

Prirodno-matematički fakultet  
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

**OLIMPIJADA ZNANJA 2024**

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IX razred osnovne škole

1. **(8 poena)** Zbir dva broja je 90. 40% prvog broja je za 15 veće od 30% drugog broja. Koji su to brojevi?

**Rješenje:** Označimo jedan od ovih brojeva sa  $x$ , a drugi je tada  $90 - x$ . Važi

$$40\%x = 30\%(90 - x) + 15.$$

Imamo

$$\frac{4}{10}x = \frac{3}{10}(90 - x) + 15$$

$$4x = 3(90 - x) + 150$$

$$4x = 270 - 3x + 150$$

$$7x = 420$$

$$x = 60$$

Dakle, u pitanju su brojevi 60 i 30.  $\square$

2. **(23 poena)** Neka su  $x$  i  $y$  pozitivni realni brojevi. Dokazati da je

$$x^2 + xy + y^2 \leq 3(x - \sqrt{xy} + y)^2.$$

**Rješenje:** Sredimo izraze sa lijeve i desne strane nejednakosti.

$$x^2 + xy + y^2 \leq 3(x - \sqrt{xy} + y) \cdot (x - \sqrt{xy} + y)$$

$$x^2 + xy + y^2 \leq 3(x^2 - x\sqrt{xy} + xy - x\sqrt{xy} + xy - y\sqrt{xy} + xy - y\sqrt{xy} + y^2)$$

$$x^2 + xy + y^2 \leq 3(x^2 - 2x\sqrt{xy} + 3xy - 2y\sqrt{xy} + y^2)$$

$$x^2 + xy + y^2 \leq 3x^2 - 6x\sqrt{xy} + 9xy - 6y\sqrt{xy} + 3y^2$$

Dalje, prebacimo sve članove u kojima figuriše korijen na lijevu stranu nejednakosti, a sve ostale na desnu, dobijamo

$$6x\sqrt{xy} + 6y\sqrt{xy} \leq 2x^2 + 8xy + 2y^2$$

Dijeljenjem lijeve i desne strane nejednakosti sa 2 dobijamo

$$3x\sqrt{xy} + 3y\sqrt{xy} \leq x^2 + 4xy + y^2$$

Zapisaćemo  $4xy$  kao  $6xy - 2xy$ , i  $6xy$  prebaciti na lijevu stranu nejednakosti, pa dobijamo

$$\begin{aligned} 3x\sqrt{xy} + 3y\sqrt{xy} - 6xy &\leq x^2 - 2xy + y^2 \\ 3\sqrt{xy}(x - 2\sqrt{xy} + y) &\leq (x - y)^2 \\ 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\leq ((\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}))^2 \\ 3\sqrt{xy} &\leq \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} \\ 3\sqrt{xy} &\leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \\ 3\sqrt{xy} &\leq x + 2\sqrt{xy} + y \\ \sqrt{xy} &\leq x + y \end{aligned}$$

Dakle, naša početna nejednakost je ekvivalentna nejednakosti  $\sqrt{xy} \leq x + y$ , koja slijedi direktno iz nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine brojeva  $x$  i  $y$ .  $\square$

3. (23 poena) Naći sve prirodne brojeve  $n$  za koje je  $n^2 + 33n$  potpun kvadrat.

**Rješenje:** I rješenje:

Neka je  $n(n + 33) = a^2$ , gdje su  $m$  i  $n$  prirodni brojevi. U obzir dolaze sljedeći slučajevi:

- $NZD(n, 33) = 1$ . Tada su  $n$  i  $n + 33$  uzajamno prosti, pa je svaki od njih potpun kvadrat:  $n = p^2$ ,  $n + 33 = q^2$ . Odatve je  $33 = q^2 - p^2 = (q - p)(q + p)$ . Dakle, ili je  $q - p = 1$  a  $q + p = 33$ , ili je  $q - p = 3$  a  $q + p = 11$ . U prvom slučaju je  $q = 17$ ,  $p = 16$ , a  $n = 256$ , a u drugom je  $q = 7$ ,  $p = 4$  a  $n = 16$ .
- $NZD(n, 33) = 3$ , odnosno  $n = 3k$  i  $k$  nije djeljiv sa 11. Tada je  $9k(k + 11) = a^2$ . Pošto su  $k$  i  $k + 11$  uzajamno prosti, moraju biti potpuni kvadrati, pa je  $k = p^2$ ,  $k + 11 = q^2$ . Odatve je  $11 = q^2 - p^2 = (q - p)(q + p)$ , pa je  $q - p = 1$  a  $q + p = 11$ . Dobijamo  $q = 6$ ,  $p = 5$ , a  $k = 25$ , i  $n = 75$ .

- $NZD(n, 33) = 11$ , odnosno  $n = 11k$  i  $k$  nije djeljiv sa 3. Tada je  $121k(k+3) = a^2$ . Pošto su  $k$  i  $k+3$  uzajamno prosti, moraju biti potpuni kvadrati, pa je  $k = p^2$ ,  $k+3 = q^2$ . Odavde je  $3 = q^2 - p^2 = (q-p)(q+p)$ , pa je  $q-p = 1$  a  $q+p = 3$ . Dobijamo  $q = 2$ ,  $p = 1$ , a  $k = 1$ , i  $n = 11$ .
- $NZD(n, 33) = 33$ , odnosno  $n = 33k$ . Tada je  $33^2 k(k+1) = a^2$ . Pošto su  $k$  i  $k+1$  uzajamno prosti, moraju biti potpuni kvadrati, pa je  $k = p^2$ ,  $k+1 = q^2$ . Odavde je  $1 = q^2 - p^2 = (q-p)(q+p)$ , pa je  $q-p = 1$  a  $q+p = 1$ . Dobijamo  $q = 1$ ,  $p = 0$ , a  $k = 0$ , i  $n = 0$ , što je nemoguće jer je  $n$  prirodan broj.

II rješenje:

Neka je  $n^2 + 33n = a^2$ . Množenjem lijeve i desne strane sa 4, i dodavanjem  $33^2$  sa obje strane jednakosti, dobijamo

$$4n^2 + 4 \cdot 33 \cdot n + 33^2 = 4a^2 + 33^2$$

odnosno

$$(2n + 33)^2 = 4a^2 + 33^2.$$

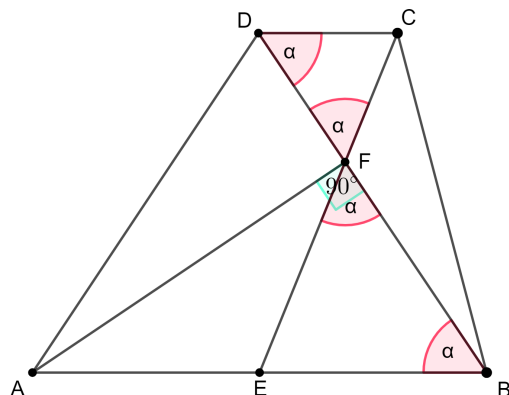
Odavde je

$$33^2 = (2n + 33)^2 - 4a^2 = (2n + 33 + 2a)(2n + 33 - 2a).$$

Označimo  $2n + 33 + 2a = x$ ,  $2n + 33 - 2a = y$ , tada je  $xy = 33^2$ , i  $y < x$ . Dakle, moguće vrijednosti parova  $(x, y)$  su  $(33^2, 1)$ ,  $(3 \cdot 11^2, 3)$ ,  $(99, 11)$  i  $(121, 9)$ . Pored toga je  $2n + 33 = \frac{x+y}{2}$ , odnosno  $n = \frac{x+y-66}{4}$ , pa  $n$  može biti 256, 75, 11 i 16.  $\square$

4. (**23 poena**) Neka je tačka  $E$  središte osnovice  $AB$  trapeza  $ABCD$ . Neka se duži  $CE$  i  $BD$  sijeku u tački  $F$ , i neka je duž  $AF$  normalna na duž  $BD$ . Dokazati da je  $CD = CF$ .

**Rješenje:** Primijetimo da je trougao  $\triangle ABF$  pravougli, i  $E$  sredina hipotenuze  $AB$ , pa je  $FE = BE$ . Odavde zaključujemo da je  $\triangle BFE$  jednakokraki i da je  $\angle EBF = \angle BFE = \alpha$ . Dalje je  $\angle CFD = \angle BFE$  (unakrsni uglovi), i  $\angle FDC = \angle EBF$  (z uglovi), pa je  $\angle FDC = \angle CFD = \alpha$ . Dakle,  $\triangle CFD$  je jednakokraki, i  $CD = CF$ .



□

5. (23 poena) Brojevi 1, 2, 3, ..., 81 su upisani u polja šahovske table dimenzije 9x9, tako da je svaki broj upisan u tačno jedno polje. Marko je primijetio da ako za brojeve  $x$  i  $y$  važi  $|x - y| = 3$ , tada polja u koja su brojevi  $x$  i  $y$  upisani imaju jednu zajedničku stranicu. Da li postoje dva polja na čošku table takva da je razlika brojeva upisanih u tim poljima djeljiva sa 6? (Šahovska tabla ima četiri čoska).

**Rješenje:** Neka su  $a$  i  $b$  brojevi iz skupa  $\{1, 2, \dots, 81\}$  koja daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3, i neka je  $a < b$ . Iz uslova zadatka, u jedno od polja susjednih polju u kom je upisan  $a$  se mora naći broj  $a + 3$ . Dalje, u jednom od polja susjednim polju u kom je upisan  $a + 3$  mora biti  $a + 6$ . Nastavljamo postupak dok ne stignemo do broja  $b$ . Dakle, možemo naći putanju od polja u kom se nalazi broj  $a$  do polja u kom se nalazi broj  $b$ , tako da pri prelasku sa polja na polje ostatak pri dijeljenju broja upisanog u polje pri dijeljenju sa 3 ostaje isti.

Kako tabla ima četiri čoska, a mogući ostaci pri dijeljenju sa 3 su 0, 1, i 2, postojaće dva polja u koja su upisani brojevi koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3. Označimo brojeve upisane u ova polja sa  $a$  i  $b$ , i neka je  $a < b$ . Iz prethodnog razmatranja, znamo da postoji putanja od čoska u kom je upisan broj  $a$  do čoska u kom je upisan broj  $b$ , tako da putujemo samo poljima koja daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3 kao brojevi  $a$  i  $b$ . Dakle, važiće  $b = a + 3k$ , gdje je  $k$  broj potrebnih koraka. Pošto je tabla dimenzija 9x9, svi čoskovi su obojeni istom

bojom, pa bilo koja putanja koja vodi od jednog do drugog ćoska se mora sastojati od parnog broja koraka. Dakle,  $b - a = 3k$  i  $k$  je paran broj, pa je  $b - a$  djeljiv sa 6.  $\square$

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Prvi zadatak se boduje sa maksimalno 8 bodova, a ostali sa maksimalno 23 boda.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**