Поэтому

$$(1-\alpha'(x))\varphi_1(x-\alpha(x)) = (1+\alpha'(x))\varphi_2(x+\alpha(x)).$$

Так как $0<\alpha(x)<1$, то $\operatorname{sgn}\varphi_1(x-\alpha(x)) = \operatorname{sgn}\varphi_2(x+\alpha(x))$. Кроме того

$$\alpha'(x)[\varphi_1(x-\alpha(x))+\varphi_2(x+\alpha(x))] = \varphi_1(x-\alpha(x))-\varphi_2(x+\alpha(x)).$$

Отсюда получаем

$$\alpha'(x) = \frac{\varphi_1(x-\alpha(x))-\varphi_2(x+\alpha(x))}{\varphi_1(x-\alpha(x))| + \varphi_2(x+\alpha(x))} = 1 - \frac{2\varphi_2(x+\alpha(x))}{\varphi_1(x-\alpha(x)) + |\,\varphi_2(x+\alpha(x))}.$$

Таким образом, приходим к интегральному уравнению для функции α:

$$\alpha(x) = x - \int_0^x \frac{2\varphi_2(x+\alpha(x))}{\varphi_1(x-\alpha(x)) + |\,\varphi_2(x+\alpha(x))}\,dx. \qquad (19)$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сформированы интегальные уравнения (13), (18) и (19), в которые вводятся нелинейные инегральные операторы (12) и (17) соответствено. Функции $\widetilde{f}_1$ и $\widetilde{f}_2$ получены с помощью коэффициентов Фурье $a_m^{\widetilde{f}_i}$ и $b_m^{\widetilde{f}_i}$, для которых можно доказать, что $a_m^{\widetilde{f}_i} = O\left(\frac{1}{m^2}\right)$ и $b_m^{\widetilde{f}_i} = O\left(\frac{1}{m^2}\right)$ (теорема 1). Это означает, что производная этих функций принадлежит к классу функций ограниченных вариаций. Остается открытым вопрос о единственности решения уравнений (13) и (18) в классе функций, которые на промежутке $[0,\pi]$ имеют абсолютно непрерывные производные.

REFERENCES

[1] N. Mihaljevich, “Analiz priamoi spektralºnoi zadachchi i ustanovka obratnoi zadachi dlia operatora Shturm-Leeuvilia”, *Mathematica Montisnigri*, **24**, 13-24 (2015)

[2] N. Mihaljevic, M.Pikula, “Karakteristichna funktcija operatora tipa Shturm-Leeuvila sa promenљivim kashњeњem”, *Zbornik Fakulteta za pomorstvo u Kotoru*, **20**, 403-410 (2003)

[3] S.B. Norkin, Differentcial`ny`e uravneniia vtorogo poriadka s zapazdy`vaiushchim argumentom, *Moskva, Nauka*, (1965).

[4] I.M. Gel`fand, B.M.Levitan, “Ob opredelenii differentcial`nogo uravneniia po ego spektral`noi` funktcii”, *Izv. AN SSSR, Ser. Mat.*, **15**, 309-360 (1951).

[5] L.E. Elsgoltc, S.B. Norkin, *Vvedenie v teoriiu differentcial`ny`kh uravnenii s otcloniaiushchimsia argumentom*, Moskva, Nauka, (1971).

[6] R.Lazović, M.Pikula, *Regularized trace of the operator applied to solving inverse problems*, Radovi matematički, (2002).

[7] M. Pikula, “Ob opredelenii differentcial`nogo uravneniia s peremenny`m zapazdyvaniem”, *Mathematica Montisnigri*, **6**, 71-91 (1996).

[8] M. Pikula, “Opredelenie differentcialnogo operatora Shturma-Leeuvillia s zapazdy`vaiushchim argumentom po dvum spektram”, *Matematicheskii` vestneyk*, **43**, 159-171 (1991).
[9] R.Lazoviħ, *Konstruktcija operatora tipa Shturma-Leeuvila sa kashњeњem*, Doktorska disertatcija, Beograd (1998).
[10] N.Mihaljevich, “A reconstruction of the operator by using given spectral characteristic”, Mathematica Montisnigri, **20-21,** 15-34 (2007-2008).
[11] N.Mihaljevich, M.Pikula, “The inverse Sturm-Liouville problem with changeable delay”, *Mathematica Montisnigri*, **16**, 41-68 (2003).
[12] V.A. Sadovnichii, *Teoriia operatorov*, Moskva, MGU, (1979).
[13] N.Levinson, “The inverse Sturm-Liouville problem”, *Math. Tidsskr*., **13**, 25-30 (1949).
[14] N. Mihaljevich, “Asimptotika soobstvenny`kh znachenii operatora tipa Shturm-Leeuvilia s peremenny`m zapazdy`vaniem”, *Mathematica Montisnigri*, **28**, 5-16 (2013)
[15] B.V.Shabat, *Vvedenie v kompleksnyi analiz,* Moskva, Nauka, (1985).
[16] N. Mihaljevich, “Predstavlenie harakAtericheskoi funktcii operatora tipa Shturm-Leeuvillia po nuliam”, *Mathematica Montisnigri*, **31**, 25-37 (2014)
[17] L.V. Ahlfors, *Complex analysys*, Mc Graw-Hill Book Company, (1953).

The results were presented at the 16-th International seminar "Mathematical models &modeling in laser-plasma processes & advanced science technologies" (5 - 10 June, 2017, Petrovac, Montenegro).

Received May 12, 2017.