Matematika II - Kolokvijumi i dytë - Model

1. Duke u bazuar tek principi i induksionit matematik, të vërtetohet:

(a) Principi i minimumit në bashkësinë $\mathbb{N}$: Çdo bashkësi jo boshe $A \subseteq \mathbb{N}$, ka element minimal.

(b) Numri $4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36$ plotpjestohet nga numri 64, për $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.

(a) Të gjenden PMP $(4200, 15876)$ dhe PMP $(15786, 12600)$ në mënyrë standarte dhe duke shfrytëzuar algoritmin e Euklidit.

(b) Të gjenden numrat natyrorë a dhe b për të cilët vlen:

$$\text{SHVP}\,(a, b) = 168 \cdot \text{PMP}\,(a, b) \text{ dhe } a + b = 713$$

3. Vërtetoni barazimin:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ për } n \geqslant k + 1$$

dhe duke shfrytëzuar këtë barazim vërtetoni që:

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}, \text{ për } n \geqslant k + 2$$

3'. Të gjendet anëtari me koeficientin më të madh tek zbërthimi i binomit $(2x + \frac{3}{x^2})^7$.

Zgjidhje.

1.

(a) Në qoftë se $1 \in A$, atëherë elementi minimal i bashkësisë A është numri 1, sepse $A \subseteq \mathbb{N}$ dhe $\min \mathbb{N} = 1$.

Në rastin kur $1 \notin A$, shënojmë $E = \{n \in \mathbb{N} \big| n < A\}$. Bashkësia E nuk është boshe sepse $1 \in E$. Ekziston elementi $n_0 \in E$ i tillë që $n_0 + 1 \notin E$, sepse në të kundërtën do të kishim:

$$1 \in E \text{ dhe } n \in E \Rightarrow n + 1 \in E$$

Nga këtu në bazë të principit të induksionit matematik do kishim $E = \mathbb{N}$ që implikon se $A = \Phi$, meqë $E \cap A = \Phi$. Kjo është e pamundur sepse $A \neq \Phi$.

Për elementin $n_0 \in \mathbb{N}$, kemi $n_0 \in E \Rightarrow n_0 < A$ dhe $n_0 + 1 \notin E \Rightarrow \exists a \in A$, i tillë që $a \leqslant n_0 + 1$. Pra $\exists a \in A$ për të cilin vlen $n_0 < a \leqslant n_0 + 1$ nga ku rrjedh që $a = n_0 + 1$.

Kështu kemi $n_0 \in E \Rightarrow n_0 < A$ dhe $n_0 + 1 = a \in A$, që do të thotë se $\exists \min A$, ku $\min A = n_0 + 1$.

(b) Shënojmë me E bashkësinë e numrave natyrorë n për të cilët numri $4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36$ plotpjestohet nga numri 64.

Pra, kemi $E = \{n \in \mathbb{N} | 4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36 = 64p_n, p_n \in \mathbb{N}\}$.

$1 \in E \Leftrightarrow 4 \cdot 3^{2 \cdot 1+2} + 32 \cdot 1 - 36 = 64 \cdot p_1$, ku $p_1 = 5$.

Supozojmë tani që $n \in E$. Pra $\exists p_n \in \mathbb{Z}$ për të cilin vlen $4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36 = 64p_n$. Tani kemi:

$$4 \cdot 3^{2(n+1)+2} + 32(n+1) - 36 = 9 \cdot 4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36 + 32 =$$

$$4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36 + 8 \cdot 4 \cdot 3^{2n+2} + 32 \underset{n \in E}{=} 64p_n + 64 \Bigg(\underbrace{\frac{\underbrace{3^{2n+2}}_{\text{tek}} + 1}{2}}_{\text{numër natyror}} \Bigg) = 64p_{n+1}$$

ku

$$p_{n+1} = p_n + \frac{3^{2n+2} + 1}{2} \in \mathbb{N}$$

Pra, $n + 1 \in E$. Në bazë të principit të induksionit matematik kemi $E = \mathbb{N}$.

2.

(a) Kemi $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, $15876 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2$ dhe $12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Nga këtu rrjedh që $\text{PMP}\,(4200, 15876) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ dhe $\text{PMP}\,(15786, 12600) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$.

Me metodën e Euklidit kemi:

$$\begin{aligned} 15876 &= 3 \cdot 4200 + 3276 \\ 4200 &= 1 \cdot 3276 + 924 \\ 3276 &= 3 \cdot 924 + 504 \\ 924 &= 1 \cdot 504 + 420 \\ 504 &= 1 \cdot 420 + 84 \\ 420 &= 5 \cdot 84 + 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{PMP}\,(4200, 15876) = 84$

$$\begin{aligned} 15876 &= 1 \cdot 12600 + 3276 \\ 12600 &= 3 \cdot 3276 + 2772 \\ 3276 &= 1 \cdot 2772 + 504 \\ 2772 &= 5 \cdot 504 + 252 \\ 504 &= 2 \cdot 252 + 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{PMP}\,(15876, 12600) = 252$.

(b) Shënojmë $d = \text{PMP}\,(a, b)$. Atëherë do kemi $a = ud$ dhe $b = vd$, ku $(u, v) = 1$ dhe $u, v \in \mathbb{N}$. Gjithashtu kemi

$$\text{SHVP}\,(a, b) = \frac{ab}{\text{PMP}\,(a, b)} = \frac{udvd}{d} = uvd$$

Duke bërë zëvëndësimet tek relacionet e dhëna rrjedh që:

$$\begin{cases} a + b = 713 \\ \text{SHVP}\,(a, b) = 168\,\text{PMP}\,(a, b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)d = 713 \\ uvd = 168d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)d = 713 \\ uv = 168 \end{cases}$$

Pa zvogëluar përgjithësinë e shqyrtimit, mund të marrim $u \leqslant v$. Meqë $uv = 168$ dhe $(u, v) = 1$ kemi që rastet janë $u = 1, v = 168$; $u = 3, v = 56$; $u = 7, v = 24$ dhe $u = 8, v = 21$.

Duke zëvëndësuar tek relacioni $(u + v)d = 713$, do kemi:

$$u = 1, v = 168 \Rightarrow 169d = 713 \Rightarrow d = \frac{713}{169} \notin \mathbb{N}$$

$$u = 3, v = 56 \Rightarrow 59d = 713 \Rightarrow d = \frac{713}{59} \notin \mathbb{N}$$

$$u = 7, v = 24 \Rightarrow 31d = 713 \Rightarrow d = \frac{713}{31} = 23 \Rightarrow a = ud = 161, b = vd = 552$$

$$u = 8, v = 21 \Rightarrow 29d = 713 \Rightarrow d = \frac{713}{29} \notin \mathbb{N}$$

3.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1)!}=$$

$$\frac{n!}{k!(n-(k+1))!}\frac{1}{n-k}+\frac{n!}{k!(n-(k+1))!}\frac{1}{(k+1)}=\frac{n!}{k!(n-(k+1))!}\left[\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right]=$$

$$\frac{n!}{k!(n-(k+1))!}\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}=$$

$$=\binom{n+1}{k+1}$$

Duke shfrytëzuar barazimin që vërtetuam do kemi:

$$\binom{n+2}{k+2}=\binom{(n+1)+1}{(k+1)+1}=\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{(k+1)+1}=$$

$$\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right)+\left(\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}\right)=\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}$$

3'. Nga zbërthimi i binomit:

$$(2x+\frac{3}{x^2})^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(2x)^k\left(\frac{3}{x^2}\right)^{7-k}=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k3^{7-k}x^{3k-14}$$

kemi që koeficienti i përgjithshëm është $\binom{7}{k}2^k3^{7-k}$, ku $k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

1) Për $k=0$, $\binom{7}{k}2^k3^{7-k}=\binom{7}{0}2^03^{7-0}=3^7=2187$

2) Për $k=1$, $\binom{7}{k}2^k3^{7-k}=\binom{7}{1}2^13^{7-1}=7\cdot2^13^6=10206$

3) Për $k=2$, $\binom{7}{k}2^k3^{7-k}=\binom{7}{2}2^23^{7-2}=21\cdot2^23^5=20412$

4) Për $k=3$, $\binom{7}{k}2^k3^{7-k}=\binom{7}{3}2^33^{7-3}=35\cdot2^33^4=22680$

5) Për $k=4$, $\binom{7}{k}2^k3^{7-k}=\binom{7}{4}2^43^{7-4}=35\cdot2^43^3=15120$

6) Për $k=5$, $\binom{7}{k}2^k3^{7-k}=\binom{7}{5}2^53^{7-5}=21\cdot2^53^2=6048$

7) Për $k=6$, $\binom{7}{k}2^k3^{7-k}=\binom{7}{6}2^63^{7-6}=7\cdot2^63^1=1344$

8) Për $k=7$, $\binom{7}{k}2^k3^{7-k}=\binom{7}{7}2^73^{7-7}=2^7=128$

Anëtari i kërkuar është $\binom{7}{k}2^k3^{7-k}x^{3k-14}$, për $k=3$, pra:

$$22680x^{3\cdot3-14}=\frac{22680}{x^5}$$