Matematika 2 – java e trembëdhjetë

Seminaret

1. Le të jenë thyesat $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{c}{d}$ të tilla që $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vërtetoni që për çdo $x, y, z, u \in \mathbb{Z}$ vlen:

(a) $\frac{a+by}{c+dy} = \frac{b}{d}$

(b) $\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{b}{d}$

(c) $\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{a+b}{c+d}$

(d) $\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{az+bu}{cz+du}$

2. Vërtetoni që për thyesat $\frac{a_i}{b_i}$, ku $i \in \{1, \cdots, n\}$, vlen:

$$\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \Longrightarrow \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} = \frac{a_i}{b_i} \text{ për } \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

3. Të gjenden numrat natyrorë a dhe b në qoftë se vlera reciproke e diferencës së tyre është tri herë më e madhe se vlera reciproke e prodhimit të tyre.

4. Le të jetë thyesa $\frac{a}{b}$ e pathjeshtueshme, ku $a, b \in \mathbb{N}$. Vërtetoni që edhe shuma $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}$ formon thyesë të pathjeshtueshme.

5. Të gjenden numrat racionalë q, të tillë që për çdo numër racional p të jetë:

(a) $p + q < p$

(b) $p - q < p$

(c) $pq < 0$

(d) $pq < p$

(e) $\frac{p}{q} > 1$

(f) $q^2 < 1$

(g) $q^2 > 1$

6. Le të jenë numrat natyrorë të tillë që, $n < \min\{a, b\}$. Krahasoni thyesën $\frac{a}{b}$ me thyesat:

$$\frac{a+n}{b}\ ,\ \frac{a-n}{b}\ ,\ \frac{a}{b+n}\ ,\ \frac{a}{b-n}\ ,\ \frac{a+n}{b+n} \text{ dhe } \frac{a-n}{b-n}$$

7. Le të jetë $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, për numrat natyrorë a, b, c dhe d. Vërtetoni që vlen $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

8. Është dhënë numri racional $\frac{a}{b}$, ku $a, b \in \mathbb{N}$. Vërtetoni që për çdo numër natyror n, ekziston vetëm një numër natyror q_n, për të cilin vlen:

$$\frac{q_n}{10^n} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{q_n+1}{10^n}$$

Për rastin $a = 3$ dhe $b = 7$, të gjenden numrat q_1 dhe q_2

Zgjidhjet

1. Shënojmë $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \alpha$.

(a) $\frac{a+by}{c+dy} = \frac{b}{d} \cdot \frac{\frac{a}{b}+y}{\frac{c}{d}+y} = \frac{b}{d} \cdot \frac{\alpha+y}{\alpha+y} = \frac{b}{d}$.

(b) $\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{b}{d} \cdot \frac{\frac{a}{b}x+y}{\frac{c}{d}x+y} = \frac{b}{d} \cdot \frac{\alpha x+y}{\alpha x+y} = \frac{b}{d}$.

(c) $\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$, sepse $\frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \Leftrightarrow bc + bd = ad + bd \Leftrightarrow bc = ad \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ që është e saktë.

(d) $\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{b}{d} = \frac{az+bu}{cz+du}$ në bazë të pikës (b)

2. Shënojmë $\alpha = \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. Rrjedh që $a_i = \alpha b_i$, për $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$. Nga këtu kemi:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} = \frac{\alpha b_1 + \cdots + \alpha b_n}{b_1 + \cdots + b_n} = \alpha \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{b_1 + \cdots + b_n} = \alpha = \frac{a_i}{b_i} \text{ për } \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

3. Vlera reciproke e diferencës të numrave natyrorë a dhe b është $\frac{1}{a-b}$ ndëra vlera reciproke e prodhimit të tyre është $\frac{1}{ab}$. Nga kushti i dhenë kemi barazimin:

$$\frac{1}{a-b}=\frac{3}{ab}$$

Ky barazim është ekuivalent me barazimet ekuivalente:

$$ab=3a-3b\Leftrightarrow(a+3)b=3a\Leftrightarrow b=\frac{3a}{a+3}\Leftrightarrow b=3-\frac{9}{a+3}$$

Meqë $b\in\mathbb{N}$ rrjedh që $a=6$. Nga këtu kemi $b=2$.

4. Kemi që $PMP(a,b)=1$ dhe:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}=\frac{a+b+a}{a(a+b)}=\frac{2a+b}{a^2+ab}$$

Le të jetë numri natyror d një pjestues i numrave $2a+b$ dhe a^2+ab. Rrjedh që d plotpjeston numrin $a^2=a(2a+b)-(a^2+ab)$ dhe nga kjo rrjedh që plotpjeston edhe numrin $ab=(a^2+ab)-a^2$.

Kështu d plotpjeston numrin $PMP(a^2,ab)=a\cdot PMP(a,b)=a\cdot 1=a$.
Meqë d plotpjeston numrin $2a+b$ rrjedh që d plotpjeston edhe numrin $b=(2a+b)-a$.

Pra numri d plotpjeston numrat a dhe b , ku $PMP(a,b)=1$, që implikon se d=1. Përfundimisht kemi që $PMP(2a+b,a^2+ab)=1$.

5. Duhet të gjejmë (për secilin rast) numrat q ashtu që mosbarazimet e dhëna të mos varen nga numri p.

(a) $p+q<p\Leftrightarrow q<0$.

(b) $p-q<p\Leftrightarrow q>0$.

(c) Mosbarazimi $pq<0$ është i pamundur për q të fiksuar dhe $\forall p\in\mathbb{R}$, sepse për $p=1$ kemi $q<0$ ndërsa për $p=-1$ kemi $q>0$.

(d) Mosbarazimi $pq<p$ është i pamundur për q të fiksuar dhe $\forall p\in\mathbb{R}$, sepse për $p=1$ kemi $q<1$ ndërsa për $p=-1$ kemi $-q<-1\Leftrightarrow q>1$.

(e) Mosbarazimi $\frac{p}{q}>1$ është i pamundur për q të fiksuar dhe $\forall p\in\mathbb{R}$, sepse për $p=1$ kemi $\frac{1}{q}>1\Rightarrow 0<q<1$ ndërsa për $p=-1$ kemi $-\frac{1}{q}>1\Rightarrow -1<q<0$.

(f) $q^2<1\Leftrightarrow q\in(-1,1)$

(g) $q^2>1\Leftrightarrow q\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

6. Shënojmë shenjën kërkuar të mosbarazimit me $*$ dhe shqyrtojmë secilin rast.

1) $\frac{a+n}{b} * \frac{a}{b} \Leftrightarrow b(a+n) * ab \Leftrightarrow ba+bn * ab \Leftrightarrow bn * 0$. Vërejmë që shenja $*$ e mosbarazimit është $>$.
2) $\frac{a-n}{b} * \frac{a}{b} \Leftrightarrow b(a-n) * ab \Leftrightarrow ba-bn * ab \Leftrightarrow -bn * 0$. Vërejmë që shenja $*$ e mosbarazimit është $<$.
3) $\frac{a}{b+n} * \frac{a}{b} \Leftrightarrow ba * a(b+n) \Leftrightarrow ba * ab+an \Leftrightarrow -an * 0$. Vërejmë që shenja $*$ e mosbarazimit është $<$.
4) $\frac{a}{b-n} * \frac{a}{b} \Leftrightarrow ba * a(b-n) \Leftrightarrow ba * ab-an \Leftrightarrow an * 0$. Vërejmë që shenja $*$ e mosbarazimit është $>$.
5) $\frac{a+n}{b+n} * \frac{a}{b} \Leftrightarrow b(a+n) * a(b+n) \Leftrightarrow ba+bn * ab+an \Leftrightarrow bn * an \Leftrightarrow b * a$. Vërejmë që shenja $*$ e mosbarazimit varet nga raporti i numrave a dhe b. Në qoftë se $a \leqslant b$ atëherë shenja $*$ e mosbarazimit është $\geqslant$. në rastin tjetër kur $a > b$ shenja * e mosbarazimit është $<$.
6) $\frac{a-n}{b-n} * \frac{a}{b} \Leftrightarrow b(a-n) * a(b-n) \Leftrightarrow ba-bn * ab-an \Leftrightarrow an * bn \Leftrightarrow a * b$. Edhe në këtë rast kemi që shenja $*$ e mosbarazimit varet nga raporti i numrave a dhe b. Në qoftë se $a \leqslant b$ atëherë shenja $*$ e mosbarazimit është $\leqslant$. në rastin tjetër kur $a > b$ shenja * e mosbarazimit është $>$.

7. Vërtetimi rrjedh nga ekuivalencat:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b+d) < b(a+c) \Leftrightarrow ab+ad < ba+bc \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$$
$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow d(a+c) < c(b+d) \Leftrightarrow da+dc < cb+cd \Leftrightarrow da < cb \Leftrightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$$

8. Nga mosbarazimet e dhëna rrjedh që:

$$\frac{q_n}{10^n} \leqslant \frac{a}{b} \Leftrightarrow q_n \leqslant \frac{a}{b} \cdot 10^n$$

dhe

$$\frac{q_n+1}{10^n} > \frac{a}{b} \Leftrightarrow q_n+1 > \frac{a}{b} \cdot 10^n \Leftrightarrow q_n > \frac{a}{b} \cdot 10^n - 1$$

Numri q_n është natyror dhe vlen $q_n \in \left(\frac{a}{b} \cdot 10^n - 1, \frac{a}{b} \cdot 10^n\right]$. Nga këtu rrjedh që $q_n = \lfloor \frac{a}{b} \cdot 10^n \rfloor$, sepse intervali me gjatësi 1, që përmban vetëm një skaj, përmban vetëm një numër të plotë dhe ky numër i plotë është i barabartë me pjesën e plotë skajit të djathtë të intervalit.

Për $a = 3$, $b = 7$ kemi:

$$q_1 = \left\lfloor \frac{3}{7} \cdot 10^1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{30}{7} \right\rfloor = 4 \text{ dhe } q_2 = \left\lfloor \frac{3}{7} \cdot 10^2 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{300}{7} \right\rfloor = 42$$