

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE

OLIMPIJADA ZNANJA 2026

MATEMATIKA

za VII razred osnovne škole

1. U prvom bidonu ima tri puta više vode nego u drugom. Kada iz prvog bidona prospemo 1 litar vode, a zatim četvrtinu ostatka prelijemo u drugi bidon, u oba bidona će biti jednake količine vode. Koliko je litara vode na početku bilo u prvom, a koliko u drugom bidonu?
2. Koliko cjelobrojnih rješenja ima nejednačina  $(x + 1)(x - 2026) < 0$ ?
3. Odrediti sve proste brojeve  $p, q$  i  $r$  takve da je  $(p + 3)(q + 5)(r + 7) = 4410$ .
4. Data su dva trougla,  $ABC$  i  $A_1B_1C_1$ . Dokazati da su oni podudarni, ako je poznato da je  $|BC| > |AC|$ ,  $|BC| - |AC| = |B_1C_1| - |A_1C_1|$ ,  $|AB| = |A_1B_1|$  i  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ .
5. Na stolu je deset gomila sa po deset novčića. Devet gomila ima ispravne novčiće koji teže po 10 grama svaki, dok jedna gomila ima defektne novčiće koji teže po 9 grama svaki. Na raspolaganju je vaga sa dva tase i hiljadu tegova od po 1 gram.
  - a) Kako jednim mjerenjem naći koja je gomila sa defektnim novčićima?
  - b) Koji je najmanji broj tegova potreban da bismo, iz samo jednog mjerenja, bili sigurni koja je gomila defektna?Jedno mjerenje podrazumijeva da se izabrani novčići stave na jedan tas vage i tokom mjerenja više ne pomjeraju, dok se tegovi mogu postepeno dodavati isključivo na drugi tas vage.

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 20 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE

OLIMPIJADA ZNANJA 2026

MATEMATIKA

za VII razred osnovne škole

1. U prvom bidonu ima tri puta više vode nego u drugom. Kada iz prvog bidona prospemo 1 litar vode, a zatim četvrtinu ostatka prelijemo u drugi bidon, u oba bidona će biti jednake količine vode. Koliko je litara vode na početku bilo u prvom, a koliko u drugom bidonu?

**Rješenje:**

Označimo sa  $x$  količinu vode (u litrima) koja se na početku nalazi u drugom bidonu. Tada se u prvom bidonu nalazi  $3x$  litara vode.

Nakon što iz prvog bidona prospemo 1 litar, u njemu ostaje:

$$3x - 1.$$

Zatim iz prvog bidona prospemo četvrtinu preostale količine u drugi bidon. Dakle:

- u prvom bidonu ostaje:

$$\frac{3}{4}(3x - 1),$$

- a u drugom bidonu sada ima:

$$x + \frac{1}{4}(3x - 1).$$

Po uslovu zadatka, ove dvije količine su jednake, pa važi:

$$\frac{3}{4}(3x - 1) = x + \frac{1}{4}(3x - 1).$$

Rješavanjem ove jednačine dobijamo:

$$3(3x - 1) = 4x + (3x - 1).$$

$$9x - 3 = 7x - 1,$$

$$2x = 2,$$

$$x = 1.$$

Dakle, na početku je u drugom bidonu bilo 1 litar vode, a u prvom 3 litra.

2. Koliko cjelobrojnih rješenja ima nejednačina  $(x + 1)(x - 2026) < 0$ ?

**Rješenje:**

Proizvod dva broja je negativan kada su ti brojevi različitog znaka.

Zato imamo dva slučaja.

**Slučaj 1:**

$$x + 1 < 0 \quad \text{i} \quad x - 2026 > 0.$$

Odavde dobijamo

$$x < -1$$

i

$$x > 2026.$$

Ovo nije moguće, jer broj ne može istovremeno biti manji od  $-1$  i veći od  $2026$ .

Zato ovaj slučaj nema rješenja.

**Slučaj 2:**

$$x + 1 > 0 \quad \text{i} \quad x - 2026 < 0.$$

Odavde dobijamo

$$x > -1$$

i

$$x < 2026.$$

Dakle,

$$-1 < x < 2026.$$

Pošto je  $x \in \mathbb{Z}$ , rješenja su

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 2025\}.$$

Dakle, data nejednačina ima 2026 cjelobrojnih rješenja.

3. Odrediti sve proste brojeve  $p, q$  i  $r$  takve da je  $(p + 3)(q + 5)(r + 7) = 4410$ .

**Rješenje:**

Najprije rastavimo broj 4410 na proste činioce:

$$4410 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Vidimo da broj 4410 nije djeljiv sa 4. Posmatrajmo izraze  $p + 3$ ,  $q + 5$  i  $r + 7$ . Znamo da su svi prosti brojevi veći od 2 neparni. Ako bi svi brojevi  $p, q, r$  bili veći od 2, tada bi svi izrazi  $p + 3$ ,  $q + 5$  i  $r + 7$  bili parni, pa bi njihov proizvod bio djeljiv sa 4, što nije slučaj.

Takođe, ako bi dva od tri prosta broja bila veća od 2, proizvod na lijevoj strani bi takođe bio djeljiv sa 4, što nije moguće.

Dakle, zaključujemo da među brojevima  $p, q$  i  $r$  barem dva moraju biti jednaka 2.

Razmatramo moguće slučajeve:

**Slučaj 1:**  $p = q = 2$

$$(2 + 3)(2 + 5)(r + 7) = 4410,$$

$$5 \cdot 7 \cdot (r + 7) = 4410,$$

$$35(r + 7) = 4410,$$

$$r + 7 = 126 \Rightarrow r = 119.$$

Broj 119 nije prost, pa nam ovaj slučaj ne daje rješenje.

**Slučaj 2:**  $p = r = 2$

$$(2 + 3)(q + 5)(2 + 7) = 4410,$$

$$5 \cdot (q + 5) \cdot 9 = 4410,$$

$$45(q + 5) = 4410,$$

$$q + 5 = 98 \Rightarrow q = 93.$$

Broj 93 nije prost, pa ni ovaj slučaj ne daje rješenje.

**Slučaj 3:**  $q = r = 2$

$$(p+3)(2+5)(2+7) = 4410,$$

$$(p+3) \cdot 7 \cdot 9 = 4410,$$

$$63(p+3) = 4410,$$

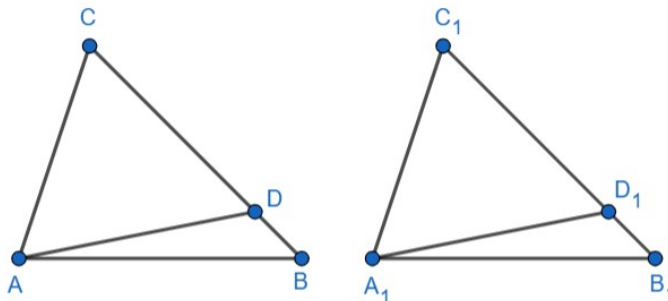
$$p+3 = 70 \Rightarrow p = 67.$$

Broj 67 jeste prost, pa dobijamo rješenje:

$$p = 67, \quad q = 2, \quad r = 2.$$

4. Data su dva trougla,  $ABC$  i  $A_1B_1C_1$ . Dokazati da su oni podudarni, ako je poznato da je  $|BC| > |AC|$ ,  $|BC| - |AC| = |B_1C_1| - |A_1C_1|$ ,  $|AB| = |A_1B_1|$  i  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ .

**Rješenje:**



Označimo sa  $D$  tačku na stranici  $BC$  tako da je

$$|CD| = |AC|,$$

a sa  $D_1$  tačku na stranici  $B_1C_1$  tako da je

$$|C_1D_1| = |A_1C_1|.$$

Ovo je moguće jer je  $|BC| > |AC|$ , a iz  $|BC| - |AC| = |B_1C_1| - |A_1C_1|$  slijedi i  $|B_1C_1| > |A_1C_1|$ .

Sada imamo

$$|BD| = |BC| - |CD| = |BC| - |AC|$$

i

$$|B_1D_1| = |B_1C_1| - |C_1D_1| = |B_1C_1| - |A_1C_1|.$$

Sada iz  $|BC| - |AC| = |B_1C_1| - |A_1C_1|$  slijedi

$$|BD| = |B_1D_1|.$$

Po uslovu je  $|AB| = |A_1B_1|$  i  $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$ , jer je  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ .

Dakle, trouglovi  $ABD$  i  $A_1B_1D_1$  su podudarni po stavu SUS. Odatle slijedi

$$|AD| = |A_1D_1|$$

i

$$\angle BDA = \angle B_1D_1A_1.$$

Pošto su uglovi  $\angle BDA$  i  $\angle ADC$  suplementni, kao i uglovi  $\angle B_1D_1A_1$  i  $\angle A_1D_1C_1$ , dobijamo

$$\angle ADC = \angle A_1D_1C_1.$$

Trouglovi  $ADC$  i  $A_1D_1C_1$  su jednakokraki, jer je  $|AC| = |CD|$  i  $|A_1C_1| = |C_1D_1|$ . Zato su im uglovi na osnovicama jednaki, to jest  $\angle CAD = \angle ADC$ , i  $\angle C_1A_1D_1 = \angle A_1D_1C_1$ . Kako je već pokazano da je  $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$ , slijedi i

$$\angle CAD = \angle C_1A_1D_1.$$

Sada za trouglove  $ADC$  i  $A_1D_1C_1$  važi:

$$\angle CAD = \angle C_1A_1D_1, \quad |AD| = |A_1D_1|, \quad \angle ADC = \angle A_1D_1C_1.$$

Zato su oni podudarni po stavu USU. Otuda je

$$|AC| = |A_1C_1|$$

i

$$|DC| = |D_1C_1|.$$

Već smo pokazali da je  $|BD| = |B_1D_1|$ , pa je

$$|BC| = |BD| + |DC| = |B_1D_1| + |D_1C_1| = |B_1C_1|.$$

Dakle,

$$|AB| = |A_1B_1|, \quad |AC| = |A_1C_1|, \quad |BC| = |B_1C_1|.$$

Zato su trouglovi  $ABC$  i  $A_1B_1C_1$  podudarni po stavu SSS.

5. Na stolu je deset gomila sa po deset novčića. Devet gomila ima ispravne novčiće koji teže po 10 grama svaki, dok jedna gomila ima defektne novčiće koji teže po 9 grama svaki. Na raspolaganju je vaga sa dva tase i hiljadu tegova od po 1 gram.

a) Kako jednim mjerenjem naći koja je gomila sa defektnim novčićima?

b) Koji je najmanji broj tegova potreban da bismo, iz samo jednog mjerenja, bili sigurni koja je gomila defektna?

Jedno mjerenje podrazumijeva da se izabrani novčići stave na jedan tas vage i tokom mjerenja više ne pomjeraju, dok se tegovi mogu postepeno dodavati isključivo na drugi tas vage.

### Rješenje:

Označimo gomile sa

$$G_1, G_2, \dots, G_{10}.$$

a) Da bismo mogli razlikovati gomile, iz svake gomile treba uzeti različit broj novčića. Ako bismo iz dvije gomile uzeli isti broj novčića, te dvije gomile bi dale istu ukupnu masu i ne bismo mogli znati koja je od njih defektna.

Zato iz gomila uzmemo redom

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

novčića. Dakle, iz  $G_1$  ne uzmemo nijedan novčić, iz  $G_2$  uzmemo 1, iz  $G_3$  uzmemo 2, i tako redom, iz  $G_{10}$  uzmemo 9 novčića.

Mogli bismo uzeti i redom

$$1, 2, 3, \dots, 10,$$

jer bi i tada svaka gomila dala različit rezultat pri mjerenju. Ipak, zbog dijela pod **b)** biramo

$$0, 1, 2, \dots, 9,$$

jer tako uzimamo najmanji mogući broj novčića.

Ukupno smo uzeli

$$0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$$

novčića. Da su svi ispravni, njihova masa bila bi

$$45 \cdot 10 = 450 \text{ grama.}$$

Pošto defektan novčić teži 9 grama umjesto 10 grama, masa zavisi od toga iz koje gomile su uzeti defektni novčići. Dobijamo sljedeću tabelu:

Gomila	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_8$	$G_9$	$G_{10}$
Masa	450	449	448	447	446	445	444	443	442	441

Zato, kada izmjerimo masu izabranih novčića, iz tabele odmah zaključujemo koja je gomila defektna.

Na primjer, ako je masa 446 grama, defektna je gomila  $G_5$ , jer smo iz nje uzeli 4 novčića.

Dakle, defektna gomila se može naći jednim mjerenjem.

**b)** Da bismo razlikovali svih deset gomila, iz njih moramo uzeti različit broj novčića. Najmanji mogući izbor je upravo

$$0, 1, 2, \dots, 9.$$

Kod tog izbora moguće mase izabranih novčića su

$$441, 442, \dots, 449, 450.$$

Tegove dodajemo na drugi tas jedan po jedan.

Ako imamo 449 tegova, možemo dobiti ravnotežu za svaku masu od 441 do 449 grama. Ako se ravnoteža pojavi, odmah znamo koja je gomila defektna.

Ako ni poslije dodavanja svih 449 tegova nema ravnoteže, onda masa nije nijedna od vrijednosti

$$441, 442, \dots, 449.$$

Jedina preostala mogućnost je 450 grama. Tada znamo da je defektna gomila  $G_1$ , jer iz nje nijesmo uzeli nijedan novčić.

Dakle, 449 tegova je dovoljno.

Sa 448 tegova ne bismo mogli razlikovati slučajeve kada je masa 449 grama i kada je masa 450 grama, jer u oba slučaja ne bi došlo do ravnoteže, pa ne bismo sa sigurnošću mogli reći koja je gomila defektna.

Zato je najmanji potreban broj tegova

$$449.$$