Matematika 2 – java e shtatë

Seminaret

Matematika 2 – Kolokvijum I - model

1. Vërtetoni që katrori i një numri natyror nuk mund të paraqitet në formën $9n - 1$, ku $n \in \mathbb{N}$.

2. Vërtetoni që numri $n + 1$, ku $n \in \mathbb{N}, n > 3$, është i thjeshtë atëhërë dhe vetëm atëhërë kur $n + 1$ nuk është faktor i numrit $n!$.

3. Konvertoni numrat nga sistemi me njërën bazë tek sistemi në bazën tjetër:

(a) $(ACC)_{14} \longrightarrow (\qquad)_7$

(b) $(111011)_3 \longrightarrow (\qquad)_7$

(c) $(1DA)_{20} \longrightarrow (\qquad)_{23}$

4. Të gjenden shifrat u, v të numrit $34uv5v$ ashtu që ky numër të plotpjestohet me 36. (Shqyrtoni të gjitha rastet)

Zgjidhjet:

1. Numri $9n - 1$ është i formës $3k + 2$ sepse $9n - 1 = 3(3n) - 1 = 3(3n - 1) + 2$, pra $k = 3n - 1$. Numrat e formës $3k + 2$ nuk janë katrorë të plotë sepse mbetja gjatë pjestimit me numrin 3, e një katrori të plotë, mund të jetë vetëm 0 ose 1.
Kjo vlen sepse çdo numër natyror ka formën $3l$ ose $3l + 1$ ose $3l + 2$.

1. Për numrin $3l$ kemi $(3l)^2 = 9l^2 = 3(3l^2) + 0$, pra mbetja është 0.
2. Për numrin $3l + 1$ kemi $(3l + 1)^2 = 9l^2 + 6l + 1 = 3(3l^2 + 2l) + 1$, pra mbetja është 1.
3. Për numrin $3l + 2$ kemi $(3l + 2)^2 = 9l^2 + 12l + 4 = 3(3l^2 + 4l + 1) + 1$, pra mbetja është 1.

2. Në qoftë se numri $n + 1$ është i thjeshtë atëherë ai nuk ka asnjë faktor të përbashkët (më të madh se 1) me secilin nga numrat $1, 2, \cdots, n$. Nga kjo rrjedh që numri $n + 1$ nuk ka asnjë faktor të përbashkët (më të madh se 1) me numrin $1 \cdot 2 \cdots \cdot n = n!$. Kjo implikon që numri $n!$ nuk plotpjestohet nga numri $n + 1$.

Anasjelltas, supozojmë tani që numri $n!$ nuk plotpjestohet nga numri $n + 1$. Në qoftë se numri $n + 1$ nuk është i thjeshtë atëherë ky numër mund të paraqitet si prodhim $u \cdot v$ ku $2 \leqslant u, v \leqslant n$. ***Dallojmë dy raste për numrat*** u ***dhe*** v:

1. ***Ekzistojnë numrat*** u ***dhe*** v ***ashtu që*** $u \neq v$. Në këtë rast u dhe v përmbahen tek prodhimi $1 \cdot 2 \cdots u \cdots v \cdots \cdot n = n!$ prandaj numri $n + 1 = uv$ do jetë faktor i numrit $n!$. Kjo bie në kundërshtim me supozimin që numri $n!$ nuk plotpjestohet nga numri $n + 1$.
2. ***Nuk ekzistojnë numrat*** u ***dhe*** v ***ashtu që*** $u \neq v$. Në këtë rast do jetë $n + 1 = p^2$, ku p është numër i thjeshtë. Numri p do jetë faktor i prodhimit $1 \cdot 2 \cdots \cdot n = n!$ sepse $p \leqslant p^2 - 1 = n$ meqënëse $p \geqslant 2$. Madje për $p \geqslant 3$ vlen edhe mosbarazimi $2p \leqslant p^2 - 1 = n$ sepse $2p \leqslant p^2 - 1 \Leftrightarrow p^2 - 2p + 1 \geqslant 2 \Leftrightarrow (p - 1)^2 \geqslant 2$. Kështu për $p \geqslant 3$ numrat p dhe $2p$ figurojnë tek prodhimi $1 \cdot 2 \cdots \cdot n = n!$ dhe nga këtu kemi që numri $p^2 = n + 1$ është faktor tek prodhimi $1 \cdot 2 \cdots \cdot n = n!$. Kjo bie në kundërshtim me supozimin që numri $n!$ nuk plotpjestohet nga numri $n + 1$.
   Situata kur $p = 2$ implikon $n + 1 = p^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow n = 3$ që është rast i përjashtuar nga shqyrtimet meqënëse kemi kushtin $n > 3$.

Kontraditat e mësipërme implikojnë që numri $n + 1$ është i thjeshtë.

3. Për secilin rast algoritmi i zgjidhjes është i njëjtë, pra në fillim do kalojmë paraqitjet e numrit nga sistemi me bazë të dhënë në sistemin me bazën 10 dhe më pas do bëjmë kalimin nga paraqitja në sistemin me bazë 10 tek paraqitja e numrit në sistemin me bazën e kërkuar.

(a) $(ACC)_{14} = A \cdot 14^2 + C \cdot 14 + C = 10 \cdot 196 + 12 \cdot 14 + 12 = 1960 + 168 + 12 = 2140.$

$$k_0 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 7^k \leqslant 2140\} = 3 \Rightarrow b_0 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 7^{k_0} \leqslant 2140\} = 6 \Rightarrow b_0 \cdot 7^{k_0} = 2058$$

$$k_1 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 7^k \leqslant 2140 - 2058\} = 2 \Rightarrow b_1 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 7^{k_1} \leqslant 82\} = 1 \Rightarrow b_1 \cdot 7^{k_1} = 49$$

$$k_2 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 7^k \leqslant 82 - 49\} = 1 \Rightarrow b_2 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 7^{k_2} \leqslant 33\} = 4 \Rightarrow b_2 \cdot 7^{k_2} = 28$$

Meqënëse $33 - 28 = 5 < 7$ dhe $k_2 = 1$ do kemi që shifra e fundit do jetë $b_3 = 5$.

Përfundimisht paraqitja e kërkuar është $(b_0b_1b_2b_3)_7 = (6145)_7$.

(b) $(111011)_3 = 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 = 243 + 81 + 27 + 3 + 1 = 355.$

$k_0 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 7^k \leqslant 355\} = 3 \Rightarrow b_0 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 7^{k_0} \leqslant 355\} = 1 \Rightarrow b_0 \cdot 7^{k_0} = 343$

$k_1 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 7^k \leqslant 355 - 343\} = 1$. Meqënëse $k_0 - k_1 = 2$ kemi $b_1 = 0$ dhe $b_2 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 7^{k_1} \leqslant 12\} = 1 \Rightarrow b_2 \cdot 7^{k_1} = 7$

Meqënëse $12 - 7 = 5 < 7$ dhe $k_1 = 1$ do kemi që shifra e fundit do jetë $b_3 = 5$.

Përfundimisht paraqitja e kërkuar është $(b_0b_1b_2b_3)_7 = (1015)_7$.

(c) $(1DA)_{20} = 1 \cdot 20^2 + D \cdot 20 + A = 1 \cdot 400 + 13 \cdot 20 + 10 = 400 + 260 + 10 = 670.$

$k_0 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 23^k \leqslant 670\} = 2 \Rightarrow b_0 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 23^{k_0} \leqslant 670\} = 1 \Rightarrow b_0 \cdot 23^{k_0} = 529$

$k_1 = \max\{k \in \mathbb{N}_0 | 23^k \leqslant 670 - 529\} = 1 \Rightarrow b_1 = \max\{b \in \mathbb{N}_0 | b \cdot 23^{k_1} \leqslant 141\} = 6 \Rightarrow$

$b_1 \cdot 23^{k_1} = 138$

Meqënëse $141 - 138 = 3 < 23$ dhe $k_1 = 1$ do kemi që shifra e fundit do jetë $b_2 = 3$.

Përfundimisht paraqitja e kërkuar është $(b_0b_1b_2)_{23} = (163)_{23}$.

4. Që të plotpjestohet një numër me 36, duhet dhe mjafton e që ai numër të plotpjestohet me 4 dhe me 9.

Numri natyror (që ka të paktën dy shifra) plotpjestohet me 4 atëherë dhe vetëm atëherë kur numri që përbëhet nga dy shifrat e fundit të tij, plotpjestohet me 4. Në rastin konkret kemi numrin $34uv5v$ që plotpjestohet me 4, prandaj duhet dhe mjafton që numri dyshifror $5v$ të plotpjestohet me 4. Kjo është e mundur atëherë dhe vetëm atëherë kur $v = 2$ ose $v = 6$.

Plotpjestueshmëria me 9 e numrit $34uv5v$ implikon kushtin ekuivalent që numri $3 + 4 + u + v + 5 + v = 12 + u + 2v$ plotpjestohet me 9.

Për $v = 2$ kemi kushtin $12 + u + 4 = 16 + u$ plotpjestohet me 9 nga ku del se $u = 2$.Kështu njëra zgjidhje do jetë numri 342252.

Për $v = 6$ kemi kushtin $12 + u + 12 = 24 + u$ plotpjestohet me 9 nga ku del se $u = 3$.Kështu zgjidhja tjetër do jetë numri 343656.