

Ligjerata per Javet 6, 7 dhe 8

David Kalaj, Davidkalaj@gmail.com

March 27, 2020

1 Plotpjesëtueshmeria

Themi se numri natyror a plotpjesëtohet me numrin natyror b nëse ekziston numri natyror c i tillë që $a = b \cdot c$. Këte fakt e shënojmë simbolikisht $a : b$ ose $b|a$.

Vetitë.

1. Nëse $a : b$ dhe $a \neq 0$ atëherë $a \geq b$.
2. Nëse $a : b$ dhe $b : a$ atëherë $a = b$.
3. Nëse $a : b$ dhe $b : c$ atëhere $a : c$.
4. Nëse $a : d$ dhe $b : d$ atëherë $(a + b) : c$ dhe $(a - b) : c$ për $a \geq b$.
5. Nëse $a : b$ dhe $c \in \mathbf{N}$, atëhere $ac : b$.
6. Nëse $a_1, \dots, a_n : b$ dhe $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{N}$, atëhere $(a_1b_1 + \dots + a_nb_n) : b$,

Le të vertetojmë p.sh. vetinë e 3). Meqenëse $a : b$, rrjedh se $a = a_1b$. Meqenëse $b : c$, rrjedh se $b = b_1c$. Nga këtu rrjedh se $a = a_1b_1c$, ku a_1b_1 është numër natyror si prodhim i dy numrave natyrorë. Në mënyrë të ngjashme vërtetohen edhe vetitë e tjera.

2 Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i dy numrave PMP .

Përkufizim. Themi se numri c është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave natyrorë a dhe b në qoftë se numri c i plotëson këto dy veti.

1. $a : c$ dhe $b : c$.
2. Nëse $a : d$ dhe $b : d$, atëherë $c : d$.

Pjesëtuesim më të madh të përbashkët të numrave a dhe b e shënojmë me $c = PMP(a, b)$ ose shkurtimisht nëprmet simbolit (a, b) .

Shembulli 2.1 *Le të jetë $a = 120$ dhe $b = 300$. Të përcaktojmë $PMP(a, b)$. Pjesëtuesit e numrit a janë $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$, kurse pjesëtuesit e numrit b janë $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, \dots, 60, 100, 150, 300\}$. Numri më i madh i përbashët i bashkësive A dhe B është numri 60, prandaj $PMP(a, b) = 60$.*

Metoda e zbatuar paraprakisht nuk është praktike prandaj zbatojmë dy metoda të tjera që bazohen në:

1. Teoremën themelore të aritmetikës
2. Algoritmin e Euklidit.

Që te formulojmë teoremën themelore të aritmetikës le të perkufizojmë numrat e thjeshtë.

Perkufizimi 2.2 *Them i se numri natyror $n \neq 1$ është i thjeshtë, në qoftë se plotpjesëtohet vetëm me numrat 1 dhe n .*

Numrat e thjeshtë i shënojmë me P . Pra

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_k, \dots\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}.$$

Kjo bashkësi numrash është bashkësi e pafundme. Vërtetimi mund të bëhet nëpërmjet

Theorem 2.3 (Teorema themelore e aritmetikës) *Çdo numër natyror n mund të shënohet në trajtën e produktit të numrave të thjeshtë. Me fjalë të tjera, ekzistojnë numrat e thjeshtë $p_1 < p_2 < \dots, p_k$ dhe numrat natyrorë ose zero q_1, \dots, q_k ashtu që*

$$n = p_1^{q_1} \cdot \dots \cdot p_k^{q_k}.$$

Representimi paraprak është i vetëm.

Theorem 2.4 *Nese*

$$n = p_1^{q_1} \cdot \dots \cdot p_k^{q_k},$$

dhe

$$m = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k},$$

atëherë

$$PMP(m, n) = p_1^{\min\{q_1, r_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\min\{q_k, r_k\}}.$$

Le të përcaktojmë $PMP(120, 300)$ duke zhatuar teoremën paraprake. Kemi

$$120 = 2 \cdot 60 = 2^2 \cdot 30 = 2^3 \cdot 15 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

dhe

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2.$$

Prandaj

$$PMP(120, 300) = 2^{\min\{2,3\}} \cdot 3^{\min\{1,1\}} \cdot 5^{\min\{1,2\}} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60.$$

Theorem 2.5 *Bashkësi e numrave të thjeshtë është e pafundme.*

Vertetimi. Le të jete n nje numer i çfarëdoshëm dhe marrim numrat $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ e thjeshte te renditur prej me te voglit deri me i madhi duke i kycur te gjithë numrat e thjeshte. Numri $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$, eshte më i madh se secili nga numrat p_1, \dots, p_n . Madje numri x nuk plotpjesëtohet me asnjë nga këta numra p_1, \dots, p_n . Pra numri x eshte i thjeshte ose ne baze te teoremes themelore te aritmetikes pjesëtohet me numra te thjeshte te ndryshem nga numrat p_1, \dots, p_n . Nga ketu rrjedh se ekziston edhe numri i thjeshte p_{n+1} . Si rrjedhim perfundojme se bashkësia P eshte pambarimisht e madhe.

2.1 Algoritmi i euklidit

Ky algoritem bazohet ne teoremen e meposhtme

Theorem 2.6 *Per cdo dy numra natyrore a dhe b per te cilet vlen $a > b$ ekzistojne numrat natyror te vetem a_1 dhe q_1 ashtu qe*

$$a = bq_1 + a_1, \quad 0 \leq a_1 < b.$$

Qe te formulojme algoritmin e Euklidit le te vertetojme nje veti te PMP.

Theorem 2.7 *Le te jete $a > b$ dhe $a = bq + r$, ku $0 \leq r < b$. Atehere $PMP(a, b) = PMP(b, r)$.*

Vertetim

Le te jete $c = PMP(a, b)$ dhe $d = PMP(b, r)$. Nga fakti se $a : c$ dhe $b : c$ dhe barazimi $r = a - bq$, rrjedh se $r : c$. Prandaj $d : c$ qe domethene $d \geq c$.

ne anen tjetër meqenese $b : d$ dhe $r : d$ rrjedh se $a = bq + r : d$, qe domethene se edhe $c : d$. Perfundojme se $c \geq d$. Rrjedhimisht $c = d$.

Nga teorema paraprake kemi

$$c = PMP(a, b) = PMP(b, a_1).$$

Pastaj $b = a_1q_2 + a_2$, ku $0 \leq a_2 < a_1$. Prandaj

$$c = PMP(a_1, a_2).$$

Duke vazhduar proceduren paraprake, mbas nje numri te fundme hapash arrijme deri te numri $a_{k+1} = 0$. Ne ate rast $a_{k-1} = a_kq_k$ the

$$c = PMP(a_1, a_2) = PMP(a_2, a_3) = \dots = PMP(a_k, a_{k-1}) = a_k$$

Ja te ilustrojme algoritmin paraprak ne rastin e numrave $a = 300$ dhe $b = 120$. Kemi $a > b$ dhe $a = 2 \cdot b + 60$, gjegjesisht $300 = 2 \cdot 120 + 60$ ku $60 < 120$. ne fund $120 = 2 \cdot 60$. Nga ketu rrjedh se

$$PMP(300, 120) = PMP(120, 60) = 60.$$

2.2 Edhe disa veti te PMP

1. $PMP(a, b) = PMP(b, a)$.
2. Nëse $PMP(a, b) = 1$, atëhere $PMP(ak, bk) = ck$.
3. Nëse $PMP(a, b) = k$, atëhere $PMP(a/k, b/k) = 1$.

3 Shumëfishi më i vogël i përbashkët i dy numrave SHVP.

Përkufizim. Themi se numri c është shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave natyrorë a dhe b në qoftë se numri c i plotëson këto dy veti.

1. $c : a$ dhe $c : b$.
2. Nëse $d : a$ dhe $d : b$, atëherë $d : c$.

Shumëfishin më të vogël të përbashkët të dy numrave a dhe b e shënojmë me $c = SHVP(a, b)$ ose shkurtimisht nëprmet simbolit $[a, b]$.

Theorem 3.1 Për dy numra të çfarëdoshëm natyrorë a dhe b ka vend barazimi

$$[a, b] \cdot (a, b) = ab.$$

Vërtetimi.

Le të jetë

$$x = \frac{ab}{(a, b)}.$$

Tani kemi $x : a$ dhe $x : b$, prandaj nga përkufizimi i shumëfishit më të vogël të përbashkët rrjedh se $x : [a, b]$. Prandaj ekziston numri natyror k i tillë që

$$x = k[a, b].$$

Nga barazimi

$$\frac{ab}{(a, b)} = k[a, b]$$

rrjedh se

$$a = \frac{[a, b]}{b} \cdot k(a, b)$$

dhe

$$b = \frac{[a, b]}{a} \cdot k(a, b).$$

Prandaj

$$a : k(a, b) \text{ dhe } b : k(a, b).$$

Nga vetia e dytë perkufizuese e PMP rrjedh se

$$(a, b) : k(a, b).$$

Prandaj $(a, b) \geq k(a, b)$. Rrjedhimisht $k = 1$, çfarë duhej të vërtetohet sepse në këtë rast kemi $x = [a, b]$.

Shembulli 3.2 Le të jetë $a = 24$ dhe $b = 30$. Te gjejme $[a, b]$. Nga barazimi $[a, b] = ab/(a, b)$, dhe $(a, b) = 6$, rrjedh se $[a, b] = 4 \cdot 30 = 120$.

Theorem 3.3 Nese

$$n = p_1^{q_1} \cdot \dots \cdot p_k^{q_k},$$

dhe

$$m = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k},$$

atëherë

$$SHVP(m, n) = p_1^{\max\{q_1, r_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\max\{q_k, r_k\}}.$$

Le te percaktojme $SHVP(120, 300)$ duke zhatuar teoremen paraprake. Kemi

$$120 = 2 \cdot 60 = 2^2 \cdot 30 = 2^3 \cdot 15 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

dhe

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2.$$

Prandaj

$$SHVP(120, 300) = 2^{\max\{2,3\}} \cdot 3^{\max\{1,1\}} \cdot 5^{\max\{1,2\}} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600.$$

4 Disa kritere plotpjesëtimit

Ne kete njesi mesimore kemi $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = \sum_{k=0}^n a_k 10^k$.

4.1 Plotpjesëtueshmëria me numrin 2

Numri x plotpjesëtohet me numrin 2 atehere dhe vetem atehere kur shifra e fundit (gjegjesisht shifra e njesheve) e keti numrit a_0 eshte numer çift, d.m.th. $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Qe te vertetojme nje gje te tille vime re se $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 \cdot 10 + a_0 = 2 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_1 \cdot 5) + a_0$. Meqenese $2 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_1 \cdot 5)$ eshte numer çift, sepse eshte faktor i numrit 2, rrhedh se ai plotpjesetohet me 2. Mbetet qe te verifikohet pohimi nese $a_0 : 2$. The $a_0 : 2$ atehere dhe vetem atehere kur $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

4.2 Plotpjesëtueshmëria me numrin 5

Si ne rastin e plotpjesëtimit me numrin 2, kemi $x = 5 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_1 \cdot 2) + a_0$. Meqenese $5 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_1 \cdot 2)$ plotpjesëtohet me 5, mbetet te provohet nese a_0 plotpjesetohet me 5. Dhe nje gje e tille ndodh atehere dhe vetem atehere kur $a_0 = 0$ ose $a_0 = 5$.

4.3 Plotpjesëtueshmëria me numrin 10

Meqenese $x = 10 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_1) + a_0$, rrjedh se $c : 10$ atehere dhe vetem atehere kur $a_0 = 0$.

4.4 Plotpjesëtueshmëria me numrin 4

Meqenese $x = 100 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_3) + a_1 a_0 = 4 \cdot 25 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_2)$, rrjedh se $x : 4 \Leftrightarrow a_1 a_0 : 4$. Dmth kriteri i plotpjesetimit me 4 sillet ne kriterin e plotpjesetimit te numrit dyshifror te formuar nga dy shifrat e fundit te tij te plotesohet me 4.

per shembull, numri $x = 873878732x$ plotpestohet me 4 atehere dhe vetem atehere kur $x \in \{0, 4, 8\}$, sepse numrat dyshifrore 20, 24, 28 plotpjesetohen me 4.

4.5 Plotpjesëtueshmëria me numrin 8

Meqenese $x = 1000 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_3) + a_2 a_1 a_0 = 8 \cdot 125 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_3)$, rrjedh se $x : 8 \Leftrightarrow a_2 a_1 a_0 : 8$. Dmth kriteri i plotpjesetimit me 8 sillet ne kriterin e plotpjesetimit te numrit treshifror te formuar nga tri shifrat e fundit te tij te plotesohet me 8.

per shembull, numri $x = 873878732x$ plotpestohet me 8 atehere dhe vetem atehere kur $x \in \{0, 8\}$, sepse numrat treshifror 320, 328 plotpjesetohen me 8.

4.6 Plotpjesetueshmeria me 3 dhe 9

Le te vertetojme paraprakisht nje leme

Lemma 4.1 *Per cdo numer natyror n , $10^n - 1 : 9$.*

Vertetimi. Meqenese $10^n - 1 = 9 \dots 9 = 9 \cdot (1 \dots 1)$, ku shifra 9 gjegjesisht 1 paraqitet n here, rrjedh se $10^n - 1 : 9$.

Tani mund te formulojme kriterin e plotpjesëtimit me 9. Ne fillim kemi $x = \sum_{k=0}^n a_k 10^k = \sum_{k=0}^n a_k ((10^k - 1) + 1) = \sum_{k=0}^n a_k (10^k - 1) + \sum_{k=0}^n a_k = A + B$, ku

$$A = \sum_{k=0}^n a_k (10^k - 1)$$

dhe

$$B = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Meqenese $10^k - 1$ plotpjesetohet me 9 per cdo k , rrjedh se numri A plotpjesetohet me 9. Mbetet te kontyrollohet nese numri B qe paraqet shumen e shifrave te ketij numri te plotpjesetohet me 3 ose me 9, meqenese A plotpjesetohet natyrisht me 3, ngase plotpjesetohet me 9.

Shembulli 4.2 *Te kontrollojme nese numri $x = 126562a3873873b$ plotpjesetohet me 3 ose me 9.*

Njehsojme shumen e shifrave $B = 1 + 2 + 6 + 5 + 6 + 2 + a + 3 + 8 + 7 + 3 + 8 + 7 + 3 + b = 61 + a + b = 63 + a + b - 2$. Pra duhet te gjejme te gjitha shifrat e numrave a dhe b ashtu qe $a + b - 2$ te plotpjesetohet me 3. Pastaj te gjejme te gjithë chiftet e numrave a dhe b ashtu qe numri $a + b - 2$ te plotpjesetohet me 9.

Per 3 kemi me shume zgjidhje: $(a, b) \in \{(0, 2), (0, 5), (0, 8), (1, 1), (1, 4), (1, 7), (2, 0), (2, 3), (2, 5), (2, 8), (3, 2), (3, 5), (3, 8), (4, 1), (4, 4), (4, 7), (5, 0), (5, 3), (5, 6), (5, 9), (6, 2), (6, 5), (6, 8), (7, 1), (7, 4), (7, 7), (8, 0), (8, 3), (8, 6), (8, 9), (9, 1), (9, 4), (9, 7)\}$.

Per numrin 9 kemi me pak zgjidhje dhe ato jane

$(a, b) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)\}$.

5 Numrat e plotë

Ekuacioni

$$b + x = a \quad (1)$$

per $b > a$ nuk ka zgjidhje ne bashkesine \mathbf{N} , gjegjesisht nuk ekziston numri natyror x i tille qe barazimi (1) te jete i sakte. Ky eshte motivi i pare qe bashkesia e numrave natyrore te plotesohet (zgjerohet) me nje bashkesi numrash, ashtu qe ekuacioni (1) te kete zgjidhje. Zgjidhjen e ekuacionit (1) do ta shenojme me $x = a - b$, mirepo nje veprimi i tille tani nuk esht i lejueshem, qe si rrjedhim na detyron qe shprehjen $a - b$ ta zevendesojme me çiftin (a, b) . Per chfar behet fjale do te lexoni ne vazhdim.

Le të jete \sim relacioni ne bashkësinë $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ i perkufizuar siç vijon

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'.$$

Le te vertetojme se reacioni \sim eshte relacion ekuivalence ne bashesine $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$.

1. Vetia refleksive. $(a, b) \sim (a, b)$ sepse $a + b = b + a$ (nga vetia komutative e mbledhjes se numrave).
2. Vetia simetrike. $(a, b) \sim (a', b') \Rightarrow (a', b') \sim (a, b)$ sepse $a + b' = b + a' \Rightarrow a' + b = b' + a$.
3. Vetia tranzitive. $(a, b) \sim (a', b') \wedge (a', b') \sim (a'', b'') \Rightarrow (a, b) \sim (a'', b'')$ sepse $a + b' = b + a' \wedge a' + b'' = b' + a'' \Rightarrow a + b' + a' + b'' = b + a' + b' + a''$. Prandaj $a + b'' = b + a''$.

Cdo relacion ekuivalence e ndan bashkesine perkatese ne klasa ekuivalence. Bashkesia e klasave te ekuivalences e formojne bashkesine faktor e cila ne kete rast paraqet bashkesine e numrave te plote te cilen e shenojme nepermjet simbolit \mathbb{Z} . Pra

$$\mathbb{Z} = \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 / \sim = \{\overline{n, m} : n, m \in \mathbf{N}_0\} = \{\overline{(n, 0)} : n \in \mathbf{N}_0\} \cup \{\overline{(0, n)} : n \in \mathbf{N}_0\}.$$

Elementin $\overline{(0, 0)}$ e shenojme shkurtimisht me 0

Elementi $\overline{(0, 0)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin kete bashkesi pambarimisht te madhe $\{(0, 0), (1, 1), \dots, (n, n), \dots\}$ dhe e shenojme shkurtimisht me 0 (ky element nuk perputhet formalisht me elementin zero nga bashkesia \mathbf{N}_0).

Elementi $\overline{(1, 0)} \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin kete bashkesi pambarimisht te madhe $\{(1, 0), (2, 1), \dots, (n+1, n), \dots\}$, Kete numer e shenojme shkurtimisht me 1.

E keshtu me radhe, elementi $\overline{(m, 0)} \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin kete bashkesi pambarimisht te madhe $\{(m, 0), (m+1, 1), \dots, (m+n, n), \dots\}$, Kete numer e shenojme shkurtimisht me m .

Elementi $\overline{(0, 1)} \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin kete bashkesi pambarimisht te madhe $\{(0, 1), (1, 2), \dots, (n, n+1), \dots\}$, Kete numer e shenojme shkurtimisht me -1 .

Prandaj

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, m, -m, \dots\}.$$

E keshtu me radhe, elementi $\overline{(0, m)} \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin kete bashkesi pambarimisht te madhe $\{(0, m), (1, 1+m), \dots, (n, n+m), \dots\}$, Kete numer e shenojme shkurtimisht me $-m$.

Bashkesia \mathbb{Z} e numrave te plotë e perbehet nga bashkesia e numrave pozitivë, negativë dhe zero.

5.0.1 Shtrirja e bashkesise \mathbf{N} ne bashkesine \mathbb{Z} .

Nenbashkesia $\mathbf{N}' = \{\overline{(n, 0)} : n \in \mathbf{N}_0\}$ e bashkesise \mathbb{Z} identifikohet me bashkesine \mathbf{N} , ashtu qe numrat e plote $\overline{(n, 0)}$ identifikohen me numrat n per cdo n .

5.1 Mbledhja e numrave të plotë

Shuma e numrave te plote $a = \overline{(n, m)}$ dhe $b = \overline{(k, l)}$ eshte numri i plote

$$c = \overline{(n+k, m+l)}.$$

Le te vertetojme se ky perkufizim eshte korrekt, dmth nuk varet nga perfaqesuesi i klases.

E zeme se $a = \overline{(n', m')}$ dhe $b = \overline{(k', l')}$ d.m.th.

$$n + m' = m + n' \quad k + l' = l + k'. \quad (2)$$

Duhet te vertetojme se

$$\overline{(n+k, m+l)} = \overline{(n'+k', m'+l')}.$$

Relacioni i fundit eshte ekuivalent me barazimin

$$n + k + m' + l' = m + l + n' + k',$$

i cili rrjedh nga relacionet (2).

5.2 Vetite e mbledhjes

1. Vetia komutative. $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b = b + a$. E zeme se $a = \overline{(n, m)}$ dhe $b = \overline{(k, l)}$. Barazimi $a + b = b + a$ eshte ekuivalent me barazimet

$$n + k = k + n, \quad m + l = l + m.$$

Barazimet e efundit rrjedhin nga vetia komutative e mbledhjes se numrave nagtyrorë.

2. Vetia asociative. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Elementi neutral. $\forall a \in \mathbf{Z}, a + 0 = a = 0 + a$.
4. Elementi invers i mbledhjes. $\forall a \in \mathbf{Z}$, ekziston $b = -a \in \mathbf{Z}$, i tille qe $a + b = 0$. Nese $a = \overline{(m, n)}$, atehere $b = -a = \overline{(n, m)}$. Ne te vertete $a + b = \overline{(a + m, m + n)} = 0$.

5.3 Shumezimi i numrave te plote

Prodhimi i numrave te plote $a = \overline{(n, m)}$ dhe $b = \overline{(k, l)}$ eshte numri i plote

$$c = \overline{(nk + ml, nl + mk)}.$$

Le te vertetojme se ky perkufizim eshte korrekt, dmth nuk varet nga perfaqesuesi i klases.

E zeme se $a = \overline{(n', m')}$ dhe $b = \overline{(k', l')}$ d.m.th.

$$n + m' = m + n' \quad k + l' = l + k'. \quad (3)$$

Nga (3) rrjedh se

$$n(k + l') = n(l + k'), \quad m(l + k') = m(k + l'), \\ (m + n')l' = (n + m')l', \quad (n + m')k' = (m + n')k'.$$

Duke i mbledh keto barazime perftojme

$$nk + ml + n'l' + m'k' = nl + mk + n'k' + m'l'.$$

Nga ketu perftojme

$$\overline{(nk + ml, nl + mk)} = \overline{(n'k' + m'l', n'l' + m'k')}.$$

Keshtu vertetuam se shumezimi eshte korrekt.

5.4 Vetite e shumezimit

1. Vetia komutative. $\forall a, b \in \mathbb{Z}, ab = ba$. E zeme se $a = \overline{(n, m)}$ dhe $b = \overline{(k, l)}$. Barazimi $ab = ba$ eshte ekuivalent me barazimet

$$\overline{(nk + ml, nl + mk)} = \overline{(kn + lm, ln + mk)}$$

qe eshte barazim i thjeshte.

2. Vetia asociative. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Edhe ky barazim vertetohet ne menyere te ngjashme si ai paraprak
3. Elementi neutral. $\forall a \in \mathbf{Z}, a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$. Nese $a = \overline{(n, m)}$, dhe $1 = \overline{(1, 0)}$, atehere $a \cdot 1 = \overline{(n \cdot 1 + m \cdot 0, m \cdot 1 + n \cdot 0)} = \overline{(n, m)}$.
4. Vetia shperndarese. Per çdo tre numra natyrorë $a, b, c \in \mathbb{Z}$ kemi $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Barazimi paraprak rrjedh nga barazimi i ngjashem per numrat natyrorë prandaj nuk e vertetojme.

5.5 Zbritja e numrave te plote

Le te jete $a = \overline{(n, m)}$ dhe $b = \overline{(k, l)}$. bejme pekufizimin

$$a - b = \overline{(n + l, m + k)}.$$

Tani te kthehemi te ekuacioni (1) dhe vime re se ky ekuacion ka zgjidhje ne bashkesine \mathbb{Z} , sepse $a - b \in \mathbf{Z}$, ne qofte se $a, b \in \mathbb{Z}$. Meqense $\mathbf{N} \subset \mathbb{Z}$, rrjedh se ja kemi arritur qellimit fillestar qe te zgjidhim ekuacionin (1).

Në bazë te pohimeve paraprake mund te formulojme teoremen e mëposhtme.

Theorem 5.1 *Struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ është unazë me njësh.*

Me fjalë te tjera. Per çdo tre numra te plote a, b, c kane vend barazimet e meposhtme.

1. $a + b \in \mathbb{Z}$, (Mbledhja eshte veprim i mbyllur)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$, (Mbledhja eshte shoqeruese)
3. $a + 0 = 0 + a = a$, (Elementi neutral i mbledhjes eshte numri 0)
4. $a - a = 0$, (Ekziston elementi i anasjellet i secilit numer)
5. $a \cdot b \in \mathbb{Z}$, (Shumezimi eshte veprim i mbyllur)
6. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, (Shumezimi ploteson vetine shoqeruese)
7. $a \cdot b = b \cdot a$, (Shumezimi eshte komutativ)
8. $a \cdot 1 = a$, (Numri 1 eshte elementi neutral i shumezimit)
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Vlen vetia shperdnarese)
10. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. (Vlen vetia shperdnarese)

5.6 Radhitja e numrave te plote dhe boshti numerik

Them i se numri i plote $a = \overline{(n, m)}$ eshte me i vogel ose i barabarte se numri i plote $b = \overline{(k, l)}$ dhe shenojme $a \leq b$, ne qofte se $n + l \leq m + k$.

Ky relacion eshte relacion radhitjeje ne bashkesine \mathbb{Z} .

Ne te vertet, kane vend vetite ne vazhdim

1. Vetia refleksive. Per $a = \overline{(n, m)}$, $a \leq a$, sepse $n + m \leq m + n$.
2. Vetia antisimetrike. Per $a = \overline{(n, m)}$ dhe $b = \overline{(k, l)}$, kemi $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$, sepse, $n + l \leq m + k$ dhe $k + m \leq l + n$, rrjedh se $a = b$.
3. Vetia tranzitive. Per $a = \overline{(n, m)}$, $b = \overline{(k, l)}$ dhe $c = \overline{(i, j)}$, $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$. Ne te vertet, nga $n + l \leq m + k \wedge k + j \leq l + i$, rrjedh se $n + l + k + j \leq m + k + l + i$ d.m.th. $n + j \leq m + k$

Numrat me te vegjel se 0 jane negative, kurse ata me te medhenj se 0 jane pozitive. Numrat zakonisht shenohen ne nje drejtez (qe e quajme bosht numerik) te drejtuar me nje shigjete nga ana e majte ne te djathte.

