О ПОТОЧЕЧНОЙ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА $L^p, p \geq 1$ ПО СИСТЕМЕ КРИСТЕНСОНА - ЛЕВИ

Т.М. САГАТЕЛЯН

Национальный политехнический университет Армении
Ереван, Армения
e-mail: tigran.saghatelyan@gmail.com

Ключевые слова: система Кристенсона-Леви, поточечная универсальность, топологичесская транзитивность.

Аннотация. В данной работе для системы Кристенсона-Леви порядка $a \geq 2$ получен следуюший результат: для любого счетного множества $E \subset [0,1)$ существуют функции из класса $L^p[0,1)$, последовательность частичных сумм ряда Фурье которых по системе Кристенсона-Леви является по точечно универсальной и топологически транзитивной для класса функций, определенных на E.

ON THE POINTWISE UNIVERSALITY OF THE PARTIAL SUMS OF FOURIER SERIES OF $L^p, p \geq 1$ CLASS BY CHRESTENSON - LEVY SYSTEM

T. M. SAGHATELYAN

National Engineering University of Armenia
Yerevan, Armenia
e-mail: tigran.saghatelyan@gmail.com

Summary. In this paper for Chrestenson - Levy system of order $a \geq 2$ the following result is obtained: for any countable set $E \subset [0,1)$ there exists functions from $L^p[0,1)$ class, the sequence of partial sums of the Fourier series by Chrestenson - Levy system of which is pointwise universal and topological transitive for a class of functions defined on E .

2010 Mathematics Subject Classification: 42A65, 42A20 .
Key words and Phrases: Chrestenson - Levy system, pointwise universality, topological transitivity.

1 ВВЕДЕНИЕ

Пусть X и Y некоторые метрические пространства, а $T_n: X \to Y$, $n \in \Lambda \subset N_0$, некоторые непрерывные отображения.

Определение 1. (Универсальный элемент). Скажем, что элемент $x_0 \in X$ универсален в Y относительно T_n, если множество $\{T_n x: n \in \Lambda\}$ всюду плотно в Y, т.е. для любого открытого множества $V \subset Y$ существует $n_0 \in N$ такое, что $T_{n_0}(x_0) \in V$ или используя понятие метрики, для любых $\varepsilon > 0$ и $y \in Y$ существует последовательность $n_k \subset \Lambda$ так, что $\rho_Y\big(T_{n_k}(x_0), y\big) < \varepsilon$ при $k > k_0$.

Определение 2. (Топологическое транзитивность). Пусть $T_n: X \to Y$ непрерывное отображение между метрическими пространствами X и Y. Тогда T_n называется топологически транзитивной, если для любых непустых, открытых множеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ существует некоторое число $n \geq 0$ такое, что

$$T_n(U) \cap V \neq \emptyset ,$$

т.е. для любых $\varepsilon > 0$, $x \in X$ и $y \in Y$ существуют $x_0 \in X$ и $n \subset N$ такое, что

$$\rho\,(x, x_0) < \varepsilon \text{ и } \rho\,(n(x_0), y) < \varepsilon.$$

Первый тип универсальности был рассмотрен еще в 1914 г. М. Факетом [1], [2]. Он построил степенной ряд, который не только расходится в каждой точке $x \neq 0$, но делает это наихудшим способом, а именно для любой функции $g(x)$ непрерывной на $[-1,1]$ с $g(0) = 0$, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ так, что последовательность частичных сумм $S_{n_k}(x)$ равномерно сходится к $g(x)$, при $k \to \infty$.

Пример универсального степенного ряда (или ряда Тейлора) Факета по сути имеет два аспекта: первый это максимальная расходимость и второе - существование одного элемента, который позволяет приблизить максимального класса объектов. Это по сути и означает универсальность.

Далее по сути первый тип универсальной функции был рассмотрен еще в 1929 г. М. Дж. Биркхофом [3]. Он в частности доказал существование целой функция, которая универсальна относительно сдвигов. В 1935г Ж. Марцинкевич [4] не только доказал существование, как он назвал "универсальной первообразной", а он был первым, кто применил слово **универсальная** в этом контексте и показал, что множество универсальных элементов является остаточным в смысле Бэра, т.е. подмножество в пространстве Бэра, представимое как пересечение счётного числа открытых всюду плотных множеств. В 1952г. Дж. Маклейн [5] доказал существование целой функции обладающая универсальными производными. В 1987г. К. Гроссе-Эрдман [6], развивая идею построения примера Факета, доказал существование функции $f(x) \in C^\infty(R)$ с $f(0) = 0$, ряд Тейлора которой в точке $x = 0$ локально - равномерно универсален в $C(R)$.

В 1946г. Д. Е. Меньшов [7] доказал существование такого ряда по тригонометрической системе $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$, что любая измеримая, 2π - периодическая функция является пределом (в смысле сходимости почти всюду) некоторой последовательности частичной суммы ряда. Результат Меньшова фактически является первым результатом о существовании универсального ряда по некоторой ортогональной системе.

В 2008г. Ф. Байарт, К.- Г. Гроссе - Эрдман, В. Несторидис и С. Пападимитрополус (см. [8]) представили так называемую **абстрактную теорию универсальных рядов**, где с абстрактной точки зрения, явление универсальности описывается следующим образом: у нас есть топологическое пространство некоторых объектов X, топологическое пространство Y элементов для приближения и семейство отображений $T_n: X \to Y$, $n \in \Lambda$, $\Lambda \subset N$ (обычно это бывает последовательность). Тогда объект $x \in X$ называется универсальным для Y, если каждый элемент $y \in Y$ можно приблизить некоторой $T_n(x)$, т.е. множество $\{ T_n(x): n \in \Lambda\}$ всюду плотно в Y.

В данной работе рассматриваются вопросы поточечной универсальности, а также топологической транзитивности частичных сумм рядов Фурье функций класса, $L^p\,[0,1)$, $p \geq 1$ по системе Кристенсона-Леви порядка $a \geq 2$.

2 ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $a \geq 2$ фиксированное целое число и $\omega_a = e^{2\pi i a}$.

Определение 3. Возьмем

$$\varphi_0^{(a)}(x) = {\omega_a}^k \,, x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a}\right), k = 0,1, \dots, a-1$$

и для $n \geq 0$ положим

$$\varphi_n^{(a)}(x+1) = \varphi_n^{(a)}(x) = \varphi_n^{(a)}(a^n x) \,.$$

Тогда обобщенная система Кристенсона-Леви порядка a определяется так:

Определение 4. Положим $\psi_0^{(a)}(x) = 1$.

Если

$$n = \beta_1 a^{n_1} + \dots + \beta_s a^{n_s} \,, n_1 > n_2 > \dots > n_s \,, s = 1,2, \dots,$$

где $0 \leq \beta_j < a$, $j = 1,2, \dots, s$ то

$$\psi_n^{(a)}(x) = \left(\varphi_{n_1}^{(a)}(x)\right)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \left(\varphi_{n_s}^{(a)}(x)\right)^{\beta_s}.$$

Система Ψ_a- есть система Кристенсона-Леви поряка a (см. [9], [10]). Отметим, что Ψ_2 является классической системой Уолша, а система Ψ_a является частным случаем системы Виленкина.

Замечание. Система Кристенсона-Леви Ψ_a, $a \geq 2$ является полной ортонормированной системой в $L^2[0,1)$ и базисом в $L^p[0,1)$, $p > 1$ (см. [9]).

Основные свойства системы Ψ_a получены Г. Кристенсоном, П. Леви, Р. Пели, Ж. Файном, К. Ватари, Н. Виленкиным и другими математиками (см. [9]- [15]).

Ниже приведем некоторые свойства систем Ψ_a и Φ_a .

Обозначим интервал ранга n относительно a , следующим образом:

$$\Delta_k^{(n)} = \Delta_k^{(n)}(a) = \left[\frac{k}{a^n}, \frac{k+1}{a^n}\right) , k = 0, \dots, a^n - 1 \,, n = 1,2, \dots$$

Свойство (А). Если $\varphi_n^{(a)}(x)$ n-ая функция Радемахера порядка a,то из Определение 3 следует

$$\varphi_n^{(a)}(x) = {\omega_a}^k = e^{2\pi i \cdot k a} \,, x \in \Delta_k^{(n+1)}.$$

Свойство (B). Каждая n -ая функция Радемахера имеет период $\frac{1}{a^n}$ и

$$\varphi_n^{(a)}(x) = const \in \Omega_a = \{1, \omega_a, {\omega_a}^2, \dots, {\omega_a}^{a-1}\},$$

при $x \in \Delta_{n+1}^{(k)}$, $k = 0, \dots, a^{n+1} - 1$, $n = 1,2, \dots$,

Нетрудно видеть, что

$$\left(\varphi_n^{(a)}(x)\right)^k = \left(\varphi_n^{(a)}(x)\right)^m, \forall\, n, k \in \ , при\ m = k(mod\ a)$$

Свойство (C). Для любого натурального n, функция Уолша $\psi_n^{(a)}(x)$ состоит из конечного произведения функций Радемахера и принимает значения из Ω_a.
Свойство (D). Пусть $\omega_a = e^{2\pi i a}$. Тогда для любого натурального числа m имеем

$$\sum_{k=0}^{a-1} {\omega_a}^k = \begin{cases} a, & при\ m = 0(mod\ a)\ ; \\ 0, & при\ m \neq 0(mod\ a)\ . \end{cases}$$

Свойство (E). Система Кристенсона-Леви Ψ_a порядка $a \geq 2$, является полной ортонормированной системой в $L^2[0, 1)$ и базисом в $L^p[0, 1)$, $p > 1$ (см. [9]).
Свойство (F). Из Определения 4 имеем

$$\psi_i^{(a)}(x) \cdot \psi_j^{(a)}(a^s x) = \psi_{j \cdot a^s + i}^{(a)}(x)\ при\ 0 \leq i\ , j < a^s,$$

и в частности

$$\psi_{a^k + j}^{(a)}(x) = \varphi_k^{(a)}(x) \cdot \psi_j^{(a)}(x)\ , при\ 0 \leq\ j \leq a^k - 1$$

Определим, через

$$D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^{(a)}(t)$$

ядро Дирихле по системе Ψ_a порядка n.
Свойство (G). Ядро $D_n(t)$ удовлетворяет равенству (см. [9])

$$D_{a^n}(t) = \begin{cases} a^n, при\ t \in \Delta_0^{(n)}(a) = [0, \frac{1}{a^n}) \\ 0, при\ t \in \left[\frac{1}{a^n}, 1\right)\ . \end{cases}$$

Свойство (H). Если число n представим в виде

$$n = a^k + m, 0 \leq m < a^k,$$

то получим

$$D_n(t) = D_{a^k}(t) + \ \varphi_k^{(a)}(t) \cdot D_m(t)\ , t \in [0,1).$$

Свойство (I). Для любого натурального числа m и для любой t ∈ (0,1) имеет место неравенство

$$|D_m(t)| \leq m$$

Свойство (J). Для любого натурального числа n и для любой $x \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$|D_n(t)| < \frac{a}{x}$$

Свойство (K). Для обобщенной системе Уолша обозначим, через $D_n(t)$, ядро Дирихле порядка n и соответственно k -ню константу Лебега через L_k,

$$D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^{(a)}(t) \ , L_k = \int_0^1 |D_k(t)| \ dt.$$

Константы Лебега обобщенной системы Уолша удовлетворяют условию $L_k = O(log_a k)$, где O зависит от a. А именно, имеет место следующее утверждение (см. [16]):

Утверждение. Существует последовательность натуральных чисел $\Lambda = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ вида

$$m_{2s} = \sum_{i=0}^{s} a^{2i} \ : \ m_{2s} = \sum_{i=0}^{s} a^{2i+1} \ , s = 0,1,2, \dots ,$$

такая, что

$$a^k \leq m_k < a^{k+1} \ ,$$

$$L_{m_k} = \int_0^1 \left|D_{n_k}(t)\right| \ dt > \frac{1}{2a} log_a m_k \ , k \geq 1 \ .$$

Всюду, в дальнейшем через Λ обозначим фиксированную последовательность целых чисел m_k , для которых $L_{m_k} \to \infty$ при $k \to \infty$.

Далее, для функции $f \in L^p[0,1), p \geq 1$, определим частичную сумму ряда Фурье по системе Ψ_a, следующим образом:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_k(f) \cdot \psi_n^{(a)}(x) \ , \text{где } \mathrm{C}_k(f) = \int_0^1 f(x) \cdot \psi_n^{(a)}(x) \ dx, k \geq 0 \ .$$

Пусть $E \subset [0,1)$- счетное множество, а $\Lambda \subset \mathrm{N}$ множество индексов. Обозначим через C^E множество всех функций $h(x)$, определенных на E и принимающих комплексные значения, т.е. $h(x_k) = y_k \in C \ , k = 1,2, \dots$.

Определение 5. Пусть $E \subset [0,1)$- счетное множество. Для множества индексов $\Lambda \subset N$ и некоторой функции $f \in L^p[0,1)$ скажем, что множество $\{S_n(f,x)\}_{n\in\Lambda}$ поточечно универсально на E, если множество $\{S_n(f,x)_E : n \in \Lambda\}$ плотно в C^E, т.е. для любых $h: E \to C$ и $\varepsilon > 0$ существует $\{n_k\} \in \Lambda$ такое, что $\left|S_{n_k}(f,x) - h(x)\right| < \varepsilon$ при $\forall \ x \in E$.

Аналогичные вопросы рассмотрены в работах [17] - [19], в случае класса непрерывных функций тригонометрической системы (для системы Ψ_a , $a \geq 2$).

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом данной работы является следующее утверждение:

Теорема 1. Для любого счетного множества $E \subset [0,1)$ существует плотное G_δ множество $M \subset L^p[0,1)$, обладающее следующим свойством: последовательность частичных сумм ряда Фурье по системе Ψ_a любой функции из M является поточечно универсальной в C^E.

Основным аппаратом при доказательстве Теоремы 1 является следующее утверждение, которое по сути является модификацией Принципа Универсальности (см. [18]).

Лемма 1. Пусть X - полное метрическое пространство, Y - сепарабельное метрическое пространство, а $T_n: X \to Y$, $n \in N_0$ некоторая последовательность непрерывных отображений. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) T_n топологически транзитивно для (X, Y).

(ii) Существует плотное множество элементов $x \in X$, каждый из которых универсален в Y.

Если одно из этих утверждений выполняется, то множество универсальных точек U является плотным G_δ подмножеством X.

Лемма 2. Для любого $x_0 \in [0,1)$ и последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$, последовательность операторов

$$T_{n_k}: L^p\ [0,1) \to C,\ \ T_{n_k} f := S_{n_k}(f),\ \ f \in L^p\,[0,1)$$

топологически транзитивна для пары $(L^p\,[0,1), C)$, т.е. для любых $g(x) \in L^p\,[0,1)$, $\varepsilon > 0$ и $b \in R$, существует функция $f(x) \in L^p\,[0,1)$ и число $k_0 \in N$ такие, что

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p\, dx < \varepsilon\ ,\ S_{n_{k_0}}(f)(x_0) = b.$$

Доказательство. Пусть даны: $g(x) \in L^p[0,1)$, $b \in R$ и $0 < \varepsilon < 1$.

Нетрудно видеть, что существует полином $Q^{(a)}(x)$ по системе Ψ_a такой, что

$$\int_0^1 \left|g(x) - Q^{(a)}(x)\right|^p dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

Более того из утверждения следует, что для $x_0 \in [0,1)$ и последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$ существует функция $H(x) \in L^p[0,1)$ такая, что $S_{n_k}(H)(x_0) \to \infty$. Следовательно можно найти число k_0 такое, что $n_{k_0} > \deg\left\{Q^{(a)}\right\}$ и имеет место неравенство

$$\left|S_{n_{k_0}}(H)(x_0)\right| > \left|b - Q^{(a)}(x_0)\right| \cdot \frac{2}{\varepsilon}\left[\int_0^1 |H(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

Далее рассмотрим функцию

$$\widetilde{H}(x) = \frac{b - Q^{(a)}(x_0)}{S_{n_{k_0}}(H)(x_0)} \cdot H(x) \tag{3}$$

Из соотношений (2) и (3) следует

$$\left[\int_0^1 \left|\widetilde{H}(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \frac{b - Q^{(a)}(x_0)}{S_{n_{k_0}}(H)(x_0)} \cdot H(x)\, \frac{2}{\varepsilon}\left[\int_0^1 |H(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

и

$$S_n\big(\widetilde{H}\big)(x_0) = \frac{b-Q^{(a)}(x_0)}{S_{n_{k_0}}(H)(x_0)} \cdot S_{n_{k_0}}(H)(x_0) = b - Q^{(a)}(x_0) \tag{5}$$

Положим

$$f(x) = \widetilde{H}(x) + Q^{(a)}(x) \tag{6}$$

Очевидно, что $f(x) \in L^p[0,1)$. С другой стороны, для $\mathrm{g}(x) \in L^p[0,1)$, из (1) и (6) следует, что

$$\int_0^1 |f(x) - \mathrm{g}(x)|^p\,dx \le \int_0^1 \left|f(x) - Q^{(a)}(x)\right|^p dx + \int_0^1 \left|Q^{(a)}(x) - \mathrm{g}(x)\right|^p dx \le$$

$$\le \int_0^1 \left|\widetilde{H}(x)\right|^p dx + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Учитывая, что $n_{k_0} > deg\{Q^{(a)}\}$ и следовательно $S_{n_{k_0}}\big(Q^{(a)}\big)(x) = Q^{(a)}(x)$, то из (5) получаем

$$S_{n_{k_0}}(f)(x_0) = S_{n_{k_0}}\big(\widetilde{H}\big)(x_0) + Q^{(a)}(x_0) = b - Q^{(a)}(x_0) + Q^{(a)}(x_0) = b$$

Лемма 2. доказана.

Применяя Леммы 1 и 2, получим следующую Лемму.

Лемма 3. Для любого $x_0 \in [0,1)$ и последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$ существует функция $f(x) \in L^p[0,1)$ такая, что множество $\{S_n(f)(x_0) : n \in \{n_k\}_{k=1}^{\infty}\}$ плотно в C, т.е. функция $f(x)$ универсальна в C относительно системы Ψ_{a}.

Лемма 4. Для любого конечного множества

$$E_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\},\ \ N \ge 1, x_k \in [0,1)$$

последовательность операторов $T_n : L^p[0,1) \to C^{E_N}$, определенная следующим образом:

$$T_n(f) := \{S_n(f)(x_i), i = 1,2,\dots,N, n \in \Lambda, f \in L^p\ \}$$

топологически транзитивна для пары $(L^p[0,1), C^{E_N})$, т.е. для любых $g(x) \in L^p[0,1)$, $\varepsilon > 0$ и $h(x) \in C^{E_N}$ существуют $f(x) \in L^p[0,1)$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Lambda$ такие, что

$$\int_0^1 |f(x) - \mathrm{g}(x)|^p\,dx < \varepsilon\,, \qquad \left|S_{n_k}(f)(x_i) - h(x_i)\right| < \varepsilon, \qquad i = 1,2,\dots,N.$$

Доказательство. Доказательство проведем с помощью индукции, по количеству точек N множества E.

Если множество E содержит одну точку x_0, т.е. $N = 1$, то доказательство Леммы 4 следует из Леммы 3 (при $E = \{x_0\}$).

Предположим, что утверждение Леммы 4 справедливо для любого конечного множества $F = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, содержащего N точек. Докажем утверждение Леммы, для множества $E = \{x_0\} \cup F = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ (содержащего $N+1$ точек).

Пусть даны: функции $g \in L^p[0,1)$, $h : E \to R$, $h(x) \in C^{E_N}$ и число $\varepsilon > 0$.

Для функции $g \in L^p[0,1)$ можно найти полином $Q^{(a)}(x)$ по системе Ψ_{a} такой, что

$$\int_0^1 \left|g(x) - Q^{(a)}(x)\right|^p dx < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7}$$

Применяя предположение Леммы 4 для $F = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $g(x) = 0$, $x \in [0,1)$, $h(x) - Q^{(a)}(x) \in C^F$ и $\varepsilon > 0$ получим, что существуют функция $U(x) \in L^p[0,1)$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$ такие, что

$$\int_0^1 |U(x)|^p dx < \frac{\varepsilon}{3} \tag{8}$$

$$\left|S_{n_k}(U)(x_i) - \left(h(x_i) - Q^{(a)}(x_i)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ ,\ i = 1,2,\dots,N. \tag{9}$$

Далее, применяя Лемму 4 для последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и соответственно, для числа $h(x_0) - Q^{(a)}(x_0) = b \in \mathrm{R}$, можем найти подпоследовательность $\{n_{k_j}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{n_k\}$ и функцию $V(x) \in L^p[0,1)$

$$\int_0^1 |V(x)|^p dx < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10}$$

$$\left|S_{n_{k_j}}(V)(x_0) - \left(h(x_0) - Q^{(a)}(x_0)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{11}$$

Теперь рассмотрим вспомогательную функцию $\xi(x) \in C[0,1)$, удовлетворяющую условиям

$$0 \le \xi(x) \le 1,\ \ \xi(x)|_{U_{x_0}} = 0\ ,\ \ \xi(x)|_{U_{x_i}} = 1\ ,\ i = 1,2,\dots,N, \tag{12}$$

где U_{x_i} некоторые открытые окрестности точек x_i, $i = 1,2,\dots,N$.

В этом случае имеем:

$$U(x) \cdot \xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in U_{x_0} \\ U(x), & x \in U_{x_i}\ ,\ i = 1,2,\dots,N. \end{cases}$$

$$\left(1 - \xi(x)\right)V(x) = \begin{cases} V(x), & x \in U_{x_0}\ ; \\ 0, & x \in U_{x_i}\ ,\ i = 1,2,\dots,N. \end{cases}$$

Применяя Принцип Локализации, для достаточно больших чисел n_{k_j} (в частности $n_{k_j} > deg\{Q^{(a)}\}$ получим следующие неравенства:

$$\left|S_{n_{k_j}}(U\xi)(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \tag{13}$$

$$\left|S_{n_{k_j}}\left((1-\xi)V\right)(x_0) - S_{n_{k_j}}(V)(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

$$\left|S_{n_{k_j}}(U\xi)(x_i) - S_{n_{k_j}}(U)(x_i)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ ,\ \ i = 1,2,\dots,N. \tag{15}$$

$$\left|S_{n_{k_j}}\left((1-\xi)V\right)(x_i)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ ,\ i = 1,2,\dots,N. \tag{16}$$

Определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = U(x) \cdot \xi(x) + \left(1 - \xi(x)\right)V(x) + Q^{(a)}(x)\ , x \in [0,1). \tag{17}$$

Из (7), (8), (10) и (12) следует, что $f(x) \in L^p[0,1)$ и

$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|^p\,dx \le \int_0^1 |U(x)|^p\,dx + \int_0^1 |V(x)|^p\,dx + + \int_0^1 \left|Q^{(a)}(x)-g(x)\right|^p dx < \varepsilon.$$

Учитывая, что $n_{k_j} > deg\{Q^{(a)}\}$ (следовательно $S_{n_{k_j}}\big(Q^{(a)}\big)(x) = Q^{(a)}(x)$), из соотношения (9), (15) - (17) получим:

$$\left|S_{n_{k_j}}(f)(x_i)-h(x_i)\right| \le$$

$$\le \left|S_{n_{k_j}}(U\xi)(x_i)+S_{n_{k_j}}\big((1-\xi)V\big)(x_i)+Q^{(a)}(x_i)-h(x_i)\right| \le$$

$$\le \left|S_{n_{k_j}}(U\xi)(x_i)-S_{n_{k_j}}(U)(x_i)\right| + \left|S_{n_k}(U)(x_i)-\Big(h(x_i)-Q^{(a)}(x_i)\Big)\right| +$$

$$+\left|S_{n_{k_j}}\big((1-\xi)V\big)(x_i)\right| < \varepsilon$$

и аналогично из (11), (13), (14) и (17) имеем:

$$\left|S_{n_{k_j}}(f)(x_0)-h(x_0)\right| \le$$

$$\le \left|S_{n_{k_j}}(U\xi)(x_0)\right| + \left|S_{n_{k_j}}\big((1-\xi)V\big)(x_0)-S_{n_{k_j}}(V)(x_0)\right| +$$

$$+\left|S_{n_{k_j}}(V)(x_0)-\Big(h(x_0)-Q^{(a)}(x_0)\Big)\right| < \varepsilon.$$

Из полученных неравенств следует, что

$$\left|S_{n_{k_j}}(f)(x_i)-h(x_i)\right| < \varepsilon\,, i = 0,1,2,\dots,N.$$

Лемма 4 доказана.

Из Лемм 1 и 4 непосредственно следует следующая лемма:

Лемма 5. Для любого конечного множества $E_j = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$, $j \ge 1$, $x_i \in [0,1)$, $i = 1,2,\dots,j$, множество всех функций из $L^p[0,1)$, универсальных в C^{E_j}, т.е.

$$\mathcal{F}_j = \left\{f(x) \in L^p[0,1) :\ \{S_n(f,x_i) : n \in \Lambda\,, x_i \in E_j\}\ \textit{всюду плотно в}\ C^{E_j}\right\},$$

является плотным G_δ множеством.

Лемма 6. Пусть множества $E, F \subset ([0,1), \rho^*)$ компактны и не пересекаются, и пусть $\Lambda \subset \mathrm{N}$. Если $\{S_n(f_0)\}_{n\in\Lambda}$ равномерно универсален на E для некоторой функции $f_0(x) \in L^p[0,1)$ и если для всех $\Lambda^{'} \subset \Lambda$, существует некоторый $f_{\Lambda'}(x) \in L^p[0,1)$ так, что $\{S_n(f)\}_{\Lambda'}$ равномерно универсален на F, тогда существует плотное G_δ – множество $\mathrm{M} \subset L^p[0,1)$ такое, что для любой функции $f(x) \in L^p[0,1)$ множество $\{S_n(f)\}_{n\in\Lambda}$ равномерно универсально на $E \cup F$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность операторов $\mathrm{T_n}: \mathrm{L^p} \to \mathrm{L^p(E \cup F)}_{n\in\Lambda}$, определенных следующим образом: $T_n f := S_n(f)|_{E\cup F}$ для $n \in \Lambda$. Применяя Лемму 5, достаточно показать, что $\{T_n\}_{n\in\Lambda}$ топологически транзитивна, т.е. в данном случае нужно доказать, что для любых $g(x) \in L^p[0,1)$, $\varepsilon > 0$ и $H(x) \in L^p(E \cup F)$, существуют $f(x) \in L^p[0,1)$ и $n \in \Lambda$ такие, что

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx < \varepsilon \text{ и } \|S_n(f)(x) - H\|_{E \cup F} < \varepsilon.$$

Пусть даны: функции $g(x) \in L^p[0,1)$, $H(x) \in L^p(E \cup F)$, и число $\varepsilon > 0$. Возьмем полином по системе Ψ_a $Q^{(a)}$ такой, что

$$\int_0^1 \left|g(x) - Q^{(a)}(x)\right|^p dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку множество $\{S_n(\alpha f_0) : n \in \Lambda\}$ плотно в $L^p(E)$ для любого $\alpha > 0$, то можем выбрать достаточно маленькое число α такое, что

$$U(x) = \alpha f_0 \in L^p[0,1) \text{ и } \int_0^1 |U(x)|^p \, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, существует множество $\Lambda' \subset \Lambda$ с $|\Lambda'| = \infty$, такое, что

$$\left\|\left(H(x) - Q^{(a)}(x)\right) - S_n(U)(x)\right\|_E < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично, из предположения о множестве F, мы получаем существование функции

$$V(x) \in L^p[0,1) \text{ и } \int_0^1 |V(x)|^p \, dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

и соответственно множества $\Lambda'' \subset \Lambda'$ с $|\Lambda''| = \infty$ такого,что

$$\int_0^1 \left|\left(H(x) - Q^{(a)}(x)\right) - S_n(V)(x)\right|^p dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь определим вспомогательную функцию $\xi \in C[0,1)$, удовлетворяющую условиям:

$$0 \le \xi \le 1, \;\; \xi|_{E_0} = 1, \;\; \xi|_{F_0} = 0,$$

для открытых окрестностей E_0 множества E и F_0 множества F в $[0,1)$.

Определяя функцию f следующим образом:

$$f(x) = U(x) \cdot \xi(x) + \left(1 - \xi(x)\right)V(x) + Q^{(a)}(x), x \in [0,1),$$

и повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве Леммы 2, получим:

$$\int_0^1 |f(x) - \mathrm{g}(x)|^p \, dx < \varepsilon$$

$$\|S_n(f) - H\|_E < \varepsilon, \|S_n(f) - H\|_F < \varepsilon$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство Теоремы 1.

Пусть дано любое счетное множество $E = \{x_1, x_2, \dots,\}$. Представим E следующим образом:

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \,, E_j = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}\,, j = 1,2, \dots$$

Тогда, согласно Лемм 5 и 6, для любого $j \geq 1$ множество

$$\mathcal{F}_j = \{f(x) \in L^p[0,1) : \{S_n(f, x_i) : n \in \Lambda \,, x_i \in E_j\} \text{ плотно в } R^{E_j}\}$$

является плотным G_δ множеством в $L^p[0,1)$. Следовательно из Леммы 1 следует, что

$$\mathcal{F} = \cap_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j \neq \emptyset$$

также является плотным G_δ множеством в $L^p[0,1)$.

Возьмем любую функцию $\tilde{f} \in \mathcal{F}$. Отсюда следует, что $\tilde{f} \in \mathcal{F}_j$ для всех $j \geq 1$.

Пусть теперь дана любая функция $h \in R^E$. Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что для любого x_i, $i = 1,2, \dots ,j$ имеем

$$\left|S_{n_k^{(j)}}(\tilde{f})(x_i) - h(x_i)\right| < \frac{1}{k}$$

Возьмем последовательность $m_j = n_j^{(j)}$, при $j = 1,2, \dots$. Тогда для любого $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ имеем:

$$\left|S_{m_j}(\tilde{f})(x_i) - h(x)\right| < \frac{1}{j} \tag{18}$$

Для любой точки $x \in E$ можем найти число $k_0 \geq 1$ такое, что $\bar{x} = x_{k_0}$.

Теперь, пусть дано произвольное положительное число ε.

Положим $j_0 = k_0 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда для любого $j \geq j_0$ имеем $x_{k_0} \in E_j = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ и следовательно из (18) получим:

$$\left|S_{m_j}(\tilde{f})(\bar{x}) - h(\bar{x})\right| = \left|S_{m_j}(\tilde{f})(x_{k_0}) - h(x_{k_0})\right| < \frac{1}{j} < \varepsilon,$$

откуда и следует, что $S_{m_j}(\tilde{f})(x) - h(x)$, при $j \to \infty$.

Теорема 1 доказана.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье доказано, что для любого счетного множества $E \subset [0,1)$ существует плотное G_δ множество $M \subset L^p[0,1)$, обладающее следующим свойством: последовательность частичных сумм ряда Фурье, по системе Кристенсона-Леви Ψ_α любой функции из M, является поточечно универсальной в C^E, т.е. множество частичных сумм $\{S_n(f,x)_E : n \in \Lambda\}$ ряда Фурье любой функци $f \in M$ плотно в C^E.

REFERENCES

[1] M. Fekete, “Untersuchungenüber absolut Reihen, mit Anwendung auf dirichletsche und Fouriersche Reihen ”, *Math. E's. Terme'sz. E'rt.*, **32**, 389 - 425 (1914).
[2] J. Pa'l, “ Zwei kleine Bemerkungen ”, *Tôhoku Math. J.,* **2**, 42 - 43 (1914).
[3] G. D. Birkhoff, “De'monstration d'un the'ore'mee'le' mentaire sur les fonctions entie'res ”, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **189**, 473 - 475 (1929).
[4] J. Marcinkiewicz, “Sur les nombres dérivés”, *Fund. Math*., **24**, 305 - 308 (1935).
[5] G. R. MacLane, “Sequences of derivatives and normal families”, *J. Analyse Math.*, **2**, 2–87 (1952).
[6] K.G. Grosse-Erdmann, “Holomorphe Monster und universelle Funktionen ”, *Mitt.Math. Sem. Giessen*, **176**, 1 - 81 (1987) .
[7] D. E. Menchoff , “Ob universal'nyh trigonometricheskih ryadah”, *Doklady AN SSSR,* **49**, 79 - 82 (1945).
[8] K.G. Grosse-Erdmann, F. Bayart, V. Nestoridis, C. Papadimitropoulos, “Abstract theory of universal series and applications ”, *Proc. London Math. Soc*., **96**, 417 - 463 (2008).
[9] H.E. Chrestenson, “A class of generalized Walsh functions”, *Pacific Journal Mathematics*, **45**, 17 – 31 (1955).
[10] P. Levy, “Sur une generalisation des fonotions orthogonales de Rademacher”, *Comment. math. helv*., **16**, 146-152 (1944).
[11] R**.** Paley**,** “A remarkable system of orthogonal functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **34**, 241-279 (1932).
[12] J. Fine, “The generalized Walsh-functions”, *Trans. AMS*, **69**, 66 – 67 (1950).
[13] C. Watari, “On generalized Walsh-Fourier series”, *Toh. Math. J*., **10**, 211–241 (1958).
[14] N. Vilenkin, “Ob odnom klasse polnyh ortogonal'nyh sistem”, *Izvestiya AN SSSR, ser. mat.*, **11**, 363 – 400 (1947).
[15] W. Young, “Mean convergence of generalized Walsh - Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc*., **218**, 311-320 (1976).
[16] S. A. Episkoposian, “O raskhodimosti algoritma gridi dlya obobshchennoj sistemy Uolsha po norme L^1”, *Izvestiya Nacional'noj Akademii Nauk Respubliki Armeniya, ser. matematika*, **41**, 14 - 24 (2006).
[17] J. Muller, “Continuous functions with universally divergent Fourier series on small subsets of the circle”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.*, **348**, 1155-1158 (2010).
[18] S. A. Episkoposian, J. Muller, “O potochechnoj universal'nosti chastichnyh summ ryadov Fur'e po obobshchennoj sisteme Uolsha”, *Izvestiya Vuzov, ser. matematika*, **60**, 32 - 40 (2016).
[19] S. A. Episkoposian, J. Muller, “Universality properties of Walsh-Fourier series”, *Monatshefte fur Mathematik, Springer*, **175**, 511–518 (2014).

Received April 15, 2017.