FINANSIJSKA I AKTUARSKA MATEMATIKA

Prof. dr. Vladimir Kašćelan

Doc. dr Saša Vujošević

Literatura

Osnovna:

- B.Laković- V.Kašćelan

Privredna i finansijska matematika, 1997.

Dopunska:

- J.Kočović- M.Pavlović

Uvod u finansijsku matematiku, 2010.

- V.Kašćelan- M.Novović

Osiguranje i aktuarska matematika, 2009.

Ocjenjivanje

- 3 domaća i aktivnost na času 3*2+4= 10 p.
- Kolokvijum 40 poena
- Završni ispit 50 poena

Prolaz: 50 poena i više

Kolokvijum: kraj X nedjelje nastave

Popravni kolokvijum: kraj XII nedjelje

RAČUN DIOBE

Opšti problem koji se rješava ***PROSTIM RAČUNOM DIOBE*** možemo formulisati na sljedeći način: *Datu veličinu A predstaviti kao zbir veličina* x_1, x_2, ... x_n, *tako da te veličine budu proporcionalne ili obrnuto proporcionalne datim veličinama* a_1, a_2, ... a_n *sa istim koeficijentom proporcionalnosti k.*

$$A = x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$x_i = k\,a_i \qquad \text{ili} \qquad x_i = \frac{k}{a_i}, \qquad i = \overline{1,n}$$

PROSTI RAČUN DIOBE

DIREKTNA PROPORCIONALNOST: $x_i = ka_i \qquad i = \overline{1, n}$

Slijede **PROSTE proporcije**:

$$x_1 : x_2 = a_1 : a_2$$

$$x_1 : x_3 = a_1 : a_3$$

$$\ldots\ldots$$

$$x_1 : x_n = a_1 : a_n$$

Odnosno, jedna **PRODUŽENA proporcija**:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = a_1 : a_2 : \ldots : a_n$$

PROSTI RAČUN DIOBE

U slučaju **OBRNUTE PROPORCIONALNOSTI** važe relacije:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = A \qquad \text{i} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

Slijedi da je koeficijent

$$k = \frac{A}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

SLOŽENI RAČUN DIOBE

$$x_i = k a_i b_i c_i \dots p_i$$

veličina x_i je direktno proporcionalna veličinama a_i, b_i, c_i, ... p_i

$$x_i = \frac{k}{a_i b_i c_i \dots p_i}$$

veličina x_i je obrnuto proporcionalna veličinama a_i, b_i, c_i, ... p_i

$$x_i = k \frac{a_i b_i \dots p_i}{\alpha_i \beta_i \dots \eta_i}$$

veličina x_i je direktno proporcionalna veličinama a_i, b_i, c_i, ... p_i i istovremeno obrnuto proporcionalna nekim drugim veličinama α_i, β_i, ... ,η_i

PRIMJER 1:

U elementarnoj nepogodi brod je pretrpio štetu od A=11.400.000. Vrijednost broda je a_1=210.600.000, vrijednost tereta a_2=16.300.000, prevoz je a_3=1.100.000. Nastalu štetu snose brodovlasnik, vlasnik tereta i prevoznik proporcionalno navedenim vrijednostima. Koliku štetu snosi svaki od njih pojedinačno?

Neka su x_1, x_2, x_3 djelovi štete koju snose navedena lica redom.

$x_1 = 210.600.000\ k$

$x_2 = 16.300.000\ k$ odnosno $x_1 + x_2 + x_3 = 228.000.000\ k$

$x_3 = 1.100.000\ k$

Ukupna šteta je 11.400.000 : $228.000.000\ k = 11.400.000$

odnosno: $k = 0{,}005$ $x_1 = 0{,}005 \cdot 210.600.000 = 10.530.000$

$x_2 = 815.000$ $x_3 = 55.000$

PRIMJER 2:

Tri naselja napravila su most za 3.720.000 . Prvo naselje udaljeno je od mosta 3 km, drugo 2 km i treće 5 km. Učešće u cijeni mosta je obrnuto proporcionalno udaljenosti naselja od mosta. Koliko je učešće svakog naselja pojedinačno?

Označimo sa x_1, x_2 i x_3 učešća naselja u cijeni mosta.

$$x_1 = \frac{k}{3} \qquad x_2 = \frac{k}{2} \qquad x_3 = \frac{k}{5}$$

Kako je ukupna cijena: $x_1 + x_2 + x_3 = 3.720.000$

Iz navedenih uslova slijedi da je: $k = 3.600.000$

odnosno:

$x_1 = 1.200.000$, $x_2 = 1.800.000$, $x_3 = 720.000$

RAČUN SMJEŠE

Primjenjuje se u slučaju kada treba odrediti količinu ili odnose roba iste vrste ali različitog kvaliteta da bi se njihovim miješanjem dobila roba iste vrste ali određenog kvaliteta.

$$k = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

ponderisana aritmetička sredina brojeva $k_1, k_2, \ldots, k_n$

k_i - brojno izražen odgovarajući kvalitet robe od koje se pravi smješa

x_i - potrebna količina i-te robe

PRIMJER 3:

Ako je procenat soli u morskoj vodi 3 % koliko litara čiste vode treba dodati na 40 l morske vode da bi koncentracija soli pala na 2 %?

Uvedimo sledeće oznake:

$k_1 = 3\% = 0{,}03$ $\quad x_1 = 40$

$k_2 = 0\% = 0$ $\quad x_2 = ?$

$k = 2\% = 0{,}02$

Kako je relacija za račun smješe $\quad k_1x_1 + k_2x_2 = k\,(x_1 + x_2)$

slijedi $\quad 0{,}03 * 40 + 0 * x_2 = 0{,}02 * (40 + x_2)$

čijim rješavanjem se dobija da je $x_2 = 20$.

Za vježbu: 3 kredita od ukupno 10m nudi se: 2m uz 14%, 5m uz 19%, a preostalo po 17%. Kolika je ponderisana (prosječna) k. stopa? Odg. 17,4.

PROCENTNI RAČUN

Razlomak $\frac{p}{100}$ zovemo **procentom** i označavamo sa p%

$$\frac{p}{100} \equiv p\%$$

Broj K od koga se izračunava procenat zove se ***osnova*** ili ***glavnica***, broj p ***procentna stopa***, a proizvod procenta p% i glavnice K - ***interes*** ili ***procentni iznos*** i.

$$i = p\%K = \frac{pK}{100}$$

odnosno zapisano u obliku proporcije:

$$K : i = 100 : p$$

Razlomak čiji je imenilac 1.000 zove se ***promil*** i za njegovu oznaku koristićemo simbol **‰**

$$\frac{p}{1000} \equiv p‰$$

PRIMJER 4:

Razliku prodajne cijene od 3.036 i nabavne cijene od 2.640 neke robe izraziti procentom od nabavne cijene?

I način: Primjenom formule $p=100i/K$.

II način: Postavljanjem jednačine:

$2640+p\%2640=3036$, dobija se $p=15$.

Za vježbu:

Osoba ima na bankovnom računu i u kešu ukupno 2000€. Kada potroši 20% keša, ostane joj 88% ukupnih sredstava.Koliko je na početku imala u kešu, a koliko na računu?

Odgovor. 1200, 800.

VERIŽNI RAČUN I ARBITRAŽA ROBE

- Verižni račun se koristi za određivanje odnosa dvije veličine, ako je on dat indirektno preko niza direktno proporcionalnih veličina.
- Njegovu ispravnost možemo provjeriti preko niza pravila, tj. prostih proporcija.
- Početak i kraj "lanca" moraju biti istorodne veličine.
- Ima primjenu u arbitraži robe, tj. kod donošenja odluke koju ponudu za kupovinu određene robe treba prihvatiti.

PRIMJER 5:

Koliko treba platiti na ime poreza na dodatu vrijednost na 5.000 l nafte, ako se po 1 kg plaća 0,7€ i ako je 25 l nafte teško 19,325 kg.

$$x€ \;|\; 5.000 l$$
$$25 l \;|\; 19,325 kg$$
$$1 kg \;|\; 0,7€$$

$$x = 5.000 \cdot 19,325 \cdot 0,7 \frac{1}{25 \cdot 1} = 2.705,5€$$