

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2025
MATEMATIKA
za I razred srednje škole

1. Na turniru u košarci svaka ekipa igra sa svakom ekipom po dva puta. Poslije svake utakmice pobjednik dobija 2 poena, dok poražena ekipa ne dobija nijedan poen. Utakmica se ne može završiti neriješenim rezultatom. Na kraju turnira, prvoplasirana ekipa ima 26 poena i tačno dvije ekipe su posljednje sa po 20 poena. Koliko ekipa je učestvovalo na turniru?
2. Testira se automobil na stazi dužine $600m$ koja počinje i završava u istoj tački i koja se sastoji od ravnih dijelova, uzbrdica i nizbrdica, koje imaju isti nagib. Važi sljedeće:
 - i) brzina zavisi samo od toga da li auto prolazi kroz ravan dio (v_r), kroz uzbrdicu (v_u) ili kroz nizbrdicu (v_n), pri čemu $v_u < v_r < v_n$;
 - ii) brzine v_u, v_r, v_n su prirodni brojevi;
 - iii) kakva god da je struktura puta, automobilu treba uvijek $50s$ da ga pređe.Odrediti sve moguće vrijednosti za v_u, v_r, v_n .
3. Neka su date tri duži dužine 1, 2 i 3, i neka je duž dužine 3 podijeljena na $n \geq 2$ manjih duži. Dokazati da među ovih $n + 2$ duži postoje tri od kojih se može konstruisati trougao.
4. U trouglu ABC je $\angle CAB = 50^\circ$ i $\angle ABC = 60^\circ$. Na stranici AB nalazi se tačka D , a na stranici BC tačka E tako da je $\angle CAE = \angle ACD = 30^\circ$. Izračunati mjeru $\angle CDE$.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE

OLIMPIJADA ZNANJA 2025

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za I razred srednje škole

1. Na turniru u košarci svaka ekipa igra sa svakom ekipom po dva puta. Poslije svake utakmice pobjednik dobija 2 poena, dok poražena ekipa ne dobija nijedan poen. Utakmica se ne može završiti neriješenim rezultatom. Na kraju turnira, prvoplasirana ekipa ima 26 poena i tačno dvije ekipe su posljednje sa po 20 poena. Koliko ekipa je učestvovalo na turniru?

Rješenje:

Neka je n broj ekipa, a M srednji broj poena, tj. količnik ukupnog broja osvojenih poena i broja n . Tada, kako se poslije svake utakmice dodjeljuju ukupno 2 poena, a ima $n(n-1)$ utakmica, slijedi da je $M = \frac{2n(n-1)}{n} = 2(n-1)$.

Dalje, kako sve ekipe imaju barem 20 poena, a postoji ekipa sa više od 20 poena, imamo da je $M > 20$, odnosno $2(n-1) > 20$, što povlači $n > 11$. Sa druge strane, odredimo gornje ograničenje za M . Svaka od $(n-3)$ ekipa, za koje ne znamo broj poena je dobila najviše 24 poena, jer je broj dodijeljenih poena po utakmici paran, pa je paran i konačan broj poena svake ekipe. Zato,

$$M \leq \frac{26 + 24(n-3) + 2 \cdot 20}{n} = 24 - \frac{6}{n} < 24.$$

Odavde, imamo da je $2(n-1) < 24$, pa je $n < 13$. Konačno, $n = 12$.

2. Testira se automobil na stazi dužine $600m$ koja počinje i završava u istoj tački i koja se sastoji od ravnih dijelova, uzbrdica i nizbrdica, koje imaju isti nagib. Važi sljedeće:

- i) brzina zavisi samo od toga da li auto prolazi kroz ravan dio (v_r), kroz uzbrdicu (v_u) ili kroz nizbrdicu (v_n), pri čemu $v_u < v_r < v_n$;
- ii) brzine v_u, v_r, v_n su prirodni brojevi;
- iii) kakva god da je struktura puta, automobilu treba uvijek $50s$ da ga pređe.

Odrediti sve moguće vrijednosti za v_u, v_r, v_n .

Rješenje:

U slučaju da je put ravan, bez uzbrdica i nizbrdica, zaključujemo da je $v_r = \frac{600}{50} = 12$.

Neka je struktura puta proizvoljna, pri čemu $r + u + n = 600$, gdje su r, u, n respektivno, ukupne dužine ravnog puta, uzbrdice, nizbrdice.

Kako je u pitanju staza koja počinje i završava u istoj tački to je $u = n$, pa je $r = 600 - 2u$.

Iz uslova iii) imamo

$$\frac{u}{v_u} + \frac{600 - 2u}{12} + \frac{u}{v_n} = 50,$$

odnosno

$$u \left(\frac{1}{v_u} + \frac{1}{v_n} - \frac{1}{6} \right) + 50 = 50,$$

što povlači

$$\frac{1}{v_u} + \frac{1}{v_n} - \frac{1}{6} = 0,$$

jer možemo birati strukturu puta, tako da je $u > 0$. Sređivanjem posljednjeg izraza dobijamo

$$6(v_u + v_n) = v_u \cdot v_n,$$

odnosno

$$(v_u - 6)(v_n - 6) = 36.$$

Imajući u vidu da je $v_u < 12 < v_n$ imamo sljedeće slučajeve:

1. $v_u - 6 = 1, v_n - 6 = 36$
2. $v_u - 6 = 2, v_n - 6 = 18$
3. $v_u - 6 = 3, v_n - 6 = 12$
4. $v_u - 6 = 4, v_n - 6 = 9$

Dakle, rješenja su $(v_u, v_r, v_n) \in \{(7, 12, 42), (8, 12, 24), (9, 12, 18), (10, 12, 15)\}$.

3. Neka su date tri duži dužine 1, 2 i 3, i neka je duž dužine 3 podijeljena na $n \geq 2$ manjih duži. Dokazati da među ovih $n + 2$ duži postoje tri od kojih se može konstruisati trougao.

Rješenje.

Neka je duž dužine 3 podijeljena na n duži dužina a_1, a_2, \dots, a_n , gdje važi:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, \quad \text{i} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = 3.$$

Pretpostavimo prvo da postoji neki $a_i > 1$.

- Ako je $1 < a_i < 2$, uzmimo duži dužina 1, a_i i 2. One formiraju trougao jer:

$$1 + a_i > 2, \quad a_i + 2 > 1, \quad 2 + 1 > a_i.$$

- Ako je $a_i \geq 2$, tada takođe duži dužina 1, 2 i a_i formiraju trougao.

Dakle, ako postoji $a_i > 1$, tvrđenje je dokazano.

Pretpostavimo sada da su svi $a_i \leq 1$. Tada:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq 1.$$

Kako je zbir svih duži jednak 3, mora važiti $n \geq 3$.

Pretpostavimo da ne postoje tri duži koje formiraju trougao. To znači da za sve uzastopne trojke važi:

$$a_1 + a_2 \leq a_3, \quad a_2 + a_3 \leq a_4, \quad \dots, \quad a_{n-2} + a_{n-1} \leq a_n.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo:

$$(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{n-2} + a_{n-1}) \leq a_3 + a_4 + \dots + a_n.$$

Lijeva strana sadrži zbir svih a_i osim a_n , a desna sve osim a_1 i a_2 , pa imamo:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} \leq a_3 + a_4 + \cdots + a_n.$$

Iz činjenice da je $\sum_{i=1}^n a_i = 3$, slijedi:

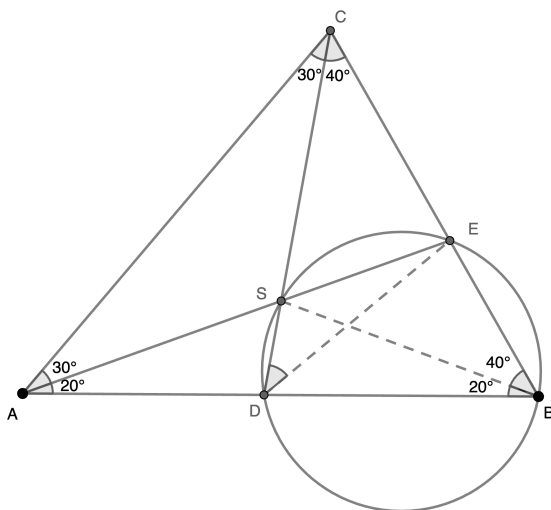
$$3 + a_2 \leq 2a_n \leq 2,$$

što implicira $a_2 \leq -1$, što je kontradikcija jer su svi $a_i > 0$.

Dakle, pretpostavka da ne postoje tri duži koje formiraju trougao je netačna, pa takve tri duži moraju postojati.

4. U trouglu ABC je $\angle CAB = 50^\circ$ i $\angle ABC = 60^\circ$. Na stranici AB nalazi se tačka D , a na stranici BC tačka E tako da je $\angle CAE = \angle ACD = 30^\circ$. Izračunati mjeru $\angle CDE$.

Rješenje: Neka je $S = AE \cap CD$.



Trougao ASC ima dva jednaka ugla, što znači da je jednakokraki, odnosno $AS = SC$ i

$$\angle ASC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

Kako je $\angle ABC = 60^\circ$, to je $\angle ABC$ periferijski ugao kružnice sa centrom u S , odnosno S je centar kružnice opisane oko trougla ABC . Njen poluprečnik je $SA = SC = SB$.

Tada su i trouglovi ASB i BSC jednakokraki, pa je

$$\angle SBA = \angle SAB = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ,$$

$$\angle SBC = \angle SCB = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ.$$

Posmatramo uglove četvorougla $DBES$:

$$\angle ESD = \angle ASC = 120^\circ,$$

pa je

$$\angle ESD + \angle DBE = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Dakle, zbir naspramnih uglova jednak je 180° , pa je četvorougao $DBES$ tetivan. Uglovi $\angle SDE$ i $\angle SBE$ su manji periferni uglovi nad tetivom SE pa su jednaki. Konačno,

$$\angle CDE = \angle SDE = \angle SBE = \angle SBC = 40^\circ.$$

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2025
MATEMATIKA
za II razred srednje škole

1. Pravougaonik dimenzija 5×6 podijeljen je na osam pravougaonika čije su stranice paralelne sa stranicama polaznog pravougaonika, a dužine stranica su im prirodni brojevi. Dokazati da su bar dva od tih osam pravougaonika međusobno podudarna.
2. Neka su x, y, z realni brojevi različiti od nule takvi da važi

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Odrediti sve moguće vrijednosti izraza

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

3. Odrediti sve proste brojeve p i q tako da $pq \mid (p^q + q^p + 1)$.
4. Data je duž AD dužine 3. Neka su B i C ($C \neq A$) tačke na kružnici sa prečnikom AD takve da je $AB = BC = 1$. Odrediti dužinu duži CD .

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2025

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za II razred srednje škole

1. Pravougaonik dimenzija 5×6 podijeljen je na osam pravougaonika čije su stranice paralelne sa stranicama polaznog pravougaonika, a dužine stranica su im prirodni brojevi. Dokazati da su bar dva od tih osam pravougaonika međusobno podudarna.

Rješenje.

Pretpostavimo da su svih osam pravougaonika međusobno različiti, odnosno da su svi međusobno nepodudarni. Najmanjih (po površini) osam međusobno nepodudarnih pravougaonika sa traženim svojstvom ima sljedeće dimenzije:

$$1 \times 1, \quad 1 \times 2, \quad 1 \times 3, \quad 1 \times 4, \quad 2 \times 2, \quad 1 \times 5, \quad 1 \times 6, \quad 2 \times 3$$

Izračunajmo zbir njihovih površina:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31$$

Međutim, površina polaznog pravougaonika je:

$$5 \cdot 6 = 30$$

Pošto zbir površina osam različitih pravougaonika premašuje ukupnu površinu, nemoguće je rasporediti osam međusobno nepodudarnih pravougaonika čije su stranice prirodni brojevi unutar pravougaonika dimenzija 5×6 .

Dakle, barem dva od osam pravougaonika moraju biti međusobno podudarna.

2. Neka su x, y, z realni brojevi različiti od nule takvi da važi

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Odrediti sve moguće vrijednosti izraza

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

Rješenje. Dodajmo 1 brojevima $\frac{x+y}{z}$, $\frac{y+z}{x}$ i $\frac{z+x}{y}$.

Dobijamo

$$\frac{x+y+z}{z} = \frac{x+y+z}{x} = \frac{x+y+z}{y}.$$

Ako je $x+y+z=0$, izraz čije vrijednosti tražimo postaje

$$\frac{(-z)(-x)(-y)}{xyz} = -1.$$

Ako je $x+y+z \neq 0$, dobijamo

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} = \frac{1}{y},$$

pa odatle slijedi $x=y=z$.

U tom slučaju, dati izraz postaje jednak 8.

Vrijednosti -1 i 8 se dobijaju jer svaka trojka sa $x+y+z=0$, odnosno $x=y=z$, daje te vrijednosti.

3. Odrediti sve proste brojeve p i q tako da $pq \mid (p^q + q^p + 1)$.

Rješenje.

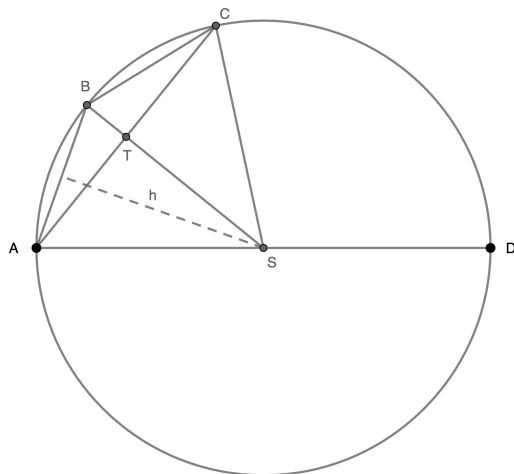
Primijetimo da $p \mid (q^p + 1)$. Kako na osnovu Male Fermaove teoreme važi $p \mid (q^p - q)$, to slijedi da $p \mid (q + 1)$. Analogno se pokazuje da $q \mid (p + 1)$.

Iz $p \mid q + 1$ i $q \mid p + 1$ imamo da je $p \leq q + 1$, i $q \leq p + 1$, što povlači $|p - q| \leq 1$, odakle slijedi da p i q mogu biti 2 i 3, ili da su jednaki. Za $p = 2, q = 3$ ili $p = 3, q = 2$ lako se vidi da zadovoljavaju uslov. Za $p = q$ imamo da $p \mid p + 1$, što očigledno nije tačno. Dakle, jedina rješenja su $(p, q) = (2, 3)$ i $(p, q) = (3, 2)$.

4. Data je duž AD dužine 3. Neka su B i C ($C \neq A$) tačke na kružnici sa prečnikom AD takve da je $AB = BC = 1$. Odrediti dužinu duži CD .

Rješenje.

Neka je S centar kružnice i $T = BS \cap AC$.



Kako su trouglovi ASB i CSB podudarni, to je

$$\angle ABS = \angle CBS,$$

pa važi

$$\triangle ATB \cong \triangle CTB,$$

na osnovu SUS stava o podudarnosti trouglova. Odavde, zaključujemo da je

$$\angle ATB = \angle CTB = 90^\circ,$$

odnosno

$$BS \perp AT.$$

Dakle, AT je visina trougla ABS .

Kako je trougao ASB jednakokraki, to je njegova visina iz tjemena S

$$h = \sqrt{AS^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Dalje,

$$P_{\triangle ASB} = \frac{BS \cdot AT}{2} = \frac{AB \cdot h}{2},$$

odnosno

$$\frac{3}{2} \cdot AT = 1 \cdot h,$$

odakle dobijamo da je

$$AT = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

i

$$AC = 2AT = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Konačno, kako je $\angle ACD$ prav, imamo

$$CD^2 = AD^2 - AC^2 = 9 - \frac{16 \cdot 2}{9} = \frac{49}{9},$$

odnosno

$$CD = \frac{7}{3}.$$

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2025
MATEMATIKA
za III razred srednje škole

1. Želimo da rasporedimo 8 takmičara različitih visina u dva reda za fotografisanje. U svakom redu nalazi se po 4 takmičara. Visine takmičara u svakom redu moraju rasti s lijeva na desno. Svaki takmičar u zadnjem redu mora biti viši od takmičara koji se nalazi tačno ispred njega. Na koliko načina je moguće rasporediti takmičare?
2. Odrediti sve proste brojeve p i q tako da $pq \mid (p^q + q^p + 1)$.
3. U oštrogglom trouglu nijedan od uglova nije manji od $\frac{\pi}{8}$. Pokazati da tada za stranice tog trougla a, b, c i odgovarajuće uglove važi

$$\frac{a}{\cos \alpha} + \frac{b}{\cos \beta} + \frac{c}{\cos \gamma} > \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}(a + b + c).$$

4. Data je duž AD dužine 3. Neka su B i C ($C \neq A$) tačke na kružnici sa prečnikom AD takve da je $AB = BC = 1$. Odrediti dužinu duži CD .

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2025
Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za III razred srednje škole

1. Želimo da rasporedimo 8 takmičara različitih visina u dva reda za fotografisanje. U svakom redu nalazi se po 4 takmičara. Visine takmičara u svakom redu moraju rasti s lijeva na desno. Svaki takmičar u zadnjem redu mora biti viši od takmičara koji se nalazi tačno ispred njega. Koliko različitih rasporeda je moguće?

Rješenje: Prvo, predstavimo raspored takmičara na sljedeći način:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Visine takmičara označimo po visini u rastućem poretku brojevima od 1 do 8.

Pošto je visina 1 najmanja, a 8 najveća, raspored mora bar da zadovolji sljedeće:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dodatno, neka gornji red označimo kao $X, Y, Z, 8$, a donji red kao $1, A, B, C$:

$$\begin{array}{cccc} X & Y & Z & 8 \\ 1 & A & B & C \end{array}$$

- Z mora biti veći od najmanje 5 brojeva: X, Y, A, B i 1, a manji od 8. Dakle, Z može biti samo 6 ili 7.
- Y mora biti veći od najmanje 3 broja: X, A i 1, a manji od najmanje 2 broja: Z i 8. Dakle, Y može biti 4, 5 ili 6.
- X mora biti veći od 1, a manji od Y, Z i 8. Dakle, X može biti 2, 3, 4 ili 5.

Ove informacije su dovoljne da započnemo brojanje mogućih rasporeda za gornji red. Najlakše je krenuti od vrijednosti Y .

Slučaj 1: Ako je $Y = 4$:

- Z može biti 6 ili 7 (2 mogućnosti),
- X može biti 2 ili 3 (2 mogućnosti),
- Ukupno: $2 \times 2 = 4$ mogućnosti.

Slučaj 2: Ako je $Y = 5$:

- Z može biti 6 ili 7 (2 mogućnosti),
- X može biti 2, 3 ili 4 (3 mogućnosti),
- Ukupno: $2 \times 3 = 6$ mogućnosti.

Slučaj 3: Ako je $Y = 6$:

- Z može biti samo 7 (1 mogućnost),
- X može biti 2, 3, 4 ili 5 (4 mogućnosti),
- Ukupno: $1 \times 4 = 4$ mogućnosti.

Za svaki od navedenih slučajeva, donji red se jednoznačno određuje sa preostala 3 broja tako da su rastuće poredani.

Ukupan broj mogućnosti je $4 + 6 + 4 = 14$.

Dakle, postoji 14 različitih načina da se takmičari rasporede za fotografisanje.

2. Odrediti sve proste brojeve p i q tako da $pq \mid (p^q + q^p + 1)$.

Rješenje.

Primijetimo da $p \mid (q^p + 1)$. Kako na osnovu Male Fermaove teoreme važi $p \mid (q^p - q)$, to slijedi da $p \mid (q + 1)$. Analogno se pokazuje da $q \mid (p + 1)$.

Iz $p \mid q + 1$ i $q \mid p + 1$ imamo da je $p \leq q + 1$, i $q \leq p + 1$, što povlači $|p - q| \leq 1$, odakle slijedi da p i q mogu biti 2 i 3, ili da su jednaki. Za $p = 2, q = 3$ ili $p = 3, q = 2$ lako se vidi da zadovoljavaju uslov. Za $p = q$ imamo da $p \mid p + 1$, što očigledno nije tačno. Dakle, jedina rješenja su $(p, q) = (2, 3)$ i $(p, q) = (3, 2)$.

3. U oštrogglom trouglu nijedan od uglova nije manji od $\frac{\pi}{8}$. Pokazati da tada za stranice tog trougla a, b, c i odgovarajuće uglove važi

$$\frac{a}{\cos \alpha} + \frac{b}{\cos \beta} + \frac{c}{\cos \gamma} > \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}(a + b + c).$$

Rješenje.

Koristeći sinusnu teoremu za trougao nalazimo $a = 2R \sin \alpha, b = 2R \sin \beta$ i $c = 2R \sin \gamma$, gdje je R poluprečnik opisane kružnice. Uvrštavajući dobijene formule u izraz nejednakosti nalazimo da je početna nejednakost ekvivalentna sa

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} > \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

Dalje, iz činjenice da je funkcija $f(t) = \cos t$ opadajuća na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ i uslova $\frac{\pi}{8} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{8} \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{8} \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$, zaključujemo da važe sljedeće nejednakosti

$$0 < \cos \alpha \leq \cos \frac{\pi}{8}, \quad 0 < \cos \beta \leq \cos \frac{\pi}{8}, \quad 0 < \cos \gamma \leq \cos \frac{\pi}{8},$$

tj.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \geq \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{8})}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

U nastavku izračunajmo $\cos \frac{\pi}{8}$. Primijetimo da važi

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tj. $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Konačno,

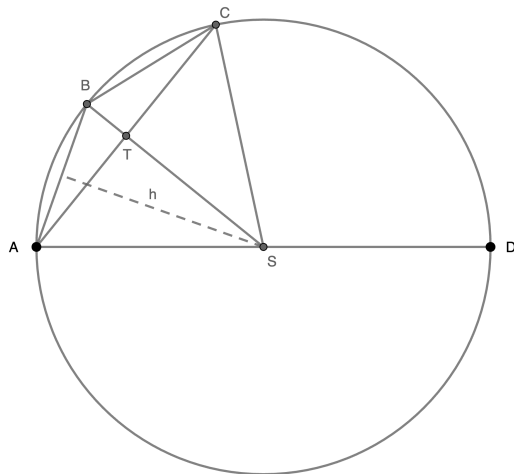
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \geq \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

Na kraju, kako je bar jedan od uglova α, β, γ strogo veći od ugla $\frac{\pi}{8}$, to je gornja nejednakost stroga.

4. Data je duž AD dužine 3. Neka su B i C ($C \neq A$) tačke na kružnici sa prečnikom AD takve da je $AB = BC = 1$. Odrediti dužinu duži CD .

Rješenje.

Neka je S centar kružnice i $T = BS \cap AC$.



Kako su trouglovi ASB i CSB podudarni, to je

$$\angle ABS = \angle CBS,$$

pa važi

$$\triangle ATB \cong \triangle CTB,$$

na osnovu SUS stava o podudarnosti trouglova. Odavde, zaključujemo da je

$$\angle ATB = \angle CTB = 90^\circ,$$

odnosno

$$BS \perp AT.$$

Dakle, AT je visina trougla ABS .

Kako je trougao ASB jednakokraki, to je njegova visina iz tjemena S

$$h = \sqrt{AS^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Dalje,

$$P_{\triangle ASB} = \frac{BS \cdot AT}{2} = \frac{AB \cdot h}{2},$$

odnosno

$$\frac{3}{2} \cdot AT = 1 \cdot h,$$

odakle dobijamo da je

$$AT = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

i

$$AC = 2AT = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Konačno, kako je $\angle ACD$ prav, imamo

$$CD^2 = AD^2 - AC^2 = 9 - \frac{16 \cdot 2}{9} = \frac{49}{9},$$

odnosno

$$CD = \frac{7}{3}.$$

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2025
MATEMATIKA
za IV razred srednje škole

1. Odrediti sve polinome $p(x) = ax^2 + bx + c$ takve da za svaki prirodan broj n važi

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(n) = n^3.$$

2. Odrediti sve prirodne brojeve n, x takve da $3^n - 1 = x^3$.

3. Neka je n prirodan broj i neka je O_n broj nepraznih podskupova skupa $S_n = \{1, 2, \dots, 2n\}$ koji kao najmanji element imaju neparan broj i U_n ukupan broj nepraznih podskupova datog skupa S_n .
Naći

$$\frac{O_n}{U_n}.$$

4. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ važi

$$\frac{AB^2 - BC^2 + AC^2}{CD^2 - AD^2 + AC^2} = \frac{AB^2 - AD^2 + BD^2}{CD^2 - BC^2 + BD^2}.$$

Dokazati da je $AB \parallel CD$.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2025
Rješenja iz MATEMATIKE
za IV razred srednje škole

1. Odrediti sve polinome $p(x) = ax^2 + bx + c$ takve da za svaki prirodan broj n važi

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(n) = n^3.$$

Rješenje.

Polazeći od jednačina $p(1) = 1$, $p(1) + p(2) = 8$ i $p(1) + p(2) + p(3) = 27$ dobijamo sistem linearnih jednačina od tri nepoznate

$$\begin{aligned}a + b + c &= 1 \\5a + 3b + 2c &= 8 \\14a + 6b + 3c &= 27,\end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $a = 3$, $b = -3$ i $c = 1$. Ukoliko postoji polinom sa traženim svojstvom, onda on može da bude samo polinom $p(x) = 3x^2 - 3x + 1$. Ostaje da provjerimo da za dobijeni polinom i svaki prirodan broj n važi $p(1) + p(2) + \cdots + p(n) = n^3$. Dokaz izvodimo koristeći princip matematičke indukcije po n . Budući da je uslov ispunjen za $n = 1$, pretpostavimo da tvrdjenje važi za proizvoljan prirodan broj n , tada

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(n) + p(n+1) = n^3 + 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 = (n+1)^3,$$

odakle zaključujemo da je traženi polinom $p(x) = 3x^2 - 3x + 1$.

Alternativno rješenje: Iz

$$n^3 = a(1^2 + \cdots + n^2) + b(1 + \cdots + n) + cn = a\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + b\frac{n}{2}(n+1) + cn,$$

dobijamo

$$n^3 = \frac{a}{3}n^3 + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)n^2 + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c\right)n.$$

Dijeleći gornju jednakost sa n^3 i puštajući da $n \rightarrow \infty$ nalazimo da je $a = 3$ i posljedično $b = -3$ i $c = 1$.

2. Odrediti sve prirodne brojeve n, x takve da $3^n - 1 = x^3$.

Rješenje.

Važi

$$3^n = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Kako jedini prost faktor lijeve strane je 3, to je

$$x + 1 = 3^a, \quad x^2 - x + 1 = 3^b,$$

pri čemu $a + b = n, a, b > 0$. Primijetimo da za $a = 1$, dobijamo $x = 2$ i $b = 1$. Dakle, jedno rješenje je $n = 2, x = 2$.

Neka je sada $a \geq 2$. Tada, uvrštavajući $x = 3^a - 1$ u jednačinu $x^2 - x + 1 = 3^b$, dobijamo

$$3^{2a} - 3^{a+1} + 3 = 3^b,$$

odnosno

$$3(3^{2a-1} - 3^a + 1) = 3^b.$$

Međutim, kako je $a > 1$, to je broj $3^{2a-1} - 3^a + 1$ veći od 1 i nije djeljiv sa 3, pa jednačina nema rješenje za $a > 1$. Dakle, jedino rješenje je $(n, x) = (2, 2)$.

3. Neka je n prirodan broj i neka je O_n broj nepraznih podskupova skupa $S_n = \{1, 2, \dots, 2n\}$ koji kao najmanji element imaju neparan broj i U_n ukupan broj nepraznih podskupova datog skupa S_n . Naći

$$\frac{O_n}{U_n}.$$

Rješenje.

Broj podskupova skupa $\{1, 2, \dots, 2n\}$ koji imaju k kao najmanji element je 2^{2n-k} za $1 \leq k \leq 2n$, jer se svaki element veći od k može nalaziti ili ne u podskupu.

Broj podskupova O_n čiji je najmanji element neparan jednak je

$$O_n = 2^{2n-1} + 2^{2n-3} + \dots + 2^3 + 2^1 = 2 \cdot (4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4^1 + 4^0) = \frac{2(4^n - 1)}{3}.$$

Broj nepraznih podskupova datog skupa je $2^{2n} - 1 = 4^n - 1$.

Slijedi,

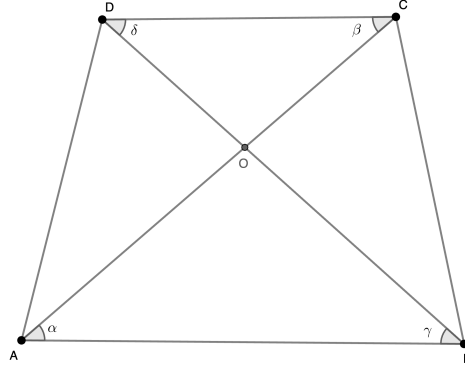
$$\frac{O_n}{U_n} = \frac{2}{3}.$$

4. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ važi

$$\frac{AB^2 - BC^2 + AC^2}{CD^2 - AD^2 + AC^2} = \frac{AB^2 - AD^2 + BD^2}{CD^2 - BC^2 + BD^2}.$$

Dokazati da je $AB \parallel CD$.

Rješenje.



Koristeći kosinus teoremu na $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ imamo

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha = BC^2,$$

$$CD^2 + AC^2 - 2CD \cdot AC \cos \beta = AD^2,$$

$$AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \gamma = AD^2,$$

$$CD^2 + BD^2 - 2CD \cdot BC \cos \delta = BC^2.$$

Uvrštavanjem, dobijamo

$$\frac{2AB \cdot AC \cos \alpha}{2CD \cdot AC \cos \beta} = \frac{2AB \cdot BC \cos \gamma}{2 \cdot BC \cos \delta},$$

odnosno

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\cos \gamma}{\cos \delta} \iff \cos \alpha \cdot \cos \delta = \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

Dalje, koristeći formulu za transformisanje proizvoda trigonometrijskih funkcija u zbir/razliku, imamo

$$\cos(\alpha - \delta) + \cos(\alpha + \delta) = \cos(\beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma).$$

Iz $\triangle AOD$ i $\triangle COD$ slijedi da je $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, odnosno $\alpha - \delta = \beta - \gamma$, pa imamo

$$\cos(\alpha + \delta) = \cos(\beta + \gamma).$$

Kako je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi - \angle AOB - \angle COD < 2\pi$, to je

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma.$$

Iz posljednjeg i relacije $\alpha - \delta = \beta + \gamma$, zaključujemo da je $\alpha = \beta$ (i $\delta = \gamma$), što je trebalo dokazati.