Ligjerata per Javet 6, 7,8 dhe 9

David Kalaj, Davidkalaj@gmail.com

April 2, 2020

1 Plotpjesëtueshmeria

Themi se numri natyror a plotpjesëtohet me numrin natyror b nëse ekziston numri natyror c i tillë që $a = b \cdot c$. Këte fakt e shënojmë simbolikisht $a \vdots b$ ose $b|a$.

Vetitë.

1. Nëse $a \vdots b$ dhe $a \neq 0$ atëherë $a \geq b$.
2. Nëse $a \vdots b$ dhe $b \vdots a$ atëherë $a = b$.
3. Nëse $a \vdots b$ dhe $b \vdots c$ atëhere $a \vdots c$.
4. Nëse $a \vdots d$ dhe $b \vdots d$ atëherë $(a + b) \vdots c$ dhe $(a - b) \vdots c$ për $a \geq b$.
5. Nëse $a \vdots b$ dhe $c \in \mathbf{N}$, atëhere $ac \vdots b$.
6. Nëse $a_1, \dots a_n \vdots b$ dhe $c_1, \dots c_n \in \mathbf{N}$, atëhere $(a_1b_1 + \dots a_nb_n) \vdots b$,

Le të vertetojmë p.sh. vetiné e 3). Meqenëse $a \vdots b$, rrjedh se $a = a_1b$. Meqenëse $b \vdots c$, rrjedh se $b = b_1c$. Nga këtu rrjedh se $a = a_1b_1c$, ku a_1b_1 është numër natyror si prodhim i dy numrave natyrorë. Në mënyrë të ngjashme vërtetohen edhe vetitë e tjera.

2 Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i dy numrave PMP.

Përkufizim. Themi se numci c është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave natytorë a dhe b në qoftë se numri c i plotëson këto dy veti.

1. $a \vdots c$ dhe $b \vdots c$.
2. Nëse $a \vdots d$ dhe $b \vdots d$, atëherë $c \vdots d$.

Pjesëtuesim më të madh të peprbashkët te numrave a dhe b e shënojmë me $c = PMP(a, b)$ ose shkurtimisht nëprmjet simbolit (a, b).

Shembulli 2.1 *Le të jetë* $a = 120$ *dhe* $b = 300$. *Të percaktojmë* $PMP(a, b)$. *Pjesëtuesit e numrit a janë* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$, *kurse pjesëtuesit e numrit b janë* $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, \dots, 60, 100, 150, 300\}$. *Numri më i madh i përbashët i bashkësive A dhe B është numri* 60, *prandaj* $PMP(a, b) = 60$.

Metoda e zbatuar paraprakisht nuk është praktike prandaj zbatojmë dy metoda të tjera që bazohen në:

1. Teoremën themelore të aritmetikës
2. Algoritmin e Euklidit.

Qe te formulojmë teoremën themelore të aritmetikës le të perkufizojmë numrat e thjeshtë.

Perkufizimi 2.2 *Themi se numri natyror* $n \neq 1$ *është i thjeshtë, në qoftë se plotpjesëtohet vetëm me numrat* 1 *dhe* n.

Numrat e thjeshtë i shënojmë me P. Pra

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_k, \dots\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}.$$

Kjo bashkësi numrash është bashkësi e pafundme. Vërtetimi mund të bëhet nëpërmjet

Teorema 2.3 (Teorema themelore e aritmetikes) *Çdo numër natyror n mund të shënohet në trajtën e produktit të numrave të thjeshtë. Me fjalë të tjera, ekzistojnë numrat e thjeshtë* $p_1 < p_2 < \dots, p_k$ *dhe numrat natyrorë ose zero* $q_1, \dots q_k$ *ashtu që*

$$n = p_1^{q_1} \cdot \dots p_k^{q_k}.$$

Representimi paraprak eshte i vetem.

Teorema 2.4 *Nese*

$$n = p_1^{q_1} \cdot \dots p_k^{q_k},$$

dhe

$$m = p_1^{r_1} \cdot \dots p_k^{r_k},$$

atëherë

$$PMP(m, n) = p_1^{\min\{q_1, r_1\}} \cdot \dots p_k^{\min\{q_k, r_k\}}.$$

Le te percaktojme $PMP(120, 300)$ duke zhatuar teoremen paraprake. Kemi

$$120 = 2 \cdot 60 = 2^2 \cdot 30 = 2^3 \cdot 15 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

dhe

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2.$$

Prandaj

$$PMP(120, 300) = 2^{\min\{2,3\}} \cdot 3^{\min\{1,1\}} \cdot 5^{\min\{1,2\}} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60.$$

Teorema 2.5 *Bashkësi e numrave të thjeshtë është e pafundme.*

Vertetimi. Le te jete n nje numer i çfarëdoshëm dhe marrim numrat $p_1 < p_2 \cdots < p_n$ e thjeshte te renditur prej me te voglit deri te me i madhi duke i kyçur te gjithe numrat e thjeshtë . Numri $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$, eshte më i madh se secili nga numrat $p_1, \ldots, p_n$. Madje numri x nuk plotpjesëtohet me asnjenin nga keta numra $p_1, \ldots, p_n$. Pra numri x eshte i thjeshte ose ne baze te teoremes themelore te aritmetikes pjesetohet me numra te thjeshte te ndryshem nga numrat $p_1, \ldots, p_n$. Nga ketu rrjedh se ekzsiton edhe numri i thjeshte p_{n+1}. Si rrjedhim perfundojme se bashkesia P eshte pambarimisht e madhe.

2.1 Algoritmi i Euklidit

Ky algoritem bazohet ne teoremen e meposhtme

Teorema 2.6 *Per çdo dy numra natyrore a dhe b per te cilet vlen $a > b$ ekzistojne numrat natyror te vetem a_1 dhe q_1 ashtu qe*

$$a = bq_1 + a_1, \quad 0 \leq a_1 < b.$$

Qe te formulojmë algoritmin e Euklidit le te vertetojmë nje veti te PMP.

Teorema 2.7 *Le te jete $a > b$ dhe $a = bq + r$, ku $0 \leq r < b$. Ateherë $PMP(a, b) = PMP(b, r)$.*

Vertetim

Le te jete $c = PMP(a, b)$ dhe $d = PMP(b, r)$. Nga fakti se $a \vdots c$ dhe $b \vdots c$ dhe barazimi $r = a - bq$, rrjedh se $r \vdots c$. Prandaj $d \vdots c$ qe domethene $d \geq c$.

ne anen tjeter meqenese $b \vdots d$ dhe $r \vdots d$ rrjedh se $a = bq + r \vdots d$, qe domethene se edhe $c \vdots d$. Perfundojme se $c \geq d$. Rrjedhimisht $c = d$.

Nga teorema paraprake kemi

$$c = PMP(a, b) = PMP(b, a_1).$$

Pastaj $b = a_1 q_2 + a_2$, ku $0 \leq a_2 < a_1$. Prandaj

$$c = PMP(a_1, a_2).$$

Duke vazhduar proceduren paraprake, mbas nje numri te fundme hapash arrijme deri te numri $a_{k+1} = 0$. Ne ate rast $a_{k-1} = a_k q_k$ the

$$c = PMP(a_1, a_2) = PMP(a_2, a_3) = \cdots = PMP(a_{k-1}, a_k) = a_k.$$

Ja te ilustrojme algoritmin paraprak ne rastin e numrave $a = 300$ dhe $b = 120$. Kemi $a > b$ dhe $a = 2 \cdot b + 60$, gjegjesisht $300 = 2 \cdot 120 + 60$ ku $60 < 120$.

ne fund $120 = 2 \cdot 60$. Nga ketu rrjedh se

$$PMP(300, 120) = PMP(120, 60) = 60.$$

2.2 Edhe disa veti te PMP

1. $PMP(a, b) = PMP(b, a)$.
2. Nëse $PMP(a, b) = 1$, atëhere $PMP(ak, bk) = ck$.
3. Nése $PMP(a, b) = k$, atëhere $PMP(a/k, b/k) = 1$.

3 Shumëfishi më i vogël i përbashkët i dy numrave $SHVP$.

Përkufizim. Themi se numci c është shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave natytorë a dhe b në qoftë se numri c i plotëson këto dy veti.

1. $c \vdots a$ dhe $c \vdots b$.
2. Nëse $d \vdots a$ dhe $d \vdots b$, atëherë $d \vdots c$.

Shumëfishin më të vogël të përbashkët të dy numrave a dhe b e shënojmë me $c = SHVP(a, b)$ ose shkurtimisht nëprmjet simbolit $[a, b]$.

Teorema 3.1 *Për dy numra të çfarëdoshëm natyrorë a dhe b ka vend barazimi*

$$[a, b] \cdot (a, b) = ab.$$

Vërtetimi.
Le të jetë

$$x = \frac{ab}{(a, b)}.$$

Tani kemi $x \vdots a$ dhe $x \vdots b$, prandaj nga përkufizimi i shumëfishit më të vogël të përbashkét rrjedh se $x \vdots [a, b]$. Prandaj ekziston numri natyror k i tillë që

$$x = k[a, b].$$

Nga barazimi

$$\frac{ab}{(a, b)} = k[a, b]$$

rrjedh se

$$a = \frac{[a, b]}{b} \cdot k(a, b)$$

dhe

$$b = \frac{[a, b]}{a} \cdot k(a, b).$$

Prandaj

$$a \vdots k(a, b) \text{ dhe } b \vdots k(a, b).$$

Nga vetia e dytë perkufizuese e PMP rrjedh se

$$(a, b) \vdots k(a, b).$$

Prandaj $(a, b) \geq k(a, b)$. Rrjedhimisht $k = 1$, çfarë duhej të vërtetohet sepse në ketë rast kemi $x = [a, b]$.

Shembulli 3.2 *Le të jetë* $a = 24$ *dhe* $b = 30$. *Te gjejme* $[a, b]$. *Nga barazimi* $[a, b] = ab/(a, b)$, *dhe* $(a, b) = 6$, *rrjedh se* $[a, b] = 4 \cdot 30 = 120$.

Teorema 3.3 *Nese*

$$n = p_1^{q_1} \cdot \dots \cdot p_k^{q_k},$$

dhe

$$m = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k},$$

atëherë

$$SHVP(m, n) = p_1^{\max\{q_1, r_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\max\{q_k, r_k\}}.$$

Le te percaktojme $SHVP(120, 300)$ duke zbatuar teoremen paraprake. Kemi

$$120 = 2 \cdot 60 = 2^2 \cdot 30 = 2^3 \cdot 15 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

dhe

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2.$$

Prandaj

$$SHVP(120, 300) = 2^{\max\{2,3\}} \cdot 3^{\max\{1,1\}} \cdot 5^{\max\{1,2\}} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600.$$

4 Disa kritere plotpjesëtimit

Ne kete njesi mesimore kemi $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$.

4.1 Plotpjesëtueshmëria me numrin 2

Numri x plotpjesëtohet me numrin 2 atehere dhe vetem atehere kur shifra e fundit (gjegjesisht shifra e njesheve) e keti numrit a_0 eshte numer çift, d.m.th. $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Qe te vertetojme nje gje te tille vime re se $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 \cdot 10 + a_0 = 2 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_1 \cdot 5) + a_0$. Meqenese $2 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_1 \cdot 5)$ eshte numer çift, sepse eshte faktor i numrit 2, rrhedh se ai plotpjesetohet me 2. Mbetet qe te verifikohet pohimi nese $a_0 \vdots 2$. Pra $a_0 \vdots 2$ atehere dhe vetem atehere kur $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Numri x plotpjesëtohet qe plotpjesetohet me numrin 2 eshte çift.

4.2 Plotpjesëtueshmëria me numrin 5

Si ne rastin e plotpjesetimit me numrin 2, kemi $x = 5 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_1 \cdot 2) + a_0$. Meqenese $5 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_1 \cdot 2)$ plotpjesëtohet me 5, mbetet te provohet nese a_0 plotpjesetohet me 5. Dhe nje gje e tille ndodh atehere dhe vetem atehere kur $a_0 = 0$ ose $a_0 = 5$.

4.3 Plotpjesëtueshmëria me numrin 10

Meqense $x = 10 \cdot \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_1) + a_0$, rrjedh se $c \vdots 10$ atehere dhe vetem atehere kur $a_0 = 0$.

4.4 Plotpjesëtueshmëria me numrin 4

Meqenese $x = 100 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_3) + a_1 a_0 = 4 \cdot 25 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_2)$, rrjedh se $x \vdots 4 \Leftrightarrow a_1 a_0 \vdots 4$. Dmth kriteri i plotpjesetimit me 4 sillet ne kriterin e plotpjestimit te numrit dyshifror te formuar nga dy shifrat e fundit te tij te plotesohet me 4.

Per shembull, numri $x = 873878732x$ plotpestohet me 4 atehere dhe vetem atehere kur $x \in \{0, 4, 8\}$, sepse numrat dyshifrore 20, 24, 28 plotpjesetohen me 4.

4.5 Plotpjesëtueshmëria me numrin 8

Meqenese $x = 1000 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_3) + a_2 a_1 a_0 = 8 \cdot 125 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_3)$, rrjedh se $x \vdots 8 \Leftrightarrow a_2 a_1 a_0 \vdots 8$. Dmth kriteri i plotpjesetimit me 8 sillet ne kriterin e plotpjestimit te numrit treshifror te formuar nga tri shifrat e fundit te tij te plotesohet me 8.

per shembull, numri $x = 873878732x$ plotpestohet me 8 atehere dhe vetem atehere kur $x \in \{0, 8\}$, sepse numrat treshifror 320, 328 plotpjesetohen me 8.

4.6 Plotpjesetueshmeria me 3 dhe 9

Le te vertetojme paraprakisht nje leme

Lemma 4.1 *Per çdo numër natyror n,* $10^n - 1 \vdots 9$.

Vertetimi. Meqenese $10^n - 1 = 9 \ldots 9 = 9 \cdot (1 \ldots 1)$, ku shifra 9 gjegjesisht 1 paraqitet n here, rrjedh se $10^n - 1 \vdots 9$.

Tani mund te formulojme kriterin e plotpjesëtimit me 9. Ne fillim kemi $x = \sum_{k=0}^n a_k 10^k = \sum_{k=0}^n a_k((10^k - 1) + 1) = \sum_{k=0}^n a_k(10^k - 1) + \sum_{k=0}^n a_k = A + B$, ku

$$A = \sum_{k=0}^n a_k(10^k - 1)$$

dhe

$$B = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Meqenese $10^k - 1$ plotpjesetohet me 9 per cdo k, rrjedh se numri A plotpjesetohet me 9. Mbetet te kontyrollohet nese numri B qe paraqet shumen e shifrave te ketij numri te plotpjesetohet me 3 ose me 9, meqenese A plotpjesetohet natyrisht me 3, ngase plotpjesetohet me 9.

Shembulli 4.2 *Te kontrollojme nese numri $x = 126562a3873873b$ plotpjesetohet me 3 ose me 9.*

Njehsojme shumen e shifrave $B = 1 + 2 + 6 + 5 + 6 + 2 + a + 3 + 8 + 7 + 3 + 8 + 7 + 3 + b = 61 + a + b = 63 + a + b - 2$. Pra duhet te gjejme te gjitha shifrat e numrave a dhe b ashtu qe $a + b - 2$ te plotpjesetohet me 3. Pastaj te gjejme te gjithe chiftet e numrave a dhe b ashtu qe numri $a + b - 2$ te plotpjesetohet me 9.

Per 3 kemi me shume zgjidhje: $(a,b) \in \{(0,2),(0,5),(0,8),(1,1),(1,4),(1,7),(2,0),(2,3),(2,5),$ $(2,8),(3,2),(3,5),(3,8),(4,1),(4,4),(4,7),(5,0),(5,3),(5,6),(5,9),(6,2),(6,5),(6,8),(7,1),$ $(7,4),(7,7),(8,0),(8,3),(8,6),(8,9),(9,1),(9,4),(9,7)\}$.

Per numrin 9 *kemi me pak zgjidhje dhe ato jane* $(a,b) \in \{(0,2),(1,1),(2,0),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(6,5),(7,4),(8,3),(9,2)\}$.

5 Numrat e plotë

Ekuacioni

$$b + x = a \tag{1}$$

per $b > a$ nuk ka zgjidhje ne bashkesine $\mathbf{N}$, gjegjesusht nuk ekziston numri natyror x i tille qe barazimi (1) te jete i sakte. Ky eshte motivi i pare qe bashkesia e numrave natyrore te plotesohet (zgjerohet) me nje bashkesi numrash, ashtu qe ekuacioni (1) te kete zgjidhje. Zgjidhjen e ekuacionit (1) do ta shenojme me $x = a - b$, mirepo nje veprim i tille tani nuk esht i lejueshem, qe si rrjedhim na detyron qe shprehjen $a - b$ ta zevendesojme me çiftin (a,b). Per chfar behet fjale do te lexoni ne vazhdim.

Le të jete $\sim$ relacioni ne bashkësine $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ i perkufizuar siç vijon

$$(a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'.$$

Le te vertetojme se reacioni $\sim$ eshte relacion ekuivalence ne bashesine $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$.

1. Vetia refleksive. $(a,b) \sim (a,b)$ sepse $a + b = b + a$ (nga vetia komutative e mbledhjes se numrave).

2. Vetia simetrike. $(a,b) \sim (a',b') \Rightarrow (a',b') \sim (a,b)$ sepse $a + b' = b + a' \Rightarrow a' + b = b' + a$.

3. Vetia tranzitive. $(a,b) \sim (a',b') \wedge (a',b') \sim (a'',b'') \Rightarrow (a,b) \sim (a'',b'')$ sepse $a + b' = b + a' \wedge a' + b'' = b' + a'' \Rightarrow a + b' + a' + b'' = b + a' + b' + a''$. Prandaj $a + b'' = b + a''$.

Çdo relacion ekuivalence e ndan bashkesine perkatese ne klasa ekuivalence. Bashkesia e klasave te ekuivalences e formojne bashkesine faktor e cila ne kete rast paraqet bashkesine e numrave te plote te cilen e shenojme nepermjet simbolit $\mathbb{Z}$. Pra

$$\mathbb{Z} = \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 /_{\sim} = \{\overline{(n,m)} : n,m \in \mathbf{N}_0\} = \{\overline{(n,0)} : n \in \mathbf{N}_0\} \bigcup \{\overline{(0,n)} : n \in \mathbf{N}_0\}.$$

Elementin $\overline{(0,0)}$ e shenojme shkurtimisht me 0

Elementi $\overline{(0,0)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin kete bashkesi pambarimisht te madhe $\{(0,0),(1,1),\ldots,(n,n),\ldots\}$ dhe e shenojme shkurtimisht me 0 (ky element nuk perputhet formalisht me elementin zero nga bashkesia $\mathbf{N}_0$).

Elementi $\overline{(1,0)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin kete bashkesi pambarimisht te madhe $\{(1,0),(2,1),\ldots,(n+1,n),\ldots\}$, Kete numer e shenojme shkurtimish me 1.

E keshtu me radhe, elementi $\overline{(m,0)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin kete bashkesi pambarimisht te madhe $\{(m,0),(m+1,1),\ldots,(m+n,n),\ldots\}$, Kete numer e shenojme shkurtimish me m.

Elementi $\overline{(0,1)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin kete bashkesi pambarimisht te madhe $\{(0,1),(1,2),\ldots,(n,n+1),\ldots\}$, Kete numer e shenojme shkurtimish me -1.

Prandaj

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\ldots,m,-m,\ldots\}.$$

E keshtu me radhe, elementi $\overline{(0,m)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin kete bashkesi pambarimisht te madhe $\{(0,m),(1,1+m),\ldots,(n,n+m),\ldots\}$, Kete numer e shenojme shkurtimish me $-m$.

Bashkesia $\mathbb{Z}$ e *numvae te plotë* e perbehet nga bashkesia e numrave pozitivë, negativë dhe zero.

5.0.1 Shtrirja e bashkesise N ne bashkesine $\mathbb{Z}$.

Nenbashkesia $\mathbf{N}' = \{\overline{(n,0)} : n \in \mathbf{N}_0\}$ e bashkesise $\mathbb{Z}$ identifikohet me bashkesine $\mathbf{N}$, ashtu qe numrat e plote $\overline{(n,0)}$ identifikonen me numrat n per cdo n.

5.1 Mbledhja e numrave të plotë

Shuma e numrave te plote $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$ eshte numri i plote

$$c = \overline{(n+k,m+l)}.$$

Le te vertetojme se ky perkufizim eshte korrekt, dmth nuk varet nga perfaqesuesi i klases.

E zeme se $a = \overline{(n',m')}$ dhe $b = \overline{(k',l')}$ d.m.th.

$$n + m' = m + n' \quad k + l' = l + k'. \tag{2}$$

Duhet te vertetojme se

$$\overline{(n+k,m+l)} = \overline{(n'+k',m'+l')}.$$

Relacioni i fundit eshte ekuivalent me barazimin

$$n + k + m' + l' = m + l + n' + k',$$

i cili rrjedh nga relacionet (2).

5.2 Vetite e mbledhjes

1. Vetia komutative. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = b + a$. E zeme se $a = \overline{(n, m)}$ dhe $b = \overline{(k, l)}$. Barazimi $a + b = b + a$ eshte ekuivalent me barazimet

$$n + k = k + n, \quad m + l = l + m.$$

   Barazimet e efundit rrjedhin nga vetia komutative e mbledhjes se numrave nagtyrorë.

2. Vetia asociative. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3. Elementi neutral. $\forall a \in \mathbf{Z}$, $a + 0 = a = 0 + a$.

4. Elementi invers i mbledhjes. $\forall a \in \mathbf{Z}$, ekziston $b = -a \in \mathbf{Z}$, i tille qe $a + b = 0$. Nese $a = \overline{(m, n)}$, atehere $b = -a = \overline{(n, m)}$. Ne te vertete $a + b = \overline{(m + n, n + m)} = 0$.

5.3 Shumezimi i numrave te plote

.

Prodhimi i numrave te plote $a = \overline{(n, m)}$ dhe $b = \overline{(k, l)}$ eshte numri i plote

$$c = \overline{(nk + ml, nl + mk)}.$$

Le te vertetojme se ky perkufizim eshte korrekt, dmth nuk varet nga perfaqesuesi i klases.

E zeme se $a = \overline{(n', m')}$ dhe $b = \overline{(k', l')}$ d.m.th.

$$n + m' = m + n' \quad k + l' = l + k'. \tag{3}$$

Nga (3) rrjedh se
$n(k + l') = n(l + k')$, $m(l + k') = m(k + l')$,
$(m + n')l' = (n + m')l'$, $(n + m')k' = (m + n')k'$.
Duke i mbledh keto barazime perftojme

$$nk + ml + n'l' + m'k' = nl + mk + n'k' + m'l'.$$

Nga ketu perftojme

$$\overline{(nk + ml, nl + mk)} = \overline{(n'k' + m'l', n'l' + m'k')}.$$

Keshtu vertetuam se shumezimi eshte korrekt.

5.4 Vetite e shumezimit

1. Vetia komutative. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $ab = ba$. E zeme se $a = \overline{(n, m)}$ dhe $b = \overline{(k, l)}$. Barazimi $ab = ba$ eshte ekuivalent me barazimet

$$\overline{(nk + ml, nl + mk)} = \overline{(kn + lm, ln + kk)}$$

   qe eshte barazim i thjeshte.

2. Vetia asociative. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Edhe ky barazim vertetohet ne menyere te ngjashme si ai paraprak

3. Elementi neutral. $\forall a \in \mathbf{Z}$, $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$. Nese $a = \overline{(n, m)}$, dhe $1 = \overline{(1, 0)}$, atehere $a \cdot 1 = \overline{(n \cdot 1 + m \cdot 0, m \cdot 1 + n \cdot 0)} = \overline{(n, m)}$.

4. Vetia shperndarese. Per çdo tre numra natyrorë $a, b, c \in \mathbb{Z}$ kemi $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Barazimi paraprak rrjedh nga barazimi i ngjashem per numrat natyrorë prandaj nuk e vertetojme.

5.5 Zbritja e numrave te plote

Le te jete $a = \overline{(n, m)}$ dhe $b = \overline{(k, l)}$. Bëjmë pekufizimin

$$a - b = \overline{(n + l, m + k)}.$$

Tani te kthehemi te ekuacioni (1) dhe vime re se ky ekuacion ka zgjidhje ne bashkesine $\mathbb{Z}$, sepse $a - b \in \mathbf{Z}$, ne qofte se $a, b \in \mathbb{Z}$. Meqense $\mathbf{N} \subset \mathbb{Z}$, rrjedh se ja kemi arritur qellimit fillestar qe te zgjidhim ekuacionin (1).

Në bazë te pohimeve paraprake mund te formulojme teoremen e mëposhtme.

Teorema 5.1 *Struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ është unazë me element njesh (me elementin neutral ne lidhje me shumezimin).*

Me fjalë te tjera. Per çdo tre numra te plote a, b, c kane vend barazimet e meposhtme.

1. $a + b \in \mathbb{Z}$, *(Mbledhja eshte veprim i mbyllur)*
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$, *(Mbledhja eshte shoqeruese)*
3. $a + 0 = 0 + a = a$, *(Elementi neutral i mbledhjes eshte numri 0)*
4. $a - a = 0$, *(Ekziston elementi i anasjellet i secilit numer)*
5. $a \cdot b \in \mathbb{Z}$, *(Shumezimi eshte veprim i mbyllur)*
6. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, *(Shumezimi ploteson vetine shoqeruese)*
7. $a \cdot b = b \cdot a$, *(Shumezimi eshte komutativ)*
8. $a \cdot 1 = a$, *(Numri 1 eshte elementi neutral i shumezimit)*
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *(Vlen vetia shperdnarese)*
10. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. *(Vlen vetia shperdnarese)*

5.6 Radhitja e numrave te plote dhe boshti numerik

Themi se numri i plote $a = \overline{(n,m)}$ eshte me i vogel ose i barabarte se numri i plote $b = \overline{(k,l)}$ dhe shenojme $a \leq b$, ne qofte se $n + l \leq m + k$.

Ky relacion eshte relacion radhitjeje ne bashkesine $\mathbb{Z}$.

Ne te vertet, kane vend vetite ne vazhdim

1. Vetia refleksive. Per $a = \overline{(n,m)}$, $a \leq a$, sepse $n + m \leq m + n$.

2. Vetia antisimetrike. Per $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$, kemi $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$, sepse, $n + l \leq m + k$ dhe $k + m \leq l + n$, rrjedh se $n + l = m + k$, gjegjesisht $a = b$.

3. Vetia tranzitive. Per $a = \overline{(n,m)}$, $b = \overline{(k,l)}$ dhe $c = \overline{(i,j)}$, $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$. Ne te vertet, nga $n + l \leq m + k \wedge k + j \leq l + i$, rrjedh se $n + l + k + j \leq m + k + l + i$ d.m.th. $n + j \leq m + k$

Numrat me te vegjel se 0 jane negative, kurse ata me te medhenj se 0 jane pozitive. Numrat zakonisht shenohen ne nje drejtez (qe e quajme bosht numerik) te drejtuar me nje shigjete nga ana e majte ne te djathte.

$$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \longrightarrow$$

5.7 Vetitë e radhitjes së numrave te plotë

E zëmë se z, w, t janë numra të plotë. Ateherë kane vend keto veti

1. $z + w < z + t \Leftrightarrow w < t$,

2. $z + w > z + t \Leftrightarrow w > t$,

3. Ne qoftë se $z > 0$ atëherë $z \cdot w < z \cdot t \Leftrightarrow w < t$,

4. Ne qoftë se $z > 0$ atëherë $z \cdot w > z \cdot t \Leftrightarrow w > t$,

5. Ne qoftë se $z < 0$ atëherë $z \cdot w < z \cdot t \Leftrightarrow w > t$,

6. Ne qoftë se $z < 0$ atëherë $z \cdot w > z \cdot t \Leftrightarrow w < t$,

Le te provojmë pë shembull, vetine e parë. E zeme se $z = \overline{(a,b)}$, $w = \overline{(c,d)}$ dhe $t = \overline{(e,f)}$. Atehere $z+w = \overline{(a+c, b+d)}$ dhe $z+t = \overline{(a+e, b+f)}$. Nga ketu rrjedh se $z+w < z+t$ atehere dhe vetem atehere kur $a+c+b+f < b+d+a+e$, dhe nga monotoniteti i numrave natyrorë relacioni i fundit ështe ekuivalent me relacionin $c + f < d + e$ gjegjesisht me relacionin $w < t$.

5.8 Pjesëtimi pa mbetje e numrave të ploté

Themi se numri i plotë z plotpjesëtohet me numrin e plotë w ne qoftë se ekziston numri i plotë t i tillë që $z = w \cdot t$. Shenojmë simbolikisht $z \vdots w$. Numrin t e shenojme $t = z : w$ ose $t = \frac{z}{w}$.

Disa veti

1. nese $z \vdots w$, atehere kemi $(z : w) \cdot w = z$.

2. $(z \cdot w)/w = z$,

3. Nese $z \vdots t$ dhe $w \vdots t$ atehere edhe $(w \pm w) \vdots t$ dhe kemi $\frac{z \pm w}{t} = \frac{z}{t} \pm \frac{w}{t}$.

5.9 Vlera absolute e numrit të plotë

E zeme se $z \in \mathbb{Z}$ështe numër i plotë i çvarëdoshëm. Vlera absolute e numrit z shënohet me simbolin $|z|$. Numri $|z|$ ështe i barabartë me numrin z nese $z \geq 0$, dhe është i barabartë me numrin $-z$ nese $z < 0$. Këtë fjali përkufiyuese të vlerës absoulte e shñojmë shkurtimisht siç vijon:

$$|z| = \begin{cases} z, & \text{nese } z \geq 0; \\ -z, & \text{nese } z < 0. \end{cases}$$

5.9.1 Vetitë e vlerës absolute

E zeme se $z, w, t \in \mathbb{Z}$.

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

2. $|z + w| \leq |z| + |w|$,

3. $|z - w| \leq |z| + |w|$,

4. $|z| - |w| \leq |z| + |w|$,

5. Nese $z \vdots w$ atehere edhe $|z| \vdots |w|$ dhe kemi

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

6. $|z| \leq y \Leftrightarrow -y \leq z \leq y$

Le te vertetojme per shembull vetine e dyte (e cila ke emertimin *mosbarazimi i trekendeshit*). Sipar perkufizimit kemi $|z+w| = \begin{cases} z + w, & \text{nese } z + w \geq 0; \\ -(z + w), & \text{nese } z + w < 0. \end{cases}$ Meqenese $z \leq |z|$ dhe $w \leq |w|$, rrjedh se $z + w \leq |z| + |w|$. Ngjashem, $-z \leq |z|$ dhe $-w \leq |w|$, prandaj $-(z + w) \leq |z| + |w|$. Nga keto dy mosbarazime rrjedh se $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Vertetojme tani vetine e fundit. Nga $|z| \leq y$, rrjedh se $z \leq y$ dhe $-z \leq y$. Prandaj $z \leq y$ dhe $z \geq -y$. Prandaj $-y \leq z \leq y$.

5.10 Fuqia dhe rrenja katrore e numrave te plote

Per numrin e plote z dhe numrin natyror n, e perkufizojme $z^n = z \cdot \cdots \cdot n$, ku prodhimi paraqitet n here. Per shembull $z^1 = z$, $z^2 = z \cdot z$, $z^3 = z \cdot z \cdot z$.

Ja disa veti:

1. $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n$.
2. Nese $z \vdots w$, atehere $\left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{z^n}{w^n}$.
3. $z^{n+m} = z^n \cdot z^m$,
4. $(z^n)^m = z^{nm}$.

5.11 Rrenja katrore e numrave te plote

Themi se numri natyror x eshte rrenja katrore e numrit te plot y nese $x^2 = y$. Kete numer e shenojme me $x = \sqrt{y}$.