

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2026

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IX razred osnovne škole

1. **(8 poena)** Svaki od uglova trougla ABC je cjelobrojan. Jedan od uglova je za 30° veći od aritmetičke sredine ostala dva. Koja je najveća moguća veličina ugla u ovom trouglu?

Rješenje:

Označimo uglove sa α , β i γ , i neka je $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2} + 30^\circ$. Tada je $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + 30^\circ + \beta + \gamma = \frac{3}{2}\beta + \frac{3}{2}\gamma + 30^\circ = 180^\circ$. Dobijamo $\frac{3}{2}(\beta + \gamma) = 150^\circ$, odnosno $\beta + \gamma = 100^\circ$. Pošto su uglovi β i γ cjelobrojni, najveća vrijednost koju jedan od njih može uzeti je 99° .

2. **(23 poena)** Prirodni brojevi a i b su takvi da je $a - b = \frac{a}{b}$. Da li je broj $a + b$ veći od broja ab ?

Rješenje: Iz jednakosti $a - b = \frac{a}{b}$ dobijamo $ab - b^2 = a$, odnosno $ab = a + b^2$. Kako je b prirodan broj, to je $b^2 > b$, osim za $b = 1$. Međutim, za $b = 1$ dobijamo $a - 1 = a$, što je nemoguće. Dakle, $b > 1$, pa je $ab = a + b^2 > a + b$.

3. **(23 poena)** Dat je pravougli trougao ABC . Tačka M je sredina hipotenuze AB . Na stranici AB odabrana je tačka L takva da je $\angle ACM = \angle MCL$. Kružnica opisana oko trougla CML siječe stranicu AC u tački N . Dokazati da je $AN = CL$.

Rješenje:

Kako je M sredina hipotenuze AB pravouglog trougla ABC , znamo da važi

$$MA = MB = MC \text{ i } \angle NAM = \angle ACM.$$

Po uslovu zadatka je

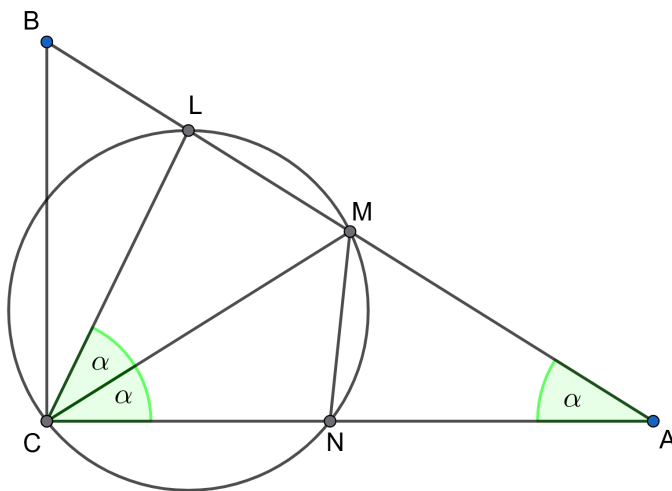
$$\angle ACM = \angle MCL,$$

pa, pošto su tačke C, M, L, N na istoj kružnici, iz jednakosti perifernih uglova nad tetivama slijedi

$$LM = MN$$

Dakle, pošto je $LM = MN$, $CM = MA$ i $\angle NAM = \angle ACM = \angle MCL$, na osnovu stava SSU zaključujemo da su trouglovi AMN i CML podudarni, pa je

$$AN = CL.$$



4. (23 poena) Naći najmanji prirodan broj n takav da je broj $n^2 + 20n + 19$ djeljiv sa 1346.

Rješenje:

Tražimo najmanji prirodan broj n takav da

$$1346 \mid n^2 + 20n + 19.$$

Primijetimo da je

$$n^2 + 20n + 19 = n^2 + 19n + n + 19 = (n + 1)(n + 19).$$

Dakle, uslov je ekvivalentan sa

$$1346 \mid (n + 1)(n + 19).$$

Rastavimo broj 1346 na proste faktore:

$$1346 = 2 \cdot 673.$$

Broj 673 je prost.

Zato mora važiti

$$2 \cdot 673 \mid (n + 1)(n + 19).$$

Pošto je razlika faktora jednaka

$$(n + 19) - (n + 1) = 18,$$

a broj 673 ne dijeli 18, slijedi da broj 673 mora dijeliti jedan od faktora:

$$673 \mid (n + 1) \quad \text{ili} \quad 673 \mid (n + 19).$$

Dakle,

$$n = 673k - 1$$

ili

$$n = 673k - 19.$$

gdje je $k \geq 1$.

Sada još treba da izraz bude djeljiv sa 2. Pošto su brojevi $n + 1$ i $n + 19$ iste parnosti, njihov proizvod je djeljiv sa 2 ako i samo ako je n neparan.

Brojevi 654 i 672 su parni, pa ne odgovaraju.

Za $k = 2$ dobijamo brojeve 1327 i 1345.

Broj 1327 je neparan, pa provjeravamo:

$$n = 1327.$$

Tada je

$$n + 19 = 1346,$$

pa je

$$(n + 1)(n + 19) = 1328 \cdot 1346,$$

što je očigledno djeljivo sa 1346.

Dakle, $n = 1327$.

5. **(23 poena)** U Petrovom odjeljenju je 29 učenika. Petar se druži sa tačno k učenika ovog odjeljenja. Nijedan učenik nema isti broj drugova u odjeljenju kao Petar. Dokazati da među preostalih 28 učenika postoje bar dvoje koja imaju isti broj drugova u odjeljenju.

Rješenje:

U odjeljenju ima ukupno 29 učenika. Petar se druži sa tačno k učenika, pa Petar ima k drugova u odjeljenju.

Svaki od preostalih 28 učenika može imati broj drugova između 0 i 28. Međutim, po uslovu zadatka, nijedan učenik nema isti broj drugova kao Petar, tj. niko od njih nema tačno k drugova.

Dakle, za preostalih 28 učenika mogući brojevi drugova su

$$0, 1, 2, \dots, k - 1, k + 1, \dots, 28,$$

što je ukupno 28 različitih brojeva.

Pretpostavimo suprotno, da svih preostalih 28 učenika imaju međusobno različit broj drugova. Tada bi svaki od navedenih brojeva morao da se pojavi tačno jednom.

Posebno bi postojao:

- jedan učenik koji nema nijednog druga u odjeljenju (0 drugova),
- jedan učenik koji se druži sa svih 28 ostalih učenika.

Ali to je nemoguće. Naime, učenik koji ima 28 drugova druži se sa svima u odjeljenju, pa se mora družiti i sa učenikom koji ima 0 drugova. To je kontradikcija, jer učenik sa 0 drugova ne druži se ni sa kim.

Dakle, naša pretpostavka je netačna. Zato među preostalih 28 učenika moraju postojati bar dva učenika koja imaju isti broj drugova u odjeljenju.

U slučaju kada je $k = 0$, odnosno kada Petar ima tačno nula drugova u odjeljenju, mogući brojevi drugova za preostale učenike su

$$1, 2, 3, \dots, 28,$$

i, ako svi oni imaju različit broj drugova, jedan od njih mora da se druži sa svim učenicima iz odjeljenja, pa i Petrom, što je nemoguće jer Petar nema drugova u odjeljenju. Analogno se razmatra slučaj $k = 28$.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Prvi zadatak se boduje sa maksimalno 8 bodova, a ostali sa maksimalno 23 boda.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.