OSNOVI TEORIJE KAMATNIH STOPA

U O P Š T E NJ A

$i(t) = p\%$ **efektivna (konformna) kamatna stopa** za jedinicu vremena u trenutku t

$K(t_1, t_2)$ **faktor akumulacije** u trenutku t_2, investicije od K novčanih jedinica investiranih u trenutku t_1.

Ukoliko u trenutku t=0 uložimo K € u slučaju složenog interesnog računa u trenutku t=1 ćemo raspolagati iznosom $K_1 = K(0,1) = K[1 + i(0)]$

a trenutku t=n: $K_n = K(0,n) = K[1 + i(0)][1 + i(1)]\cdots[1 + i(n-1)]$

odnosno za $i(t) = i, \ \forall t$ $\quad K_n = K(1+i)^n = Kq^n$

Kod **prostog interesnog računa,** gdje je osnovica za obračun kamate uvijek glavnica K akumulirani kapital iznosi:

$$K_n = K(0,n) = K(1 + in)$$

OSNOVI TEORIJE KAMATNIH STOPA

U O P Š T E NJ A

Definišimo **nominalnu kamatnu stopu** ($i_h(t)$) za jedinicu vremena transakcije koja počinje u trenutku t i koja traje h vremenskih jedinica, tako da konformna (efektivna) kamatna stopa za period dužine h koji počinje u trenutku t iznosi $\boxed{h \cdot i_h(t)}$

Ukoliko uložimo K=1 novčanu jedinicu u trenutku t, u trenutku t+h imamo:

$$\boxed{K(t, t+h) = 1 + h \cdot i_h(t)}$$

Slijedi:

$$\boxed{i_h(t) = \frac{K(t, t+h) - 1}{h}}$$

Za h=1 dobijamo da se konformna i nominalna kamatna stopa poklapaju (za jednu vremensku jedinicu).

BRZINA RASTA ULOGA

PRINCIP KONZISTENTNOSTI

Brzina rasta uloga od K=1 novčanih jedinica (kamatna stopa za jedinicu vremena u beskonačno malom vremenskom intervalu) :

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{h \to 0+} i_h(t)}$$

PRINCIP KONZISTENTNOSTI:

Za $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ $\quad K(t_0, t_2) = K(t_0, t_1) \cdot K(t_1, t_2)$

Primjenom principa matematičke indukcije slijedi da za i svaki rastući niz

$\mathbf{t_0, t_1, \ldots, t_n}$ važi $\boxed{K(t_0, t_n) = K(t_0, t_1)K(t_1, t_2)\cdots K(t_{n-1}, t_n)}$

TEOREMA O FAKTORU AKUMULACIJE

Ako su δ (t) i $K(t_0,t)$ neprekidne funkcije (po nezavisno promjenljivoj t) za $t \geq t_0$, i ako važi princip konzistentnosti tada je:

$$\boxed{K(t_1,t_2) = Ke^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}}$$

Dokaz ćemo izvesti za K=1. Neka je $f(t) = K(t_0,t)$. Za $t \geq t_0$ i uz učinjene pretpostavke važi:

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0+} i_h(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{K(t,t+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{k(t_0,t)K(t,t+h)-K(t_0,t)}{K(t_0,t)\cdot h}$$

$$= \frac{1}{K(t_0,t)} \lim_{h\to 0+} \frac{K(t_0,t+h)-K(t_0,t)}{h} = \frac{1}{f(t)} \cdot \lim_{h\to 0+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{1}{f(t)} \cdot f_+^{'}(t)$$

TEOREMA O FAKTORU AKUMULACIJE

Znači, $f_{+}^{'}(t) = f(t)\delta(t)$, a to je neprekidna funkcija (proizvod neprekidnih funkcija). Kako važi da ako neprekidna realna funkcija ima neprekidan desni izvod tada je ona diferencijabilna te imamo da je:

$$f^{'}(t) = f(t)\delta(t)$$

Množenjem ove relacije sa $e^{-\int_{t_0}^{t}\delta(s)ds}$ lako se pokazuje da je $\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-\int_{t_0}^{t}\delta(s)ds}\right) = 0$

$$f(t)e^{-\int_{t_0}^{t}\delta(s)ds} = c \qquad \text{odnosno} \qquad f(t) = ce^{\int_{t_0}^{t}\delta(s)ds}$$

Kako je $f(t_0) = K = 1$ to je c=1.

Sada na osnovu principa konzistentnosti imamo da je: $K(t_1, t_2) = \frac{K(t_0, t_2)}{K(t_0, t_1)}$

Odavde slijedi da za K=1 važi $i_h(t) = \frac{K(t, t+h) - 1}{h}$

TEOREMA O FAKTORU AKUMULACIJE

Za K novčanih jedinica, na osnovu proporcije, važi:

$$K(t_1, t_2) = Ke^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}$$

Ako je $\forall t \in (t_1, t_2) \quad \delta(t) = \delta$ i $t_1=0$ a $t_2=n$ slijedi relacija

$$K_n = K(0,n) = Ke^{n\delta}$$

Ako δ prikažemo u procentualnom obliku $\delta=p\%$, tada je $K_n = Ke^{\frac{np}{100}}$

SADAŠNJA VRIJEDNOST NOVČANIH TOKOVA

Početna vrijednost kapitala u trenutku $t=t_1$, $t_1 \le t_2$

$$K = \frac{K(t_1,t_2)}{e^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt}} = K(t_1,t_2)e^{-\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt}$$

Diskontovana sadašnja vrijednost (sadašnja vrijednost) $(t_1 = 0, t_2 = t)$

$$K = K(0,t)\cdot e^{-\int_0^t \delta(s)ds}$$

SADAŠNJA VRIJEDNOST NOVČANIH TOKOVA

Funkcija sadašnje vrijednosti

$$\boxed{V(t) \overset{def.}{=} e^{-\int_0^t \delta(s)ds}}$$

To je diskontni faktor koji za $t \geq 0$ predstavlja sadašnju vrijednost 1 novčane jedinice date u trenutku t, a za $t < 0$ predstavlja akumulaciju u trenutku 0, 1 novčane jedinice uložene u trenutku t.

Ako je $\delta(t) = \delta, \ \forall t$ tada je $V(t) = V^t$

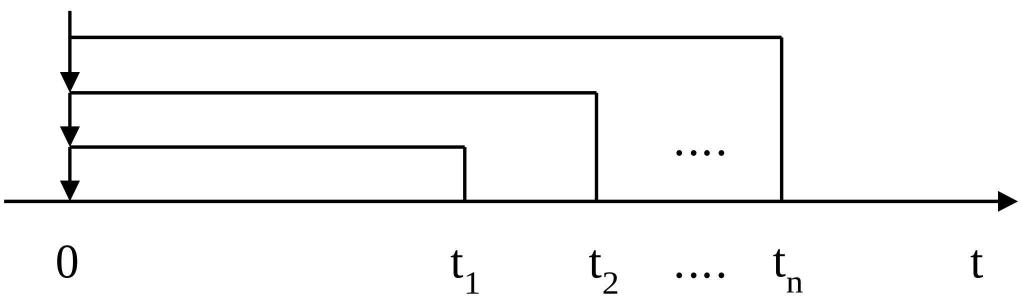
$$V = V(1) = e^{-\delta}$$

Diskontni faktor kod diskretnog kapitalisanja je $\frac{1}{q^t}$ a ovdje je

$$e^{-\delta t} = (e^{\delta})^{-t} = (1+i)^{-t} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t = \frac{1}{q^t} = V^t$$

DISKRETNI NOVČANI TOKOVI

Neka su dati tokovi novca C_{t1}, C_{t2}, ... , C_{tn} u trenucima t_1, t_2, ... , t_n.



Sadašnja vrijednost diskretnih novčanih tokva iznosi:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} C_{tj} V(tj)}$$

NEPREKIDNI NOVČANI TOKOVI

Neka je $\rho(t)$ visina novčanog toka u trenutku t za jedinicu vremena i neka $t \in [0, T]$

$$\boxed{\rho(t) \overset{\text{def.}}{=} M'(t), \quad \forall t}$$

gdje je M(t) - ukupna visina novčanog toka između 0 i t.

Ako je $0 \le \alpha < \beta \le T$ tada je ukupno plaćanje između α i β:

$$M(\beta) - M(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} M'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)dt$$

a između t i $t + \Delta t$

$$M(t + \Delta t) - M(t) \approx M'(t)\Delta t = \rho(t)dt \qquad dt = \Delta t$$

Sadašnja vrijednost novčanog toka između t i $t + \Delta t$: $V(t)\rho(t)dt$

Sadašnja vrijednost cijelog novčanog toka: $\boxed{\int_0^T V(t)\rho(t)dt}$

RENTABILNOST INVESTICIONOG PROJEKTA

Neka je kamatna stopa konstantna i iznosi i. Projekat se okončava u trenutku T. Stanje na računu u trenutku t=T:

$$\sum C_t q^{T-t} + \int_0^T \rho(t) q^{T-t} dt, \quad q = 1 + i$$

Za t=0 uz oznaku $V = \frac{1}{q}$

$$\boxed{NSV(i) = \sum C_t V^t + \int_0^T \rho(t) V^t dt}$$

NSV(i) - funkcija neto sadašnje vrijednosti razmatrane investicije uz kamatnu stopu i

Ako $i \to \infty$ tada $NSV(i) \to C_0$

Za $NSV(i) > 0$ investicija je rentabilna.