LIČNA RENTA U RATAMA

Ako se radi o renti u ratama, tj. ako se isplate vrše u razmacima kraćim od jedne godine (k puta godišnje), ubiraćemo rentu od 1/k € k puta godišnje, umjesto 1 € kao kod modela godišnje rente.

Miza odložene privremene anticipativne rente u ratama je:

$$ {}_{m}a_{x,n}^{(k)} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{q^m} + \frac{l_{x+m+\frac{1}{k}}}{l_x} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{q^{m+\frac{1}{k}}} + \ldots + \frac{l_{x+m+n-\frac{1}{k}}}{l_x} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{q^{m+n-\frac{1}{k}}} $$

Miza neposredne privremene anticipativne rente u ratama:

$$ a_{x,n}^{(k)} = \frac{1}{k} + \frac{\frac{1}{k}}{q^{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{l_{x+\frac{1}{k}}}{l_x} + \frac{\frac{1}{k}}{q^{\frac{2}{k}}} \cdot \frac{l_{x+\frac{2}{k}}}{l_x} + \ldots + \frac{\frac{1}{k}}{q^{n-\frac{1}{k}}} \cdot \frac{l_{x+n-\frac{1}{k}}}{l_x} $$

LIČNA RENTA U RATAMA

$$a_{x,n}^{(k)} \cong a_{x,n} - \frac{k-1}{2k}(EX_0 - EX_n)$$ anticipativna privremena neposredna renta u ratama

$$b_{x,n}^{(k)} \cong b_{x,n} + \frac{k-1}{2k}(EX_0 - EX_n)$$ dekurzivna privremena neposredna renta u ratama

$$a_x^{(k)} \cong a_x - \frac{k-1}{2k}$$ anticipativna neposredna doživotna renta u ratama

$$b_x^{(k)} \cong b_x + \frac{k-1}{2k}$$ dekurzivna neposredna doživotna renta u ratama

LIČNA RENTA U RATAMA

$${}_{m}a_{x,n}^{(k)} \cong {}_{m}a_{x,n} - \frac{k-1}{2k}(EX_{m} - EX_{m+n})$$ odložena privremena anticipativna renta u ratama

$${}_{m}b_{x,n}^{(k)} \cong {}_{m}b_{x,n} + \frac{k-1}{2k}(EX_{m} - EX_{m+n})$$ odložena privremena deklurzivna renta u ratama

$${}_{m}a_{x}^{(k)} \cong {}_{m}a_{x} - \frac{k-1}{2k}EX_{m}$$ anticipativna odložena doživotna renta u ratama

$${}_{m}b_{x}^{(k)} \cong {}_{m}b_{x} + \frac{k-1}{2k}EX_{m}$$ dekurzivna odložena doživotna renta u ratama

OSIGURANJE PREMIJAMA

U slučaju da aticipativna renta ima vrijednost jedan njena miza bi bila a_x. Kako renta ima vrijednost jednaku visini premije P, njena miza je $P \cdot a_x$. Primjenjujući princip ekvivalencije dobijamo jednakost:

$$\boxed{P \cdot a_x = A}$$

A- visina jednokratne premije

$$P = \frac{A}{a_x}$$

P- visina premije za jedinicu osigurane sume

Slično, ako se premija P uplaćuje neposredno privremeno:

$$\boxed{P \cdot a_{x,n} = A}$$

$$P = \frac{A}{a_{x,n}}$$

PREMIJA U RATAMA

Neka se premije plaćaju k puta u toku godine dana, i neka je $P^{(k)}$ - premija u ratama.

Godišnja rata rente u ratama je $k \cdot P^{(k)}$

Npr. ako se premija plaća n godina neposredno privremeno, tada važi:

$$A = k \cdot P^{(k)} \cdot a_{x,n}^{(k)}$$

odnosno

$$\boxed{P^{(k)} = \frac{A}{k \cdot a_{x,n}^{(k)}}}$$

Ako je P – godišnja premija tada je:

- polugodišnja premija $P^{(2)} \cong \frac{1}{2} \cdot P \cdot 1{,}02 = 0{,}51 \cdot P$
- kvartalna premija $P^{(4)} \cong \frac{1}{4} \cdot P \cdot 1{,}03 = 0{,}2575 \cdot P$
- mjesečna premija $P^{(12)} \cong \frac{1}{12} \cdot P \cdot 1{,}04 = 0{,}087 \cdot P$

OBRAČUN BRUTO PREMIJE

Troškovi osiguravajućeg društva obuhvataju:

1. akvizicione troškove – troškove pribavljanja osiguranja
2. inkaso troškove – troškove naplate premije i
3. administrativne (upravne) troškove.

Visina jednokratne bruto premije za jedinicu osiguranog kapitala iznosi

$$JB = JN + x_1 + y + z \cdot JB$$

odakle dobijamo da je

$$JB = \frac{JN + x_1 + y}{1 - z}$$

Na osnovu principa ekvivalencije, suma diskontovanih godišnjih iznosa d (na t=0, dan zaključenja ugovora), mora biti jednaka x_1 -visini akvizicionih troškova, tj.

$$d \cdot a_x = x_1 \quad \text{ili} \quad d \cdot a_{x,n} = x_1$$

u zavisnosti od toga da li godišnje premije plaćamo doživotno ili za n godina.

Dalje je

$$d = \frac{x_1}{a_x} \qquad d = \frac{x_1}{a_{x,n}}$$

$$d = \frac{D_x \cdot x_1}{N_x} \qquad d = \frac{D_x \cdot x_1}{N_x - N_{x+n}}$$

Za upravne troškove y, slično prethodnom, imamo da je e njihov alikvotni dio:

$$e = \frac{D_x \cdot y}{N_x} \quad \text{ili} \quad \mathrm{e} = \frac{\mathrm{D_x} \cdot \mathrm{y}}{\mathrm{N_x} - \mathrm{N_{x+n}}}$$

za doživotno ili privremeno plaćanje premija, respektivno.

Sada je

$$PB = PN + d + e + z \cdot PB \quad \text{odakle je} \quad \mathrm{PB} = \frac{\mathrm{PN} + \mathrm{d} + \mathrm{e}}{1 - \mathrm{z}} \quad \textbf{(*)}$$

Dakle, gornja relacija (*) predstavlja visinu godišnje bruto premije potrebne da bi se osigurala jedinica kapitala ili renta od l € godišnje. Iznosi d i e određeni su prethodnim relacijama.

Primjer 1.

Lice staro x godina je osiguralo kapital za slučaj doživljenja k godina (k>x)), tj. sa trajanjem od k-x godina.

Akvizicioni troškovi su x=20‰, upravni y=45‰ od osigurane sume, a inkaso troškovi su z=4% od bruto premije. Odrediti, pa izraziti u promilima:

jednokratnu bruto premiju,

godišnju, za 20 godina, bruto premiju za ovu vrstu osiguranja.

<u>Rješenje:</u>

$$a)\,JB=\frac{JN+x_1+y}{1-z}=\frac{\dfrac{D_k}{D_x}+0{,}02+0{,}045}{1-0{,}04}\cdot 1.000‰$$

b) $$PB = \frac{PN + d + e}{1 - z} \cdot 1.000‰$$

Ovdje je PN visina godišnje neto premije za osiguranje kapitala za slučaj doživljenja, a premije se plaćaju neposredno privremeno za 20 godina.

Primjer 2.

Lice staro 30 godina osiguralo je kapital za slučaj doživljenja 50-te godine i plaća bruto premiju od 500 € za 20 godina. Akvizicioni troškovi su jednokratno 2%, upravni troškovi su godišnje 5‰ osigurane sume, a inkaso troškovi su 2,5% od bruto premije. Koliki je kapital? Kolika je neto premija?

Rješenje:

Slično kao u Primjeru 1 b) izračunamo PN,

$$d = D_{30} \cdot \frac{0,02}{N_{30} - N_{50}} \qquad e = 0,005$$

pa iz (*) dobijamo PB - visinu bruto premije za jedinicu osiguranog kapitala.

Iz proporcije $PB:1 = 500:K$ dobijamo da je $K = \frac{500}{PB}$

Neto premija y, koja odgovara bruto premiji od 500 € se dobija iz razmjere:

$y:500 = PN:PB$ pa je $y = 500 \cdot \frac{PN}{PB}$

Račun, uz upotrebu tablica, samostalno.

KRATKA REKAPITUALACIJA:

Principi i metode finansijske matematike

- Princip ekvivalencije

(Koncept vremenske vrijednosti novca)

- Metode

1. Diskontovanja (specijalno: metoda sadašnje vrijednosti)
2. Prolongacije

RAČUN DIOBE

Opšti problem koji se rješava ***PROSTIM RAČUNOM DIOBE*** možemo formulisati na sljedeći način: *Datu veličinu A predstaviti kao zbir veličina* x_1, x_2, ... x_n, *tako da te veličine budu proporcionalne ili obrnuto proporcionalne datim veličinama* a_1, a_2, ... a_n *sa istim koeficijentom proporcionalnosti k.*

$$A = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$x_i = k\,a_i \quad \text{ili} \quad x_i = \frac{k}{a_i}, \qquad i = \overline{1,n}$$

PROSTI RAČUN DIOBE

U slučaju **OBRNUTE PROPORCIONALNOSTI** važe relacije:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = A \qquad \text{i} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = k\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

Slijedi da je koeficijent

$$k = \frac{A}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$$

RAČUN SMJEŠE

Primjenjuje se u slučaju kada treba odrediti količinu ili odnose roba iste vrste ali različitog kvaliteta da bi se njihovim miješanjem dobila roba iste vrste ali određenog kvaliteta.

$$k = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

ponderisana aritmetička sredina brojeva $k_1, k_2, \ldots, k_n$

k_i - brojno izražen odgovarajući kvalitet robe od koje se pravi smješa

x_i - potrebna količina i-te robe

PROCENTNI RAČUN

Razlomak $\frac{p}{100}$ zovemo **procentom** i označavamo sa p%

$$\frac{p}{100} \equiv p\%$$

Broj K od koga se izračunava procenat zove se ***osnova*** ili ***glavnica***, broj p ***procentna stopa***, a proizvod procenta p% i glavnice K - ***interes*** ili ***procentni iznos*** i.

$$i = p\%K = \frac{pK}{100}$$

odnosno zapisano u obliku proporcije:

$$K : i = 100 : p$$

Razlomak čiji je imenilac 1.000 zove se ***promil*** i za njegovu oznaku koristićemo simbol **‰**

$$\frac{p}{1000} \equiv p‰$$

RAVNOMJERNA AMORTIZACIJA

$$A_1 = \frac{aK}{100} = A_2 = \ldots = A_n$$

godišnje amortizacije su jednake

Vrijednost osnovnog sredstva krajem prve, druge, ... , n-te godine:

$$K_1 = K - A_1 = K - \frac{aK}{100} = K(1 - \frac{a}{100})$$

$$K_2 = K_1 - A_2 = K - \frac{aK}{100} - \frac{aK}{100} = K(1 - \frac{2a}{100})$$

...

$$K_n = K_{n-1} - A_n = K(1 - \frac{na}{100})$$

K - početna vrijednost osnovnog sredstva,

a - amortizaciona stopa,

K_n - vrijednost osnovnog sredstva krajem n-te godine

A_n - godišnja amortizacija za n-tu godinu.

RAVNOMJERNA AMORTIZACIJA

Uzastopne vrijednosti $K, K_1, K_2, \dots, K_n$ osnovnog sredstva su članovi aritmetičkog niza čiji je prvi član $a_1 = K$ i razlika $d = -A_1$.

Amortizacioni fond za n godina je: $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = nA_1$

Osnovno sredstvo se otpisuje onda kada je njegova vrednost nula, tj.:

$$K_n = 0 \quad \text{odnosno} \quad K\left(1 - \frac{na}{100}\right) = 0$$

Iz ove jednačine dobijamo **vijek trajanja** osnovnog sredstva:

$$n = \frac{100}{a}$$

DEGRESIVNA AMORTIZACIJA

$$A_1 = a\%K \Rightarrow K_1 = K - A_1 = K - \frac{aK}{100} = K(1 - \frac{a}{100})$$

$$A_2 = a\%K_1 = \frac{a}{100} \cdot K(1 - \frac{a}{100}) \Rightarrow K_2 = K_1 - A_2 = K(1 - \frac{a}{100})^2$$

$$\ldots$$

$$A_n = \frac{a}{100} \cdot K(1 - \frac{a}{100})^{n-1} \Rightarrow K_n = K(1 - \frac{a}{100})^n$$

✓Godišnje amortizacije A_1, A_2, ... ,A_n su prvih n uzastopnih članova geometrijskog niza čiji je prvi član A_1 i količnik $q = 1 - \frac{a}{100}$

✓Uzastopne vrijednosti osnovnog sredstva su članovi geometrijskog niza sa prvim članom K i količnikom $q = 1 - \frac{a}{100}$

✓Amortizacioni fond za prvih n godina je zbir prvih n članova geometrijskog niza

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = A_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

KAMATNI RAČUN

Na novac K, koji neko lice (pravno ili fizičko) ulaže u neki posao, poslije određenog vremenskog perioda t dodaje se izvjesna suma i, tako da po isteku vremena t važi da je:

$$K_t = K + i$$

K_t - ukupan iznos po isteku vremena t

K - uložena suma, glavnica ili kapital

t – obračunski period odnosno vremenski interval po čijem isteku se dodaje iznos i

i - kamata ili interes za taj period

KAMATNI RAČUN

Kamata i se računa kao procenat p% od:

- uložene sume K – ***DEKURZIVNI obračun kamate***
- konačne sume Kt – ***ANTICIPATIVNI obračun kamate***

Kod dekurzivnog obračuna kamata se računa i dodaje glavnici na kraju perioda, a kod anticipativnog se obračun i odbijanje kamate vrši početkom perioda.

Broj p se zove ***kamatna (ili interesna) stopa*** i vezana je za određeni vremenski period, najčešće jednu godinu.

Za obračunski period se obično uzima jedna godina (=360 dana), jedan semestar, jedan kvartal, jedan mesec, jedan dan, ili ponekad beskonačno mali interval.

EKVIVALENTNE KAMATNE STOPE

Za dekurzivnu i anticipativnu kamatnu stopu p_d i p_a kažemo da su EKVIVALENTNE ako za datu glavnicu daju isti krajnji iznos.

$$K_1 = K + \frac{p_d K}{100} \quad \text{odnosno} \quad K_1 = K \cdot \left(1 + \frac{p_d}{100}\right)$$

$$K_1 = K + \frac{p_a K_1}{100} \quad \text{odnosno} \quad K_1 = K \cdot \frac{100}{100 - p_a}$$

$$1 + \frac{p_d}{100} = \frac{100}{100 - p_a}$$

Iz prethodne relacije slijedi:

$$p_d = \frac{100 p_a}{100 - p_a}$$

$$p_a = \frac{100 p_d}{100 + p_d}$$

PROSTI I SLOŽENI INTERESNI RAČUN

Neka je glavnica K uložena u banku uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu p i godišnji obračun kamate na više, npr. n godina.

$$K_1 = K + i_1 = K + \frac{pK}{100}$$

K_1 – iznos krajem prve (početkom druge) godine

Za drugu i sve sljedeće godine kamatna stopa p se primjenjuje:

- ✓ na glavnicu K – **PROSTI INTERESNI RAČUN** ili
- ✓ na ukupan iznos iz prethodne godine (tj. na iznos koji se dobija kao zbir glavnice K i svih kamata) – **SLOŽENI INTERESNI RAČUN**

PROSTI INTERESNI RAČUN

Označimo sa K_m ukupan iznos krajem m-te godine (početkom (m+1)-ve godine) i sa i_m interes za m-tu godinu. Pri prostom interesnom računu, za m = 1, 2, ... ,n važe relacije:

$$K_1 = K + \frac{pK}{100}, \quad K_2 = K_1 + \frac{pK}{100} = K + \frac{2pK}{100}, \quad \ldots \quad , K_n = K + \frac{npK}{100}$$

$$i_1 = i_2 = \ldots = i_n$$ **svi godišnji interesi su jednaki**

$$K - K_1 = K_2 - K_1 = \ldots = K_n - K_{n-1}$$

iznosi K_1, K_2, ... ,K_n obrazuju aritmetički niz čiji je prvi član K i razlika $i = \frac{pK}{100}$

SLOŽENI INTERESNI RAČUN

$$K_1 = K + i_1 = K + \frac{pK}{100} = K(1 + \frac{p}{100}) = Kq$$

$$K_2 = K_1 + \frac{pK_1}{100} = K_1 q = Kq^2 \quad \text{gdje je} \quad q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$\ldots$$

$$K_n = Kq^n \qquad K = K_n / q^n$$

Iznosi K_1, K_2, ... ,K_n obrazuju geometrijski niz čiji je prvi član K i količnik q.

NOMINALNA, RELATIVNA I KONFORMNA KAMATNA STOPA

Neka je p – godišnja kamatna stopa

Ukoliko se obračun kamata vrši m puta godišnje, onda godišnjoj kamatnoj stopi p za m-ti dio godine odgovara kamatna stopa:

$\frac{p}{m}$ - **RELATIVNA kamatna stopa za m-ti dio godine**.

Konačna suma K_1, koju dobijamo ulaganjem sume K_0 uz godišnju kamatnu stopu p i uz m obračuna godišnje, iznosi:

$$K_1 \equiv K_{1,m} = K_0 (1 + \frac{p}{100m})^m$$

Za n godina, pod istim uslovima, konačan iznos bi bio:

$$K_{n,m} = K_0 (1 + \frac{p}{100m})^{nm}$$

KONFORMNA KAMATNA STOPA

KONFORMNA kamatna stopa za m-ti dio godine (p_m) koja odgovara godišnjoj kamatnoj stopi p je ona kamatna stopa čijom primjenom m puta na glavnicu K, pri složenom interesu, dobijamo isti iznos kao i pri ulogu glavnice K na jednu godinu uz godišnju kamatnu stopu p i godišnji obračun.

$$K(1+\frac{p}{100})=K(1+\frac{p_m}{100})^m$$

odakle je

$$p_m=100\cdot(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1)$$

NOMINALNA KAMATNA STOPA

NOMINALNA kamatna stopa je jednaka proizvodu konformne stope p_m (za m-ti dio godine) i broja m.

Iz relacije: $(1+\frac{p_m}{100})^m = 1+\frac{p}{100}$

Primjenom binomnog obrazca dobijamo da je:

$$1+\frac{mp_m}{100} + \binom{m}{2}\left(\frac{p_m}{100}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p_m}{100}\right)^m = 1+\frac{p}{100}$$

Odbacivanjem trećeg i svih daljih članova na lijevoj strani, slijedi:

$mp_m < p$ **nominalna kamatna stopa je manja od odgovarajuće godišnje stope**

$p_m < \frac{p}{m}$ **za datu godišnju kamatnu stopu p, odgovarajuća konformna stopa je manja od relativne kamatne stope m-tog dijela godine**

ESKONTNI RAČUN

$$K_n = K_0 + \frac{np}{36.000} \cdot K_n$$

K_n - nominalna vrijednost mjenice

K_o – eskontovana vrijednost mjenice

p – godišnja kamatna stopa

n - broj dana za koje treba obračunati kamatu

$$K_0 = K_n(1 - \frac{np}{36.000})$$

$$K_n - K_0 = \frac{Kn \cdot np}{36.000}$$

Ovako obračunata kamata zove se (komercijalni) **ESKONT.**

Prilikom obračuna eskonta dan eskontovanja se ne računa, a posljednji dan se računa u broj dana za koje treba obračunati kamatu.

STOPA PRINOSA I DISKONTNA STOPA

Stopa prinosa se definiše kao prirast kapitala (tj. interes) u odnosu na početnu vrijednost kapitala. Ukoliko je iznos od ***K*** novčanih jedinica uložen za vremenski period ***t*** uz prost interes po interesnoj stopi ***i***, njegova krajnja vrijednost K_t će iznositi

$$\boxed{K_t = K \cdot (1 + it)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{it = \frac{K_t - K}{K}}$$

Diskontna stopa se definiše kao prirast kapitala (tj.diskont) u odnosu na krajnju vrijednost kapitala. Početna vrijednost kapitala čija je krajnja vrijednost K_t poznata, pri diskontnoj stopi ***d*** i vremenskom periodu ***t***, iznosi:

$$\boxed{K = K_t \cdot (1 - dt)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{dt = \frac{K_t - K}{K_t}}$$

STOPA PRINOSA I DISKONTNA STOPA

Određivanjem početne vrijednosti kapitala na osnovu sljedeće dvije relacije:

$$K_t = K \cdot (1 + it) \quad \text{i} \quad K = K_t \cdot (1 - dt)$$

dolazi se do izraza:

$$\frac{K_t}{1 + it} = K_t(1 - dt) \Rightarrow \frac{1}{1 + it} = 1 - dt$$

Odakle se sređivanjem dobija izraz za diskontnu stopu:

$$\boxed{d = \frac{i}{1 + it}}$$

gdje je ***i*** ekvivalentna stopa prinosa

Polazeći od iste jednakosti, stopu prinosa je moguće izraziti preko njoj odgovarajuće diskontne stope kao:

$$\boxed{i = \frac{d}{1 - dt}}$$

IZRAČUNAVANJE CIJENA I PRINOSA HARTIJA OD VRIJEDNOSTI

Cijena koju je investitor spreman da plati za bilo koji finansijski instrument predstavlja sadašnju vrijednost očekivanog budućeg neto novčanog toka po osnovu posjedovanja datog instrumenta.

Prema načinu formiranja cijene i izračunavanja prinosa, hartije od vrijednosti tržišta novca mogu biti:

- ***diskontne hartije od vrijednosti*** (kratkoročne državne obveznice, komercijalni zapisi i bankarski akcepti);
- ***kamatonosne hartije od vrijednosti*** (depozitni certifikati, kratkoročne obveznice državnih agencija itd).

DISKONTNE HARTIJE OD VRIJEDNOSTI

Diskontne hartije od vrijednosti se prodaju po cijeni koja je niža od njihove nominalne vrijednosti za diskont, odnosno za visinu prinosa obećanog investitoru.

Najčešće diskontne hartije od vrijednosti su kratkoročne državne obveznice, komercijalni zapisi i bankarski akcepti.

Obračun prinosa ***D*** vrši se primjenom diskontne stope ***d*** na nominlnu vrijednost ***NV***, uvažavajući broj dana ***n*** do roka dospijeća hartije:

$$D = NV \times d \times \frac{n}{360}$$

DISKONTNE HARTIJE OD VRIJEDNOSTI

Cijena diskontne hartije od vrijednosti koja se kupuje prije roka dospjeća predstavlja razliku nominalne vrijednosti i diskonta:

$$P = NV\left(1 - d\frac{n}{360}\right)$$

Cijena diskontnog instrumenta pomoću ekvivalentne stope prinosa (umjesto diskontne stope) iznosi:

$$P = \frac{NV}{1 + i\frac{n}{360}}$$

DISKONTNE HARTIJE OD VRIJEDNOSTI

Stopa prinosa do dospijeća (yield to maturity) koju ostvaruje investitor u finansijski instrument sa diskontom utvrđuje se primjenom sljedećeg obrasca:

$$i = \frac{nominalna\ vrijednost - kupovna\ cijena}{kupovna\ cijena} \times \frac{360}{n}$$

gdje je *n*- broj dana do dospijeća hartije

Ukoliko investitor proda hartiju od vrijednosti prije njenog dospijeća, ostvariće prinos adekvatno vremenskom periodu držanja hartije. Ostvarena stopa prinosa u periodu posjedovanja hartije se može izračunati kao:

$$i = \frac{prodajna\ cijena - kupovna\ cijena}{kupovna\ cijena} \times \frac{360}{n}$$

KRATKOROČNE DRŽAVNE OBVEZNICE

Država emituje kratkoročne obveznice radi finansiranja kratkoročnog budžetskog deficita ili refinansiranja ranije izdatih obveznica.

Visoka likvidnost i efikasnost tržišta, kao i država u ulozi garanta, uslovljavaju nerizičan tretman ove vrste hartija.

Usled navedenih investicionih kvaliteta, stopa prinosa kratkoročnih državnih obveznica je najniža u odnosu na stope drugih kratkoročnih hartija od vrijednosti.

Od američkog naziva ove vrste hartija Treasury bills, potiče i globalno prihvaćeni skraćeni naziv T-bills.

KOMERCIJALNI ZAPISI

Komercijalni zapisi (papiri) su kratkoročne dužničke hartije od vrijednosti koje izdaju nefinansijske institucije, prvenstveno velika preduzeća visokog boniteta.

Rokovi dospijeća komercijalnih zapisa iznose od 7 do 270 dana.

Relativno veći kreditni rizik za investitore nadoknađuje se većim prinosom u odnosu na kratkoročne državne obveznice.

BLAGAJNIČKI ZAPISI

Blagajnički zapisi predstavljaju kratkoročne dužničke hartije od vrijednosti koje emituju poslovne banke radi prevazilaženja trenutnih problema nedovoljne likvidnosti. Pored poslovnih, blagajničke zapise može emitovati i centralna banka, u cilju apsorpcije viškova likvidnosti iz monetarnog sistema i u tom slučaju zapise mogu kupovati isključivo banke.

Relativno nizak rizik ulaganja u blagajničke zapise praćen je relativno niskim prinosom za investitore.

BANKARSKI AKCEPTI

Bankarski akcept je trasirana mjenica na banku i akceptirana od banke, kojom se neopozivo naređuje isplata mjenične sume imaocu mjenice po naredbi izdavaoca mjenice na određeni dan.

Prilikom prodaje bankarskog akcepta, vrši se eskontovanje primjenom eskontne (diskontne) stope.

Rok dospijeća akcepta je od 30 do 270 dana, a najčešće 90 dana.

O roku dospijeća akcepta, banka donosiocu isplaćuje ukupnu nominalnu vrijednost instrumenta.

KAMATONOSNE HARTIJE OD VRIJEDNOSTI

Hartije od vrijednosti sa kamatonosnim prihodom se emituju po cijeni koja je jednaka njihovoj nominalnoj vrijednosti i imaju određeni rok dospijeća.

Kupac ostvaruje kamatu **I**, koju emitent obećava da plati na nominalnu vrijednost o roku dospijeća.

$$I = NV \cdot i \cdot \frac{n}{360}$$

Cijena o roku dospijeća kamatonosne hartije od vrijednosti se izračunava kao zbir nominalne vrijednosti i pripadajuće kamate.

$$P = NV\left(1 + i\frac{n}{360}\right)$$

KAMATONOSNE HARTIJE OD VRIJEDNOSTI

Cijena kamatonosne hartije od vrijednosti, u izabranom trenutku nakon njenog emitovanja, predstavlja sadašnju vrijednost iznosa koji će biti primljen po dospijeću, diskontovanog primjenom aktuelne kamatne stope na tržištu novca:

$$P' = NV \cdot \frac{1 + i_c \frac{n_c}{360}}{1 + i_m \frac{n_m}{360}}$$

P'- tržišna cijena hartije u određenom trenutku između dana emitovanja i roka dospijeća;

i_c – kamatna stopa pri izdavanju instrumenta;

i_m- kamatna stopa pri prodaji instrumenta;

n_c- broj dana od kupovine do roka dospijeća;

n_m – broj dana od prodaje do roka dopsijeća;

n – broj dana posjedovanja instrumenta.

KAMATONOSNE HARTIJE OD VRIJEDNOSTI

Prinos za investitora u slučaju prodaje kamatonosne hartije prije njenog roka dospijeća utvrđuje se korigovanjem odnosa ostvarene razlike u cijeni i kupovne cijene za period posjedovanja hartije.

Ukoliko je hartija prethodno kupljena na dan emitovanja, i zatim prodata prije roka dospijeća po cijeni **P'**, investitor bi ostvario prinos u iznosu:

$$i = \frac{P - NV}{NV} \cdot \frac{360}{n} = (\frac{P'}{NV} - 1) \cdot \frac{360}{n}$$

gdje je **n** - broj dana posjedovanja hartije.

KAMATONOSNE HARTIJE OD VRIJEDNOSTI

Postoji mogućnost da investitor kupi kamatonosnu hartiju nakon dana emitovanja, a zatim da je proda prije dana dospijeća. Ostvareni prinos u periodu posjedovanja hartije može biti utvrđen prema obrascu:

gdje su:

$$i = \left(\frac{1 + i_m \frac{n_m}{360}}{1 + i_s \frac{n_s}{360}} - 1 \right) \cdot \frac{360}{n}$$

i *– ostvareni prinos u periodu posjedovanja hartije*

i_m *- kamatna stopa pri kupovini instrumenta*

i_s *- kamatna stopa pri prodaji instrumenta*

n_m *- broj dana od kupovine do roka dospijeća*

n_s *- broj dana od prodaje do roka dospijeća*

n *- broj dana posjedovanja instrumenta*

DEPOZITNI CERTIFIKATI

Depozitni certifikat je potvrda koja glasi na određenu sumu novca deponovanog u banci, na određeni rok i uz određenu kamatnu stopu.

Za banke kao njihove emitente, depozitni certifikati predstavljaju alternativu pribavljanju sredstava putem klasičnog depozita, i koriste se kao instrument za upravljanje rizikom kamatne stope. Certifikati o depozitu na tržištu novca se emituju sa rokovima naplate od sedam dana do jedne godine. Plaćanje se vrši donosiocu ili po nalogu deponenta, a pripadajuća kamata se isplaćuje u momentu isplate glavnice. Kamata se obračunava na osnovu stvarnog broja dana do roka dospijeća i dodaje glavnici o roku dospijeća.

POTROŠAČKI ZAJMOVI

Nastavljajući isti postupak zaključujemo da je kamata za posljednji mjesec:

$$\left[100-(n-1)\cdot\frac{100}{n}\right]\cdot\frac{p}{1.200}=\frac{100}{n}\cdot\frac{p}{1.200}=\frac{p}{12n}$$

Zbir svih kamata je:

$$k=\frac{p}{1.200}\cdot 100+\frac{p}{1.200}\cdot(100-\frac{100}{n})+\frac{p}{1.200}\cdot(100-2\cdot\frac{100}{n})+\ldots+\frac{p}{1.200}\cdot\frac{100}{n}$$

$$=\frac{p}{1.200}\cdot\left[100+(100-\frac{100}{n})+(100-2\cdot\frac{100}{n})+\ldots+\frac{100}{n}\right]$$

Zbir u srednjoj zagradi je zbir prvih n članova aritmetičkog niza čiji je prvi član $a_1=100$, n-ti $a_n=\frac{100}{n}$, pa je:

$$k=\frac{p}{1.200}\cdot\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{p}{1.200}\cdot\frac{n}{2}(100+\frac{100}{n})=\frac{p}{1.200}\cdot\frac{100(n+1)}{2}$$

POTROŠAČKI ZAJMOVI

$$k = \frac{(n+1)p}{24}$$ **Kamatni koeficijent**

Ako je K nominalni iznos zajma i $s\%K$ obavezno učešće, za otplatu ostaje iznos $K - s\%K$ uvećan za kamate. Kako je ukupna kamata na 100 nj. kamatni koeficijent k, to ukupna kamata na iznos $K - s\%K$ iznosi $k \cdot \frac{K - s\%K}{100}$, pa slijede relacije:

$$K - s\%K + k \cdot \frac{K - s\%K}{100}$$ **ukupni dug**

$$R = \frac{1}{n} \cdot \left[K - s\%K + k \cdot \frac{K - s\%K}{100} \right]$$

$$R = \frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{k}{100}) \cdot (K - \frac{sK}{100})$$

mjesečna rata (prosječni anuitet)

PERIODIČNE UPLATE I ISPLATE

RAČUN ULOGA se bavi obračunom konačnog iznosa pri ulaganju jednakih novčanih uloga u jednakim vremenskim razmacima, a **RAČUN RENTE** - pri podizanju istog novčanog iznosa.

Uvedimo sledeće oznake:

U - novčani iznos koji se, npr. početkom (anticipativni ulozi) svake godine za n godina uz kamatnu stopu p i dekurzivno i složeno kapitalisanje ulaže u banku.

U_m - ukupan iznos početkom m-te godine

U'_m - ukupan iznos krajem m-te godine (m = 1, 2, ... , n)

PERIODIČNE UPLATE

Slijede relacije:

$$U_1 = U \quad U_1' = U + \frac{pU}{100} = Uq \qquad q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$\mathrm{U_2 = Uq + U = U(1+q)} \qquad \mathrm{U_2' = U(1+q) + \frac{U(1+q)p}{100} = Uq(1+q)}$$

$$\mathrm{U_3 = Uq(1+q) + U = U(1+q+q^2)} \qquad \mathrm{U_3' = Uq(1+q+q^2)}$$

$$\ldots$$

$$\mathrm{U_n = U(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) = U\frac{q^n-1}{q-1}}$$

$$\mathrm{U_n' = Uq(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}) = Uq\frac{q^n-1}{q-1}}$$

PERIODIČNE ISPLATE

Pretpostavimo da se od iznosa K uloženog uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p za n godina početkom (anticipativna renta) svake godine podiže isti iznos - **renta R**. Označimo sa K_m preostali novčani iznos početkom i sa $K_m^{'}$ preostali novčani iznos krajem m-te godine. Tada je:

$$K_1 = K - R \qquad K_1^{'} = (K - R)q = Kq - Rq$$

$$K_2 = (K - R)q - R = Kq - R(1+q) \qquad K_2^{'} = Kq^2 - Rq(1+q)$$

$$K_3 = K_2^{'} - R = Kq^2 - R(1+q+q^2) \qquad K_3^{'} = Kq^3 - Rq(1+q+q^3)$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$K_m = Kq^{m-1} - R\frac{q^m - 1}{q - 1} \qquad K_m^{'} = Kq^m - Rq\frac{q^m - 1}{q - 1}$$

Suma K se iscrpe onda kada je $K_m^{'} = 0$, tj.:

$$Kq^m = Rq\frac{q^m - 1}{q - 1} \quad \text{ili} \quad Kq^{m-1} = R\frac{q^m - 1}{q - 1}$$

INVESTICIONI ZAJMOVI

Pretpostavimo da se zajam K vraća za n godina krajem godine uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p i godišnji obračun kamata. Tada važe sledeće relacije:

$$\sum a_m = \sum R_m + \sum i_m$$

$$\sum R_m = K$$

$$K_{n-1} = R_n$$

$$K_n = 0 \quad (*)$$

Gdje je :

K_m- preostali dio zajma (glavnog duga);

a_m -godišnji anuitet;

R_m – odgovarajuća rata za m-tu godinu, m =1, 2, ... ,n

i_m - interes za m-tu godinu, m = 1, 2, ... ,n.

Napraviti ***plan otplate (amortizacije) zajma*** znači izračunati sve navedene veličine K_m, i_m, R_m, a_m i svrstati ih (radi bolje preglednosti) u odgovarajuću tabelu.

VRAĆANJE ZAJMA JEDNAKIM RATAMA

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_n \equiv R, \quad R = \frac{K}{n}$$

$$i_1 = \frac{pK}{100}, \quad i_2 = \frac{p(K-R)}{100}, \quad \ldots \quad , i_n = \frac{p\left[K-(n-1)R\right]}{100}$$

$$a_1 = R + i_1, \quad a_2 = R + i_2, \quad \ldots \quad , a_n = R + i_n$$

Uzastopni godišnji interesi obrazuju artimetički niz čiji je prvi član i_1, n-ti član i_n i razlika $-\frac{pR}{100}$, pa je zbir svih godišnjih kamata :

$$\sum i_m = (i_1 + i_n)\cdot\frac{n}{2} = \left(\frac{pK}{100} + \frac{pK}{100} - \frac{pK}{100} + \frac{pK}{100n}\right)\cdot\frac{n}{2} = \frac{pK(n+1)}{200}$$

Godišnji anuiteti obrazuju artimetički niz čiji je prvi član a_1, n-ti član a_n i razlika $-\frac{pR}{100}$, pa je zbir svih godišnjih kamata :

$$\sum a_m = \sum i_m + nR = \frac{pK(n+1)}{200} + K = K\left[1 + \frac{p(n+1)}{200}\right]$$

VRAĆANJE ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA KRAJEM ROKA

Godišnji anuiteti su jednaki i iznose:

$$\boxed{a_1 = a_2 = \ldots = a_n \equiv a}$$

$$i_1 = \frac{pK}{100} \Rightarrow K_1 = K + \frac{pK}{100} - a = Kq - a$$

$$i_2 = \frac{pK_1}{100} \Rightarrow K_2 = K_1 + \frac{pK_1}{100} - a = K_1q - a = Kq^2 - aq - a = Kq^2 - a(1+q)$$

$$i_3 = \frac{pK_2}{100} \Rightarrow K_3 = K_2 + \frac{pK_2}{100} - a = Kq^3 - a(1+q+q^2)$$

...

$$i_n = \frac{pK_{n-1}}{100} \Rightarrow K_n = Kq^n - a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$$

VRAĆANJE ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA KRAJEM ROKA

Zajam je vraćen kada je $K_n = 0$, tj.:

$$a(1+q+\ldots+q^{n-1}) = Kq^n$$

Izraz u zagradi je zbir od n članova geometrijskog niza čiji je prvi član 1, količnik q, pa je:

$$a\frac{q^n-1}{q-1} = Kq^n$$

Odnosno godišnji anuitet je:

$$\boxed{a = Kq^n\frac{q-1}{q^n-1}}$$

Iz poznatog anuiteta i interesa određujemo ratu:

$$R_m = a_m - i_m = a - i_m$$

VRAĆANJE ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA KRAJEM ROKA

Dokažimo da uzastopne rate obrazuju geometrijski niz čiji je prvi član R_1 i količnik q.

Kako je:

$$a = R_1 + i_1 \qquad \text{i} \qquad a = R_2 + i_2$$

Izjednačavajući desne strane i zamjenjujući i_1 i i_2 svojim vrijednostima, dobijamo da je:

$$R_2 + \frac{pK_1}{100} = R_1 + \frac{pK}{100}$$

Odnosno:

$$R_2 = R_1 + \frac{p(K - K_1)}{100} = R_1 + \frac{pR_1}{100} = R_1 \cdot (1 + \frac{p}{100})$$

$$R_2 = R_1 q$$

Na isti se način provjerava da je:

$$\boxed{R_m = R_{m-1} q = R_1 q^{m-1}}$$

VRAĆANJE ZAJMA JEDNAKIM ANUITETIMA POČETKOM ROKA

$$K_1 = K - a + (K - a)\cdot\frac{p}{100} = Kq - aq$$

$$K_2 = (K_1 - a) + (K_1 - a)\cdot\frac{p}{100} = Kq^2 - aq(1+q)$$

$$K_3 = Kq^3 - aq(1+q+q^2)$$

$$\ldots$$

$$K_{n-1} = Kq^{n-1} - aq\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$$

Neka je K_n’ ostatak zajma početkom n-te godine. Tada važi:

$$K_n^{'} = K_{n-1} - a$$

Iz uslova Kn’=0 dobijamo anuitet:

$$\boxed{a = Kq^{n-1}\frac{q-1}{q^n-1}}$$

SLUČAJ ANTICIPATIVNOG OBRAČUNA KAMATA

- Zamjenom anticipativne ekvivalentnom dekurzivnom stopom, obračun možemo napraviti kao u prethodnim slučajevima.
- Međutim, zajmodavac može da traži da se kamate i efektivno daju unaprijed. U tom slučaju korisnik dobija zajam umanjen za kamatu, tj, ako je (anticipativna) kamatna stopa p:

$$K - \frac{Kp}{100} = K(1 - \frac{p}{100}) = \frac{K}{r}, \quad r = \frac{100}{100 - p}$$

- Zbir sadašnjih vrijednosti svih anuiteta (ako se plaćaju krajem termina) je:

$$\frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \ldots + \frac{a}{r^n}$$

- Prema principu ekvivalencije, imamo da je:

$$\frac{K}{r} = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \ldots + \frac{a}{r^n} \quad \text{odnosno} \quad \boxed{a = Kr^{n-1}\frac{r-1}{r^n - 1}}$$

INTERKALARNA KAMATA

- Korisnik zajma, obično, ne podiže cio zajam odjednom, nego u djelovima - tzv. ***tranšama*** - zavisno od tempa realizacije projekta za koji je dobio zajam.
- **Interkalarna kamata** se plaća za vrijeme koje protekne od momenta dobijanja tranše do početka vraćanja zajma (tzv. grace (grejs) period).
- 3 metode obračuna interkalarne kamate:

1. Kamata se obračunava prostim interesnim računom uz primjenu dogovorene kamatne stope na cio zajam za polovinu broja termina.

2. Prostim interesnim računom kamata se obračuna za svaku tranšu posebno za jedno polugodište manje od ukupnog broja termina.

3. Kamata se obračunava po složenom kamatnom računu za svaku tranšu posebno, a za broj termina se uzima broj polugodišta umanjen za jedan za svaku tranšu pojedinačno. Kamatna stopa je polugodišnja relativna ili konformna.

ISPITIVANJE RENTABILNOSTI INVESTICIJE

METODA RAVNOMJERNIH EKVIVALENTNIH GODIŠNJIH TROŠKOVA (EGT)

- Metoda se sastoji u tome da se svi troškovi (bilo da su godišnji ili zbirni) po svim varijantama svedu na jednake godišnje iznose. Ona varijanta po kojoj su ti troškovi najmanji biće najrentabilnija.

- Ukoliko troškovi korišćenja i održavanja nijesu isti svake godine onda najprije treba izračunati njihovu sadašnju vrijednost, koja će biti osnovica za obračun anuiteta. Tako nastaju EGT korišćenja i održavanja. Nabavna vrijednost mašine i sl. je već sadašnja vrijednost pa će se EGT od nabavne vrijednosti dobiti primjenom obrasca za anuitet, gdje je K jednako nabavnoj vrijednosti. Ukupni EGT jednak je zbiru prethodna dva EGT-a.

METODA SADAŠNJE VRIJEDNOSTI

- Metoda se sastoji u tome da se svi troškovi po svim varijantama svedu na sadašnje troškove (trenutak t=0) i tako svedeni troškovi uporede.

- Ako investicije ne daju isti efekat tada se izračuna neto efekat investicije (kapitalna vrijednost investicije) za t=0 , kao razlika sadašnje vrijednosti prihoda i sadašnje vrijednosti troškova.

- Ako je riječ o rentabilnosti jedne investicije, ona je rentabilna ako je njen neto efekat pozitivan. Prosječni godišnji neto efekat investicije dobijamo ako izračunamo anuitet od neto efekta (za t=0).

Metod sadašnje vrijednosti kvantifikuje očekivanu rentabilnost investicije u apsolutnom monetarnom iznosu za razliku od anuitetnog metoda, koji pruža mogućnost kvantifikacije prosječnih veličina karakterističnih za investiciju.

Prinos na obveznice

- Očekivana stopa prinosa obveznice je diskontna stopa koja izjednačava sadašnju vrijednost budućih novčanih tokova sa tekućom tržišnom cijenom obveznice.

- Računsko određivanje istovjetno određivanju IRR stope (biće obrađeno kasnije)

61

VREDNOVANJE DUGOROČNIH OBVEZNICA

$$P = \frac{C}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{C}{r^3} + \cdots + \frac{C}{r^n} + \frac{NV}{r^n} = C\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n}\right) + \frac{NV}{r^n}$$

$$P = \frac{C}{r^n}\left(r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \cdots + 1\right) + \frac{NV}{r^n}$$

$$\boxed{P = \frac{C}{r^n}\,\frac{r^n - 1}{r - 1} + \frac{NV}{r^n}}$$

P - tržišna cijena obveznice;

C – godišnja kuponska kamata koju investitor prima od emitenta obveznice;

NV- nominalna vrijednost obveznice;

n – rok dospijeća obveznice;

p – tržišna kamatna stopa (diskontna stopa), u teoriji se naziva i prinos do dospijeća (yield to maturity)

VREDNOVANJE DUGOROČNIH OBVEZNICA

U slučaju prodaje obveznice prije roka dospijeća, obračun prinosa koji investitor ostvaruje uzima u obzir kako kuponsku kamatu, tako i ostvareni kapitalni dobitak/gubitak, kao razliku između ostvarene prodajne i kupovne cijene obveznice. Ukupna stopa prinosa za investitora i u periodu posjedovanja obveznice utvrđuje se prema obrascu:

su:

C – godišnja kuponska kamata;

P_t – berzanski kurs obveznice u godini t;

P_{t+1} – berzanski kurs obveznice u godini t+1;

$$\boxed{i = \frac{C + P_{t+1} - P_t}{P_t}}$$

Duracija

- Duracija obveznice je mjera osjetljivosti njene cijene na promjenu kamatnih stopa.

$$Duration = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{tCF_t}{(1+R_b)^t}}{P_0}$$

Veća duracija, veća osjetljivost na promjenu kamatnih stopa, veći rizik !!!

- gdje je:
  - n – broj godina do dospijeća;
  - CF_t=novčani tok u godini t
  - R_b= očekivana stopa povraćaja
  - P_0= sadašnja vrijednost obveznice

64

Duracija i konveksnost

$$MD = -\frac{\frac{\partial V}{\partial p}}{V} = \frac{D}{1+p} \qquad -\mathrm{mod}\,ifikovana\ \ duracija$$

$$D = \frac{\sum_t \frac{t\,CF_t}{(1+p)^t}}{V} \ -duracija \qquad V = \sum_t \frac{CF_t}{(1+p)^t} - vrij.obvezn.$$

$$C = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}}{V} = \frac{\sum_t \frac{(t+t^2)\,CF_t}{(1+p)^t}}{V(1+p)^2} \quad -konveksnost$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -MD\,\Delta p + \frac{1}{2}C\,\Delta p^2 + \dots$$

$$Kriva\ prinosa - grafi\check{c}.\ odnos\, cijene\ i\ prinosa$$

ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI AKCIJA

Emisioni kurs nove akcije je zapravo cijena po kojoj će prvi kupci kupiti tu novu akciju, ali ne za svoje potrebe nego za dalju preprodaju. Emisioni kurs nove akcije uključuje i maržu (spred), kao naknadu za emisiju i plasman akcija. Osim marže, na visinu emisionog kursa utiče i visina ažija ili disažija, odnosno razlika između berzanskog i nominalnog kursa stare, ranije emitovane akcije. Ukoliko je berzanski kurs akcije iznad nominalnog, imamo ažio, a ako je berzanski kurs isti ili niži od nominalnog, imamo disažio.

Emisioni kurs nove akcije = berzanski kurs stare akcije + marža (spred) + godišnja dividenda

ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI AKCIJA

Ako se pretpostavi da je investicioni horizont ***n*** godina, a isplate dividendi $\mathbf{D_t}$ godišnje, posljednja isplata uključuje i cijenu prodaje akcije na kraju n-te godine P_n, tada ćevsadašnja tržišna cijena akcije $\mathbf{P_0}$ biti:

$$P_0 = \frac{D_1}{1+k} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \ldots + \frac{D_n}{(1+k)^n} + \frac{P_n}{(1+k)^n}$$

$$P_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{(1+k)^j} + \frac{P_n}{(1+k)^n}$$

gdje je **k** - tržišna kamatna stopa.

ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI AKCIJA

Realno je očekivati da u dugom roku stopa rasta dividendi (g) i tržišne cijene akcije ne može da bude veća od tržišne kamatne stope, odnosno da je uvijek ***k>g***, gdje je ***k*** tržišna kamatna stopa a ***g*** očekivana stopa rasta dividende u budućnosti.

Kako idemo dalje u budućnost, cijena P_n se sve više smanjuje i teži nuli, tako da se prethodna jednačina može predstaviti kao:

$$P_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{(1+k)^j}$$

ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI AKCIJA

NULTI RAST DIVIDENDE (g=0)

U ovom slučaju, uz pretpostavku da je n veliko, slijedi:

$$P_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D}{(1+k)^j} = D \cdot \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+k}} = \frac{D}{k}$$

KONSTANTAN (NORMALAN) RAST DIVIDENDE (g=const)

Ukoliko se očekuje da u budućnosti dividenda konstantno raste po stopi *g*, tada će iznos dividende koja će se primati u ma kojoj godini *j* biti:

$$D_j = (1+g)^{j-1} \cdot D_1$$

ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI AKCIJA

Daljom zamjenom se dobija:

$$P_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+g)^{j-1} \cdot D_1}{(1+k)^j}$$

Ovdje je riječ o geometrijskom nizu čiji je količnik $q = \frac{1+g}{1+k} < 1$ i prvim članom $\frac{D_1}{(1+k)}$,

pa je njegova suma:

$$P_0 = \frac{D_1}{1+k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+k}} = \frac{D_1}{k-g}$$

ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI AKCIJA

PRIVILEGOVANE AKCIJE

Akcije koje vlasniku daju pravo na fiksne prinose:

$$A = \frac{D}{k}$$

gdje je:

A – cijena privilegovane akcije;

D – iznos dividende;

k – stopa prinosa na privilegovanu akciju;

TEOREMA O FAKTORU AKUMULACIJE

Ako su δ (t) i $K(t_0,t)$ neprekidne funkcije (po nezavisno promjenljivoj t) za $t \geq t_0$, i ako važi princip konzistentnosti tada je:

$$\boxed{K(t_1,t_2) = Ke^{\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt}}$$

Dokaz ćemo izvesti za K=1. Neka je $f(t) = K(t_0,t)$. Za $t \geq t_0$ i uz učinjene pretpostavke važi:

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0+} i_h(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{K(t,t+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{k(t_0,t)K(t,t+h)-K(t_0,t)}{K(t_0,t)\cdot h}$$

$$= \frac{1}{K(t_0,t)} \lim_{h\to 0+} \frac{K(t_0,t+h)-K(t_0,t)}{h} = \frac{1}{f(t)} \cdot \lim_{h\to 0+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{1}{f(t)} \cdot f_+^{'}(t)$$

SADAŠNJA VRIJEDNOST NOVČANIH TOKOVA

Funkcija sadašnje vrijednosti

$$\boxed{V(t) \overset{def.}{=} e^{-\int_0^t \delta(s)ds}}$$

To je diskontni faktor koji za $t \geq 0$ predstavlja sadašnju vrijednost 1 novčane jedinice date u trenutku t, a za $t < 0$ predstavlja akumulaciju u trenutku 0, 1 novčane jedinice uložene u trenutku t.

Ako je $\delta(t) = \delta, \ \forall t$ tada je $V(t) = V^t$

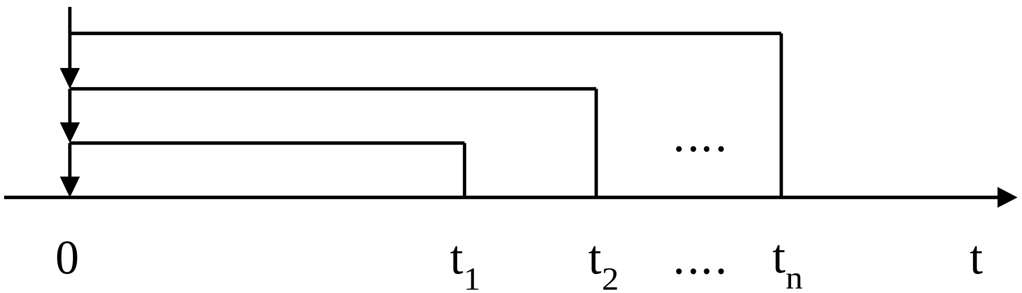
$$V = V(1) = e^{-\delta}$$

Diskontni faktor kod diskretnog kapitalisanja je $\dfrac{1}{q^t}$ a ovdje je

$$e^{-\delta t} = (e^{\delta})^{-t} = (1+i)^{-t} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t = \frac{1}{q^t} = V^t$$

DISKRETNI NOVČANI TOKOVI

Neka su dati tokovi novca C_{t1}, C_{t2}, ... , C_{tn} u trenucima t_1, t_2, ... , t_n.



Sadašnja vrijednost diskretnih novčanih tokva iznosi:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} C_{tj} V(tj)}$$

NEPREKIDNI NOVČANI TOKOVI

Neka je $\rho(t)$ visina novčanog toka u trenutku t za jedinicu vremena i neka $t \in [0, T]$

$\boxed{\rho(t) \overset{\text{def.}}{=} M^{'}(t), \quad \forall t}$ gdje je M(t) - ukupna visina novčanog toka između 0 i t.

Ako je $0 \leq \alpha < \beta \leq T$ tada je ukupno plaćanje između α i β:

$$M(\beta) - M(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} M^{'}(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)dt$$

a između t i $t + \Delta t$

$$M(t + \Delta t) - M(t) \approx M^{'}(t)\Delta t = \rho(t)dt \qquad dt = \Delta t$$

Sadašnja vrijednost novčanog toka između t i $t + \Delta t$: $V(t)\rho(t)dt$

Sadašnja vrijednost cijelog novčanog toka: $\boxed{\int_{0}^{T} V(t)\rho(t)dt}$

RENTABILNOST INVESTICIONOG PROJEKTA

Neka je kamatna stopa konstantna i iznosi i. Projekat se okončava u trenutku T. Stanje na računu u trenutku t=T:

$$\sum C_t q^{T-t} + \int_0^T \rho(t) q^{T-t} dt, \quad q = 1 + i$$

Za t=0 uz oznaku $V = \frac{1}{q}$

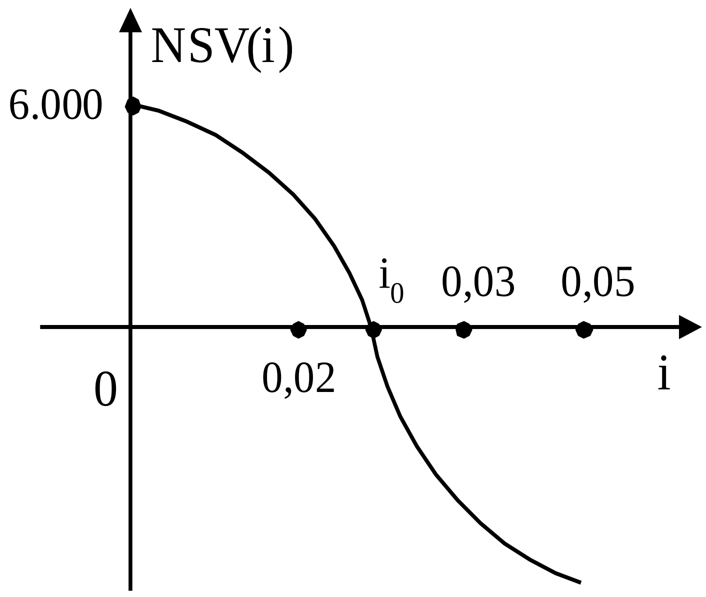
$$\boxed{NSV(i) = \sum C_t V^t + \int_0^T \rho(t) V^t dt}$$

NSV(i) - funkcija neto sadašnje vrijednosti razmatrane investicije uz kamatnu stopu i

Ako $i \to \infty$ tada $NSV(i) \to C_0$

Za $NSV(i) > 0$ investicija je rentabilna.

RENTABILNOST INVESTICIONOG PROJEKTA



Pretpostavimo da postoji stopa i_0 takva da je NSV(i)=0 i da NSV mijenja znak sa + na - prolazeći kroz tu tačku.

i_0 - stopa dovoljna za namirenje duga (IRR - internal rate of return)

tzv. interna stopa prinosa

Neka investitor pozajmljuje novac uz fiksnu stopu i_1. Ako je $NSV(i_1) > 0$ projekat je profitabilan.

Profit (ili gubitak) u trenutku T iznosi $NSV(i_1)q_1^T$ $q_1 = 1 + i_1$

Uz pretpostavku da je $NSV(i_0)=0$ i da NSV mijenja znak sa + na - prolazeći kroz tu tačku jasno je da je projekat profitabilan ako i samo ako je $i_1 < i_0$

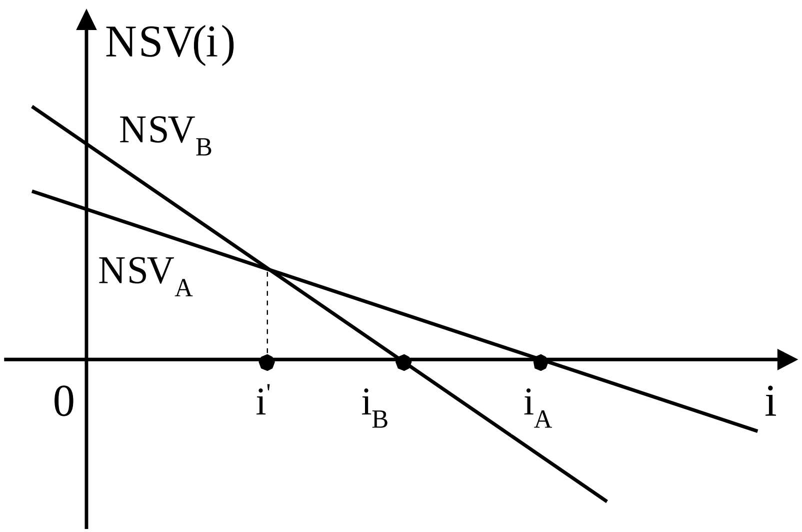
i_0 je dakle kamatna stopa do koje investitor može da pozajmljuje novac.

KOMPARACIJA DVA INVESTICIONA PROJEKTA

Neka investitor komparira dva projekta A i B.

Neka je i_1 stopa po kojoj je novac pozajmljen.

Ako je $\boxed{NSV_A(i_1) > NSV_B(i_1)}$ rentabilniji je projekat A.



Sa sljedeće slike je očigledno da kriterijum veće stope i_0 nije dobar jer za $i_1 < i'$ iz $i_A > i_B$ ne slijedi i $NSV_A(i_1) > NSV_B(i_1)$

SLUČAJ RAZLIČITIH STOPA UZ KOJE INVESTITOR POZAJMLJUJE I PLASIRA NOVAC

Označimo sa: j_1 - (aktivnu) stopu uz koju investitor pozajmljuje novac

j_2 - (pasivnu) stopu uz koju investitor plasira novac

Razmotrimo slučaj $j_1 \neq j_2$

Vremenski trenutak u kojem je stanje jednako nuli (dug vraćen) zovemo **diskontnim periodom povraćaja (DPP - discounted payback period)** i označavamo sa t_1. Ako je

$$A(t) = \sum_{s \le t} C_s (1+j_1)^{t-s} + \int_0^t \rho(s)(1+j_1)^{t-s} ds$$

tada je t_1 najmanje pozitivno t takvo da je $A(t) \ge 0$.

SLUČAJ RAZLIČITIH STOPA UZ KOJE INVESTITOR POZAJMLJUJE I PLASIRA NOVAC

Neka se projekat završava u trenutku T.

Ako je $A(T) < 0 \Leftrightarrow NSV(j_1) < 0$ tada t_1 ne postoji, tj. stanje na investitorovom računu je stalno negativno.

Ako t_1 postoji akumulirani profit iznosi:

$$\boxed{P = A(t_1)(1+j_2)^{T-t_1} + \sum_{t \geq t_1} C_t (1+j_2)^{T-t} + \int_{t_1}^{T} \rho(t)(1+j_2)^{T-t} dt}$$

UTICAJ INFLACIJE

Ako je prisutna u prethodnoj teoriji i inflacija za koju je procijenjeno da će rasti za jednu vremensku jedinicu uz stopu e tada imamo modifikaciju Ct i ρ(t). Naime, nove vrijednosti tih veličina su:

$$\boxed{C_t^e = (1+e)^t C_t}$$

odnosno

$$\boxed{\rho^e(t) = (1+e)^t \cdot \rho(t)}$$

FINANSIJSKI DERIVATI (IZVEDENE HOV)

- OPCIJE
- FORVARDI
- FJUČERSI
- SVOPOVI

Naučiti njihove definicije i osnovne karakteristike

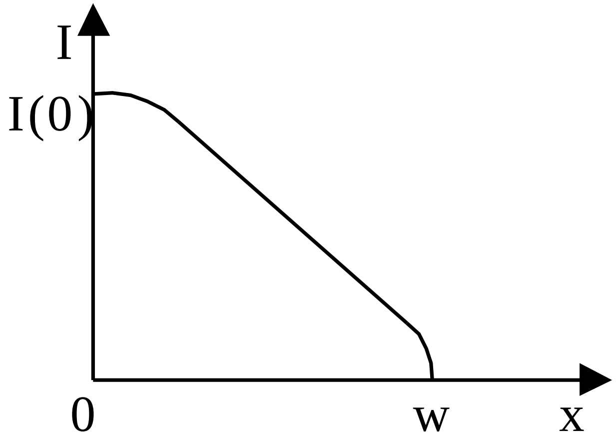
BIOMETRIJSKE FUNKCIJE

Funkciju, koja starosnom dobu pridružuje broj živih lica tog starosnog doba, označavamo sa l i zovemo **FUNKCIJA DOŽIVLJENJA.**

$$\boxed{l : N \cap [0, w] \rightarrow N \cap [0, l(x_0)]}$$

w - oznaka za najdublju starost

$l(x_0)$- broj članova polazne grupe osoba starih x_0 godina



BIOMETRIJSKE FUNKCIJE

$$\boxed{p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da će lice staro x godina doživjeti narednu (x+1)-vu godinu

$$\boxed{q_x = 1 - p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da lice staro x godina neće doživjeti narednu (x+1)-vu godinu

$$\boxed{{}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da će lice staro x godina doživjeti x+n godina

$$\boxed{{}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}}$$

vjerovatnoća da lice staro x godina neće doživjeti x+n godina

INTEZITET SMRTNOSTI

INTENZITET SMRTNOSTI μ_x je trenutna stopa smrtnosti lica starih x godina).

$$\boxed{\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x}}$$

Ukoliko nije dat analitički izraz za funkciju l_x, pošto znamo njenu vrijednost iz tablica smrtnosti, možemo odrediti približnu vrijednost intenziteta smrtnosti μ_x:

$$\boxed{\mu_x \sim \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2 \cdot l_x}}$$

$$\boxed{primijetimo: \quad \mu_x \sim \frac{l_{x-1} - l_x + l_x - l_{x+1}}{2 \cdot l_x}}$$

SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA

- Neka je T - numerička funkcija koja slučajno izabranoj osobi pridružuje trajanje života od x-te godine do smtri (broj godina života još preostaje osobi koja ima x godina).

- Srednje trajanje života se definiše kao očekivanje pomenute neprekidne slučajne veličine T.

- Funkcija raspodjele slučajne veličine T je:

$$F(t) = p(T < t)$$

vjerovatnoća da će lice staro x godina umrijeti do (x+t) godine

$$F(t) = {}_t q_x$$

Gustina raspodjele je : $f(t) = F'(t) = ({}_t q_x)'$

Očekivanje od T je : $$ET = \int_0^{w-x} t \cdot ({}_t q_x)' \, dt$$

SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA

Kako je izvod po t funkcije gustine: $\left[\dfrac{l_x - l_{x+t}}{l_x}\right]' = \dfrac{-l'_{x+t}}{l_x}$

Poslije primjene parcijalne integracije (u=t, dv=$\frac{-l'_{x+t}}{l_x}dt$) dobijamo (l_w=0):

$$\boxed{\mathrm{ET} = \frac{1}{\mathrm{l_x}}\int_0^{\mathrm{w-x}} \mathrm{l_{x+t}dt} = \int_0^{\mathrm{w-x}} {}_{\mathrm{t}}\mathrm{p_x dt}}$$

Ukoliko nije dat analitički izraz za funkciju doživljenja, srednje trajanje života je:

$$\boxed{ET \sim \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{w-1}}{l_x}}$$

VJEROVATNO TRAJANJE ŽIVOTA

Vjerovatno trajanje života se definiše kao broj k, kojeg određujemo iz relacije:

$$\boxed{l_{x+k} = \frac{l_x}{2}, \text{ tj. } {}_k p_x = \frac{1}{2}}$$

Kako funkcija ${}_t p_x$ opada od 1 do 0 kada t raste od 0 do w-x to će takvo $k \in (0, w-x)$ postojati. I vjerovatnoća suprotnog događaja je 0,5.

U opštem slučaju k se određuje interpolacijom uz upotrebu mortalitetnih tablica.

NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Kako je a_x jednako sumi očekivanja slučajnih veličina X_i, važi:

$$a_x = EX_0 + EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{w-x}$$

$$= \frac{l_x}{l_x} \cdot 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q} + \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{l_w}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{w-x}}$$

$$= \sum_{i=0}^{w-x} \frac{l_{x+i}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^i}$$

$$= \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{D_w}{D_x}$$

$$= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_w}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

gdje je: $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_w$ zbir diskontovanih brojeva živih lica starih $x, x+1, \ldots$ godina.

NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Miza anticipativne rente od l € pri neposrednom doživotnom osiguranju lične rente iznosi:

$$\boxed{a_x = \frac{N_x}{D_x}}$$

osiguranik mora uplatiti (odjednom) iznos a_x da bi mu osiguravač, godišnje (početkom godine), isplaćivao rentu od l €.

$$\boxed{M = R \cdot a_x}$$

miza anticipativne rente od R €

$$\boxed{b_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

miza dekurzivne rente od 1 €

$$\boxed{b_x = a_x - 1}$$

veza između dekurzivne i anticipativne rente od 1 €

ODLOŽENA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Ako isplate rente počinju m godina poslije izvršene uplate osiguranja (prvih m godina isplate se ne vrše), imamo da je miza anticipativne rente od l €:

$$\boxed{{}_m a_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} (= EX_m + EX_{m+1} + \ldots + EX_{w-x})}$$

$$\boxed{{}_m b_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}}$$

miza dekurzivne rente od 1 €

Ova vrsta rente se koristi npr. kod osiguranja penzija.

Ukoliko osiguranik umre u toku prvih m godina ili u toku isplaćivanja, miza ostaje u korist onih osiguranika koji dožive isplaćivanje.

NEPOSREDNO PRIVREMENA LIČNA RENTA

Ona se isplaćuje najviše n godina od dana osiguranja (što zavisi od dužine života osiguranika).

Miza neposredne privremene n godina anticipativne lične rente od 1 € je:

$$a_{x,n} = EX_0 + EX_1 + \ldots + EX_{n-1} = \frac{l_x}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q} + \ldots + \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$$

$$\boxed{a_{x,n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

Očigledno važi relacija: $a_{x,n} = a_x - {}_n a_x$

$$b_{x,n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$ miza dekurzivne rente

ODLOŽENA PRIVREMENA LIČNA RENTA

Ovo je model osiguranja lične rente kod kojeg je prva isplata poslije m godina (ako je osiguranik živ) a posljednja isplata (ako bude u životu) kad osiguranik bude imao x+m+n-1 godina.

Miza anticipativne odložene privremene lične rente od 1 € u ovom slučaju je jednaka:

$$
\begin{aligned}
{}_m a_{x,n} &= EX_m + EX_{m+1} + EX_{m+2} + \ldots + EX_{m+n-1} \\
&= \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^m} + \frac{l_{x+m+1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{m+1}} + \ldots + \frac{l_{x+m+n-1}}{l_x} \cdot \frac{1}{q^{m+n-1}} \\
&= \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Važi relacija: ${}_m a_{x,n} = {}_m a_x - {}_{m+n} a_x$

$${}_m b_{x,n} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$ miza dekurzivne odložene privremene rente od 1 €

OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ DOŽIVLJENJA

Osiguravajuće društvo vrši isplatu osigurane sume samo licima koja dožive ugovoreni rok.

$$X_n : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q^n} \\ 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} & \frac{l_{x+n}}{l_x} \end{pmatrix}$$

X_n – diskretna slučajna veličina (koja predstavlja vrijednosti diskontovane isplate)

n - broj godina počev od x-te poslije čijeg isteka će se izvršiti ugovorena isplata (ako osiguranik bude u životu) tj. n je trajanje osiguranja.

$$B_x = EX_n = \frac{1}{q^n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$\boxed{B_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

B_x – miza osiguranja kapitala za slučaj doživljenja (x+n)-te godine ukoliko osiguramo iznos od 1 €

Ako umjesto 1 € osiguramo R € miza će biti jednaka **RB_x**

DOŽIVOTNO

OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Osiguravač isplaćuje (jednom) ugovorenu sumu nasljedniku osiguranika, krajem godine u kojoj osiguranik umre.

Raspodjela slučajne veličine X- diskontovane isplate od 1€ :

$$X : \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & \frac{1}{q^2} & \dots & \frac{1}{q^{w-x}} \\ \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} & \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} & \dots & \frac{l_{w-1} - l_w}{l_x} \end{pmatrix}$$

Po principu ekvivalencije, miza A_x je u ovom slučaju jednaka očekivanju slučajne veličine X, tj.:

$$A_x = EX = \sum_{i=0}^{w-x-1} \frac{1}{q^{i+1}} \cdot \frac{l_{x+i} - l_{x+i+1}}{l_x}$$

DOŽIVOTNO

OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Za komutacione brojeve d_x, C_x i M_x važe sledeće relacije:

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

$$C_x = \frac{d_x}{q^{x+1}}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{w+1}$$

Slijedi da je miza doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti

$$\boxed{A_x = \frac{1}{D_x} \sum_{i=0}^{w-x-1} C_{x+i} = \frac{M_x}{D_x}}$$

ODLOŽENO DOŽIVOTNO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Osiguravajuće društvo se obavezuje da će ugovoreni kapital, oderđenom korisniku (iz ugovora), isplatiti krajem godine u kojoj osiguranik umre, pod uslovom da smrt nastupi poslije m godina od dana osiguranja.

$$X:\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{q^{m+1}} & \dfrac{1}{q^{m+2}} & \cdots & \dfrac{1}{q^{w-x}} \\ \dfrac{l_x - l_{x+m}}{l_x} & \dfrac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x} & \dfrac{l_{x+m+1} - l_{x+m+2}}{l_x} & \cdots & \dfrac{l_{w-1} - l_w}{l_x} \end{pmatrix}$$

Slijedi da je miza odloženog doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti

$$\boxed{{}_m A_x = EX = \frac{M_{x+m}}{D_x}}$$

PRIVREMENO NEPOSREDNO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Osiguravač isplaćuje osiguranu sumu nasljedniku samo ako osiguranik umre u toku n godina od osiguranja.

Miza privremenog neposrednog osiguranja kapitala za slučaj smrti

$$\boxed{A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$$

MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA

1. MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA SA JEDNOM ISPLATOM

- Oblik osiguranja kapitala pri kome se isplata vrši ili osiguraniku, ako ostane u životu, ili nasljedniku, ako osiguranik umre u toku trajanja osiguranja.

- Ako se lice osigura na ovaj način ono plaća dvije premije: premiju za osiguranje kapitala za slučaj doživljenja i premiju za privremeno neposredno osiguranje kapitala za slučaj smrti. Miza ovog vida osiguranja je:

$$\boxed{\overline{A_x} = B_x + A_{x,n} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+m}}{D_x}}$$

MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA

2. MJEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA SA DVIJE ISPLATE

- Mješovito osiguranje se može ugovoriti i tako da budu predviđene dvije isplate: jedne osiguraniku, ako doživi x+n godina i druge nasljednicima na kraju godine u kojoj umire.
- Ako osiguranik umre prije isteka n godina tada se isplaćuje samo jedan iznos (nasljedniku) inače se isplaćuju dva iznosa (jedan osiguraniku, jedan nasljedniku).
- Jednokratna premija je suma premija onih osiguranja iz kojih se sastoji: osiguranja kapitala za slučaj doživljenja i doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti:

$$\boxed{A_x^{'} = B_x + A_x = \frac{D_{x+n} + M_x}{D_x}}$$

Mješovito osiguranje sve više preovladava u savremenom osiguranju života.

OSIGURANJE PREMIJAMA

U slučaju da aticipativna renta ima vrijednost jedan njena miza bi bila a_x. Kako renta ima vrijednost jednaku visini premije P, njena miza je $P \cdot a_x$. Primjenjujući princip ekvivalencije dobijamo jednakost:

$$\boxed{P \cdot a_x = A}$$

A- visina jednokratne premije

$$P = \frac{A}{a_x}$$

P- visina premije za jedinicu osigurane sume

Slično, ako se premija P uplaćuje neposredno privremeno:

$$\boxed{P \cdot a_{x,n} = A}$$

$$P = \frac{A}{a_{x,n}}$$

Veza između A i P- izvođenje

$$A = P + \frac{P}{q} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{P}{q^2} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_x} + \ldots$$

$$\boxed{P \cdot a_x = A}$$

$$\boxed{P \cdot a_{x,n} = A}$$

OSIGURANJE ODLOŽENE DOŽIVOTNE LIČNE RENTE PREMIJAMA

$$P_x = \frac{{}_n a_x}{a_{x,t}}, \ t \le n$$

godišnja premija odložene doživotne anticipativne lične rente

$$P_x = \frac{\frac{N_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}, \quad t \le n$$

Ako se prva renta primi krajem (x+1) -ve godine godišnja premija je:

$$P_x = \frac{N_{x+n+1}}{N_x - N_{x+t}}$$

OSIGURANJE KAPITALA, DOŽIVOTNO, DOŽIVOTNIM PREMIJAMA

Godišnja premija kod ove vrste osiguranja je:

$$\boxed{P_x = \frac{A_x}{a_x} = \frac{M_x}{N_x}}$$

LIČNA RENTA U RATAMA

$$a_{x,n}^{(k)} \cong a_{x,n} - \frac{k-1}{2k}(EX_0 - EX_n)$$ anticipativna privremena neposredna renta u ratama

$$b_{x,n}^{(k)} \cong b_{x,n} + \frac{k-1}{2k}(EX_0 - EX_n)$$ dekurzivna privremena neposredna renta u ratama

$$a_{x}^{(k)} \cong a_{x} - \frac{k-1}{2k}$$ anticipativna neposredna doživotna renta u ratama

$$b_{x}^{(k)} \cong b_{x} + \frac{k-1}{2k}$$ dekurzivna neposredna doživotna renta u ratama

LIČNA RENTA U RATAMA

$${}_{m}a_{x,n}^{(k)} \cong {}_{m}a_{x,n} - \frac{k-1}{2k}(EX_{m} - EX_{m+n})$$ odložena privremena anticipativna renta u ratama

$${}_{m}b_{x,n}^{(k)} \cong {}_{m}b_{x,n} + \frac{k-1}{2k}(EX_{m} - EX_{m+n})$$ odložena privremena deklurzivna renta u ratama

$${}_{m}a_{x}^{(k)} \cong {}_{m}a_{x} - \frac{k-1}{2k}EX_{m}$$ anticipativna odložena doživotna renta u ratama

$${}_{m}b_{x}^{(k)} \cong {}_{m}b_{x} + \frac{k-1}{2k}EX_{m}$$ dekurzivna odložena doživotna renta u ratama

PREMIJA U RATAMA

Neka se premije plaćaju k puta u toku godine dana, i neka je $P^{(k)}$ - premija u ratama.

Godišnja rata rente u ratama je $k \cdot P^{(k)}$

Npr. ako se premija plaća n godina neposredno privremeno, tada važi:

$$A = k \cdot P^{(k)} \cdot a^{(k)}_{x,n}$$

odnosno

$$\boxed{P^{(k)} = \frac{A}{k \cdot a^{(k)}_{x,n}}}$$

Ako je P – godišnja premija tada je:

- polugodišnja premija $P^{(2)} \cong \frac{1}{2} \cdot P \cdot 1{,}02 = 0{,}51 \cdot P$
- kvartalna premija $P^{(4)} \cong \frac{1}{4} \cdot P \cdot 1{,}03 = 0{,}2575 \cdot P$
- mjesečna premija $P^{(12)} \cong \frac{1}{12} \cdot P \cdot 1{,}04 = 0{,}087 \cdot P$

Visina jednokratne bruto premije za jedinicu osiguranog kapitala iznosi

$$JB = JN + x_1 + y + z \cdot JB$$

odakle dobijamo da je

$$JB = \frac{JN + x_1 + y}{1 - z}$$

Na osnovu principa ekvivalencije, suma diskontovanih godišnjih iznosa d (na t=0, dan zaključenja ugovora), mora biti jednaka x_1 -visini akvizicionih troškova, tj.

$$d \cdot a_x = x_1 \quad \text{ili} \quad d \cdot a_{x,n} = x_1$$

u zavisnosti od toga da li godišnje premije plaćamo doživotno ili za n godina.

Dalje je

$$\mathrm{d} = \frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{a}_\mathrm{x}} \qquad \mathrm{d} = \frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{a}_{\mathrm{x,n}}}$$

$$d = \frac{D_x \cdot x_1}{N_x} \qquad \mathrm{d} = \frac{\mathrm{D}_\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}_1}{\mathrm{N}_\mathrm{x} - \mathrm{N}_{\mathrm{x+n}}}$$

Za upravne troškove y, slično prethodnom, imamo da je e njihov alikvotni dio:

$$e = \frac{D_x \cdot y}{N_x} \qquad \text{ili} \qquad \mathrm{e} = \frac{\mathrm{D_x} \cdot \mathrm{y}}{\mathrm{N_x} - \mathrm{N_{x+n}}}$$

za doživotno ili privremeno plaćanje premija, respektivno.

Sada je

$$PB = PN + d + e + z \cdot PB \quad \text{odakle je} \quad \mathrm{PB} = \frac{\mathrm{PN} + \mathrm{d} + \mathrm{e}}{1 - \mathrm{z}} \quad \textbf{(*)}$$

Dakle, gornja relacija (*) predstavlja visinu godišnje bruto premije potrebne da bi se osigurala jedinica kapitala ili renta od l € godišnje. Iznosi d i e određeni su prethodnim relacijama.