

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE

OLIMPIJADA ZNANJA 2025

MATEMATIKA

za VII razred osnovne škole

1. Dijagonale četvorougla $ABCD$ sijeku se u tački O pri čemu je $AO = DO$, $BO = CO$ i $\angle BAC = \angle DCA$. Dokazati da je taj četvorougao pravougaonik.
2. Majka je obećala malom Andriji da će ga voditi u zabavni park za vikend. Međutim, Andrija je krišom iz majkine knjige pocijepao 20, ne obavezno susjednih listova. Kada je to primijetila, majka je rekla da će ga povesti u zabavni park samo ukoliko dobro sabere sve brojeve kojima su numerisane stranice na istrgnutim listovima. Andrija je sabrao brojeve i dobio rezultat 2025. Da li ga je majka povela u zabavni park?
3. Koliko ima prirodnih brojeva n djeljivih sa 5 koji zadovoljavaju nejednakost:
$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} < \frac{n}{2025} < 1\frac{1}{3} + \frac{1}{5}.$$
4. Ana, Marko i Katarina danas zajedno imaju trideset godina. Kada zajedno budu imali trideset šest godina, Ana će imati onoliko godina koliko danas ima Marko, a kada zajedno budu imali pedeset jednu godinu, Ana će imati onoliko godina koliko danas ima Katarina. Koliko svako od njih danas ima godina?
5. Dat je četvorougao $ABCD$. Naći dužinu stranice BC ukoliko je dato da je $AD = 5\text{cm}$, $DC = 3\text{cm}$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle CBA = 30^\circ$ i $\angle DCB = 120^\circ$.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 20 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE

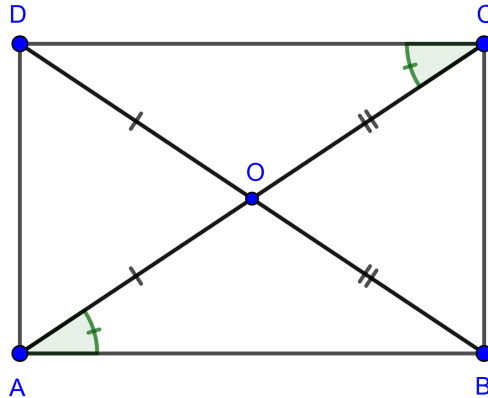
OLIMPIJADA ZNANJA 2025

MATEMATIKA

za VII razred osnovne škole

1. Dijagonale četvorougla $ABCD$ sijeku se u tački O pri čemu je $AO = DO$, $BO = CO$ i $\angle BAC = \angle DCA$. Dokazati da je taj četvorougao pravougaonik.

Rješenje:



Kako je $AO = DO$, $BO = CO$ i $\angle AOB = \angle COD$ (unakrsni uglovi), to su trouglovi ABO i DCO podudarni na osnovu stava SUS. Naspram jednakih stranica u podudarnim trouglovima nalaze se jednaki uglovi, pa zaključujemo da je

$$\angle BAO = \angle ODC,$$

(jer je $BO=CO$), to jest

$$\angle BAC = \angle BAO = \angle ODC. \quad (1)$$

Iz uslova zadatka imamo da je

$$\angle BAC = \angle DCA = \angle DCO, \quad (2)$$

pa iz (1) i (2) obijamo

$$\angle ODC = \angle DCO,$$

što znači da je trougao DCO jednakokraki. To dalje povlači da je

$$DO = CO = AO = BO,$$

što znači da su u datom četvorouglu $ABCD$ dijagonale jednake i međusobno se polove, odakle slijedi da $ABCD$ mora biti pravougaonik.

2. Majka je obećala malom Andriji da će ga voditi u zabavni park za vikend. Međutim, Andrija je krišom iz majkine knjige pocijepao 20, ne obavezno susjednih listova. Kada je to primijetila, majka je rekla da će ga povesti u zabavni park samo ukoliko dobro sabere sve brojeve kojima su numerisane stranice na istrgnutim listovima. Andrija je sabrao brojeve i dobio rezultat 2025. Da li ga je majka pvela u zabavni park?

Rješenje: Na svakom od istrgnutih listova se za numeraciju koriste susjedni brojevi. Neka su na prvom istrgnutom listu to brojevi a_1 i $a_1 + 1$, na drugom a_2 i $a_2 + 1$... na dvadesetom a_{20} i $a_{20} + 1$. Dakle, Andrija je sabirao

$$a_1 + (a_1 + 1) + a_2 + (a_2 + 1) + \dots + a_{20} + (a_{20} + 1) = 2(a_1 + \dots + a_{20}) + 20$$

i dobio 2025. Primijetimo da je suma $2(a_1 + \dots + a_{20}) + 20$ parna, a broj 2025 je neparan, tako da Andrija nije dobro sabrao brojeve, te ga majka ipak neće voditi u zabavni park.

3. Koliko ima prirodnih brojeva n djeljivih sa 5 koji zadovoljavaju nejednakost:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} < \frac{n}{2025} < 1\frac{1}{3} + \frac{1}{5}.$$

Rješenje: Sredimo prvo datu nejednakost. Imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} - \frac{1}{5} &= \frac{2 \cdot 5 - 3}{15} = \frac{7}{15}, \\ 1\frac{1}{3} + \frac{1}{5} &= \frac{4}{3} + \frac{1}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 3}{15} = \frac{23}{15}.\end{aligned}$$

Dakle, treba naći najmanji i najveći prirodan broj n djeljiv sa 17 koji zadovoljava nejednakost

$$\frac{7}{15} < \frac{n}{2025} < \frac{23}{15}.$$

Proširimo razlomke $\frac{7}{15}$ i $\frac{23}{15}$ sa 135 kako bi im imenilac bio 2025.

$$\frac{7}{15} = \frac{7 \cdot 135}{15 \cdot 135} = \frac{945}{2025},$$
$$\frac{23}{15} = \frac{23 \cdot 135}{15 \cdot 135} = \frac{3105}{2025}.$$

Početna nejednakost se svela na

$$\frac{945}{2025} < \frac{n}{2025} < \frac{3105}{2025}.$$

Odatle vidimo da za n važi

$$945 < n < 3105. \quad (1)$$

Prirodnih brojeva n koji zadovoljavaju nejednakost (1) a djeljivi su sa 5 ima

$$\frac{3105 - 945}{5} - 1 = \frac{2160}{5} - 1 = 431.$$

Do tog zaključka dolazimo tako što nađemo koliko prirodnih brojeva k zadovoljava nejednakost

$$945 + k \cdot 5 < 3105. \quad (2)$$

Da bi prirodan broj k zadovoljavao nejednakost (2) mora da važi

$$k < \frac{3105 - 945}{5},$$

te ukupno imamo $\frac{3105-945}{5} - 1$ takvih brojeva k .

Dakle, prirodnih brojeva n djeljivih sa 5 koji zadovoljavaju nejednakost $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} < \frac{n}{2025} < 1\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ ima 431.

4. Ana, Marko i Katarina danas zajedno imaju trideset godina. Kada zajedno budu imali trideset šest godina, Ana će imati onoliko godina koliko danas ima Marko, a kada zajedno budu imali pedeset jednu godinu, Ana će imati onoliko godina koliko danas ima Katarina. Koliko svako od njih danas ima godina?

Rješenje: Neka Ana danas ima A godina, Marko M a Katarina K . Važi

$$A + M + K = 30.$$

Dalje, primijetimo da će za dvije godine oni zajedno imati 36 godina (Ana će tada imati $A + 2$, Marko $M + 2$ i Katarina $K + 2$, što će upravo biti $A + M + K + 6 = 30 + 6 = 36$), pa iz uslova zadatka vidimo da je

$$A + 2 = M.$$

Takođe, primijetimo da će za sedam godina oni zajedno imati pedeset jednu godinu (Ana će tada imati $A + 7$, Marko $M + 7$ i Katarina $K + 7$, što će upravo biti $A + M + K + 21 = 30 + 21 = 51$), pa iz uslova zadatka vidimo da je

$$A + 7 = K.$$

Zamjenom dobijenih rezultata u početnu jednačinu $A + M + K = 30$ dobijamo:

$$A + M + K = A + (A + 2) + (A + 7) = 3A + 9 = 30,$$

odakle slijedi da je

$$A = 7$$

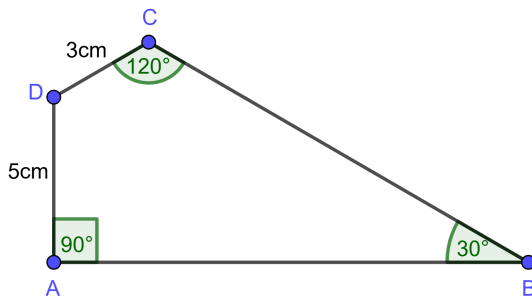
i posljedično

$$M = A + 2 = 9, K = A + 7 = 14.$$

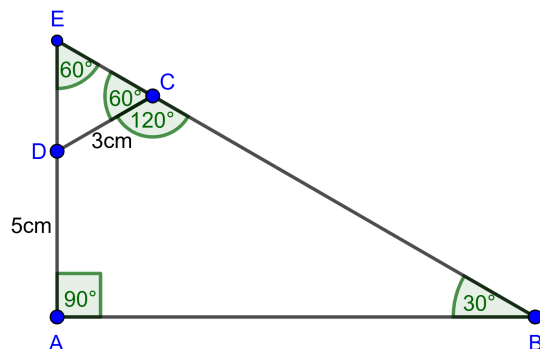
Dakle, Ana danas ima 7 godina, Marko 9 a Katarina 14.

5. Dat je četvorougao $ABCD$. Naći dužinu stranice BC ukoliko je dato da je $AD = 5\text{cm}$, $DC = 3\text{cm}$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle CBA = 30^\circ$ i $\angle DCB = 120^\circ$.

Rješenje:



Produžimo stranicu BC preko tačke C i stranicu AD preko tačke D . Neka se produžeci stranica sijeku u tački E .



Kako je $\angle BAD = \angle BAE = 90^\circ$ i $\angle EBA = \angle CBA = 30^\circ$, to je

$$\angle AEB = 180^\circ - \angle BAE - \angle EBA = 180^\circ - \angle BAD - \angle EBA = 60^\circ.$$

Dalje imamo da je

$$\angle ECD = 180^\circ - \angle DCB = 60^\circ.$$

Kako $\triangle DCE$ ima dva ugla od 60° , to je on jednakostranični, te je

$$DE = CE = DC = 3cm.$$

To nas dovodi do zaključka da je

$$AE = AD + DE = 5cm + 3cm = 8cm.$$

$\triangle ABE$ je pravougli trougao sa oštrim uglovima 30° i 60° , pa je njegova hipotenuza dva puta duža od katete koja leži naspram ugla od 30° , odnosno

$$BE = 2 \cdot AE = 16cm.$$

Na kraju dobijamo da je

$$BC = BE - CE = 16cm - 3cm = 13cm.$$

Dakle, dužina stranice BC je $13cm$.