

**Prirodno-matematički fakultet**  
**Društvo matematičara i fizičara Crne Gore**  
**OLIMPIJADA ZNANJA 2024**

Takmičenje iz FIZIKE  
za I razred srednje škole (rješenja)

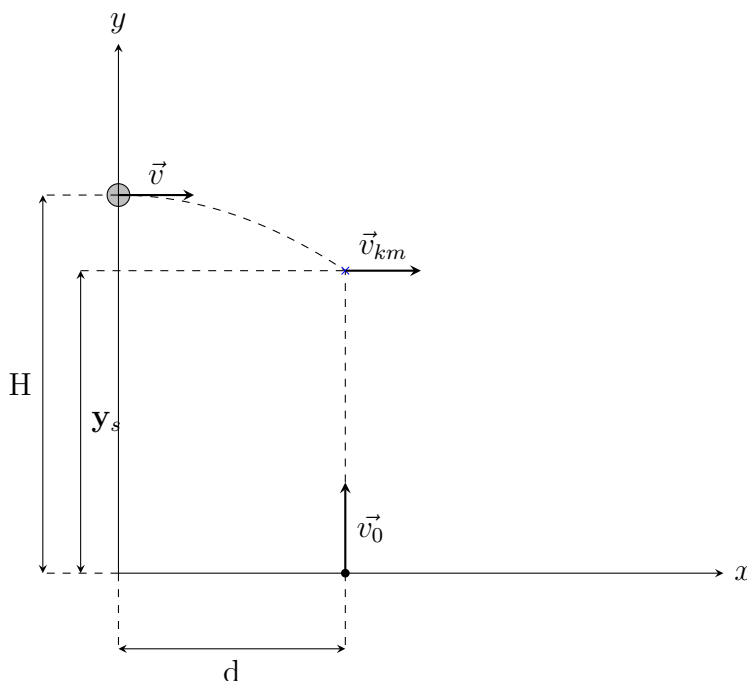
1.

$$\begin{aligned} H &= 1500m \\ v &= 120 \frac{m}{s} \\ m &= 40g = 0,04kg \\ v_0 &= 200 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

---

- a)  $d = ?$   
b)  $M = ?$   
c)  $D = ?$

Kugla nakon ispuštanja ima brzinu aviona,  $v$ , u horizontalnom pravcu, pa će se kretati po zakonima horizontalnog hica. S druge strane, metak ispaljen sa zemlje, brzinom  $v_0$  u vertikalnom pravcu, kreće po zakonima vertikalnog hica naviše. Za početni trenutak  $t=0$ , uzmimo trenutak ispuštanja kugle i ispaljivanja metka, i x-osu postavimo na zemlji, kao na slici (sa krstićem je obilježena tačka sudara).



a)

Jednačine kretanja kuglice su po x-osi je:  $x_k = vt$ , a po y-osi:  $y_k = H - \frac{1}{2}gt^2$ .

Metak se kreće samo po vertikali po zakonu:  $y_m = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

U trenutku njihovog sudara važi  $y_k = y_m$ , odakle dobijamo vrijeme  $t_s$  proteklo do sudara:

$$H - \frac{1}{2}gt_s^2 = v_0t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 \implies t_s = \frac{H}{v_0} = 7,5s$$

Metak se ne kreće u horizontalnom pravcu, pa njegovo rastojanje  $d$  od aviona, u početnom

trenutku, biće jednako pređenom putu kuglice, u horizontalnom pravcu, do sudara sa metkom:

$$d = vt_s = 900m$$

b)

Brzine kuglice po x i y pravcu, neposredno prije sudara su:  $v_{kx} = v$  i  $v_{ky} = gt_s$ , a brzina metka:  $v_m = v_0 - gt_s$ . Pošto sudar kuglice i metka traje veoma kratko, važi zakon održanja impulsa:  $M\vec{v}_k + m\vec{v}_m = (m+M)\vec{v}_{km}$ , gde je  $\vec{v}_{km}$  brzina sistema kuglica-metak neposredno nakon sudara. U zadatku je dato da je brzina sistema kuglica-metak u vertikalnom pravcu, neposredno nakon sudara, jednaka nuli pa zakon održanja impulsa po y-osi ima oblik:

$$p_{y1} = p_{y2} \implies Mv_{ky} - mv_m = 0 \implies Mgt_s = m(v_0 - gt_s)$$

Odakle dobijamo da je masa kuglice:  $M = \frac{v_0 - gt_s}{gt_s} m = 0,069kg$ .

c)

Nakon sudara, kuglica i metak se kreću zajedno, sa početnom brzinom  $v_{km}$  u horizontalnom pravcu, odnosno, kretaće se po zakonima horizontalnog hica. Iz zakona održanja impulsa po x-pravcu, prilikom sudara, možemo da odredimo brzinu  $v_{km}$ :

$$p_{x1} = p_{x2} \implies Mv = (m+M)v_{km} \implies v_{km} = \frac{Mv}{m+M} = 75,96 \frac{m}{s}$$

Visina  $y_s$  na kojoj su se sudarili jednaka je:  $y_s = H - \frac{1}{2}gt_s^2 = 1224,09m$

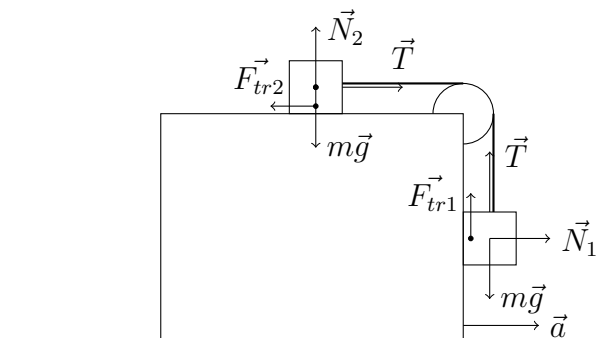
Znajući visinu  $y_s$ , na kojoj je došlo do sudara, kao i činjenicu da sistem nakon sudara nema komponentu brzine u vertikalnom pravcu, iz zakona kretanja po tom pravcu dobijamo vrijeme  $\tau$  proteklo od sudara do pada sistema kuglica-metak na zemlju:

$$y_s = \frac{1}{2}g\tau^2 \implies \tau = \sqrt{\frac{2y_s}{g}} = 15,8s$$

S druge strane, znajući da se sistem u horizontalnom pravcu, od tačke  $x=d$ , kreće konstantnom brzinom  $v_{km}$  možemo izračunati njegov domet  $D$  na sledeći način:

$$D = d + v_{km}\tau = 2106,5m.$$

2. Blok se kreće sa ubrzanjem  $\vec{a}$  udesno, pa će na tijela ulijevo delovati inercijalna sila  $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}$ . Za dovoljno male vrijednosti ubrzanja bloka, tijela 1 i 2 će se kretati naniže odnosno udesno, a tom kretanju će se suprotstavljati sile trenja  $\vec{F}_{tr1}$  i  $\vec{F}_{tr2}$ . Na slici su prikazane sile koje deluju na tijela u referentnom sistemu vezanom za zemlju:



Kada se dostigne minimalna vrijednost ubrzanja bloka za koje će ova tijela mirovati u odnosu na njega, ubrzanje tih tijela u odnosu na zemlju će biti jednako ubrzanju bloka. Jednačine kretanja za:

tijelo 1

$$x: N_1 = ma$$

$$y: mg = T + F_{tr1}$$

tijelo 2

$$x: T - F_{tr2} = ma$$

$$y: N_2 = mg$$

Iz ovih jednačina izrazimo sile trenja:  $F_{tr1} = mg - T$  i  $F_{tr2} = T - ma$ .

Sabiranjem ovih jednačina dobija se:  $F_{tr1} + F_{tr2} = m(g - a)$ .

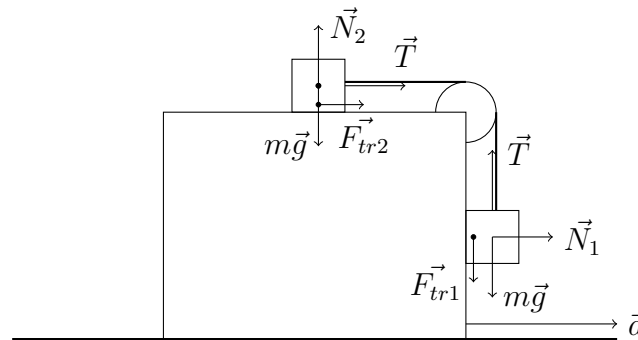
Potrebni uslovi da tijela ne klizaju po bloku su:  $F_{tr1} \leq \mu N_1$  i  $F_{tr2} \leq \mu N_2$ .

Iz prethodnih relacija dobijamo:  $m(g - a) \leq \mu(N_1 + N_2)$ , iz čega se dalje izvodi da je:  $a \geq \frac{g(1-\mu)}{1+\mu}$ .

Što znači da je minimalna vrijednost ubrzanja za koje tijela miruju u odnosu na blok:

$$a_{min} = \frac{g(1-\mu)}{1+\mu}.$$

Sa daljim povećavanjem ubrzanja, tijela će težiti da se kreću u suprotnom smjeru (smjer inercijalne sile). Međutim, mirovaće i dalje zbog sila trenja (koje sada imaju suprotan smjer kao na slici ispod), sve dok se ne dostigne odgovarajuća maksimalna vrijednost ubrzanja.



Jednačine kretanja (u sistemu vezanom za zemlju) za:

tijelo 1

tijelo 2

x:  $N_1 = ma$

x:  $T + F_{tr2} = ma$

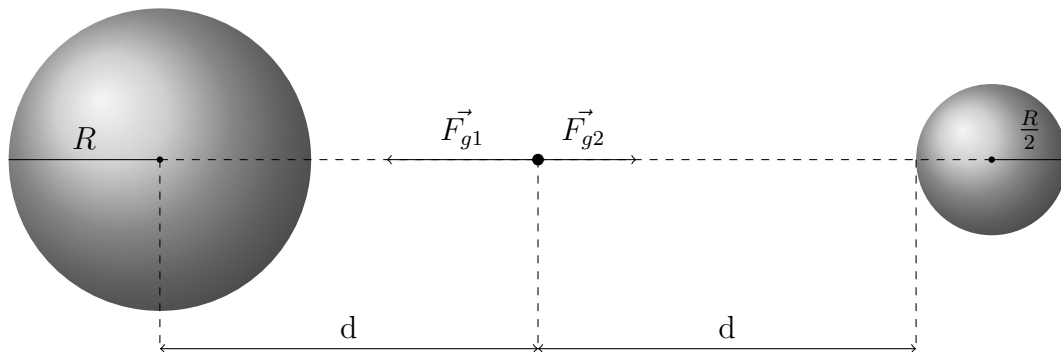
y:  $mg + F_{tr1} = T$

y:  $N_2 = mg$

Istim postupkom kao i u prvom slučaju dobija se:  $a \leq \frac{g(1+\mu)}{1-\mu}$ .

Maksimalna vrijednost ubrzanja bloka za koju nema klizanja tijela po bloku je:  $a_{max} = \frac{g(1+\mu)}{1-\mu}$ .

3. Gravitaciona sila kojom šuplja kugla deluje na tijelo mase  $m$  je, na osnovu simetrije, jednaka rezultatnoj gravitacionoj sili kojom na njega deluju kugla bez šupljine ( $\vec{F}_{g1}$ ) i kugla dimenzija šupljine postavljena simetrično njoj u odnosu na tijelo ( $\vec{F}_{g2}$ ), kao na sledećoj slici:



Odnosno, intenzitet gravitacione sile  $\vec{F}_g$  kojom šuplja kugla deluje na tijelo jednaka je:

$$F_g = F_{g1} - F_{g2}$$

$$F_{g1} = \gamma \frac{M_1 m}{d^2}, \quad M_1 - \text{masa kugle poluprečnika } R$$

$$F_{g2} = \gamma \frac{M_2 m}{(d + \frac{R}{2})^2}, \quad M_2 - \text{masa kugle poluprečnika } \frac{R}{2}$$

Kako je  $M$  masa šuplje kugle onda važi:

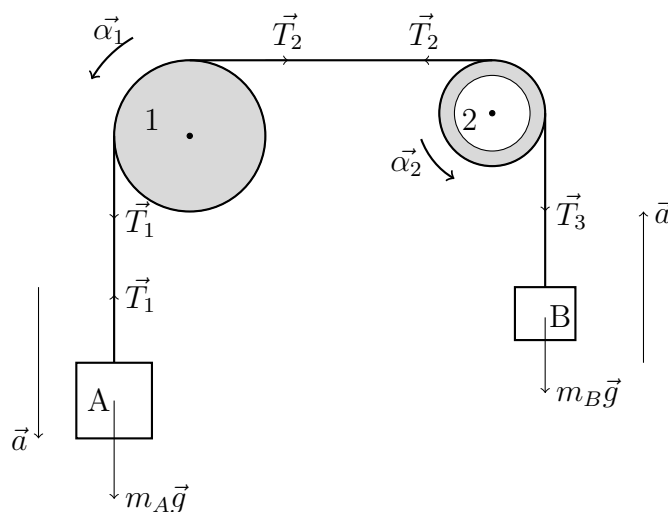
$$M_1 - M_2 = M$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{R^3}{(\frac{R}{2})^3} = 8$$

$$M_2 = \frac{1}{7}M, \quad M_1 = \frac{8}{7}M$$

$$F_g = \gamma \frac{M_1 m}{d^2} - \gamma \frac{M_2 m}{d^2} \quad F_g = \gamma \frac{mM}{7} \left( \frac{8}{d^2} - \frac{1}{(d + \frac{R}{2})^2} \right)$$

4. U zadatku je potrebno da koristimo oba oblika II Njutnovog zakona i za linearno kretanje  $F = ma$  (za tijela A i B) i za rotaciju  $M = I\alpha$  (za disk i prsten). Sile koje deluju na tijela i koturove prikazane su na sledećoj slici:



Sile zatezanja nisu jednake na različitim stranama koturova jer njihova masa nije zanemarljiva. Na njih djeluju i gravitaciona sila i normalna reakcija osovine, međutim one ne stvaraju moment. Moment na koturove stvaraju samo sile zatezanja i one su normalne na njihov poluprečnik. Tijela A i B su povezana neistegljivim kanapom pa će njihova ubrzanja biti jednaka. Pretpostavimo da tijelo A ubrzava naniže, odnosno tijelo B naviše. Onda disk i prsten rotiraju u smjeru kao što je pokazano na slici. Takođe, kanap ne klizi pa koturovi imaju isto tangencijalno ubrzanje kao i kanap. Međutim, kako su oni različitih poluprečnika, neće imati isto ugaono ubrzanje ( $\alpha = \frac{a}{R}$ ).

II Njutnov zakon za:

tijelo A:  $m_A g - T_1 = m_A a$

tijelo B:  $T_3 - m_B g = m_B a$

disk:  $R_1 T_1 - R_1 T_2 = I_d \alpha_1$ , gdje je  $I_d = \frac{1}{2} M_1 R_1^2$  (moment inercije diska)

prsten:  $R_2 T_2 - R_2 T_3 = I_p \alpha_2$ , gdje je  $I_p = M_2 R_2^2$  (moment inercije prstena)

Takođe, znamo da je  $\alpha_1 = \frac{a}{R_1}$  i  $\alpha_2 = \frac{a}{R_2}$ , pa kada to uvrstimo u prethodne jednačine kao i izraz za momente inercije dobijamo:

$$T_1 = m_A g - m_A a \quad (1)$$

$$T_3 = m_B g + m_B a \quad (2)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M_1 a \quad (3)$$

$$T_2 - T_3 = M_2 a \quad (4)$$

Ukoliko od prve jednačine oduzmemo ostale tri (1)-(2)-(3)-(4) dobijamo da je ubrzanje  $a$  jednako:

$$a = \frac{g(m_A - m_B)}{m_A + m_B + \frac{1}{2} M_1 + M_2}.$$

Za ugaona ubrzanja onda dobijamo:

$$\alpha_1 = \frac{a}{R_1} = \frac{g(m_A - m_B)}{R_1(m_A + m_B + \frac{1}{2} M_1 + M_2)}, \quad \alpha_2 = \frac{a}{R_2} = \frac{g(m_A - m_B)}{R_2(m_A + m_B + \frac{1}{2} M_1 + M_2)}$$