

Prirodno-matematički fakultet  
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

**OLIMPIJADA ZNANJA 2024**

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE  
za VIII razred osnovne škole

1. **(20 poena)** Profesori Marko i Darko zajedno pregledaju pismene zadatke iz matematike. Marko je mlađi i pregleda zadatke brže od Darka. Da pregledaju sve zadatke zajedno potrebno im je 300 minuta. Međutim poslije 2 sata pregledanja Darko se razbolio. Marko je, radeći sam, ostatak radova pregledao za 288 minuta. Koliko vremena bi za pregledanje svih radova bilo potrebno Marku a koliko Darku ukoliko bi pregledali samostalno?

**Rješenje:** Označimo sa  $x$  i  $y$  broj sati potrebnih da sve pismene zadatke samostalno pogledaju Marko i Darko redom. Dakle, Marko za jedan sat pregleda  $1/x$  ukupnog broja pismenih a Darko  $1/y$  ukupnog broja pismenih. Da bi odradili kompletan posao  $300\text{min} = 5h$  zaključujemo da za sat vremena odrade jednu petinu posla i važi  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ . Za dva sata zajedničkog pregledanja završeno i  $288\text{min} = 4.8h$  samostalnog Markovog rada završen je čitav posao pa važi

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{4.8}{x} = 1 \implies \frac{2}{5} + \frac{4.8}{x} = 1 \implies x = 8.$$

Uvrštavanje  $x = 8$  u  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$  dobijamo  $y = 13\frac{1}{3}$ . Dakle, za samostalno pregledanje radova Marku bi bilo potrebno 8 sati, dok bi Darko taj posao obavio za 13 sati i 20 minuta.

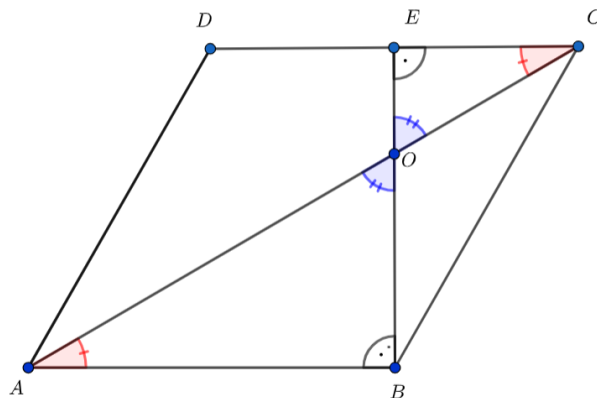
2. **(20 poena)** Dat je romb  $ABCD$ . Neka je  $E$  podnožje visine povučene iz tjemena  $B$  na stranicu  $CD$  i  $O$  tačka presjeka duži  $BE$  i  $AC$ . Ako je  $|BO|=6\text{cm}$ , a  $|OE|=3\text{cm}$ , izračunati površinu četvorougla  $ABCE$ .

**Rješenje:**

**I način:**

Kako je  $\angle OAB = \angle OCE$  i  $\angle BOA = \angle COA$ , to je  $\triangle ABO \sim \triangle CEO$ , pa slijedi  $\frac{6}{3} = \frac{|BO|}{|EO|} = \frac{|AB|}{|CE|}$ .

Odavde je  $|BC| = |AB| = 2|CE|$ . Iskoristimo Pitagorinu teoremu na  $\triangle BEC \implies |EC|^2 + 9^2 = |BC|^2 = 4|EC|^2 \implies |EC| = 3\sqrt{3} \implies |AB| = 6\sqrt{3}$ .



Četvorougao ABCE je trapez pa je tražena površina  $P = |BE| \cdot \frac{|AB|+|EC|}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{2}$ .

## II način:

Neka je S presjek dijagonala romba. Zbog osobina romba S je sredina stranice BD, ali i podnožje visine iz C na BD. Kako je O na težišnoj duži CS i  $|BO| : |OE| = 2 : 1$ , to je O težište, ali i ortocentar  $\triangle BCD \implies \triangle BCD$  je jednakokraničan. U jednakokraničnom trouglu je  $9 = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , gdje  $a = |CD|$ . Tražena površina je  $P = 9 \cdot \frac{a+\frac{a}{2}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{2}$ .

3. **(20 poena)** Kod četvorocifrenog broja cifra hiljada je 7, a cifra desetica 2. Naći cifre stotina i jedinica, ako se zna da je taj broj djeljiv sa 2 i 3, a nije djeljiv ni sa  $2^2$  ni sa  $3^2$ .

**Rješenje:** Traženi broj  $\overline{7a2b}$  djeljiv je sa 2, a nije djeljiv sa 4, ako je takav i broj  $\overline{2b}$ , odnosno ako je  $b \in \{2, 6\}$ .

Ako je  $b = 2$ , zbir cifara traženog broja je  $7 + a + 2 + 2 = 11 + a$ , a takođe i traženi broj, je djeljiv sa 3, a nije sa 9 ako je  $a \in \{1, 4\}$ , pa je traženi broj 7122 ili 7422. Za  $b = 6$ , zbir cifara traženog broja  $7 + a + 2 + 6 = 15 + a$  djeljiv je sa 3, a nije sa 9 ako je  $a \in \{0, 6, 9\}$ , pa je traženi broj 7026, 7626 ili 7926.

4. **(20 poena)** Ana i Zoran igraju sljedeću igru: Ana zamisli neki prirodan broj i navede nekoliko informacija o zamišljenom broju a Zoran treba da pogodi cifru jedinica tog broja. Ana je navela sljedeće informacije: zamišljeni broj je potpun kvadrat i cifra njegovih desetica je neparna. Pomozi Zoranu da pogodi cifru jedinica zamišljenog broja.

**Rješenje:** Neka je  $n$  zamišljeni broj. Pošto je  $n$  potpun kvadrat onda se može zapisati u obliku  $n = (10k + j)^2 = 100k^2 + 20 \cdot kj + j^2$  gdje  $k \geq 0$  i  $j \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Cifra desetica sabirka  $100k^2$  je 0, cifra desetica sabirka  $20 \cdot kj$  je parna pa tako zaključujemo da cifra desetica

broja  $j^2$  mora biti neparna. Cifra desetica  $j^2$  je neparna jedino u slučajevima  $j^2 = 16$  i  $j^2 = 36$ . Odatle zaključujemo da je cifra jedinica broja  $n$  jednaka 6.

5. **(20 poena)** Apotekar ima šest bočica sa zapreminama od 16, 18, 22, 23, 24 i 34 *ml*. Neke od njih su napunjene destilovanom vodom, a neke alkoholom, a samo jedna je prazna. Ukupna zapremina alkohola je dva puta veća od ukupne zapremine vode. Odrediti sadržaj svake bočice.

**Rješenje:** Kako je zapremina alkohola dva puta veća od zapremine vode, to se ukupna zapremina vode i alkohola u *ml* izražava brojem djeljivim sa 3. Međutim, ukupna zapremina svih bočica je  $16+18+22+23+24+34 = 137ml$ . Kako broj 137 pri djeljenju sa 3 daje ostatak 2, zapremina prazne bočice takođe se izražava brojem koji pri djeljenju sa 3 daje ostatak 2. Jedina takva bočica je ona od 23 *ml*. Tada zapremina punih bočica iznosi 114 *ml*, zapremina vode je  $\frac{114}{3} = 38ml$ , dakle zaključujemo da su vodom napunjene bočice od 16 i 22 *ml*.

**Vrijeme rada:** 180 minuta.

**Svaki zadatak se boduje sa maksimalno 20 bodova.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**