LIGJERATA PER JAVET 6-15

DAVID KALAJ, DAVIDKALAJ@GMAIL.COM

1. Numrat natyrorë

Koncepti i numërimit dhe numrat natyrorë paraqesin konceptin themelor të matematikës. Meqë matematika eshte shkenca ekzakte, konceptet themelore nuk është lehtë te përkufizohen në mënyrë koncize në mënyrë që te plotësojmë formalitetin matematik por edhe idenë intuitive që kemi për numrat. Numrat natyrorë i shërbejnë njeriut që nga koha e mendimit formal, mileniume më parë. Ne këte koncept do ta perkufizojmë duke zbatuar logjikën formale, gjegjësisht duke perdorur konceptet e perkufizuara deri tani. Pra do te zbatojmë bashkësitë.

Përkufizimi 1.1. E zëmë se A dhe B jane dy bashkësi. Themi se A është ekuivalent me B dhe shënojmë $A \sim B$ nëse ekziston bijeksioni $f : A \to B$.

Teorema 1.2. Relacioni $\sim$ është relacion ekuivalence në bashkësine nënbashkësive te një bashkësie të dhëne $\mathcal{S}$.

Vërtetimi. Vetia refleksive. E zëme se $A \subset \mathcal{S}$. Duhet të vertetojmë se $A \sim A$. Mëqënese funksioni identik $I : A \to A$, i përkufizuar $I(x) = x$ështe bijeksion i A në vete, rrjedh se $A \sim A$.

Vetia simetrike. E zëme se $A, B \subset \mathcal{S}$. Duhet të vërtetojmë $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. Ngaqë $A \sim B$, rrjedh se ekziston bijeksioni i bashkësisë A në bashkësinë B. Në ketë rast, funksioni $h = f^{-1} : B \to A$ që eshte funksioni invers i funksionit f parqaet bijeksion të B në A.

Vetia tranzitive. E zëme se $A, B, C \subset \mathcal{S}$. Duhet të vërtetojmë $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$. Ngaqë $A \sim B$, rrjedh se ekziston bijeksioni f i bashkësisë A në bashkësinë B. Meqenëse $B \sim C$, rrjedh se ekziston bijeksioni g i bashkësisë B në bashkësinë C. Funksioni $h = g \circ f$ ështe bijeksion i bashkësisë A në C. Me fjalë të tjera $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$. $\square$

Përkufizimi 1.3. Themi se bashësisa $A \subset \mathbf{S}$ është bashkësi e fundme, në qoftë se A eshte boshe ose $A \setminus \{a\}$ nuk eshte ekuivalente me A, ku $a \in A$.

E zëme se $\mathcal{S}$ ështe nje bashkësi e pafundme dhe le të jenë $\mathcal{F}_0 \subset P(\mathcal{S})$ bashkesia e të gjitha nënbashkësive te fundme të bashkesise $\mathcal{S}$. Bashkesinë $\mathcal{F}_0/_\sim$ e klasave $\overline{A}$ ne lidhje me relacionin e ekuivalences $\sim$ e quajmë bashkësine e numrave natyrorë dhe e shënojmë me $\mathbb{N}$. Elementin $\overline{\emptyset} \in \mathbb{N}_0 = \mathcal{F}_0/_\sim$, që paraqet bashkesitë që nuk kanë elemente e shenojmë me 0. Elementin $\overline{\{\emptyset\}} \in \mathbb{N}_0 = \mathcal{F}_0/_\sim$ që paraqet bashkësitë që kanë nje element e shenojme me 1. Elementin $\overline{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}} \in \mathbb{N}_0 = \mathcal{F}_0/_\sim$ që paraqet bashkësitë që kanë dy elemente e shenojme me 2. E keshtu me radhë. Aksioma e Peanos na mundeson që për numrin e dhëne $n = \overline{A}$, te formojmë pasuesin e tih numrin $n' = \overline{A \cup \{b\}}$, ku $b \in \mathcal{S} \setminus A$. Tani kemi bashkësinë $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Pasuesin e numrit 2, e shënojmë me 3, pra $2' = 3$.

2. Plotpjesëtueshmeria

Themi se numri natyror a plotpjesëtohet me numrin natyror b nëse ekziston numri natyror c i tillë që $a = b \cdot c$. Këte fakt e shënojmë simbolikisht $a \vdots b$ ose $b|a$.

Vetitë.

(1) Nëse $a \vdots b$ dhe $a \neq 0$ atëherë $a \geqslant b$.
(2) Nëse $a \vdots b$ dhe $b \vdots a$ atëherë $a = b$.
(3) Nëse $a \vdots 3$ dhe $b \vdots 3$ atëhere $a \vdots c$.
(4) Nëse $a \vdots c$ dhe $b \vdots c$ atëherë $(a + b) \vdots c$ dhe $(a - b) \vdots c$ për $a \geqslant b$.
(5) Nëse $a \vdots b$ dhe $c \in \mathbf{N}$, atëhere $ac \vdots b$.
(6) Nëse $a_1, \dots a_n \vdots b$ dhe $c_1, \dots c_n \in \mathbf{N}$, atëhere $(a_1 b_1 + \dots a_n b_n) \vdots b$,

Le të vertetojmë p.sh. vetiné e 3). Meqenëse $a \vdots b$, rrjedh se $a = a_1 b$. Meqenëse $b \vdots c$, rrjedh se $b = b_1 c$. Nga këtu rrjedh se $a = a_1 b_1 c$, ku $a_1 b_1$ është numër natyror si prodhim i dy numrave natyrorë. Në mënyrë të ngjashme vërtetohen edhe vetitë e tjera.

3. Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i dy numrave PMP.

Përkufizimi 3.1. Themi se numri c është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave natytorë a dhe b në qoftë se numri c i plotëson këto dy veti.

1. $a \vdots c$ dhe $b \vdots c$.
2. Nëse $a \vdots d$ dhe $b \vdots d$, atëherë $c \vdots d$.

Pjesëtuesim më të madh të peprbashkët te numrave a dhe b e shënojmë me $c = \mathrm{PMP}(a, b)$ ose shkurtimisht nëprmjet simbolit (a, b).

Shembulli 3.2. Le të jetë $a = 120$ dhe $b = 300$. Të percaktojmë PMP(a, b). Pjesëtuesit e numrit a formojnë bashkësinë

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 40, 60, 120\},$$

kurse pjesëtuesit e numrit b formojnë bashkësinë

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, \ldots, 60, 100, 150, 300\}.$$

Numri më i madh i përbashët i bashkësive A dhe B është numri 60, prandaj PMP$(a, b) = 60$.

Metoda e zbatuar paraprakisht nuk është praktike prandaj zbatojmë dy metoda të tjera që bazohen në:

(1) Teoremën themelore të aritmetikës
(2) Algoritmin e Euklidit.

Qe te formulojmë teoremën themelore të aritmetikës le të perkufizojmë numrat e thjeshtë.

Përkufizimi 3.3. Themi se numri natyror $n \neq 1$ është i thjeshtë, në qoftë se plotpjesëtohet vetëm me numrat 1 dhe n.

Numrat e thjeshtë i shënojmë me P. Pra

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}.$$

Kjo bashkësi numrash ështe bashkësi e pafundme. Vërtetimi mund të bëhet nëpërmjet

Teorema 3.4 (Teorema themelore e aritmetikes). Çdo numër natyror n mund të shënohet në trajtën e produktit të numrave të thjeshtë. Me fjalë të tjera, ekzistojnë numrat e thjeshtë $p_1 < p_2 < \ldots, p_k$ dhe numrat natyrorë ose zero $q_1, \ldots q_k$ ashtu që

$$n = p_1^{q_1} \cdot \ldots p_k^{q_k}.$$

Representimi paraprak është i vetem.

Teorema 3.5. Nëse

$$n = p_1^{q_1} \cdot \ldots p_k^{q_k},$$

dhe

$$m = p_1^{r_1} \cdot \ldots p_k^{r_k},$$

atëherë

$$\mathrm{PMP}(m, n) = p_1^{\min\{q_1, r_1\}} \cdot \ldots p_k^{\min\{q_k, r_k\}}.$$

Le te percaktojme PMP$(120, 300)$ duke zhatuar teoremen paraprake. Kemi

$$120 = 2 \cdot 60 = 2^2 \cdot 30 = 2^3 \cdot 15 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

dhe

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2.$$

Prandaj

$$\mathrm{PMP}(120, 300) = 2^{\min\{2,3\}} \cdot 3^{\min\{1,1\}} \cdot 5^{\min\{1,2\}} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60.$$

Teorema 3.6. Bashkësi e numrave të thjeshtë është e pafundme.

Vertetimi. Le te jete n nje numer i çfarëdoshëm dhe marrim numrat $p_1 < p_2 \cdots < p_n$ e thjeshte te renditur prej me te voglit deri te me i madhi duke i kyçur te gjithe numrat e thjeshtë . Numri $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$, është më i madh se secili nga numrat $p_1, \dots, p_n$. Madje numri x nuk plotpjesëtohet me asnjenin nga keta numra $p_1, \dots, p_n$ sepse mbetja e pjesetimit te numrit x me p_k është gjithmone 1. Pra numri x është i thjeshte ose në baze te teoremes themelore te aritmetikes pjesetohet me numra te thjeshte te ndryshem nga numrat $p_1, \dots, p_n$. Nga ketu rrjedh se ekzsiton edhe numri i thjeshte p_{n+1}. Si rrjedhim perfundojme se bashkesia P është pambarimisht e madhe.

3.1. **Algoritmi i Euklidit.** Ky algoritem bazohet në teoremën:

Teorema 3.7. Per çdo dy numra natyrorë a dhe b per te cilet vlen $a > b$ ekzistojne numrat natyror te vetem a_1 dhe q_1 ashtu qe

$$a = bq_1 + a_1, \quad 0 \leqslant a_1 < b. \tag{3.1}$$

Vërtetimi. Le te perkufizojme bashkesine A siç vijon:

$$A = \{q \in \mathbf{N} : a - bq \geqslant 0\}.$$

Kjo bashkesi është bashkesi jo-boshe, sepse $q = 1 \in A$. Në anen tjeter nëse $q > a$, atehere $a - bq < a - ab = a(1 - b) \leqslant 0$, prandaj $q \notin A$. Rrjedhimisht, A është nenbashkesi e bashkesise $\{1, \dots, a\}$. Meqe A është bashkesi e fundme, rrjedh se $q_1 = \max A \in A$. Tani kemi $0 \leqslant a_1 = a - bq_1 + a_1$ dhe $a_1 < b$. Sikur mosbarazimi i fundit të mos ishte i saktë, atehere do të kishim $a - b(q_1 + 1) = a - bq_1 - b \geqslant 0$, prandaj $q_1 + 1 \in A$, qe është në kundershtim me faktin se a_1 është elementi maksimal i bashkesise A.

Qe te vertetojme se cifti (a_1, q_1) është i vetem, e zëmë se vlen e kunderta. D.m.th. e zëmë se

$$a = bq_2 + a_2, \quad 0 \leqslant a_2 < b. \tag{3.2}$$

Duke zbritur (3.1) dhe (3.2), perftojme $b(q_1 - q_2) = a_2 - a_1$. E zëmë se $a_2 > a_1$, atehere edhe $q_2 > q_1$. Nga ketu rrjedh se $a_2 > a_2 - a_1 = b(q_1 - q_2) \geqslant b$, gjegjesisht $a_2 > b$, qe është kunderthenie me relacionin (3.2). Me kaq u vertetua reprezentimi unik (3.1). □

Qe te formulojmë algoritmin e Euklidit le te vertetojmë nje veti te PMP.

Teorema 3.8. Le te jete $a > b$ dhe $a = bq + r$, ku $0 \leqslant r < b$. Ateherë $\mathrm{PMP}(a, b) = \mathrm{PMP}(b, r)$.

Vërtetimi. Le te jete $c = \mathrm{PMP}(a, b)$ dhe $d = \mathrm{PMP}(b, r)$. Nga fakti se $a \vdots c$ dhe $b \vdots c$ dhe barazimi $r = a - bq$, rrjedh se $r \vdots c$. Prandaj $d \vdots c$ qe domethene $d \geqslant c$.

në anen tjeter meqenese $b \vdots d$ dhe $r \vdots d$ rrjedh se $a = bq + r \vdots d$, qe domethene se edhe $c \vdots d$. Perfundojme se $c \geqslant d$. Rrjedhimisht $c = d$.

Nga teorema paraprake kemi

$$c = \mathrm{PMP}(a, b) = \mathrm{PMP}(b, a_1).$$

Pastaj $b = a_1 q_2 + a_2$, ku $0 \leqslant a_2 < a_1$. Prandaj

$$c = \mathrm{PMP}(a_1, a_2).$$

Duke vazhduar proceduren paraprake, mbas nje numri te fundme hapash arrijme deri te numri $a_{k+1} = 0$. Në ate rast $a_{k-1} = a_k q_k$ the

$$c = \mathrm{PMP}(a_1, a_2) = \mathrm{PMP}(a_2, a_3) = \cdots = \mathrm{PMP}(a_{k-1}, a_k) = a_k.$$

□

Ja te ilustrojme algoritmin paraprak në rastin e numrave $a = 300$ dhe $b = 120$. Kemi $a > b$ dhe $a = 2 \cdot b + 60$, gjegjesisht $300 = 2 \cdot 120 + 60$ ku $60 < 120$.

Në fund $120 = 2 \cdot 60$. Nga ketu rrjedh se

$$\mathrm{PMP}(300, 120) = \mathrm{PMP}(120, 60) = 60.$$

3.2. **Edhe disa veti te** PMP**.**

(1) $\mathrm{PMP}(a, b) = \mathrm{PMP}(b, a)$.
(2) Nëse $\mathrm{PMP}(a, b) = c$, atëhere $\mathrm{PMP}(ak, bk) = ck$.
(3) Nése $\mathrm{PMP}(a, b) = k$, atëhere $\mathrm{PMP}(a/k, b/k) = 1$.

4. Shumëfishi më i vogël i përbashkët i dy numrave SHVP.

Përkufizim. Themi se numri c është shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave natytorë a dhe b në qoftë se numri c i plotëson këto dy veti.

1. $c \vdots a$ dhe $c \vdots b$.
2. Nëse $d \vdots a$ dhe $d \vdots b$, atëherë $d \vdots c$.

Shumëfishin më të vogël të përbashkët të dy numrave a dhe b e shënojmë me $c = \mathrm{SHVP}(a, b)$ ose shkurtimisht nëprmjet simbolit $[a, b]$.

Teorema 4.1. Për dy numra të çfarëdoshëm natyrorë a dhe b ka vend barazimi

$$[a, b] \cdot (a, b) = ab.$$

Vërtetimi. Le të jetë

$$x = \frac{ab}{(a, b)}.$$

Tani kemi $x \vdots a$ dhe $x \vdots b$, prandaj nga përkufizimi i shumëfishit më të vogël të përbashkét rrjedh se $x \vdots [a, b]$. Prandaj ekziston numri natyror k i tillë që

$$x = k[a, b].$$

Nga barazimi

$$\frac{ab}{(a, b)} = k[a, b]$$

rrjedh se

$$a = \frac{[a, b]}{b} \cdot k(a, b)$$

dhe

$$b = \frac{[a, b]}{a} \cdot k(a, b).$$

Prandaj

$$a \vdots k(a, b) \text{ dhe } b \vdots k(a, b).$$

Nga vetia e dytë perkufizuese e PMP rrjedh se

$$(a, b) \vdots k(a, b).$$

Prandaj $(a, b) \geqslant k(a, b)$. Rrjedhimisht $k = 1$, çfarë duhej të vërtetohet sepse në ketë rast kemi $x = [a, b]$. □

Shembulli 4.2. Le të jetë $a = 24$ dhe $b = 30$. Te gjejme $[a, b]$. Nga barazimi $[a, b] = ab/(a, b)$, dhe $(a, b) = 6$, rrjedh se $[a, b] = 4 \cdot 30 = 120$.

Teorema 4.3. Nëse

$$n = p_1^{q_1} \cdot \dots \cdot p_k^{q_k},$$

dhe

$$m = p_1^{r_1} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k},$$

atëherë

$$\text{SHVP}(m, n) = p_1^{\max\{q_1, r_1\}} \cdot \dots \cdot p_k^{\max\{q_k, r_k\}}.$$

Vertetimi. Vertetimi behet me induksionin matematik. Nëse n është numer i thjeshte, atehere $n = p_k = p_k^1$, ku k është nje indeks, dhe ky rast perfundon. E zëmë se e kemi vertetuar per te gjithe numrat naturor me te vegjel ose te barabarte se m. Vertetojme per $n = m + 1$. Nëse $m + 1$ është i thjeshte, atehere zbatojme faktin paraprak. Në te kunderten, numri $n = m + 1$ nuk është i thjeshte prandaj mund te shkruhet $n = m + 1 = n_1 \cdot n_2$, ku $1 < n_1 \leqslant m$ dhe $1 < n_2 \leqslant m$. Nga hipoteza e induksionit e dime se $n_1 = p_1^{q_1} \cdot \ldots p_k^{q_k}$ dhe $n_2 = p_1^{q_1'} \cdot \ldots p_k^{q_k'}$, prandaj

$$n = p_1^{q_1} \cdot \ldots p_k^{q_k} \cdot p_1^{q_1'} \cdot \ldots p_k^{q_k'} = p_1^{q_1+q_1'} \cdot \cdots \cdot p_k^{q_k+q_k'}.$$

Keshtu perfunduam vertetimin për numra të plotë pozitivë. □

Le te percaktojme SHVP$(120, 300)$ duke zbatuar teoremen paraprake. Kemi

$$120 = 2 \cdot 60 = 2^2 \cdot 30 = 2^3 \cdot 15 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

dhe

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2.$$

Prandaj

$$\text{SHVP}(120, 300) = 2^{\max\{2,3\}} \cdot 3^{\max\{1,1\}} \cdot 5^{\max\{1,2\}} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600.$$

5. Disa kritere plotpjesëtimit

Në këtë njesi mesimore kemi $x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$.

5.1. **Plotpjesëtueshmëria me numrin 2.** Numri x plotpjesëtohet me numrin 2 atehere dhe vetem atehere kur shifra e fundit (gjegjesisht shifra e njesheve) e keti numrit a_0 është numer çift, d.m.th. $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Qe te vertetojme nje gje te tille vime re se $x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 \cdot 10 + a_0 = 2 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_1 \cdot 5) + a_0$. Meqenese $2 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_1 \cdot 5)$ është numer çift, sepse është faktor i numrit 2, rrhedh se ai plotpjesetohet me 2. Mbetet qe te verifikohet pohimi nëse $a_0 \vdots 2$. Pra $a_0 \vdots 2$ atehere dhe vetem atehere kur $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Numri x plotpjesëtohet qe plotpjesetohet me numrin 2 është çift.

5.2. **Plotpjesëtueshmëria me numrin 5.** Si në rastin e plotpjesetimit me numrin 2, kemi $x = 5 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_1 \cdot 2) + a_0$. Meqenese $5 \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_1 \cdot 2)$ plotpjesëtohet me 5, mbetet te provohet nëse a_0 plotpjesetohet me 5. Dhe nje gje e tille ndodh atehere dhe vetem atehere kur $a_0 = 0$ ose $a_0 = 5$.

5.3. **Plotpjesëtueshmëria me numrin 10.** Meqenëse

$$x = 10 \cdot \cdot (a_n a_{n-1} \ldots a_1) + a_0,$$

rrjedh se $c \vdots 10$ atehere dhe vetem atehere kur $a_0 = 0$.

5.4. **Plotpjesëtueshmëria me numrin 4.** Meqenše

$$x = 100 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_3) + a_1 a_0 = 4 \cdot 25 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_2),$$

rrjedh se $x \vdots 4 \Leftrightarrow a_1 a_0 \vdots 4$. Dmth kriteri i plotpjesetimit me 4 sillet në kriterin e plotpjestimit te numrit dyshifror te formuar nga dy shifrat e fundit te tij te plotesohet me 4.

Per shembull, numri $x = 873878732x$ plotpestohet me 4 atehere dhe vetem atehere kur $x \in \{0, 4, 8\}$, sepse numrat dyshifrore 20, 24, 28 plotpjesetohen me 4.

5.5. **Plotpjesëtueshmëria me numrin 8.** Meqenese $x = 1000 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_3) + a_2 a_1 a_0 = 8 \cdot 125 \cdot (a_n a_{n-1} \dots a_3)$, rrjedh se $x \vdots 8 \Leftrightarrow a_2 a_1 a_0 \vdots 8$. Dmth kriteri i plotpjesetimit me 8 sillet në kriterin e plotpjestimit te numrit treshifror te formuar nga tri shifrat e fundit te tij te plotesohet me 8.

Shembulli 5.1. Numri $x = 873878732x$ plotpestohet me 8 atehere dhe vetem atehere kur $x \in \{0, 8\}$, sepse numrat treshifror 320, 328 plotpjesetohen me 8.

5.6. **Plotpjesetueshmeria me 3 dhe 9.** Le te vertetojme paraprakisht nje leme

Lemma 5.2. *Per çdo numër natyror n,* $10^n - 1 \vdots 9$.

Proof. **Vertetimi**. Meqenese $10^n - 1 = 9 \dots 9 = 9 \cdot (1 \dots 1)$, ku shifra 9 gjegjesisht 1 paraqitet n here, rrjedh se $10^n - 1 \vdots 9$. □

Tani mund te formulojme kriterin e plotpjesëtimit me 9. Në fillim kemi $x = \sum_{k=0}^n a_k 10^k = \sum_{k=0}^n a_k((10^k - 1) + 1) = \sum_{k=0}^n a_k(10^k - 1) + \sum_{k=0}^n a_k = A + B$, ku

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k (10^k - 1)$$

dhe

$$B = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Meqenese $10^k - 1$ plotpjesetohet me 9 per cdo k, rrjedh se numri A plotpjesetohet me 9. Mbetet te kontyrollohet nëse numri B qe paraqet shumen e shifrave te ketij numri te plotpjesetohet me 3 ose me 9, meqenese A plotpjesetohet natyrisht me 3, ngase plotpjesetohet me 9.

Shembulli 5.3. Te kontrollojme nëse numri $x = 126562a3873873b$ plotpjesetohet me 3 ose me 9.

Njehsojme shumen e shifrave $B = 1+2+6+5+6+2+a+3+8+7+3+8+7+3+b = 61+a+b = 63+a+b-2$. Pra duhet te gjejme te gjitha shifrat e numrave a dhe b ashtu qe $a+b-2$ te plotpjesetohet me 3. Pastaj te gjejme te gjithe chiftet e numrave a dhe b ashtu qe numri $a+b-2$ te plotpjesetohet me 9.

Per 3 kemi me shume zgjidhje:
$(a,b) \in \{(0,2),(0,5),(0,8),(1,1),(1,4),(1,7),(2,0),(2,3),(2,5),$
$(2,8),(3,2),(3,5),(3,8),(4,1),(4,4),(4,7),(5,0),(5,3),(5,6),$
$(5,9),(6,2),(6,5),(6,8),(7,1),$
$(7,4),(7,7),(8,0),(8,3),(8,6),(8,9),(9,1),(9,4),(9,7)\}$.

Per numrin 9 kemi me pak zgjidhje dhe ato jane
$(a,b) \in \{(0,2),(1,1),(2,0),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(6,5),(7,4),(8,3),(9,2)\}$.

6. Numrat e plotë

Ekuacioni

$$b + x = a \tag{6.1}$$

per $b > a$ nuk ka zgjidhje në bashkesine $\mathbf{N}$, gjegjesusht nuk ekziston numri natyror x i tille qe barazimi (6.1) te jete i sakte. Ky është motivi i pare qe bashkesia e numrave natyrore te plotesohet (zgjerohet) me nje bashkesi numrash, ashtu qe ekuacioni (6.1) te këtë zgjidhje. Zgjidhjen e ekuacionit (6.1) do ta shenojme me $x = a - b$, mirepo nje veprim i tille tani nuk esht i lejueshem, qe si rrjedhim na detyron qe shprehjen $a-b$ ta zevendesojme me çiftin (a,b). Per chfar behet fjale do te lexoni në vazhdim.

Le të jete $\sim$ relacioni në bashkësine $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ i perkufizuar siç vijon

$$(a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'.$$

Le te vertetojme se reacioni $\sim$ është relacion ekuivalence në bashkësine $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$.

(1) Vetia refleksive. $(a,b) \sim (a,b)$ sepse $a+b = b+a$ (nga vetia komutative e mbledhjes se numrave).
(2) Vetia simetrike. $(a,b) \sim (a',b') \Rightarrow (a',b') \sim (a,b)$ sepse $a+b' = b+a' \Rightarrow a'+b = b'+a$.
(3) Vetia tranzitive. $(a,b) \sim (a',b') \wedge (a',b') \sim (a'',b'') \Rightarrow (a,b) \sim (a'',b'')$ sepse $a+b' = b+a' \wedge a'+b'' = b'+a'' \Rightarrow a+b'+a'+b'' = b+a'+b'+a''$. Prandaj $a+b'' = b+a''$.

Çdo relacion ekuivalence e ndan bashkesine perkatese në klasa ekuivalence. Bashkesia e klasave te ekuivalences e formojne bashkesine faktor e cila në këtë rast paraqet bashkesine e numrave te plotë te cilen e shenojme nepermjet simbolit $\mathbb{Z}$. Pra

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} = \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 /_{\sim} &= \{\overline{(n,m)} : n, m \in \mathbf{N}_0\} \\ &= \{\overline{(n,0)} : n \in \mathbf{N}_0\} \bigcup \{\overline{(0,n)} : n \in \mathbf{N}_0\}.\end{aligned}$$

Elementin $\overline{(0,0)}$ e shenojme shkurtimisht me 0

Elementi $\overline{(0,0)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin këtë bashkesi pambarimisht te madhe $\{(0,0), (1,1), \dots, (n,n), \dots\}$ dhe e shenojme shkurtimisht me 0 (ky element nuk perputhet formalisht me elementin zero nga bashkesia $\mathbf{N}_0$).

Elementi $\overline{(1,0)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin këtë bashkesi pambarimisht te madhe $\{(1,0), (2,1), \dots, (n+1,n), \dots\}$, Këtë numer e shenojme shkurtimish me 1.

E keshtu me radhe, elementi $\overline{(m,0)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin këtë bashkesi pambarimisht te madhe $\{(m,0), (m+1,1), \dots, (m+n,n), \dots\}$, Këtë numer e shenojme shkurtimish me m.

Elementi $\overline{(0,1)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin këtë bashkesi pambarimisht te madhe $\{(0,1), (1,2), \dots, (n,n+1), \dots\}$, Këtë numer e shenojme shkurtimish me -1. Elementi $\overline{(0,m)} \subset \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ formalisht perfshin këtë bashkesi pambarimisht te madhe $\{(0,m), (1,1+m), \dots, (n,n+m), \dots\}$, Këtë numer e shenojme shkurtimish me $-m$.

Prandaj

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots, m, -m, \dots\}.$$

Bashkesia $\mathbb{Z}$ e *numvae te plotë* e perbehet nga bashkesia e numrave pozitivë, negativë dhe zero.

6.0.1. *Shtrirja e bashkesise* $\mathbf{N}$ *në bashkesine* $\mathbb{Z}$. Nenbashkesia $\mathbf{N}' = \{\overline{(n,0)} : n \in \mathbf{N}\}$ e bashkesise $\mathbb{Z}$ identifikohet me bashkesine $\mathbf{N}$, ashtu qe numrat e plotë $\overline{(n,0)}$ identifikonen me numrat n per cdo n.

6.1. **Mbledhja e numrave të plotë.** Shuma e numrave te plotë $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$ është numri i plotë

$$c = a + b = \overline{(n+k, m+l)}.$$

Le te vertetojme se ky perkufizim është korrekt, dmth nuk varet nga perfaqesuesi i klases.

E zëmë se $a = \overline{(n', m')}$ dhe $b = \overline{(k', l')}$ d.m.th.

$$n + m' = m + n', \quad k + l' = l + k'. \tag{6.2}$$

Duhet te vertetojme se

$$\overline{(n+k, m+l)} = \overline{(n'+k', m'+l')}.$$

Relacioni i fundit është ekuivalent me barazimin

$$n + k + m' + l' = m + l + n' + k',$$

i cili rrjedh nga relacionet (6.2).

6.2. **Vetite e mbledhjes.**

(1) Vetia komutative. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a+b = b+a$. E zëmë se $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$. Barazimi $a + b = b + a$ është ekuivalent me barazimet

$$n + k = k + n, \quad m + l = l + m.$$

Barazimet e efundit rrjedhin nga vetia komutative e mbledhjes se numrave nagtyrorë.

(2) Vetia asociative. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(3) Elementi neutral. $\forall a \in \mathbf{Z}$, $a + 0 = a = 0 + a$.

(4) Elementi invers i mbledhjes. $\forall a \in \mathbf{Z}$, ekziston $b = -a \in \mathbf{Z}$, i tille qe $a + b = 0$. Nëse $a = \overline{(m,n)}$, atehere $b = -a = \overline{(n,m)}$. Në te vertete $a + b = \overline{(m+n, n+m)} = 0$.

6.3. **Shumezimi i numrave te plotë.** .

Prodhimi i numrave te plotë $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$ është numri i plot

$$c = a \cdot b = \overline{(nk + ml, nl + mk)}.$$

Le te vertetojme se ky perkufizim është korrekt, dmth nuk varet nga perfaqesuesit i klasave.

E zëmë se $a = \overline{(n', m')}$ dhe $b = \overline{(k', l')}$ d.m.th.

$$n + m' = m + n', \quad k + l' = l + k'. \tag{6.3}$$

Nga (6.3) rrjedh se
$n(k + l') = n(l + k')$, $m(l + k') = m(k + l')$,
$(m + n')l' = (n + m')l'$, $(n + m')k' = (m + n')k'$.
Duke i mbledh keto barazime perftojme

$$nk + ml + n'l' + m'k' = nl + mk + n'k' + m'l'.$$

Nga ketu perftojme

$$\overline{(nk + ml, nl + mk)} = \overline{(n'k' + m'l', n'l' + m'k')}.$$

Keshtu vertetuam se shumezimi është korrekt.

6.4. **Vetite e shumezimit.**

(1) Vetia komutative. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $ab = ba$. E zëmë se $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$. Barazimi $ab = ba$ është ekuivalent me barazimet
$$\overline{(nk+ml, nl+mk)} = \overline{(kn+lm, ln+km)}$$
qe është barazim i thjeshte.
(2) Vetia asociative. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Edhe ky barazim vertetohet në menyere te ngjashme si ai paraprak
(3) Elementi neutral. $\forall a \in \mathbf{Z}$, $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$. Nëse $a = \overline{(n,m)}$, dhe $1 = \overline{(1,0)}$, atehere $a \cdot 1 = \overline{(n \cdot 1 + m \cdot 0, m \cdot 1 + n \cdot 0)} = \overline{(n,m)}$.
(4) Vetia shperndarese. Per çdo tre të plotë $a, b, c \in \mathbb{Z}$ kemi $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Barazimi paraprak rrjedh nga barazimi i ngjashem per numrat natyrorë prandaj nuk e vertetojme.

6.5. **Zbritja e numrave te plotë.** Le te jete $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$. Bëjmë pekufizimin
$$a - b = \overline{(n+l, m+k)}.$$

Tani te kthehemi te ekuacioni (6.1) dhe vime re se ky ekuacion ka zgjidhje në bashkesine $\mathbb{Z}$, sepse $a - b \in \mathbb{Z}$, në qofte se $a, b \in \mathbb{Z}$. Meqense $\mathbf{N} \subset \mathbb{Z}$, rrjedh se ja kemi arritur qellimit fillestar qe te zgjidhim ekuacionin (6.1).

Në bazë te pohimeve paraprake mund te formulojme teoremen e mëposhtme.

Teorema 6.1. Struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ është unazë me element njesh (me elementin neutral në lidhje me shumezimin).

Me fjalë te tjera. Per çdo tre numra te plotë a, b, c kane vend barazimet e meposhtme.

(1) $a + b \in \mathbb{Z}$, (Mbledhja është veprim i mbyllur)
(2) $(a+b) + c = a + (b+c)$, (Mbledhja është shoqeruese)
(3) $a + 0 = 0 + a = a$, (Elementi neutral i mbledhjes është numri 0)
(4) $a - a = 0$, (Ekziston elementi i anasjellet i secilit numer)
(5) $a \cdot b \in \mathbb{Z}$, (Shumezimi është veprim i mbyllur)
(6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, (Shumezimi ploteson vetine shoqeruese)
(7) $a \cdot b = b \cdot a$, (Shumezimi është komutativ)
(8) $a \cdot 1 = a$, (Numri 1 është elementi neutral i shumezimit)
(9) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Vlen vetia shperdnarese)
(10) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. (Vlen vetia shperndarëse)

6.6. **Radhitja e numrave te plotë dhe boshti numerik.** Themi se numri i plotë $a = \overline{(n,m)}$ është me i vogel ose i barabarte se numri i plotë $b = \overline{(k,l)}$ dhe shenojme $a \leqslant b$, në qofte se $n + l \leqslant m + k$.

Ky relacion është relacion radhitjeje në bashkesine $\mathbb{Z}$.

Në te vertet, kane vend vetite në vazhdim

(1) Vetia refleksive. Per $a = \overline{(n,m)}$, $a \leqslant a$, sepse $n + m \leqslant m + n$.
(2) Vetia antisimetrike. Per $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$, kemi $a \leqslant b \wedge b \leqslant a \Rightarrow a = b$, sepse, $n + l \leqslant m + k$ dhe $k + m \leqslant l + n$, rrjedh se $n + l = m + k$, gjegjesisht $a = b$.
(3) Vetia tranzitive. Per $a = \overline{(n,m)}$, $b = \overline{(k,l)}$ dhe $c = \overline{(i,j)}$, $a \leqslant b \wedge b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$. Në te vertet, nga $n+l \leqslant m+k \wedge k+j \leqslant l+i$, rrjedh se $n + l + k + j \leqslant m + k + l + i$ d.m.th. $n + j \leqslant m + k$

Numrat me te vegjel se 0 jane negative, kurse ata me te medhenj se 0 jane pozitive. Numrat zakonisht shenohen në nje drejtez (qe e quajme bosht numerik) te drejtuar me nje shigjete nga ana e majte në te djathte.

$$\xrightarrow{\quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5 \qquad}$$

6.7. **Vetitë e radhitjes së numrave te plotë.** E zëmë se z, w, t janë numra të plotë. Ateherë kane vend keto veti

(1) $z + w < z + t \Leftrightarrow w < t$,
(2) $z + w > z + t \Leftrightarrow w > t$,
(3) Në qoftë se $z > 0$ atëherë $z \cdot w < z \cdot t \Leftrightarrow w < t$,
(4) Në qoftë se $z > 0$ atëherë $z \cdot w > z \cdot t \Leftrightarrow w > t$,
(5) Në qoftë se $z < 0$ atëherë $z \cdot w < z \cdot t \Leftrightarrow w > t$,
(6) Në qoftë se $z < 0$ atëherë $z \cdot w > z \cdot t \Leftrightarrow w < t$,

Le te provojmë pë shembull, vetine e parë. E zëmë se $z = \overline{(a,b)}$, $w = \overline{(c,d)}$ dhe $t = \overline{(e,f)}$. Atehere $z + w = \overline{(a + c, b + d)}$ dhe $z + t = \overline{(a + e, b + f)}$. Nga ketu rrjedh se $z + w < z + t$ atehere dhe vetem atehere kur $a+c+b+f < b+d+a+e$, dhe nga monotoniteti i numrave natyrorë relacioni i fundit është ekuivalent me relacionin $c + f < d + e$ gjegjesisht me relacionin $w < t$.

6.8. **Pjesëtimi pa mbetje i numrave të plotë.** Themi se numri i plotë z plotpjesëtohet me numrin e plotë w në qoftë se ekziston numri i plotë t i tillë që $z = w \cdot t$. Shenojmë simbolikisht $z \vdots w$. Numrin t e shenojme $t = z : w$ ose $t = \frac{z}{w}$.

Disa veti

(1) Nëse $z \vdots w$, atehere kemi $(z : w) \cdot w = z$.
(2) $(z \cdot w)/w = z$,

(3) Nëse $z \vdots t$ dhe $w \vdots t$ atehere edhe $(z \pm w) \vdots t$ dhe kemi $\frac{z \pm w}{t} = \frac{z}{t} \pm \frac{w}{t}$.

6.9. **Vlera absolute e numrit të plotë.** E zëmë se $z \in \mathbb{Z}$ është numër i plotë i çvarëdoshëm. Vlera absolute e numrit z shënohet me simbolin $|z|$. Numri $|z|$ është i barabartë me numrin z nëse $z \geqslant 0$, dhe është i barabartë me numrin $-z$ nëse $z < 0$. Këtë fjali përkufizuese të vlerës absolute e shënojmë shkurtimisht siç vijon:

$$|z| = \begin{cases} z, & \text{nëse } z \geqslant 0; \\ -z, & \text{nëse } z < 0. \end{cases}$$

6.9.1. *Vetitë e vlerës absolute.* E zëmë se $z, w, t \in \mathbb{Z}$. Atëherë kemi:

(1) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
(2) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$,
(3) $|z - w| \leqslant |z| + |w|$,
(4) $|z| - |w| \leqslant |z \pm +w|$,
(5) Nëse $z \vdots w$ atehere edhe $|z| \vdots |w|$ dhe kemi

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

(6) $|z| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant z \leqslant y$

Le te vertetojme per shembull vetine e dyte (e cila ke emertimin *mosbarazimi i trekendeshit*). Sipar perkufizimit kemi

$$|z + w| = \begin{cases} z + w, & \text{nëse } z + w \geqslant 0; \\ -(z + w), & \text{nëse } z + w < 0. \end{cases}$$

Meqenese $z \leqslant |z|$ dhe $w \leqslant |w|$, rrjedh se $z + w \leqslant |z| + |w|$. Ngjashem, $-z \leqslant |z|$ dhe $-w \leqslant |w|$, prandaj $-(z + w) \leqslant |z| + |w|$. Nga keto dy mosbarazime rrjedh se $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

Vertetojme tani vetine e fundit. Nga $|z| \leqslant y$, rrjedh se $z \leqslant y$ dhe $-z \leqslant y$. Prandaj $z \leqslant y$ dhe $z \geqslant -y$. Prandaj $-y \leqslant z \leqslant y$.

6.10. **Fuqia e numrave te plotë.** Per numrin e plotë z dhe numrin natyror n, perkufizojme $z^n = z \cdot \dots \cdot z$, ku prodhimi paraqitet n here. Per shembull $z^1 = z$, $z^2 = z \cdot z$, $z^3 = z \cdot z \cdot z$.

Ja disa veti:

(1) $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n$.
(2) Nëse $z \vdots w$, atehere $\left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{z^n}{w^n}$.
(3) $z^{n+m} = z^n \cdot z^m$,
(4) $(z^n)^m = z^{nm}$.

6.11. **Rrenja katrore e numrave te plotë.** Themi se numri natyror x është rrenja katrore e numrit te plot y nëse $x^2 = y$. Këtë numer e shenojme me $x = \sqrt{y}$.

7. Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i dy numrave te plotë PMP.

Përkufizimi 7.1. . Themi se numri natyror c është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave te plotë a dhe b në qoftë se numri c i plotëson këto dy veti.

1. $a \vdots c$ dhe $b \vdots c$.
2. Nëse $a \vdots d$ dhe $b \vdots d$, atëherë $c \vdots d$.

Pjesëtuesim më të madh të peprbashkët te numrave a dhe b e shënojmë me $c = \mathrm{PMP}(a, b)$ ose shkurtimisht nëprmjet simbolit (a, b).

Shembulli 7.2. Le të jetë $a = -120$ dhe $b = 300$. Të percaktojmë $\mathrm{PMP}(a, b)$. Pjesëtuesit e numrit a janë
$A = \{1, 2, 3, \ldots, 40, 60, 120\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots, -40, -60, -120\}$, kurse pjesëtuesit e numrit b janë $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, \ldots, 60, 100, 150, 300\}$ $\cup \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -10, \ldots, -60, -100, -150, -300\}$. Numri më i madh i përbashët i bashkësive A dhe B është numri 60, prandaj $\mathrm{PMP}(a, b) = 60$.

Metoda e zbatuar paraprakisht nuk është praktike prandaj, si tek numrat natyrore zbatojmë dy metoda të tjera që bazohen në:

(1) Teoremën themelore të aritmetikës
(2) Algoritmin e Euklidit.

Qe te formulojmë teoremën themelore të aritmetikës le të perkufizojmë numrat e thjeshtë.

Përkufizimi 7.3. Themi se numri natyror $n \neq 1$ është i thjeshtë, në qoftë se plotpjesëtohet vetëm me numrat 1, -1, n dhe $-n$.

Numrat e thjeshtë i shënojmë me P. Pra

$$P = \{\pm p_1, \pm p_2, \ldots, \pm p_k, \ldots\} = \{2, -2, 3, -3, 5, -5, 7, -7, \ldots\}.$$

Kjo bashkësi numrash është bashkësi e pafundme. Vřtetimi mund të bëhet nëpřmjet Teorema në vazhdim vërtetohet si teorema përkatëse për numrat natyrorë (Teorema 4.3).

Teorema 7.4 (Teorema themelore e aritmetikes). *Çdo numër i plotë n mund të shënohet në trajtën e produktit të numrave të thjeshtë pozitivë dhe eventualisht numrit -1. Me fjalë të tjera, ekzistojnë numrat e* thjeshtë $p_1 < p_2 < \dots, p_k$ dhe numrat natyrorë ose zero $q_1, \dots q_k$ ashtu që

$$n = \pm p_1^{q_1} \cdot \ldots p_k^{q_k}.$$

Representimi paraprak është i vetem.

Le te percaktojme $\mathrm{PMP}(-120, 300)$ duke zhatuar teoremen paraprake. Kemi

$$-120 = -2 \cdot 60 = 2^2 \cdot 30 = -2^3 \cdot 15 = -2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

dhe

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2.$$

Prandaj

$$\mathrm{PMP}(-120, 300) = 2^{\min\{2,3\}} \cdot 3^{\min\{1,1\}} \cdot 5^{\min\{1,2\}} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60.$$

Teorema 7.5. Bashkësi e numrave të thjeshtë të plotë është e pafundme.

Vertetimi. Meqenëse kjo bashkesi i përmban te gjithë numrat e thjeshtë pozitivë, është e qarte se kjo bashkesi është e pafundme, në baze te teoremes perkatëse te numrave natyrorë (shiko Teorema 3.6).

7.1. **Algoritmi i Euklidit.** Ky algoritem bazohet në teoremen e meposhtme

Teorema 7.6. Per çdo dy numra te plotë a dhe b per te cilet vlen $|a| > |b|$ ekzistojne numrat e plotë te vetem a_1 dhe q_1 ashtu qe

$$a = bq_1 + a_1, \quad 0 \leqslant a_1 < |b|.$$

Qe te formulojmë algoritmin e Euklidit le te vertetojmë nje veti te PMP.

Teorema 7.7. Le te jete $|a| > |b|$ dhe $a = bq + r$, ku $0 \leqslant r < |b|$. Ateherë $\mathrm{PMP}(a, b) = \mathrm{PMP}(b, r)$.

Vertetim. Le te jete $c = \mathrm{PMP}(a, b)$ dhe $d = \mathrm{PMP}(b, r)$. Nga fakti se $a \vdots c$ dhe $b \vdots c$ dhe barazimi $r = a - bq$, rrjedh se $r \vdots c$. Prandaj $d \vdots c$ qe domethene $d \geqslant c$.

në anen tjeter meqenese $b \vdots d$ dhe $r \vdots d$ rrjedh se $a = bq + r \vdots d$, qe domethene se edhe $c \vdots d$. Perfundojme se $c \geqslant d$. Rrjedhimisht $c = d$.

Nga teorema paraprake kemi

$$c = \mathrm{PMP}(a, b) = \mathrm{PMP}(b, a_1).$$

Pastaj $b = a_1 q_2 + a_2$, ku $0 \leqslant a_2 < a_1$. Prandaj

$$c = \mathrm{PMP}(a_1, a_2).$$

Duke vazhduar proceduren paraprake, mbas nje numri te fundme hapash arrijme deri te numri $a_{k+1} = 0$. Në ate rast $a_{k-1} = a_k q_k$ dhe

$$c = \mathrm{PMP}(a_1, a_2) = \mathrm{PMP}(a_2, a_3) = \cdots = \mathrm{PMP}(a_{k-1}, a_k) = a_k.$$

□

Ja te ilustrojme algoritmin paraprak në rastin e numrave $a = -300$ dhe $b = 120$. Kemi $|a| > |b|$ dhe $a = (-3) \cdot b + 60$, gjegjesisht $-300 = (-3) \cdot 120 + 60$ ku $60 < |120|$.

Në fund $120 = 2 \cdot 60$. Nga ketu rrjedh se

$$\mathrm{PMP}(-300, 120) = \mathrm{PMP}(120, 60) = 60.$$

7.2. **Edhe disa veti te** PMP**.**

(1) $\mathrm{PMP}(a, b) = \mathrm{PMP}(|a|, |b|)$.
(2) Nëse $\mathrm{PMP}(a, b) = c$, atëhere $\mathrm{PMP}(ak, bk) = c|k|$.
(3) Nëse $\mathrm{PMP}(a, b) = k$, dhe $a \vdots m$ dhe $b \vdots m$ atëhere $\mathrm{PMP}(a/m, b/m) = k/m$.

8. Shumëfishi më i vogël i përbashkët i dy numrave te plotë SHVP.

Përkufizimi 8.1. Themi se numri pozitiv c është shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave tee plotë a dhe b në qoftë se numri c i plotëson këto dy veti.

1. $c \vdots a$ dhe $c \vdots b$.
2. Nëse $d \vdots a$ dhe $d \vdots b$, atëherë $d \vdots c$.

Shumëfishin më të vogël të përbashkët të dy numrave a dhe b e shënojmë me $c = \mathrm{SHVP}(a, b)$ ose shkurtimisht nëprmjet simbolit $[a, b]$.

Teorema 8.2. Për dy numra të çfarëdoshëm të plotë a dhe b ka vend barazimi

$$[a, b] \cdot (a, b) = |a||b|.$$

Vërtetimi. Kryhet si në rastin e teoremes perkatese per numrat e natyrorë. □

Teorema 8.3. Nëse

$$n = \pm p_1^{q_1} \cdot \ldots p_k^{q_k},$$

dhe

$$m = \pm p_1^{r_1} \cdot \ldots p_k^{r_k},$$

atëherë

$$\mathrm{SHVP}(m, n) = p_1^{\max\{q_1, r_1\}} \cdot \ldots p_k^{\max\{q_k, r_k\}}.$$

Shembulli 8.4. Le të jetë $a = -24$ dhe $b = -30$. Te gjejme $[a, b]$. Nga barazimi $[a, b] = |a||b|/(a, b)$, dhe $(a, b) = 6$, rrjedh se $[a, b] = 4 \cdot 30 = 120$.

9. Kongruenca

Përkufizimi 9.1. Le te jete m nje numer natyror $m > 1$. Themi se numri i plotë a është kongruent me numrin e plotë b sipas modulit m nëse $(a - b) \vdots m$. Këtë fakt e shenojme simbolikisht $a \equiv b \mod m$.

Teorema 9.2. Kongruenca sipas modulit m është relacion ekuivalence.

Vertetimi. Duhet te vertetojme tri veti (R (Refleksive), S (Simetrike) dhe T (Tranzitive)).

Vetia refleksive vlen sepse nëse x është numer i plotë, atehere $x - x = 0$, dhe numri 0 plotepjesetohet me çdo numer sepse $0 = 0 \cdot m$. Prandaj $x \equiv x \mod m$.

Vetia simetrike vlen sepse nëse $x - y \vdots m$ atehere ekziston numri i plotë k i tille qe $x - y = k \cdot m$. Prandaj $y - x = (-k) \cdot m$. meqenese $-k$ është gjithashtu i plotë, rrjedh se $y - x \vdots m$. Prandaj $x \equiv y \mod m \Rightarrow y \equiv x \mod m$.

Në fund vetia tranzitive gjithashtu vlen. E zëmë se $x \equiv y \mod m$ dhe $y \equiv z \mod m$. Nga ketu rrjedh se $x - y \vdots m$ dhe $y - z \vdots m$. Prandaj edhe shuma e ketyre numrave: $(x - y) + (y - z) = x - z \vdots m$. Perfundojme se $x \equiv z \mod m$. □

Relacioni $\mod m$ e ndan bashkesine e numrave te plotë **Z** në m klasa ekuivalence. Keto jane $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$, qe paraqesin mbetjet e mundeshme te pjesetimit me m. Në te vertet në bashkesine faktor $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ mund te perkufizojme mbledhjen dhe shumezimin sipas formulave në vazhdim.

$$\overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x + y} \tag{9.1}$$

dhe

$$\overline{x} \odot \overline{y} = \overline{x \cdot y}. \tag{9.2}$$

Keto dy veprime algjebrike në $\mathbb{Z}_m$ jane perkufizuar mirë. Në te vertet, e zëmë se $x \equiv x' \mod m$ dhe $y \equiv y' \mod m$. Në këtë rast kemi $x = x' + km$ dhe $y = y' + k_1 m$, per dy numra te plotë k dhe k_1. Prandaj $x + y = x' + y' + (k + k_1)m$, qe domethene se $x + y \equiv (x' + y') \mod m$. Me fjale te tjera, në perkufizimin (9.1), nuk është e rendesishme se cilët përfaqësues te klasave marrim.

Ngjashem edhe (9.2) është i perkufizuar mire. Në te vertet, duke perdor simbolet paraprake, përftojmë: $x \cdot y = x' \cdot y' + m(mkk_1 + x' + y')$, qe domethene $x \cdot y = x' \cdot y' \mod m$. Le te konstatojmë se $\overline{0}$ është elementi neutral i mbledhjes dhe $\overline{1}$ është elementi neutral i shumezimit. Qe te vertetojme nje gje te tille marrim $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m$. Per mbledhjen kemi

$$\overline{0} \oplus \overline{x} = \overline{0 + x} = \overline{x} = \overline{x + 0} = \overline{x} \oplus \overline{0},$$

kurse per shumezimin

$$\overline{1} \odot \overline{x} = \overline{1 \cdot x} = \overline{x} = \overline{x \cdot 1} = \overline{x} \odot \overline{1}.$$

Tani formulojme teoremen.

Teorema 9.3. Struktura $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot, \overline{0}, \overline{1})$ është unaze me element neutral te shumezimit. Në qofte se m është numer i thjeshte atehere kjo unaze është fushë.

Vertetimi. Duhet te vertetojme se $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \overline{0})$ është grup abelian.

(1) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ kemi $\overline{x} \oplus \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$. Kemi vertetuar paraprakisht.
(2) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ kemi $\overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{y} \oplus \overline{x}$, sepse $x + y = y + x$. Prandaj vlen vetia nderruese e mbledhjes.
(3) $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_m$ kemi $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z} = \overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z})$, sepse $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z} = (\overline{x + y}) \oplus \overline{z} = \overline{(x + y) + z} = \overline{x + (y + x)} = \overline{x} \oplus \overline{(y + z)} = \overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z})$. Prandaj vlen vetia asosciative e mbledhjes.
(4) $\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}_m$ vlen $\overline{x} \oplus \overline{0} = \overline{x}$, prandaj ekziston elementi neutral i mbledhjes.
(5) $\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}_m$, $\overline{m - x} \in \mathbb{Z}_m$ dhe kemi $\overline{x} \oplus \overline{m - x} = \overline{m} = \overline{0}$. Prandaj ekziston elementi invers i secilit numer nga bashkesia faktor.

Qe te vertetojme se struktura e dhene është unaze, na duhet qe te vertetojme se $(\mathbb{Z}_m, \odot, \overline{1})$ është gjysmegrup me element neutral.

(1) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$ kemi $\overline{x} \odot \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$. Kemi vertetuar paraprakisht.
(2) $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m$, nee bazee te (9.2), kemi $\overline{x} \odot \overline{y} = \overline{y} \odot \overline{x}$, sepse $x \cdot y = y \cdot x$. Prandaj vlen vetia nderruese e shumezimit.
(3) $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_m$ kemi $(\overline{x} \odot \overline{y}) \odot \overline{z} = \overline{x} \odot (\overline{y} \odot \overline{z})$, sepse $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Prandaj vlen vetia asosciative e shumezimit.
(4) $\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}_m$ vlen $\overline{x} \odot \overline{1} = \overline{x} = \overline{1} \odot \overline{x}$, prandaj ekziston elementi neutral i shumëzim.

Mbetet qe te vertetojme vetite distributive, gjegjesisht shpendarese.

(1) $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_m$, $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \odot \overline{z} = (\overline{x} \odot \overline{z}) \oplus (\overline{y} \odot \overline{z})$. Sepse $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.
(2) $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}_m$, $\overline{x} \odot (\overline{y} \oplus \overline{z}) = \overline{x} \odot \overline{y} \oplus \overline{x} \odot \overline{z}$. Sepse $x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Me kaq vertetuam se struktura në fjale është unaze.

Mbetet qe te vertetohet se struktura në fjale është fushe nëse numri m është i thjeshtë. E zëmë se $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m \setminus \{\overline{0}\}$. Duhet te gjejme numrin y te tille që $xy = 1 \mod m$. Le te jete q mbetja e numrit x gjate pjesetimit me numrin m. Dmth $x = x_1 m + q$. Në këtë rast kemi $0 \leqslant q < m$. Meqe $\overline{x} \neq \overline{0}$, rrjedh se $q > 0$. Meqenese numri m është i thjeshte, rrjedh se $1 = \mathrm{PMP}(x, m) = \mathrm{PMP}(m, q)$ (Teorema 7.7). Duke vazhduar pjesetimin me mbetje, perftojme $m = m_1 \cdot q + q_1$, ku $0 < q_1 < q$. Nga ketu rrjedh se

$$\mathrm{PMP}(m, q) = \mathrm{PMP}(q, q_1) = \mathrm{PMP}(q_1, q_2)$$
$$= \cdots = \mathrm{PMP}(q_{k-2}, q_{k-1}) = \mathrm{PMP}(q_{k-1}, q_k) = \mathrm{PMP}(q_k, 1).$$

Duke zbatuar analizen e anasjellet perftojme $q_{k-1} = x_k q_k + 1$. Nga ketu rrjedh se

$$q_{k-2} = x_{k-1} q_{k-1} + q_k, \ldots, \; q_1 = x_2 q_2 + q_3$$

$$1 = q_{k-1} - x_k q_k = q_{k-1} - x_k(q_{k-2} - x_{k-1} q_{k-1}) = a_1 q_{k-1} + b_1 q_{k-2}$$
$$= \cdots = a_2 q_{k-2} + b_2 q_{k-3} = \cdots = a_{k-1} q_1 + b_{k-1} q = a_k q + b_k m = a_{k+1} m + b_{k+1} x$$

Pra

$$xy = 1 + zm,$$

ku $y = b_{k+1}$, kurse $z = -a_{k+1}$. Perfundojme se $\overline{xy} = \overline{1}$. Prandaj numri x ka inversin e vete. Perfundojme se struktura në fjalë është fushë. □

Shembulli 9.4. Le te jete $m = 5$. Në këtë rast per mbledhje kemi

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Ketu kemi $-\bar{0} = \bar{0}$, $-\bar{1} = \bar{4}$, $-\bar{2} = \bar{3}$, $-\bar{3} = \bar{2}$ dhe $-\bar{4} = \bar{1}$.

Per shumezim kemi

$\odot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

në këtë rast kemi $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{2}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{2}$ dhe $\bar{4}^{-1} = \bar{4}$. Sepse per shembull $3 \cdot 2 = 1 + 5 \equiv 1 \mod 5$.

Shembulli 9.5. Te gjendet m dhe n ashtu qe $m \cdot 10 + n \cdot 27 = 1 = \mathrm{PMP}(m, n)$.

Kemi $27 = 2 \cdot 10 + 7$, $10 = 1 \cdot 7 + 3$, $7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Tani anasjlelltas perftojme $1 = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2(10 - 1 \cdot 7) = (1 - 2 \cdot (-1)) \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 3 \cdot 7 + (-2) \cdot 10 = 3 \cdot (27 - 2 \cdot 10) + (-2) \cdot 10 = 3 \cdot 27 + (-8) \cdot 10$.

Pra $m = -8$ dhe $n = 3$.

9.0.1. *Detyra shtepije.*

(1) Plotesoni tabelat perkatese per mbledhjen dhe shumezimin per $m = 7$.
(2) Plotesoni tabelat perkatese per mbledhjen dhe shumezimin per $m = 11$.
(3) Gjeni numrat e plotë m dhe n ashtu që $n \cdot 30 + m \cdot 47 = 1$.
(4) Gjeni numrat e plotë m dhe n ashtu që $n \cdot 30 + m \cdot 45 = 5$.

Le te jete a dita e lindjes, dhe b numri i indeksit

9.0.2. *Detyra shtepije.*

(1) Plotesoni tabelat perkatese per mbledhjen dhe shumezimin per $m = a \mod 7$.
(2) Plotesoni tabelat perkatese per mbledhjen dhe shumezimin per $m = b \mod 7$.
(3) Gjeni numrat e plotë m dhe n ashtu që $n \cdot a + m \cdot b = \mathrm{PMP}(a, b)$.
(4) Gjeni numrat e plotë m dhe n ashtu që $n \cdot a \cdot 75 + m \cdot (a+1) \cdot 95 = 5$.

Shembulli 9.6. E zëmë se $a = 167$ dhe $b = 135$. Te gjejme n dhe m ashtu qe $n \cdot 167 + m \cdot 135 = \mathrm{PMP}(67, 35) = 1$.

Kemi $167 = 1 \cdot 135 + \mathbf{32}$, $135 = 4 \cdot 32 + \mathbf{7}$, $32 = 4 \cdot 7 + \mathbf{4}$, $7 = 1 \cdot 4 + \mathbf{3}$, $4 = 1 \cdot 3 + \mathbf{1}$, $\mathbf{1} = \mathrm{PMP}(167, 135)$.

Procesi i anasjellet duket sic vijon:

$$\mathbf{1} = 4 - 1 \cdot 3 = 4 - 1 \cdot (7 - 1 \cdot 4) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 7 = 2 \cdot (32 - 4 \cdot 7) - 1 \cdot 7 = 2 \cdot 32 - 9 \cdot 7$$

prandaj

$$1 = 2 \cdot 32 - 9 \cdot (135 - 4 \cdot 32) = 38 \cdot 32 - 9 \cdot 135 = 38 \cdot (167 - 135) - 9 \cdot 135 = 38 \cdot 167 - 47 \cdot 135.$$

Pra $n = 38$, $m = -47$.

Shembulli 9.7. Le te jete a dita e lindjes. Gjeni n dhe m ashtu qe $n \cdot 14(a + 1) + m \cdot 23a = \mathrm{PMP}(14(a + 1), 23a)$.

10. Numrat racionalë

Ekuacioni

$$ax - b = 0 \tag{10.1}$$

ku $a \neq 0$ dhe b nuk plotpjesëtohet me a nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave të plotë. Per shembull nuk ekzsiston asnjë numër i plotë x për të cilit ka vend barazimi $3x - 2 = 0$. Ky është motivi kryesor që bashësia e numrave të plotë te zgjerohet me një bashkësi numrash që do ta quajmë bashkësinë e numrave racionalë dhe do ta shënojmë me $\mathbb{Q}$. Nje proces i tillë është i ngjashëm me ndërtimin e numrave të plotë nga numrat natyrorë.

Zgjidhjen e ekuacionit (10.1) do ta shenojme me $x = b : a$, mirepo nje veprim i tille tani nuk esht i lejueshem, qe si rrjedhim na detyron qe shprehjen $a : b$ ta zevendesojme me çiftin (a, b). Per chfarë behet fjale në vazhdim.

Le të jete $\sim$ relacioni në bashkësine $\mathbb{Z} \times \mathbf{N}$ i perkufizuar siç vijon

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a \cdot b' = b \cdot a'.$$

Le te vertetojme se reacioni $\sim$ është relacion ekuivalence në bashesine $\mathbb{Z} \times \mathbf{N}$.

(1) Vetia refleksive. $(a, b) \sim (a, b)$ sepse $a \cdot b = b \cdot a$ (nga vetia komutative e shumëzimit të numrave të plotë dhe natyrorë).
(2) Vetia simetrike. $(a, b) \sim (a', b') \Rightarrow (a', b') \sim (a, b)$ sepse $a \cdot b' = b \cdot a' \Rightarrow a' \cdot b = b' \cdot a$.
(3) Vetia tranzitive. $(a, b) \sim (a', b') \wedge (a', b') \sim (a'', b'') \Rightarrow (a, b) \sim (a'', b'')$ sepse $a \cdot b' = b \cdot a' \wedge a' \cdot b'' = b' \cdot a'' \Rightarrow a \cdot b' \cdot a' \cdot b'' = b \cdot a' \cdot b' \cdot a''$. Nëse $a = 0$, rrjedh se edhe $a' = 0$ si dhe $a'' = 0$, prandaj, prandaj $a \cdot b'' = b \cdot a''$. Nëse $a \neq 0$, rrjedh se $a' \neq 0$, meqenese $b' \in \mathbf{N}$, prandaj $b' \neq 0$, duke "thjeshtuar" numrin a dhe b' nga barazimi paraprak, rrjedh përfundimisht $a \cdot b'' = b \cdot a''$.

Çdo relacion ekuivalence e ndan bashkesine perkatese në klasa ekuivalence. Klasat e ekuivalences e formojne bashkesine faktor e cila në këtë rast paraqet bashkesine e numrave racionaë të cilën e shenojmë simbolit $\mathbb{Q}$. Pra

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbf{N} /_{\sim} = \{\overline{(n, m)} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbf{N}\} = \left\{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbf{N}\right\}.$$

Këtu kemi perdorur identifikimin

$$\frac{n}{m} = \overline{(n, m)}.$$

Elementin $\overline{(0, 1)}$ e shenojme shkurtimisht me 0

Elementi $\overline{(0,1)} \subset \mathbb{Z} \times \mathbf{N}$ formalisht perfshin këtë bashkesi pambarimisht te madhe $\{(0,1),(0,2),\dots,(0,n),\dots\}$ dhe e shenojme shkurtimisht me 0 (ky element nuk perputhet formalisht me elementin zero nga bashkesia $\mathbb{Z}$). Elementi $\overline{(1,1)} \in \mathbb{Z}\times\mathbf{N}/_{\sim}$ gjegjësisht $\overline{(1,1)} \subset \mathbb{Z}\times\mathbf{N}$ formalisht perfshin këtë bashkesi pambarimisht te madhe çiftesh numrash të plotë $\{(1,1),(2,2),\dots,(n,n),\dots\}$. Këtë numer e shenojme shkurtimish me 1.

Elementi $\overline{(m,n)} \subset \mathbb{Z} \times \mathbf{N}$ formalisht perfshin këtë bashkesi pambarimisht te madhe $\{(m,n),(2m,2n),\dots,(km,kn),\dots\}$, Këtë numer e shenojme shkurtimish me $\frac{m}{n}$.

Elementi $\overline{(m,1)} \subset \mathbb{Z} \times \mathbf{N}$ formalisht perfshin këtë bashkesi pambarimisht te madhe $\{(m,1),(2m,2),\dots,(nm,n),\dots\}$, Këtë numer e shenojme shkurtimish me m, prandaj e identifikojme me numrin e plotë m. Prandaj kemi shtrirjen

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\dots,m,-m,\dots\} \subset \mathbb{Q}.$$

10.1. **Mbledhja e numrave racionalë.** Shuma e numrave racionalë $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$ është numri racional

$$c = a + b = \overline{(n\cdot l + k\cdot m, m\cdot l)}.$$

Pra sipas përkufizimit marrim

$$\frac{n}{m} + \frac{k}{l} = \frac{nl+km}{ml}.$$

Le te vertetojme se ky perkufizim është korrekt, dmth nuk varet nga perfaqesuesi i klases.

E zëmë se $(n',m') \sim (n,m)$ dhe $(k',l') \sim (k,l)$ d.m.th.

$$nm' = mn', \quad kl' = lk'. \tag{10.2}$$

Duhet te vertetojme se

$$\overline{(n\cdot l + k\cdot m, m\cdot l)} = \overline{(n'\cdot l' + k'\cdot m', m'\cdot l')}.$$

Relacioni i fundit është ekuivalent me barazimin

$$(n\cdot l + k\cdot m)(m'l') = (n'\cdot l' + k'\cdot m')(ml),$$

i cili rrjedh nga relacionet (10.2).

Në te vertet kemi

$$(n\cdot l+k\cdot m)(m'l') = nlm'l'+kmm'l' = mn'll'+lmm'k' = (n'\cdot l'+k'\cdot m')(ml).$$

10.2. Vetite e mbledhjes.

(1) Vetia komutative. $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $a+b = b+a$. E zëmë se $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$. Barazimi $a+b = b+a$ është ekuivalent me relacionin

$$(n \cdot l + k \cdot m, m \cdot l) \sim (k \cdot m + n \cdot l, l \cdot m).$$

Barazimet e fundit rrjedhin nga vetia komutative e mbledhjes dhe shumëzimit të numrave të plotë.

(2) Vetia asociative. $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$, $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(3) Elementi neutral. $\forall a \in \mathbb{Q}$, $a + 0 = a = 0 + a$.

(4) Elementi invers i mbledhjes. $\forall a \in \mathbb{Q}$, ekziston $b = -a \in \mathbb{Q}$, i tille qe $a + b = 0$. Nëse $a = \overline{(m,n)}$, atehere $b = -a = \overline{(-m,n)}$. Në te vertete $a + b = \overline{(m \cdot n - n \cdot m, n^2)} = 0$.

10.3. Shumëzimi i numrave racionalë. .

Prodhimi i numrave racionalë $a = \frac{n}{m} = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \frac{k}{l} = \overline{(k,l)}$ është numri racional

$$c = a \cdot b = \frac{nk}{ml} = \overline{(nk, ml)}.$$

Le te vertetojmë se ky perkufizim është korrekt, dmth nuk varet nga perfaqesuesit i klasës.

E zëmë se $a = \overline{(n', m')}$ dhe $b = \overline{(k', l')}$ d.m.th.

$$nm' = mn', \quad kl' = lk'. \tag{10.3}$$

Nga (10.3) rrjedh se $nkm'l' = mln'k'$, prandaj

$$\overline{(nk, ml)} = \overline{(n'k', m'l')}.$$

Keshtu vertetuam se shumezimi është korrekt.

10.4. Vetite e shumezimit.

(1) Vetia komutative. $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $ab = ba$. E zëmë se $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$. Barazimi $ab = ba$ është ekuivalent me barazimet

$$\overline{(nk, ml)} = \overline{(kn, lm)}$$

qe është barazim i thjeshte.

(2) Vetia asociative. $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Edhe ky barazim vertetohet në menyere te ngjashme si ai paraprak

(3) Elementi neutral. $\forall a \in \mathbb{Q}$, $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$. Nëse $a = \overline{(n,m)}$, dhe $1 = \overline{(1,1)}$, atehere $a \cdot 1 = \overline{(n \cdot 1, m \cdot 1)} = \overline{(n,m)} = a$.

(4) Elementi invers. $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, ekziston $b = a^{-1}$. Ne të vertetë nëse $a = \overline{(m, n)} = \frac{m}{n}$, atëherë $b = \overline{(n, m)} = \frac{n}{m}$, sepse $\overline{(m, n)} \cdot \overline{(n, m)} = \overline{(nm, nm)} = 1$.

(5) Vetia shperndarese. Per çdo tre numra racionalë $a, b, c \in \mathbb{Q}$ kemi $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Barazimi paraprak rrjedh nga barazimi i ngjashem per numrat natyrorë dhe të plotë prandaj nuk e vertetojme.

10.5. **Zbritja dhe pjesëtimi i numrave racionalë.** Le te jete $b = \frac{n}{m} = \overline{(n, m)}$ dhe $a = \frac{k}{l} = \overline{(k, l)}$. Bëjmë pekufizimin

$$b - a = b + (-a) = \frac{nl - mk}{ml} = \overline{(nl - mk, ml)}.$$

Le te jete $b = \frac{n}{m}$ dhe $a = \frac{k}{l} \neq 0$. Pjesëtimi i numrave b dhe a përkufizohet siç vijon:

$$b : a = b \cdot (a^{-1}) = \frac{b}{a} = \frac{nl}{mk} = \overline{(nl, mk)}.$$

Tani te kthehemi te ekuacioni (10.1) dhe vëmë re se ky ekuacion ka zgjidhje në bashkesine $\mathbb{Q}$, sepse $a : b \in \mathbb{Q}$, në qofte se $a, b \in \mathbb{Q}$ dhe $a \neq 0$. Meqense $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, rrjedh se kemi arritur qellimit fillestar qe te zgjidhim ekuacionin (10.1): $x = b : a$.

Në bazë te pohimeve paraprake mund te formulojme teoremen e mëposhtme.

Teorema 10.1. Struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ është fushë algjebrike .

Me fjalë te tjera. Per çdo tre numra racionalë a, b, c kane vend barazimet e meposhtme.

(1) $a + b \in \mathbb{Q}$, (Mbledhja është veprim i mbyllur)
(2) $a + b = b + a$, (Mbledhja eshte ndërruese).
(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$, (Mbledhja është shoqeruese)
(4) $a + 0 = 0 + a = a$, (Elementi neutral i mbledhjes është numri 0)
(5) $a - a = 0$, (Ekziston elementi i anasjellet i secilit numer)
(6) $a \cdot b \in \mathbb{Q}$, (Shumezimi është veprim i mbyllur)
(7) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, (Shumezimi ploteson vetine shoqeruese)
(8) $a \cdot b = b \cdot a$, (Shumezimi është komutativ)
(9) $a \cdot 1 = a$, (Numri 1 është elementi neutral i shumezimit)
(10) $\forall a = \frac{m}{n} \neq 0$, $\exists b = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, ashtu që $ab = 1$.
(11) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Vlen vetia shperdnarese)
(12) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. (Vlen vetia shperdnarese)

10.6. **Radhitja e numrave racionalë dhe boshti numerik.** Themi se numri racionalë $a = \overline{(n,m)}$ është me i vogel ose i barabarte se numri racionalë $b = \overline{(k,l)}$ dhe shenojme $a \leqslant b$, në qofte se $nl \leqslant mk$. Duhet te kemi kujdes se m dhe n janë numra natyrorë, pra numra të plotë pozitivë

Ky relacion është relacion radhitjeje në bashkesine $\mathbb{Z}$.

Në te vertet, kane vend vetite në vazhdim

(1) Vetia refleksive. Per $a = \overline{(n,m)}$, $a \leqslant a$, sepse $nm \leqslant mn$.
(2) Vetia antisimetrike. Per $a = \overline{(n,m)}$ dhe $b = \overline{(k,l)}$, kemi $a \leqslant b \wedge b \leqslant a \Rightarrow a = b$, sepse, $nl \leqslant mk$ dhe $km \leqslant ln$, rrjedh se $nl = mk$, gjegjesisht $a = b$.
(3) Vetia tranzitive. Per $a = \overline{(n,m)}$, $b = \overline{(k,l)}$ dhe $c = \overline{(i,j)}$, $a \leqslant b \wedge b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$. Në te vertet, nga $nl \leqslant mk \wedge kj \leqslant li$, rrjedh se $nlkj \leqslant mkli$ d.m.th. $nj \leqslant mi$ per $k \neq 0$. Nese $k = 0$, atëherë $n < 0 < i$, prandaj $nj < mi$.

Numrat me te vegjel se 0 jane negative, kurse ata me te medhenj se 0 jane pozitive. Numrat zakonisht shenohen në nje drejtez (qe e quajme bosht numerik) te drejtuar me nje shigjete nga ana e majte në te djathte.

$$-5/2 \quad -2 \quad -3/2 \quad -1 \quad -1/2 \quad 0 \quad 1/2 \quad 1 \quad 3/2 \quad 2 \quad 5/2 \longrightarrow$$

Shembulli 10.2. Cila thyësë është më e madhe $\frac{111111112}{333333333}$ apo $\frac{111111113}{333333334}$. Udhëzim: $a = 111111111$.

10.7. **Vetitë e radhitjes së numrave racionalë.** E zëmë se z, w, t janë numra të plotë. Ateherë kane vend keto veti

(1) $z + w < z + t \Leftrightarrow w < t$,
(2) $z + w > z + t \Leftrightarrow w > t$,
(3) Në qoftë se $z > 0$ atëherë $z \cdot w < z \cdot t \Leftrightarrow w < t$,
(4) Në qoftë se $z > 0$ atëherë $z \cdot w > z \cdot t \Leftrightarrow w > t$,
(5) Në qoftë se $z < 0$ atëherë $z \cdot w < z \cdot t \Leftrightarrow w > t$,
(6) Në qoftë se $z < 0$ atëherë $z \cdot w > z \cdot t \Leftrightarrow w < t$,

Le te provojmë pë shembull, vetine e parë. E zëmë se $z = \overline{(a,b)}$, $w = \overline{(c,d)}$ dhe $t = \overline{(e,f)}$. Atehere $z + w = \overline{(ad + bc, bd)}$ dhe $z + t = \overline{(af + be, bf)}$. Nga ketu rrjedh se $z+w < z+t$ atehere dhe vetem atehere kur $(ad + bc)bf < (af + be)bd$, gjegjësisht $adbf + bcbf < afbd + bebd$ dhe nga monotoniteti i shumëzimit të numrave natyrorë, relacioni i fundit është ekuivalent me relacionin $adf + bcf < afd + bed$. Pastaj duke zbatuar monotonitetin e mbledhes se numrave te plotë, relacioni i fundit është ekuivalent me $cf < de$ gjegjesisht me relacionin $w < t$.

10.8. **Vlera absolute e numrit racional.** E zëmë se $z \in \mathbb{Q}$ është numër racional i çvarëdoshëm. Vlera absolute e numrit z shënohet me simbolin $|z|$. Numri $|z|$ është i barabartë me numrin z nëse $z \geqslant 0$, dhe është i barabartë me numrin $-z$ nëse $z < 0$. Këtë fjali përkufizuese të vlerës absolute e shënojmë shkurtimisht siç vijon:

$$|z| = \begin{cases} z, & \text{nëse } z \geqslant 0; \\ -z, & \text{nëse } z < 0. \end{cases}$$

10.8.1. *Vetitë e vlerës absolute.* E zëmë se $p, q \in \mathbb{Q}$. Atëherë kemi:

(1) $|p \cdot q| = |p| \cdot |q|$,
(2) $|p + q| \leqslant |p| + |q|$,
(3) $|p - q| \leqslant |p| + |q|$,
(4) $|p| - |q| \leqslant |p \pm q|$,
(5) Nëse $q \neq 0$ atehere

$$\left|\frac{p}{q}\right| = \frac{|p|}{|q|}.$$

(6) $|p| \leqslant q \Leftrightarrow -q \leqslant p \leqslant q$

Le te vertetojme per shembull vetine e dyte (e cila ke emertimin *mosbarazimi i trekendeshit*). Sipar perkufizimit kemi

$$|p + q| = \begin{cases} p + q, & \text{nëse } p + q \geqslant 0; \\ -(p + q), & \text{nëse } p + q < 0. \end{cases}$$

Meqenese $p \leqslant |p|$ dhe $q \leqslant |q|$, rrjedh se $p + q \leqslant |p| + |q|$. Ngjashem, $-p \leqslant |p|$ dhe $-q \leqslant |q|$, prandaj $-(p + q) \leqslant |p| + |q|$. Nga keto dy mosbarazime rrjedh se $|p + q| \leqslant |p| + |q|$.

10.9. **Fuqia e numrave racionalë.** Per numrin racional q dhe numrin natyror n, përkufizojme $q^n = q \cdot \dots \cdot q$, ku prodhimi paraqitet q here. Per shembull $q^1 = q$, $q^2 = q \cdot q$, $q^3 = q \cdot q \cdot q$.

Në anën tjetër, për $n \leqslant 0$, $q^n := \frac{1}{q^{-n}}$. Pra $q^0 = 1$, $q^{-1} = \frac{1}{q}$, $q^{-2} = \frac{1}{q^2}$ etj.

Ja disa veti. Për $q \in \mathbb{Q}$ dhe $n \in \mathbb{Z}$ kemi

(1) $(q \cdot r)^n = q^n \cdot r^n$.
(2) Nëse $r \neq 0$, atehere $\left(\frac{q}{r}\right)^n = \frac{q^n}{r^n}$.
(3) $q^{n+m} = q^n \cdot q^m$,
(4) $(q^n)^m = q^{nm}$.

10.10. **Rrenja katrore e numrit racional.** Themi se numri racional pozitiv r është rrenja katrore e numrit racional q nëse $r^2 = q$. Këtë numer e shenojme me $r = \sqrt{q}$. Në këtë rast $q = \frac{m^2}{n^2}$, kurse $r = \frac{|m|}{|n|}$.

11. Vargu dhe limiti

Çdo pasqyrim i bashkësise $\mathbf{N}$ në bashkësine $\mathbb{Q}$ e quajmë varg. Pra varg është $x : \mathbf{N} \to \mathbb{Q}$. Kufizat e vargut janë $x_1 = x(1)$, $x_2 = x(2)$, etj, $x_n = x(n)$. Vargun zakonisht e shënojme me $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ose shkurtimisht (x_n).

Në shembujt në vazhdim përkufizojmë vargjet aritmetike dhe gjeometrike.

Shembulli 11.1. Themi se vargu (x_n) është varg aritmetik, nëse ekziston konstanta $d \neq 0$ e tille që per çdo $n \in \mathbf{N}$ ka vend barazimi $x_{n+1} - x_n = d$.

Nga pëkufizimi përftojmë $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_2 + d = x_1 + 2d$, etj, përftojmë formulën e përgjithshme të kufizës së vargut aritmetik $x_n = (n-1)d + x_1$. Në qoftë se me (A_n) shënojmë vargun e shumave te vargut aritmetik, d.m.th. $A_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, përftojmë formulën e pergjithsshme per kufizën

$$A_n = x_1 + x_1 + d + x_1 + 2d + \cdots + x_1 + (n-1)d = nx_1 + d\frac{n(n-1)}{2}.$$

Shembulli 11.2. Themi se funksioni $x : \mathbf{N} \to \mathbb{Q}$ është varg gjeometrik, në qoftë se

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = q \tag{11.1}$$

për çdo $n \in \mathbf{N}$. Këtu $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$.

Nga (11.1), mund te përfundojmë se $x_2 = qx_1$, $x_3 = qx_2 = q^2x_1$, e kështu me radhë $x_n = q^{n-1}x_1$.

Nëse me X_n shënojmë shumën e n kufizave të para të vargut gjeometrik, atëherë kemi

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 \sum_{k=0}^{n-1} q^k.$$

Duke shumëzuar shprehjen $\sum_{k=0}^{n-1} q^n$ me $1-q$, përftojmë

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k(1-q) = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + \cdots + q^{n-1} - q^n = 1 - q^n.$$

Kështu përftojmë formulën

$$X_n = q_1\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{11.2}$$

tani fomulojmë përkufizimin e limitit të vargut.

Përkufizimi 11.3. Themi se numri a ështe limiti i vargut x_n, në qoftë se

$$(\forall \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q})(\exists m = m(\epsilon) \in \mathbf{N}) : n \geqslant m \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon. \tag{11.3}$$

Në këtë rast themi se vargu (x_n) konvergjon dhe shënojmë

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Po fomulojmë një teoremë pa vërtetim.

Teorema 11.4. E zëmë se $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dhe $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ janë dy vargje ashtu që $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ dhe $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dhe supozojmë se c është nje konstant. Atëherë kemi:

(1) Vargu $(ca_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergjon dhe kemi $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca$,
(2) Vargu $(a_n+b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergjon dhe kemi $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b$,
(3) Vargu $(a_n-b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergjon dhe kemi $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = a-b$,
(4) Vargu $(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergjon dhe kemi $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = a\cdot b$,
(5) Nëse $b_n \neq 0$ për çdo n dhe $b\neq 0$, atëherë vargu $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbf{N}}$ konvergjon dhe kemi $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Shembulli 11.5. Le të jetë $x_n = \frac{1}{n}$. Le të vertetojmë se në ketë rast kemi $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. E zëmë se $\epsilon > 0$. Duhet te vërtetojmë se ekzsiton m i tille që $n \geqslant m \Rightarrow |x_n - 0| < \epsilon$. Ky mosbarazim është ekuivalent me mosbarazimin $\frac{1}{n} < \epsilon$ që është ekuivalent me mosbarazimin $n > \frac{1}{\epsilon}$, nëse $n \geqslant m$. Meqenëse $\frac{1}{\epsilon} = \frac{i}{j}$. Duke pjesëtuar me mbetje numrat i dhe j perftojmë herësin q dhe mbetjen r. Në këte rast numri $m = q+1$ është numër natyror dhe është më i madh sesa numri $\frac{1}{\epsilon}$ sepse $\frac{i}{j} = q+\frac{r}{j} < q+1$. Prandaj $n \geqslant m$, rrjedh se $n \geqslant \frac{1}{\epsilon}$. Keshtu vertetuam se $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Shembulli 11.6. E zëme se $0 < q < 1$, $q \in \mathbb{Q}$. Atëherë për vargun $x_n = q^n$ kemi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Le të jetë $r = 1/q$. Prandaj $q^n = \frac{1}{r^n} = \frac{1}{(r-1+1)^n}$.

Tani zbatojmë mosbarazimin e Arkimedit $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$, qe vertetohet nëpermjet induksionit matematik. Prandaj kemi, duke zeevendeesuar $\alpha = r-1$,

$$q^n \leqslant \frac{1}{1+n(q-1)}. \tag{11.4}$$

E zëmë se $\epsilon > 0$. Duket te vertetojmë se ekzsiton m i tille që $n \geqslant m \Rightarrow |x_n - 0| < \epsilon$. Ky mosbarazim është ekuivalent me mosbarazimin $q^n < \epsilon$. Duke marrë parasysh (11.4), duhet te gjejmë numrin n e madh mjaft qe te ketë vend mosbarazimi

$$\frac{1}{1+n(q-1)} < \epsilon$$

gjegjesisht
$$n > \frac{1/\epsilon - 1}{q-1}.$$
Meqenëse numri $\frac{1/\epsilon-1}{q-1}$ është thyesë, si në shembullin paraprak, rrjedh se ekziston numri i plotë pozitiv m ashtu që $m > \frac{1/\epsilon-1}{q-1}$. Prandaj për $n \geqslant m = m(\epsilon)$, ka vend mosbarazimi $|x_n| < \epsilon$. Prandaj $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Shembulli 11.7. E zëme se $0 < q < 1$, $q \in \mathbb{Q}$ dhe le të jetë
$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_1 q^k.$$
Atëhere
$$\lim_{n\to\infty} X_n = X = \frac{x_1}{1-q}.$$
Qe te vertetojme relacionin paraprak, vërejmë se nga (11.2) kemi
$$X_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$
Tani vërtetimi bëhet si në shembullin paraprak duke zbatuar përkufizimin (11.3). E zëmë se $\epsilon > 0$. Duhet te gjejmë $m = m(\epsilon) > 0$ të tillë që $|X_n - X| < \epsilon$ për $n \geqslant m$. Mosbarazimi $|X_n - X| < \epsilon$ mund të shkruhet $|x_1\frac{1-q^n}{1-q} - x_1\frac{1}{1-q}| < \epsilon$, gjegjësisht
$$\frac{|x_1||q^n|}{1-q} < \epsilon.$$

Dmth
$$q^n \leqslant \epsilon_1 = \frac{(1-q)\epsilon}{|x_1|}.$$
Nga Shembulli 11.6, rrjedh se ekziston $m = m(\epsilon_1)$ i tille që $n > m_1$, rrjedh se $q^n < \epsilon_1$. Vëme re se ϵ_1 varet nga ϵ, prandaj edhe $m = m(\epsilon_1)$ varet nga ϵ. Rrjedhimish per $n \geqslant m$ ka vend mosbarazimi $|X_n - X| < \epsilon$. Në këtë rast shenojmë
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_1 q^k = X = \lim_{n\to\infty} X_n.$$

12. Paraqitja me shifra e numrave racionalë

E zëmë se $p = \frac{m}{n}$. Nga barazimi $p = \frac{m:\mathrm{PMP}(m,n)}{n:\mathrm{PMP}(m,n)} = \frac{m_1}{n_1}$, dhe barazimi $\mathrm{PMP}(m_1, n_1) = 1$, rrjedh se çdo numër racional mund të paraqitet si herës i dy numrave të plotë, pjesëtuesi më i madh i përbashët i të cilëve është numri 1. Tani kryejmë pjesëtimin me mbetje të numrit m me n. Kemi $m = q_0 n + r_0$, ku $0 \leqslant r_0 < n$. Nëse, $r_0 = 0$, atëherë $\frac{m}{n} = q_0 \in \mathbb{Z}$.

Nëse $r_0 > 0$, atëherë pjesëtojmë numrin $m_1 = 10r_0$ me numrin m dhe perftojme $m_1 = q_1 n + r_1$, ku $0 \leqslant r_1 < n$. Nëse, $r_1 = 0$, atëherë $\frac{m}{n} = q_0 + \frac{q_1}{10} \in \mathbb{Q}$, dhe e shënojmë simbolikisht $\frac{m}{n} = q_0, q_1$, kurse presjen ndërmjet numrave q_0 dhe q_1 e quajmë shifër dhjetore. Vëmë re se numri $q_1 \leqslant 9$, sepse $q_1 n \leqslant n_1 = 10r_1 < 10n$. Nëse $r_1 > 0$, atëherë pjesëtojmë numrin $m_2 = 10r_1$ me numrin m dhe perftojmë $m_2 = q_1 n + r_1$. Nëse, $r_1 = 0$, atëherë $\frac{m}{n} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_1}{10^2} \in \mathbb{Q}$, dhe e shënojmë simbolikisht $\frac{m}{m} = q_0, q_1 q_1$. Vëmë re q_1 dhe q_1 janë shifra dhjetore. Pra i takojnë bashkësisë $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Këtë proces e vazhdojmë. Mbetja gjatë pjesëtimit të numrit m_k me numrin me n mund të jetë numër i çfarëdoshëm nga bashkësia $\{0, 1, 2 \ldots, n-1\}$. Në qoftë se mbetja asnjëhere nuk është e barabartë me zero, atëherë, mbas një numri të fundmë hapash do të arrijmë deri te dy mbetje r_{k+1} dhe r_{k+l} që janë të barabarta. Nga këtu rrjedh se edhe do të përsëriten edhe shifrat $q_{1+k}, q_{2+k}, \ldots, q_{l+k}$. Prandaj përftojmë prezentimin, duke iu referuar Shembullit 11.7:

$$\frac{m}{n} = q_0 + \sum_{i=1}^{k} q_i 10^{-i} + \sum_{j=1}^{\infty} q_{1+k} \ldots q_{l+k} \cdot 10^{-k-jl}. \tag{12.1}$$

Ketu shprehja $q_{1+k} \ldots q_{l+k}$ paraqet numer $l-$sifror. Prezentimin (12.1) e shënojmë simbolikisht

$$\frac{m}{n} = q_0, q_1 \ldots q_k \overline{q_{1+k} \ldots q_{l+k}}, \tag{12.2}$$

ku me ane te simbolit $\overline{q_{1+k} \ldots q_{l+k}}$, shënojmë $q_{1+k} \ldots q_{l+k} q_{1+k} \ldots q_{l+k} \ldots$. Dmth $q_{1+k} \ldots q_{l+k} \neq 0 \ldots 0$ paraqitet pambarimisht herë dhe quhet perioda e numrit racional, kurse seria e shifrave $q_1 \ldots q_k$ quhet paraperioda (dhe paraqitet vetëm një herë në fillim). Numri dhjetor nga prezentimi (12.2), quhet numri dhjetor periodik. Vëmë re se ky prezentimështe i pafundme.

Në të kundërtën, kur numri nuk ka periodën, atë numër e quajmë numër dhjetor jo-periodik. Në atë rast, mbas k hapash, në pjesëtimin paraprak me mbetje, përftojmë mbetjen $r_k = 0$.

Në të dy rastet numri q_0 në prezentimin (12.2) paraqet pjesën e plotë të numrit racional $\frac{m}{n}$.

Kemi vërtetuar se ḑo numër racional mund të shënohet në trajtën (12.1). Le të tregojmë se vlen pohimi i anasjellët.

Teorema 12.1. Në qoftë se

$$x = q_0 + \sum_{i=1}^{k} q_i 10^{-i} + \sum_{j=1}^{\infty} q_{1+k} \ldots q_{l+k} \cdot 10^{-k-jl}$$

atëherë $x \in \mathbb{Q}$.

Vërtetimi. Në fillim kemi

$$q_{1+k}\dots q_{l+k}\cdot 10^{-k-jl}=\frac{q_{1+k}\dots q_{l+k}}{10^k}\cdot 10^{-jl}.$$

Le te jete $r=1/10^l$. Është e qartë se $0<r<1$. Tani, sipas pekufizimit të shumës së pafundme dhe Shembullit 11.7 kemi

(12.3)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} q_{1+k}\dots q_{l+k}\cdot 10^{-k-jl} &= \frac{q_{1+k}\dots q_{l+k}}{10^{j+k}}\sum_{j=1}^{\infty} r^j\\ &= \frac{q_{1+k}\dots q_{l+k}}{10^{j+k}}\frac{1}{1-r}=\frac{10^{l-j-k}q_{1+k}\dots q_{l+k}}{10^l-1}\\ &= \frac{m_1}{n_1}.\end{aligned}$$

Meqenëse

$$q_0+\sum_{i=1}^{k} q_i 10^{-i}=\frac{m_0}{n_0},$$

rrjedh se

$$x=\frac{m_0}{n_0}+\frac{m_1}{n_1}\in\mathbb{Q}.$$

□

Në teoremën e mëposhtme jepet kriteri për numrin racional jo-periodik.

Teorema 12.2. Numri racional $\frac{m}{n}$, ku $\text{ShVP}(m,n)=1$ është numër racional joperiodik, atëherë dhe vetëm atëherë kur numri n ka formën $n=2^i5^j$, për dy numra jonegativë të plotë i dhe j.

Vërtetimi. Nëse

$$\frac{m}{n}=\frac{m}{2^i5^j}=\frac{m2^j5^i}{10^{i+j}}=\frac{a_0a_1\dots a_k}{10^{i+j}}=a_0a_1\dots a_{k-i-j},a_{k-i-j+1}\dots a_k.$$

Këtu shtojmë aq zero në fillim te prezentimit $a_0a_1\dots a_k$ në qoftë se $k-i-j+1<0$.

Në të kundërtën, nëse $x=x_0,x_1\dots x_k$, ku $x\in\mathbb{Z}$ dhe $x_1,\dots,x_k\in\{0,\dots,9\}$, rrjedh se $x=x_0+\sum_{i=1}^k x_i10^{-i}=x_0+\frac{x_1\dots x_k}{10^k}=\frac{x_1\dots x_k}{2^k5^k}$.

□

Shembulli 12.3. a) E zëmë se $x=1/3$. Atëhere kemi $1/3=0,3\dots3\dots$. Në këtë rast, pjesa e plotë është $q_0=0$. Numri nuk ka paraperiodë, kurse perioda formohet nga shifra 3 që përsëritet pambarimisht shumë herë.

b)Le të jetë $x = \frac{24}{7}$. Në këtë rast kemi $x = 3,428571428571\cdots = 3,\overline{428571}$. Numri ka pjesën e plotë $q_0 = 3$. Nuk ka paraperiodë, kurse perioda formohet nga seria e shifrave 428571.

c) Le të jetë $x = \frac{4813}{2600}$. Në ketë rast kemi

$$1,85115384615384616153\cdots = 1,851153\overline{846153}.$$

Numri 1 është pjesa e plotë. Seria 851153 është paraperioda, kurse seria 846153 është perioda.

Shembulli 12.4. E zëmë se $x = 3,23451451451451....$ Le të paraqesim si thyesë kete numër. Kemi

$$x = 3,23 + x_0 = \frac{323}{100} + x_0$$

ku, në bazë te formulës (12.3),

$$x_0 = 0,00451451451... = \frac{1}{100}\frac{451}{1000}\frac{1}{1 - 1/1000} = \frac{451}{99900}.$$

Këtu $k = 2$, $l = 3$, $q_{2+1} = 4$, $q_{2+2} = 5$, $q_{2+3} = 1$.

Prandaj

$$x = \frac{324127}{99900}.$$