1. Paraqitja me shifra e numrave natyrorë

Teorema 1.1. Le te jetë x një numër natyror. Atëhere ekzistojnë shifrat dhjetore $x_0, x_2 \dots, x_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ashtu që

$$x = x_n 10^n + x_{n-1}10^{n-1} + \dots x_1 \cdot 10 + x_0. \tag{1.1}$$

Shprehjen paraprake e shënojmë shkurtimisht

$$x = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$$

dhe e quajmë numër natyror $n-$shifror. Presentimi (1.1) është i vetëm.

Vërtetimi. Nëse $x \in \{0,\dots,9\}$ atëherë $x = x_0$ dhe përfundon vërtetimi. Në të kundřtën bëjmë pjesëtimin me mbetje të numrit x me 10, dhe ky hap na nevojitet të přcaktojmë shifrën e njështeve.

E zëmë se

$$x : 10 = q_1(x_0),\ \ x_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

gjegjësht

$$x = 10q_1 + x_0.$$

Nše $q_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, atëherë marrim $x_1 = q_1$ dhe shënojmë

$$x = x_1 x_0.$$

Në të kundërtën vazhdojmë pjeëtmin e numrit q_1 me mbetje me 10.

E zëmë se

$$q_1 : 10 = q_2(x_2),$$

gjegjësht

$$q_1 = 10q_2 + x_1, x_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Tani pjesëtojmë numrin q_2 me 10, pastaj numrin q_3 me 10, e kështu me radhë. Eshte e qarte se mbas nje mumri te fundme hapash te pjesetimit me mbetje me numrin 10, psh ne se në hahin e $n-$ kemi

$q_{n-1} = 10q_n + x_{n-1}$, ashtu që $x_{n-1} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, dhe $q_n < 10$.

Ketu procesi i vërtetimit perfundon dhe perftojmë $x_n = q_n$, gjegjësihst $x = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0 = x_n 10^n + x_{n-1}10^{n-1} + \dots x_1 \cdot 10 + x_0$.

Ky prezentim është i vetëm, numrat nga pjesëtimi me mbetje janë unike.

□

Në mënurë të ngjashme vërtetojmë teoremen në vazhdim

Teorema 1.2. Le të jetë s numër natyror më i madh se 1. Le te jetë x një numër natyror. Atëhere ekzistojnë shifrat dhjetore $x_0, x_2 \dots, x_n \in \{0,1,\dots,,s-1\}$ ashtu që

$$x = x_n s^n + x_{n-1}s^{n-1} + \dots x_1 \cdot s + x_0. \tag{1.2}$$

Shprehjen paraprake e shñojmë shkurtimisht

$$x = (x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0)_s$$

dhe e quajmë numër natyror $n-$shifror në sistemin me bazë s. Presentimi (1.2) është i vetëm.

2. Plotpjesëtueshmeria

Themi se numri natyror a plotpjesëtohet me numrin natyror b nëse ekziston numri natyror c i tillë që $a = b \cdot c$. Këte fakt e shënojmë simbolikisht $a \vdots b$ ose $b|a$.

Vetitë.

(1) Nëse $a \vdots b$ dhe $a \neq 0$ atëherë $a \geqslant b$.
(2) Nëse $a \vdots b$ dhe $b \vdots a$ atëherë $a = b$.
(3) Nëse $a \vdots 3$ dhe $b \vdots 3$ atëhere $a \vdots c$.
(4) Nëse $a \vdots c$ dhe $b \vdots c$ atëherë $(a+b) \vdots c$ dhe $(a-b) \vdots c$ për $a \geqslant b$.
(5) Nëse $a \vdots b$ dhe $c \in \mathbf{N}$, atëhere $ac \vdots b$.
(6) Nëse $a_1, \dots a_n \vdots b$ dhe $c_1, \dots c_n \in \mathbf{N}$, atëhere $(a_1 b_1 + \dots a_n b_n) \vdots b$,

Le të vertetojmë p.sh. vetiné e 3). Meqenëse $a \vdots b$, rrjedh se $a = a_1 b$. Meqenëse $b \vdots c$, rrjedh se $b = b_1 c$. Nga këtu rrjedh se $a = a_1 b_1 c$, ku $a_1 b_1$ është numër natyror si prodhim i dy numrave natyrorë. Në mënyrë të ngjashme vërtetohen edhe vetitë e tjera.

3. Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i dy numrave PMP.

Përkufizimi 3.1. Themi se numri c është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave natytorë a dhe b në qoftë se numri c i plotëson këto dy veti.

1. $a \vdots c$ dhe $b \vdots c$.
2. Nëse $a \vdots d$ dhe $b \vdots d$, atëherë $c \vdots d$.

Pjesëtuesim më të madh të peprbashkët te numrave a dhe b e shënojmë me $c = \mathrm{PMP}(a, b)$ ose shkurtimisht nëprmjet simbolit (a, b).

Shembulli 3.2. Le të jetë $a = 120$ dhe $b = 300$. Të percaktojmë $\mathrm{PMP}(a, b)$. Pjesëtuesit e numrit a formojnë bashkësinë

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 40, 60, 120\},$$

kurse pjesëtuesit e numrit b formojnë bashkësinë

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, \dots, 60, 100, 150, 300\}.$$

Numri më i madh i përbashët i bashkësive A dhe B është numri 60, prandaj $\mathrm{PMP}(a, b) = 60$.

Metoda e zbatuar parapraprakisht nuk është praktike prandaj zbatojmë dy metoda të tjera që bazohen në:

(1) Teoremën themelore të aritmetikës
(2) Algoritmin e Euklidit.

Qe te formulojmë teoremën themelore të aritmetikës le të perkufizojmë numrat e thjeshtë.

Përkufizimi 3.3. Themi se numri natyror $n \neq 1$ është i thjeshtë, në qoftë se plotpjesëtohet vetëm me numrat 1 dhe n.

Numrat e thjeshtë i shënojmë me P. Pra

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}.$$

Kjo bashkësi numrash ështe bashkësi e pafundme. Vřtetimi mund të bëhet nëpřmjet

Teorema 3.4 (Teorema themelore e aritmetikes). Çdo numër natyror n mund të shënohet në trajtën e produktit të numrave të thjeshtë. Me fjalë të tjera, ekzistojnë numrat e thjeshtë $p_1 < p_2 < \ldots, p_k$ dhe numrat natyrorë ose zero $q_1, \ldots q_k$ ashtu që

$$n = p_1^{q_1} \cdot \ldots p_k^{q_k}.$$

Representimi paraprak është i vetem.

Teorema 3.5. Nëse

$$n = p_1^{q_1} \cdot \ldots p_k^{q_k},$$

dhe

$$m = p_1^{r_1} \cdot \ldots p_k^{r_k},$$

atëherë

$$\mathrm{PMP}(m, n) = p_1^{\min\{q_1, r_1\}} \cdot \ldots p_k^{\min\{q_k, r_k\}}.$$

Le te percaktojme $\mathrm{PMP}(120, 300)$ duke zhatuar teoremen paraprake. Kemi

$$120 = 2 \cdot 60 = 2^2 \cdot 30 = 2^3 \cdot 15 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

dhe

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2.$$

Prandaj

$$\mathrm{PMP}(120, 300) = 2^{\min\{2,3\}} \cdot 3^{\min\{1,1\}} \cdot 5^{\min\{1,2\}} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60.$$

Teorema 3.6. Bashkësi e numrave të thjeshtë është e pafundme.

Vertetimi. Le te jete n nje numer i çfarëdoshëm dhe marrim numrat $p_1 < p_2 \cdots < p_n$ e thjeshte te renditur prej me te voglit deri te me i madhi duke i kyçur te gjithe numrat e thjeshtë . Numri $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$, është më i madh se secili nga numrat $p_1, \ldots, p_n$. Madje numri x nuk plotpjesëtohet me asnjenin nga keta numra $p_1, \ldots, p_n$ sepse mbetja e pjesetimit te numrit x me p_k është gjithmone 1. Pra numri x është i thjeshte ose në baze te teoremes themelore te aritmetikes pjesetohet me numra te thjeshte te ndryshem nga numrat $p_1, \ldots, p_n$. Nga ketu rrjedh se ekzsiton edhe numri i thjeshte p_{n+1}. Si rrjedhim perfundojme se bashkesia P është pambarimisht e madhe.

3.1. **Algoritmi i Euklidit.** Ky algoritem bazohet në teoremën:

Teorema 3.7. *Per çdo dy numra natyrorë a dhe b per te cilet vlen $a > b$ ekzistojne numrat natyror te vetem a_1 dhe q_1 ashtu qe*

$$a = bq_1 + a_1, \quad 0 \leqslant a_1 < b. \tag{3.1}$$

Vërtetimi. Le te perkufizojme bashkesine A siç vijon:

$$A = \{q \in \mathbf{N} : a - bq \geqslant 0\}.$$

Kjo bashkesi është bashkesi jo-boshe, sepse $q = 1 \in A$. Në anen tjeter nëse $q > a$, atehere $a - bq < a - ab = a(1 - b) \leqslant 0$, prandaj $q \notin A$. Rrjedhimisht, A është nenbashkesi e bashkesise $\{1, \ldots, a\}$. Meqe A është bashkesi e fundme, rrjedh se $q_1 = \max A \in A$. Tani kemi $0 \leqslant a_1 = a - bq_1 + a_1$ dhe $a_1 < b$. Sikur mosbarazimi i fundit të mos ishte i saktë, atehere do të kishim $a - b(q_1 + 1) = a - bq_1 - b \geqslant 0$, prandaj $q_1 + 1 \in A$, qe është në kundershtim me faktin se a_1 është elementi maksimal i bashkesise A.

Qe te vertetojme se cifti (a_1, q_1) është i vetem, e zëmë se vlen e kunderta. D.m.th. e zëmë se

$$a = bq_2 + a_2, \quad 0 \leqslant a_2 < b. \tag{3.2}$$

Duke zbritur (3.1) dhe (3.2), perftojme $b(q_1 - q_2) = a_2 - a_1$. E zëmë se $a_2 > a_1$, atehere edhe $q_2 > q_1$. Nga ketu rrjedh se $a_2 > a_2 - a_1 = b(q_1 - q_2) \geqslant b$, gjegjesisht $a_2 > b$, qe është kunderthenie me relacionin (3.2). Me kaq u vertetua reprezentimi unik (3.1). $\square$

Qe te formulojmë algoritmin e Euklidit le te vertetojmë nje veti te PMP.

Teorema 3.8. *Le te jete $a > b$ dhe $a = bq + r$, ku $0 \leqslant r < b$. Ateherë* $\mathrm{PMP}(a, b) = \mathrm{PMP}(b, r)$.

Vërtetimi. Le te jete $c = \mathrm{PMP}(a, b)$ dhe $d = \mathrm{PMP}(b, r)$. Nga fakti se $a \,\vdots\, c$ dhe $b \,\vdots\, c$ dhe barazimi $r = a - bq$, rrjedh se $r \,\vdots\, c$. Prandaj $d \,\vdots\, c$ qe domethene $d \geqslant c$.

në anen tjeter meqenese $b \,\vdots\, d$ dhe $r \,\vdots\, d$ rrjedh se $a = bq + r \,\vdots\, d$, qe domethene se edhe $c \,\vdots\, d$. Perfundojme se $c \geqslant d$. Rrjedhimisht $c = d$.

Nga teorema paraprake kemi

$$c = \mathrm{PMP}(a, b) = \mathrm{PMP}(b, a_1).$$

Pastaj $b = a_1 q_2 + a_2$, ku $0 \leqslant a_2 < a_1$. Prandaj

$$c = \mathrm{PMP}(a_1, a_2).$$

Duke vazhduar proceduren paraprake, mbas nje numri te fundme hapash arrijme deri te numri $a_{k+1} = 0$. Në ate rast $a_{k-1} = a_k q_k$ the

$$c = \mathrm{PMP}(a_1, a_2) = \mathrm{PMP}(a_2, a_3) = \cdots = \mathrm{PMP}(a_{k-1}, a_k) = a_k.$$

$\square$

Ja te ilustrojme algoritmin paraprak në rastin e numrave $a = 300$ dhe $b = 120$. Kemi $a > b$ dhe $a = 2 \cdot b + 60$, gjegjesisht $300 = 2 \cdot 120 + 60$ ku $60 < 120$.

Në fund $120 = 2 \cdot 60$. Nga ketu rrjedh se

$$\mathrm{PMP}(300, 120) = \mathrm{PMP}(120, 60) = 60.$$

3.2. **Edhe disa veti te** PMP**.**

(1) $\mathrm{PMP}(a, b) = \mathrm{PMP}(b, a)$.
(2) Nëse $\mathrm{PMP}(a, b) = c$, atëhere $\mathrm{PMP}(ak, bk) = ck$.
(3) Nése $\mathrm{PMP}(a, b) = k$, atëhere $\mathrm{PMP}(a/k, b/k) = 1$.

4. Shumëfishi më i vogël i përbashkët i dy numrave SHVP.

Përkufizim. Themi se numri c është shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave natytorë a dhe b në qoftë se numri c i plotëson këto dy veti.

1. $c \,\vdots\, a$ dhe $c \,\vdots\, b$.
2. Nëse $d \,\vdots\, a$ dhe $d \,\vdots\, b$, atëherë $d \,\vdots\, c$.

Shumëfishin më të vogël të përbashkët të dy numrave a dhe b e shënojmë me $c = \mathrm{SHVP}(a, b)$ ose shkurtimisht nëprmjet simbolit $[a, b]$.

Teorema 4.1. Për dy numra të çfarëdoshëm natyrorë a dhe b ka vend barazimi

$$[a, b] \cdot (a, b) = ab.$$

Vërtetimi. Le të jetë

$$x = \frac{ab}{(a,b)}.$$

Tani kemi $x \vdots a$ dhe $x \vdots b$, prandaj nga përkufizimi i shumëfishit më të vogël të përbashkét rrjedh se $x \vdots [a,b]$. Prandaj ekziston numri natyror k i tillë që

$$x = k[a,b].$$

Nga barazimi

$$\frac{ab}{(a,b)} = k[a,b]$$

rrjedh se

$$a = \frac{[a,b]}{b} \cdot k(a,b)$$

dhe

$$b = \frac{[a,b]}{a} \cdot k(a,b).$$

Prandaj

$$a \vdots k(a,b) \text{ dhe } b \vdots k(a,b).$$

Nga vetia e dytë perkufizuese e PMP rrjedh se

$$(a,b) \vdots k(a,b).$$

Prandaj $(a,b) \geqslant k(a,b)$. Rrjedhimisht $k = 1$, çfarë duhej të vërtetohet sepse në ketë rast kemi $x = [a,b]$. $\square$

Shembulli 4.2. Le të jetë $a = 24$ dhe $b = 30$. Te gjejme $[a,b]$. Nga barazimi $[a,b] = ab/(a,b)$, dhe $(a,b) = 6$, rrjedh se $[a,b] = 4 \cdot 30 = 120$.

Teorema 4.3. Nëse

$$n = p_1^{q_1} \cdot \dots \cdot p_k^{q_k},$$

dhe

$$m = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k},$$

atëherë

$$\text{SHVP}(m,n) = p_1^{\max\{q_1,r_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\max\{q_k,r_k\}}.$$

Vertetimi. Vertetimi behet me induksionin matematik. Nëse n është numer i thjeshte, atehere $n = p_k = p_k^1$, ku k është nje indeks, dhe ky rast perfundon. E zëmë se e kemi vertetuar per te gjithe numrat naturor me te vegjel ose te barabarte se m. Vertetojme per $n = m+1$. Nëse $m+1$ është i thjeshte, atehere zbatojme faktin paraprak. Në te kunderten, numri $n = m+1$ nuk është i thjeshte prandaj mund te shkruhet $n = m+1 = n_1 \cdot n_2$, ku $1 < n_1 \leqslant m$ dhe $1 < n_2 \leqslant m$. Nga hipoteza e induksionit e dime se $n_1 = p_1^{q_1} \cdot \ldots p_k^{q_k}$ dhe $n_2 = p_1^{q_1'} \cdot \ldots p_k^{q_k'}$, prandaj

$$n = p_1^{q_1} \cdot \ldots p_k^{q_k} \cdot p_1^{q_1'} \cdot \ldots p_k^{q_k'} = p_1^{q_1+q_1'} \cdot \cdots \cdot p_k^{q_k+q_k'}.$$

Keshtu perfunduam vertetimin për numra të plotë pozitivë. $\square$

Le te percaktojme SHVP$(120, 300)$ duke zbatuar teoremen paraprake. Kemi

$$120 = 2 \cdot 60 = 2^2 \cdot 30 = 2^3 \cdot 15 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

dhe

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2.$$

Prandaj

$$\mathrm{SHVP}(120, 300) = 2^{\max\{2,3\}} \cdot 3^{\max\{1,1\}} \cdot 5^{\max\{1,2\}} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600.$$

5. Disa kritere plotpjesëtimit

Në këtë njesi mesimore kemi $x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$.

5.1. **Plotpjesëtueshmëria me numrin 2.** Numri x plotpjesëtohet me numrin 2 atehere dhe vetem atehere kur shifra e fundit (gjegjesisht shifra e njesheve) e keti numrit a_0 është numer çift, d.m.th. $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Qe te vertetojme nje gje te tille vime re se $x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 \cdot 10 + a_0 = 2 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_1 \cdot 5) + a_0$. Meqenese $2 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_1 \cdot 5)$ është numer çift, sepse është faktor i numrit 2, rrhedh se ai plotpjesetohet me 2. Mbetet qe te verifikohet pohimi nëse $a_0 \vdots 2$. Pra $a_0 \vdots 2$ atehere dhe vetem atehere kur $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Numri x plotpjesëtohet qe plotpjesetohet me numrin 2 është çift.

5.2. **Plotpjesëtueshmëria me numrin 5.** Si në rastin e plotpjesetimit me numrin 2, kemi $x = 5 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_1 \cdot 2) + a_0$. Meqenese $5 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_1 \cdot 2)$ plotpjesëtohet me 5, mbetet te provohet nëse a_0 plotpjesetohet me 5. Dhe nje gje e tille ndodh atehere dhe vetem atehere kur $a_0 = 0$ ose $a_0 = 5$.

5.3. **Plotpjesëtueshmëria me numrin 10.** Meqenëse

$$x = 10 \cdot \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_1) + a_0,$$

rrjedh se $c \vdots 10$ atehere dhe vetem atehere kur $a_0 = 0$.

5.4. **Plotpjesëtueshmëria me numrin 4.** Meqenše

$$x = 100 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_3) + a_1 a_0 = 4 \cdot 25 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_2),$$

rrjedh se $x \vdots 4 \Leftrightarrow a_1 a_0 \vdots 4$. Dmth kriteri i plotpjesetimit me 4 sillet në kriterin e plotpjestimit te numrit dyshifror te formuar nga dy shifrat e fundit te tij te plotesohet me 4.

Per shembull, numri $x = 873878732x$ plotpestohet me 4 atehere dhe vetem atehere kur $x \in \{0, 4, 8\}$, sepse numrat dyshifrore 20, 24, 28 plotpjesetohen me 4.

5.5. **Plotpjesëtueshmëria me numrin 8.** Meqenese $x = 1000 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_3) + a_2 a_1 a_0 = 8 \cdot 125 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_3)$, rrjedh se $x \vdots 8 \Leftrightarrow a_2 a_1 a_0 \vdots 8$. Dmth kriteri i plotpjesetimit me 8 sillet në kriterin e plotpjestimit te numrit treshifror te formuar nga tri shifrat e fundit te tij te plotesohet me 8.

Shembulli 5.1. Numri $x = 873878732x$ plotpestohet me 8 atehere dhe vetem atehere kur $x \in \{0, 8\}$, sepse numrat treshifror 320, 328 plotpjesetohen me 8.

5.6. **Plotpjesetueshmeria me 3 dhe 9.** Le te vertetojme paraprakisht nje leme

Lemma 5.2. *Per çdo numër natyror n,* $10^n - 1 \vdots 9$.

Proof. **Vertetimi**. Meqenese $10^n - 1 = 9 \dots 9 = 9 \cdot (1 \dots 1)$, ku shifra 9 gjegjesisht 1 paraqitet n here, rrjedh se $10^n - 1 \vdots 9$. □

Tani mund te formulojme kriterin e plotpjesëtimit me 9. Në fillim kemi $x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = \sum_{k=0}^{n} a_k((10^k - 1) + 1) = \sum_{k=0}^{n} a_k(10^k - 1) + \sum_{k=0}^{n} a_k = A + B$, ku

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k(10^k - 1)$$

dhe

$$B = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Meqenese $10^k - 1$ plotpjesetohet me 9 per cdo k, rrjedh se numri A plotpjesetohet me 9. Mbetet te kontyrollohet nëse numri B qe paraqet shumen e shifrave te ketij numri te plotpjesetohet me 3 ose me 9, meqenese A plotpjesetohet natyrisht me 3, ngase plotpjesetohet me 9.

Shembulli 5.3. Te kontrollojme nëse numri $x = 126562a3873873b$ plotpjesetohet me 3 ose me 9.

Njehsojme shumen e shifrave $B = 1+2+6+5+6+2+a+3+8+7+3+8+7+3+b = 61+a+b = 63+a+b-2$. Pra duhet te gjejme te gjitha shifrat e numrave a dhe b ashtu qe $a+b-2$ te plotpjesetohet me 3. Pastaj te gjejme te gjithe chiftet e numrave a dhe b ashtu qe numri $a+b-2$ te plotpjesetohet me 9.

Per 3 kemi me shume zgjidhje:

$(a,b) \in \{(0,2),(0,5),(0,8),(1,1),(1,4),(1,7),(2,0),(2,3),(2,5),$
$(2,8),(3,2),(3,5),(3,8),(4,1),(4,4),(4,7),(5,0),(5,3),(5,6),$
$(5,9),(6,2),(6,5),(6,8),(7,1),$
$(7,4),(7,7),(8,0),(8,3),(8,6),(8,9),(9,1),(9,4),(9,7)\}$.

Per numrin 9 kemi me pak zgjidhje dhe ato jane

$(a,b) \in \{(0,2),(1,1),(2,0),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(6,5),(7,4),(8,3),(9,2)\}$.