**Prirodno-matematički fakultet**

**Društvo matematičara i fizičara Crne Gore**

# OLIMPIJADA ZNANJA 2018

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za II razred srednje škole

**1.** Odrediti sve iracionalne brojeve $x$ tako da $x^2 + 2x$ i $x^3 - 6x$ budu racionalni brojevi.

**Rješenje:** Označimo sa $a = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Primijetimo da je prema početnom uslovu $a$ racionalan broj i $a \geq 0$. Tada je $x = -1 \pm \sqrt{a}$. Dalje, $x^3 - 6x = -5 + 3a \pm (a-3)\sqrt{a}$. Kako su $x^3 - 6x$ i $-5 + 3a$ racionalni brojevi zaključujemo da je $(a-3)\sqrt{a}$ racionalan broj, tj. za $a \neq 3$ imamo da je $\sqrt{a}$ takođe racionalan broj. Posljednji zaključak vodi u kontradikciju sa činjenicom da je $x$ iracionalan broj. Dakle, $a = 3$ i $x = -1 \pm \sqrt{3}$. $\square$

**2.** Skup $S$ koji se sastoji od četiri broja nazvaćemo *povezanim* ako je za svako $x \in S$ bar jedan od brojeva $x - 1$ ili $x + 1$ u skupu $S$. Neka je $a_n$ broj povezanih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Odrediti najmanji prirodan broj $n$ za koji je $a_n \geq 2018$.

**Rješenje:** Neka su $a < b < c < d$ elementi skupa $S$. Tada važi $a - 1 \notin S$, pa je $a + 1 \in S$, odnosno $b = a + 1$. Slično, $d + 1 \notin S$ povlači da $d - 1 \in S$, odnosno $c = d - 1$. Dakle, povezan podskup $S$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ ima strukturu $\{a, a+1, d-1, d\}$, pri čemu je $d - a \geqslant 3$ i $d - a \leqslant n - 1$. Ako je $d - a = 3$, onda postoji $n - 3$ povezanih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, ako je $d - a = 4$, onda imamo $n - 4$ povezanih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, itd. ako je $d - a = n - 1$, onda postoji samo jedan povezani podskup skupa $\{1, 2 \ldots, n\}$. Dakle,

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 3 = \frac{(n-3)(n-2)}{2}.$$

Najmanje $n$ koje zadovoljava $a_n \geq 2018$ je najmanje $n$ za koje je $(n-3)(n-2) \geq 4036$, a to je $n = 67$. $\square$

**3.** Neka su $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ realni brojevi koji zadovoljavaju $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{1+x_k} = 1$. Dokazati da tada važi nejednakost

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{x_k}{4+x_k^2} \leq 1.$$

**Rješenje:** Neka je $\frac{1}{1+x_k} = y_k$ za $k = \overline{1,5}$. Tada je $\sum_{k=1}^{5} y_k = 1$. Kako je $x_k = \frac{1-y_k}{y_k}$, nakon uvrštavanja u nejednakost dobijamo

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{5} \frac{-y_k^2 + y_k}{5y_k^2 - 2y_k + 1} \leq 1 \\ \iff &\sum_{k=1}^{5} \frac{-5y_k^2 + 5y_k}{5y_k^2 - 2y_k + 1} \leq 5 \\ \iff &\sum_{k=1}^{5} \left(-1 + \frac{3y_k + 1}{5y_k^2 - 2y_k + 1}\right) \leq 5 \\ \iff &\sum_{k=1}^{5} \frac{3y_k + 1}{5y_k^2 - 2y_k + 1} \leq 10. \end{aligned}$$

Dalje imamo da je

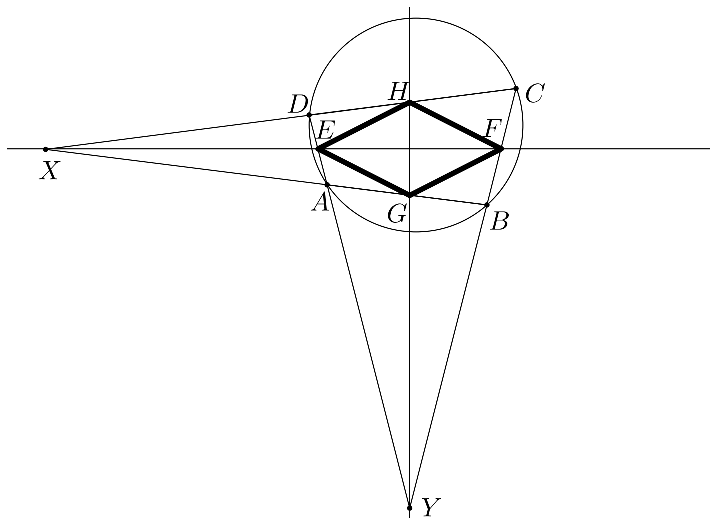
$$\sum_{k=1}^{5} \frac{3y_k + 1}{5y_k^2 - 2y_k + 1} = \sum_{k=1}^{5} \frac{3y_k + 1}{5(y_k - \frac{1}{5})^2 + \frac{4}{5}} \leq \sum_{k=1}^{5} \frac{3y_k + 1}{\frac{4}{5}} = \sum_{k=1}^{5} \frac{15y_k}{4} + \sum_{k=1}^{5} \frac{5}{4} = \frac{15}{4} + \frac{25}{4} = 10,$$

što je i trebalo da se dokaže. □

**4.** Neka je $ABCD$ tetivni četvorougao, čije naspramne stranice nijesu paralelne. Neka je $X = AB \cap CD$ i $Y = AD \cap BC$ i neka simetrala ugla $\angle AXD$ siječe prave $AD$ i $BC$ redom u tačkama $E$ i $F$, a simetrala ugla $\angle AYB$ siječe prave $AB$ i $CD$ redom u tačkama $G$ i $H$. Dokazati da je četvorougao $EGFH$ paralelogram.

**Rješenje:** Kako je četvorougao $ABCD$ tetivni, to je $\triangle XAC$ sličan sa $\triangle XDB$ i $\triangle YAC$ je sličan sa $\triangle YBD$. Slijedi da je

$$XA : XD = XC : XB = AC : BD = YA : YB = YC : YD.$$




S druge strane je

$$AE : ED = XA : XD = XC : XB = CF : FB,$$

$$AG : GB = YA : YB = YC : YD = CH : HD.$$

Slijedi da je $AG : GB = AE : ED$, pa je $EG \parallel BD$ i $CF : FB = CH : HD$, pa je $HF \parallel BD$. Dakle, $EG \parallel HF$. Na sličan način se dokazuje i da je $GF \parallel EH$, pa je $EGFH$ paralelogram. $\square$