Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2018

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VIII razred osnovne škole

1. Odrediti sve realne brojeve a, b, c za koje je

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c = -4.$$

Rješenje: Prepišimo jednačinu u obliku

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 4 = 0$$

Dopunjavanjem lijeve strane do potpunih kvadrata dobijamo:

$$(a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + 4(c - 1)^2 = 0 \implies a = 2b, \quad b = 2c, \quad c = 1.$$

Dakle,

$$a = 4,\ b = 2,\ c = 1.$$

2. Odrediti maksimalno $n \in \mathbf{N}$ tako da važi:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} > \frac{1}{135}. \tag{1}$$

Rješenje: Vidimo da važi

$$\frac{3}{n} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} > \frac{1}{135},$$

tako da n mora zadovoljavati:

$$\frac{3}{n} > \frac{1}{135} \implies n < 405.$$

Ako je n najveći prirodan broj takav da važi (1) tada mora biti

$$\frac{3}{n+2} < \frac{1}{135} \tag{2}$$

jer inače

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} > \frac{1}{135},$$

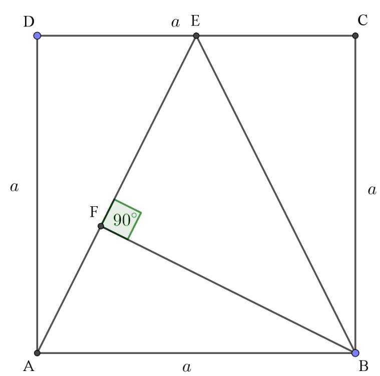
što je u kontradikciji s pretpostavkom maksimalnosti broja n takvog da važi (1). Iz (2), vidimo da mora biti

$$n > 403.$$

Prema tome, maksimalno n za koje važi (1) je $n = 404$. (Isto se, neposredno po zaključku da mora da važi nejednakost $n < 405$, moglo dobiti i direktnom provjerom!).

3. Neka tačka E polovi stranicu CD kvadrata $ABCD$. Tačka F je podnožje normale iz tjemena B na AE. Dokazati da se dužine stranica trougla EFB odnose kao 3:4:5.

Rješenje:



Označimo sa a dužinu stranice ovog kvadrata. Na osnovu Pitagorine teoreme, važi

$$BE = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Iz površine trougla ABE, vidimo da važi

$$\frac{AE \cdot BF}{2} = \frac{a^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad BF = \frac{2}{\sqrt{5}}a.$$

Na kraju, opet iz Pitagorine teoreme, vidimo da važi:

$$EF = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{4}{5}a^2} = \frac{3}{2\sqrt{5}}a.$$

Sada lako provjerimo

$$BE : EF = \frac{\sqrt{5}}{2} : \frac{3}{2\sqrt{5}} = 5 : 3 \ \text{ i } \ BF : EF = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{3}{2\sqrt{5}} = 4 : 3$$

tj.

$$BE : BF : EF = 5 : 4 : 3.$$

4. U tablicu dimenzije 10×10 upisani su brojevi od 0 do 99 kao na slici:

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Dunja je ispred pola od njih upisala znak $-$ tako da je u svakoj koloni i svakoj vrsti znak $-$ postavila ispred tano 5 brojeva (to jeste u tano 5 polja). Na kraju je sabrala sve brojeve dobijene u ovoj tabeli. Koje brojeve je Dunja mogla dobiti kao zbirove?

Rješenje: Primijetimo prvo da se zbir ma kojih n cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sa najviše dvije cifre može dobiti kao zbir $D + J$, gdje je D zbir svih desetica, a J zbir svih jedinica ovih n brojeva. Na primjer: $13 + 5 - 27 + 46 = (10 - 20 + 40) + (3 + 5 - 7 + 6)$.

Vratimo se sada na naš zadatak. Označimo sa D zbir desetica svih 100 cijelih brojeva koji su se, po završenom procesu dopisivanja znakova $-$, našli u tabeli, a sa J zbir njihovih jedinica.

Kako je u svakoj vrsti broj pozitivnih brojeva jednak broju negativnih, zbir desetica po kolonama je 0, pa je $D = 0$. Slično, zbir jedinica u svakoj od 10 vrsta je 0, pa je i $J = 0$.

Dakle, jedini broj koji je Dunja mogla dobiti kao zbir je 0.