Matematika 2 – java e tetë

Seminaret

1. Vërtetoni që për çdo numër natyror $n \in \mathbb{N}$ vlen:

(a) Numri $4^n + 15n - 1$ plotpjestohet nga numri 9.

(b) Numri $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ plotpjestohet nga numri 54.

2. Vërtetoni që për çdo numër natyror $n \in \mathbb{N}$ vlen:

(a) Numri $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ plotpjestohet nga numri 17.

(b) Numri $2^{4n+3} + 5^n \cdot 3^{3n+2}$ plotpjestohet nga numri 17.

3. Vërtetoni që për çdo numër natyror n numri $\underbrace{111\cdots1}_{3^n}$ plotpjestohet nga numri 3^n.

4. Të gjendet $PMP(585, 756, 1155)$.

5. Vërtetoni që dy numra të njëpasnjëshëm tek, janë reciprokisht të thjeshtë.

6. Vërtetoni që në rast se numrat a dhe b janë reciprokisht të thjeshtë atëherë secili prej tyre është reciprokisht i thjeshtë me shumën $a + b$.

7. Le të jenë numrat a dhe b reciprokisht të thjeshtë dhe $a > b$. Vërtetoni që numrat $a + b$ dhe $a - b$ ose janë reciprokisht të thjeshtë mes tyre ose $PMP(a, b) = 2$.

8. Numrat a dhe b janë reciprokisht të thjeshtë. Vërtetoni që shuma dhe prodhimi i tyre gjithashtu janë numra reciprokisht të thjeshtë.

Zgjidhjet

1.

(a) Shënojmë me E bashkësinë e numrave natyrorë n për të cilët numri $4^n+15n-1$ plotpjestohet nga numri 9. Mund të shkruajmë $E = \{n \in \mathbb{N} | 4^n + 15n - 1 = 9p_n, p_n \in \mathbb{Z}\}$.

$1 \in E \Rightarrow 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 9 \cdot p_1$, ku $p_1 = 2$.

Supozojmë tani që $n \in E$. Pra $\exists p_n \in \mathbb{Z}$ për të cilin vlen $4^n + 15n - 1 = 9p_n$. Tani kemi:

$$4^{n+1}+15(n+1)-1 = 4\cdot4^n+15\cdot n-1+15 = 4\cdot4^n+60n-4-45n+18 = 4\cdot(4^n+15n-1)-9(5n-2)$$
$$= 4 \cdot 9 \cdot p_n - 9(5n - 2) = 9(4 \cdot p_n - 5n + 2) = 9p_{n+1}, \text{, ku } p_{n+1} = 4 \cdot p_n - 5n + 2 \in \mathbb{Z}$$

Vërtetuam që $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi $E = \mathbb{N}$.

(b) Shënojmë me E bashkësinë e numrave natyrorë n për të cilët numri $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ plotpjestohet nga numri 54. Pra kemi $E = \{n \in \mathbb{N} | 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 = 54p_n, p_n \in \mathbb{Z}\}$.

$1 \in E \Rightarrow 2^{2\cdot 1+1} - 9 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 54 \cdot p_1$, ku $p_1 = 0$.

Supozojmë tani që $n \in E$. Pra $\exists p_n \in \mathbb{Z}$ për të cilin vlen $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 = 54p_n$. Tani kemi:

$$2^{2(n+1)+1} - 9(n+1)^2 + 3(n+1) - 2 = 4 \cdot 2^{2n+1} - 9n^2 - 15n - 8 = 4 \cdot 2^{2n+1} - 36n^2 + 12n - 8$$

$$+27n^2 - 27n = 4(2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2) + 27n^2 - 27n = 4 \cdot 54p_n + 54\frac{n(n-1)}{2} = 54p_{n+1}$$

ku $p_{n+1} = 4 \cdot p_n + \frac{n(n-1)}{2} \in \mathbb{Z}$.

Vërtetuam që $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi $E = \mathbb{N}$.

2.

(a) Shënojmë me E bashkësinë e numrave natyrorë n për të cilët numri $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ plotpjestohet nga numri 17. Kemi $E = \{n \in \mathbb{N} | 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17p_n, p_n \in \mathbb{Z}\}$.

$1 \in E \Rightarrow 3 \cdot 5^{2\cdot 1+1} + 2^{3\cdot 1+1} = 17p_1$, ku $p_1 = 23$.

Supozojmë tani që $n \in E$. Pra $\exists p_n \in \mathbb{Z}$ për të cilin vlen $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17p_n$. Tani kemi:

$$3 \cdot 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 25 \cdot 3 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} = 17 \cdot 3 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 3 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} =$$

$$17 \cdot 3 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 17 \cdot p_n = 17 \cdot (3 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot p_n) = 17p_{n+1} \text{ ku } p_{n+1} = 3 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot p_n \in \mathbb{Z}$$

Vërtetuam që $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi $E = \mathbb{N}$.

(b) Shënojmë me E bashkësinë e numrave natyrorë n për të cilët numri $2^{4n+3} + 5^n \cdot 3^{3n+2}$ plotpjestohet nga numri 17. Kemi $E = \{n \in \mathbb{N} | 2^{4n+3} + 5^n \cdot 3^{3n+2} = 17p_n, p_n \in \mathbb{Z}\}$.

$1 \in E \Rightarrow 2^{4\cdot 1+3} + 5^1 \cdot 3^{3\cdot 1+2} = 17p_1$, ku $p_1 = 79$.

Supozojmë tani që $n \in E$. Pra $\exists p_n \in \mathbb{Z}$ për të cilin vlen $2^{4n+3} + 5^n \cdot 3^{3n+2} = 17p_n$. Tani kemi:

$$2^{4(n+1)+3} + 5^{n+1} \cdot 3^{3(n+1)+2} = 16 \cdot 2^{4n+3} + 135 \cdot 5^n \cdot 3^{3n+2} = 16 \cdot (2^{4n+3} + 5^n \cdot 3^{3n+2}) + 119 \cdot 5^n \cdot 3^{3n+2}$$

$$= 16 \cdot 17 \cdot p_n + 119 \cdot 5^n \cdot 3^{3n+2} = 17p_{n+1} \text{ ku } p_{n+1} = 16 \cdot p_n + 7 \cdot 5^n \cdot 3^{3n+2} \in \mathbb{Z}$$

Vërtetuam që $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi $E = \mathbb{N}$.

3. Shënojmë me E bashkësinë e numrave natyrorë n për të cilët numri $\underbrace{111\cdots 1}_{3^n}$ plotpjestohet nga numri 3^n. Kemi $E = \{n \in \mathbb{N} | \underbrace{111\cdots 1}_{3^n} = 3^n p_n, p_n \in \mathbb{Z}\}$.

$1 \in E \Rightarrow 111 = 3^1 \cdot p_1$, ku $p_1 = 37$.

Supozojmë tani që $n \in E$. Pra $\exists p_n \in \mathbb{Z}$ për të cilin vlen $\underbrace{111\cdots 1}_{3^n} = 3^n p_n$. Tani kemi:

$$\underbrace{111\cdots 1}_{3^{n+1}} = \frac{10^{3^{n+1}} - 1}{9} = \frac{10^{3\cdot 3^n} - 1}{9} = \frac{(10^{3^n})^3 - 1}{9} = \frac{(10^{3^n} - 1)}{9} \cdot ((10^{3^n})^2 + 10^{3^n} + 1) =$$

$$\underbrace{111\cdots 1}_{3^n} \cdot ((10^{3^n})^2 + 10^{3^n} + 1) = 3^n p_n \cdot ((10^{3^n})^2 + 10^{3^n} + 1) = 3^{n+1} p_n \cdot \left(\frac{(10^{3^n})^2 + 10^{3^n} + 1}{3} \right)$$

ku $p_{n+1} = p_n \cdot \left(\frac{(10^{3^n})^2 + 10^{3^n} + 1}{3}\right) \in \mathbb{Z}$.

Vërtetuam që $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi $E = \mathbb{N}$.

Shënim: $\frac{(10^{3^n})^2 + 10^{3^n} + 1}{3} \in \mathbb{Z}$ sepse shuma e shifrave të numrit $(10^{3^n})^2 + 10^{3^n} + 1$ është 3.

4. Do të shfrytëzojme relacionin $PMP(a, b, c) = p_1^{min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdots p_n^{min(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)}$, ku $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_n^{\beta_n}$ dhe $c = p_1^{\gamma_1} \cdots p_n^{\gamma_n}$ janë paraqitjet kanonike të numrave a, b, c si prodhime të faktorëve të thjeshtë të tyre. Për çdo $i \in \{1, \cdots, n\}$ kemi parasysh që të paktën njëri nga numrat α_i, β_i apo γ_i të jetë më i madh se zero.
Në rastin konkret pas faktorizimeve kemi $a = 585 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^1$,
$b = 756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0$ dhe $c = 1155 = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^0$. Duke shfrytëzuar formulën e mësipërme do kemi: $PMP(585, 756, 1155) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 = 3$.

Kjo procedurë mund të spjegohet edhe me thjeshtë. Mjafton nga numrat a, b, c të nxirren faktorët e thjeshtë të përbashkët $\{$që në rastin konkret është veç numri 3$\}$, gjendet fuqia minimale e secilit nga faktorët e përbashkët dhe kështu formohet $PMP(a, b, c)$. Kjo procedurë vlen edhe për me tepër apo më pak se tre numra natyrorë.

5. Dy numra të njëpasnjëshëm tek kanë formën $2n - 1$ dhe $2n + 1$ për ndonjë numër $n \in \mathbb{N}$. Le të jetë $d \in \mathbb{N}$ një pjestues i përbashkët për numrat $2n-1$ dhe $2n+1$. Kështu do kemi $2n-1 = k \cdot d$ dhe $2n+1 = h \cdot d$, ku $k, h \in \mathbb{N}$. Nga këto relacione rrjedh që $2 = 2n+1-(2n-1) = k \cdot d - h \cdot d = (k-h) \cdot d$. Pra numri d është faktor i numrit 2 që do të thotë se $d = 1$ ose $d = 2$.
$d = 2$ nuk mund të jetë sepse d është pjestues i numrit tek $2n - 1$ (apo $2n + 1$). Mbetet $d = 1$, pra i vetmi pjestues i përbashkët i numrave $2n - 1$ dhe $2n + 1$ është numri 1 që do të thotë se $2n - 1$ dhe $2n + 1$ janë numra reciprokisht të thjeshtë.

6. Nga simetria e problemit në lidhje me numrat a dhe b, mjafton të vërtetojmë që $PMP(a, a+b) = 1$ në qoftë se $PMP(a, b) = 1$.
Le të jetë $d \in \mathbb{N}$ një pjestues i përbashkët për numrat a dhe $a+b$. Do kemi $a = k \cdot d$ dhe $a+b = h \cdot d$, ku $k, h \in \mathbb{N}$. Nga këtu rrjedh $b = a + b - a = h \cdot d - k \cdot d = (h - k) \cdot d$. Pra numri d është pjestues i numrit a dhe i numrit b. Meqënëse $PMP(a, b) = 1$ atëhere do jetë $d = 1$.
Vërtetuam që $PMP(a, a + b) = 1$.

7. Le të jetë $d \in \mathbb{N}$ një pjestues i përbashkët për numrat $a-b$ dhe $a+b$. Do kemi $a-b=k\cdot d$ dhe $a+b=h\cdot d$, ku $k,h\in\mathbb{N}$. Nga këtu rrjedh që $2a=a-b+a+b=(k+h)\cdot d$ dhe $2b=a+b-(a-b)=(h-k)\cdot d$. Pra kemi që numri d është pjestues i numrave $2a$ dhe $2b$. Meqënese numrat a dhe b janë reciprokisht të thjeshte ata nuk kanë faktore të përbashkët. Mbetet të jetë $d=1$ ose $d=2$.

Për $a=5, b=3$ kemi $PMP(a-b,a+b)=PMP(2,8)=2$ ndërsa për $a=5,b=2$ kemi $PMP(a-b,a+b)=PMP(3,7)=1$, kështu që $PMP(a-b,a+b)$ mund të jetë edhe 1 por edhe 2, në varësi të vlerave a dhe b.

8. Duhet të vërtetojmë që $PMP(a+b,a\cdot b)=1$ në qoftë se $PMP(a,b)=1$. Duke supozuar që numri natyror d është pjestues i përbashkët i numrave $a+b$ dhe $a\cdot b$ do kemi $a+b=k\cdot d$ dhe $a\cdot b=h\cdot d$, ku $k,h\in\mathbb{N}$. Nga këtu do kemi:

$a^2=(a+b)a-ab=kda-hd=(ka-h)d \Rightarrow a^2$ plotpjestohet nga numri d
$b^2=(a+b)b-ab=kda-hd=(kb-h)d \Rightarrow b^2$ plotpjestohet nga numri d.

Meqënëse numrat a dhe b janë reciprokisht të thjeshtë ata nuk kanë fatorë të thjeshtë të përbashkët. Nga këtu rrjedh që edhe numrat a^2 dhe b^2 nuk kanë faktorë të thjeshtë të përbashkët, pra ata janë reciprokisht të thjeshtë. Kështu numri d duhet të jetë i barabartë me 1 sepse d është pjestues i numrit a^2 dhe i numrit b^2. Vërtetuam që $PMP(a+b,ab)=1$.