Deset zadataka iz predmeta *Finansijska i aktuarska matematika*

Pripremni materijal za kolokvijum

April 2020.

1. Ukupan ostvareni kvartalni profit u filijalama A i B kompanije K je 364.000€. Filijala A je ostvarila profit od 161.000€ što je za 15% više od planiranog. Filijala B je u istom periodu premašila planirani profit za 18.000€. Za koliko procenata je premašen ukupan planirani profit u filijalama A i B?

Rješenje:

Neka je x planirani profit u filijali A je. Po uslovu zadatka važi:

$$1.15x = 161.000,$$

pa je $x = \dfrac{161.000}{1.15} = 140.000$€.

Profit u filijali A je premašen za: $161.000 - 140.000 = 21.000$€.

Profit u filijalama A i B je premašen za $21.000 + 18.000 = 39.000$€.

Ukupan planirani profit dobijamo kada ukupan profit umanjimo za iznose za koje je profit premašen u filijalama A i B: $364.000 - 39.000 = 325.000$€.

Dakle, planirani profit je bio $K = 325.000$€ i premašen je za $i = 39.000$€, pa ako sa p označimo traženu stopu, važi:

$$p = \frac{i}{K} \cdot 100 = \frac{39.000}{325.000} \cdot 100 = 12,$$

pa zaključujemo da je ukupan planirani profit premašen za 12%.

Rješenje smo mogli dobiti i direktno iz jednačine:

$$364.000 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{p}{100}}\right) = 161.000 \left(1 - \frac{1}{1.15}\right) + 18.000,$$

gdje je p traženi procenat, dok lijeva strana jednakosti predstavlja iznos za koji je premašen ukupan planirani profit, a desna strana zbir iznosa za koje je premašen profit u svakoj od filijala.

2. Fabrici koja zapošljava 18 radnika koji rade po 6 sati dnevno je za porudžbinu od 540 proizvoda potrebno 15 dana. Nakon 8 dana od početka rada na porudžbini, 6 radnika je bilo prinuđeno da se podvrgne samoizolaciji zbog novog koronavirusa. Za koliko dana će fabrika završiti rad na porudžbini ako preostali radnici počnu da rade po 9 sati dnevno?

Rješenje:

Radeći u normalnim okolnostima, fabrika za 15 dana proizvede 540 proizvoda. Označimo sa P broj proizvoda koje je fabrika proizvela u prvih sedam dana rada na porudžbini (prije odlaska radnika u samoizolaciju). Kako se u prvih sedam dana nije mijenjao broj radnika ni radno vrijeme, broj P možemo dobiti iz direktne proporcije koju grafički možemo predstaviti na ovaj način:

$$\begin{array}{cc} \text{DANI}\uparrow & \text{PROIZVODI}\uparrow \\ 15 & 540 \\ 7 & P \end{array}$$

Odgovarajuća jednačina glasi:

$$15 : 7 = 540 : P,$$

iz koje dobijamo da je $P = 252$.

Dakle, treba odrediti za koliko dana će preostalih 12 radnika proizvesti 252 proizvoda radeći po 9 sati dnevno. Označimo traženi broj sa D. Proširenu proporciju koja odgovara ovom dijelu zadatka možemo grafički predstaviti na sljedeći način:

$$\begin{array}{cccc} \text{RADNICI}\downarrow & \text{SATI}\downarrow & \text{DANI}\uparrow & \text{PROIZVODI}\uparrow \\ 18 & 6 & 15 & 540 \\ 12 & 9 & D & 252 \end{array}$$

Odgovarajuće jednačine su:

$$D : 15 = 252 : 540 = 6 : 9 = 18 : 12$$

$$D = 15 \cdot \frac{252}{540} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{18}{12} = 7,$$

pa zaključujemo da će fabrika završiti sa radom na porudžbini tačno na vrijeme.

3. Dvije mjenice jednakih nominalnih vrijednosti A€ naplative kroz 2 i 5 mjeseci, treba zamijeniti sa druge dvije mjenice čije su nominalne vrijednosti u odnosu $m : n$, a koje su naplative kroz 4 i 6 mjeseci. Naći sve nominalne i eskontovane vrijednosti (u terminima A, m i n), ako je eskontna stopa 6%.

Rješenje:

Neka su K_{01} i K_{02} eskontovane vrijednosti mjenica naplativih kroz dva i pet mjeseci redom. Po uslovu zadatka važi[1]:

$$K_{01} = A\left(1 - \frac{2 \cdot 6}{1200}\right) = 0.99A$$
$$K_{02} = A\left(1 - \frac{5 \cdot 6}{1200}\right) = 0.975A$$

Neka je K_{03} eskontovana vrijednost mjenice naplative kroz 4 mjeseca, a K_3 nominalna vrijednost te mjenice. Tada važi:

$$K_{03} = K_3\left(1 - \frac{4 \cdot 6}{1200}\right) = 0.98K_3$$

Slično, ako označimo sa K_{04} eskontovanu vrijednost mjenice naplative kroz 6 mjeseci, a sa K_4 nominalnu vrijednost te mjenice, onda važi:

$$K_{04} = K_4\left(1 - \frac{6 \cdot 6}{1200}\right) = 0.97K_4$$

Po uslovu zadatke je:

$$K_3 : K_4 = m : n,$$

pa je $K_3 = K_4 \cdot \frac{m}{n}$.

Da bi se prvi par mjenica mogao zamijeniti drugim, zbir eskontovanih vrijednosti prve i druge mjenice mora biti jednak zbiru eskontovanih vrijednosti treće i četvrte mjenice:

$$K_{01} + K_{02} = K_{03} + K_{04}$$

Koristeći početna razmatranja posljednju jednakost možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
0.99A + 0.975A &= 0.98K_3 + 0.97K_4 \\
1.965A &= 0.98 \cdot K_4 \cdot \frac{m}{n} + 0.97K_4 \\
1.965A &= K_4\left(0.98 \cdot \frac{m}{n} + 0.97\right)
\end{aligned}$$

[1] Ako je K_n nominalna vrijednost mjenice naplative kroz n mjeseseci pri eskontnoj stopi od p%, onda je njena esknotovana vrijednost $K_0 = K_n(1 - \frac{np}{1200})$.

Iz posljednje jednakost zaključujemo da je:

$$K_4 = \frac{1.965A}{0.98 \cdot \frac{m}{n} + 0.97},$$

pa je:

$$\begin{aligned}
K_{04} &= 0.97 \cdot K_4 = 0.97 \cdot \frac{1.965A}{0.98 \cdot \frac{m}{n} + 0.97} \\
K_3 &= K_4 \cdot \frac{m}{n} = \frac{1.965A}{0.98 \cdot \frac{m}{n} + 0.97} \cdot \frac{m}{n} = \frac{1.965A}{0.98 \cdot +0.97\frac{n}{m}} \\
K_{03} &= 0.98K_3 = 0.98 \cdot \frac{1.965A}{0.98 \cdot +0.97\frac{n}{m}}
\end{aligned}$$

4. Banka kupuje dvije mjenice. Zbir nominalnih vrijednosti mjenica je 33.000€, a nominalna vrijednost manje od dvije mjenice jednaka je nominalnoj vrijednosti veće mjenice umanjenoj za 35%. Rokovi dospijeća su 36 dana za mjenicu sa manjom nominalnom vrijednošću i 45 dana za mjenicu sa većom nominalnom vrijedošću. Banka je koristila komercijalni eskont i istu eskontnu stopu za obje mjenice, i naplatila je proviziju po 2‰ od nominalnih vrijednosti po mjenici. Ako je banka za mjenicu sa manjom nominalnom vrijednošću platila 12.909€, kolika je eskontna stopa, a koliko je banka platila za drugu mjenicu?

Rješenje:

Neka su K_1 i K_2 nominalne vrijednosti manje i veće mjenice, redom. Po uslovu zadatka je

$$K_1 + K_2 = 33000$$

Takođe, nominalna vrijednost manje mjenice predstavlja 65% nominalne vrijednosti veće mjenice, pa važi:

$$K_1 = 0.65 \cdot K_2$$

Kombinujući posljednje dvije jednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned} 0.65 \cdot K_2 + K_2 &= 33000 \\ 1.65 \cdot K_2 &= 33000 \\ K_2 &= \frac{33000}{1.65} = 20000 \\ K_1 &= 0.65 \cdot K_2 = 0.65 \cdot 20000 = 13000 \end{aligned}$$

Ako sa K_{01} i K_{02} označimo odgovarajuće eskontovane vrijednosti onda važe jednakosti:

$$\begin{aligned} K_{01} &= K_1 \left(1 - \frac{36p}{36000}\right) = 13000 \left(1 - \frac{p}{1000}\right) \\ K_{02} &= K_2 \left(1 - \frac{45p}{36000}\right) = 20000 \left(1 - \frac{p}{800}\right) \end{aligned}$$

Banka je, nakon uzimanja provizije od 2‰ od vrijednosti K_1 za manju mjenicu platila 12909€, pa je:

$$K_{01} - 0.002 \cdot K_1 = 12909$$

Uvrštavajući prethodno dobijeni izraz za K_{01} i izračunatu vrijednost za K_1 u posljednju jednakost dobijamo:

$$\begin{aligned}
13000\left(1-\frac{p}{1000}\right)-0.002\cdot 13000 &= 12909\\
13000-13p-26 &= 12909\\
12974-13p &= 12909\\
13p &= 65\\
p &= 5
\end{aligned}$$

Dakle, banka je koristila eskontnu stopu od 5%, pa zaključujemo da je za drugu mjenicu platila $K_{02}-0.002\cdot K_2$, a ovu vrijednost možemo izračunati koristeći ranije dobijene izraze:

$$K_{02}-0.002\cdot K_2=20000\left(1-\frac{5}{800}\right)-0.002\cdot 2000=19835$$

5. Kredit od 25.000€ otplaćuje se anuitetima od po 1.200€ krajem svakog kvartala. Godišnja kamatna stopa je 9% za prve dvije godine, a 8% za ostatak perioda otplate. Za koliko će se godina kredit otplatiti? Izračunati nepotpuni anuitet koji će se platiti krajem posljednjeg kvartala.

Rješenje:

Neka je $q = 1.09$ godišnji akumulacioni faktor za prve dvije godine koji odgovara datoj kamatnoj stopi od 9%.

Tada je $q_1 = \sqrt[4]{q} = 1.007207323$ odgovarajući kvartalni akumulacioni faktor.

Neka je K_2 preostali dug nakon dvije godine. U toku prve dvije godine plaćeno je osam kvartalnih anuiteta, pa je:

$$\frac{K_2}{q^2} = 25000 - \frac{1200}{q_1} - \frac{1200}{q_1^2} - \ldots - \frac{1200}{q_1^8} = 25000 - \frac{1200}{q_1^8} \cdot \frac{q_1^8 - 1}{q_1 - 1}$$
$$K_2 = q^2 \left(25000 - \frac{1200}{q_1^8} \cdot \frac{q_1^8 - 1}{q_1 - 1} \right) = 19337.99796$$

Označimo sa $q_2 = 1.08$ akumulacioni faktor za preostali period otplate koji odgovara datoj kamatnoj stopi od 8%.

Tada je $q_3 = \sqrt[4]{q_2} = 1.019426547$ odgovarajući kvartalni akumulacioni faktor.

Označimo sa n preostali broj kvartalnih anuiteta po 1200€.

Da nema nepotpunog mjesečnog anuiteta važile bi jednakosti:

$$K_2 = \frac{1200}{q_3} + \frac{1200}{q_3^2} + \ldots + \frac{1200}{q_3^n} = \frac{1200}{q_3^n} \frac{q_3^n - 1}{q_3 - 1}$$

Iz posljednje jednakosti možemo izračunati n:

$$\begin{aligned}
K_2 &= \frac{1200}{q_3^n}\frac{q_3^n - 1}{q_3 - 1} \\
K_2 \cdot q_3^n(q_3 - 1) &= 1200(q_3^n - 1) \\
K_2 \cdot q_3^n(q_3 - 1) - 1200q_3^n &= -1200 \\
q_3^n(1200 - K_2 \cdot (q_3 - 1)) &= 1200 \\
q_3^n &= \frac{1200}{1200 - K_2 \cdot (q_3 - 1)} \\
\ln q_3^n &= \ln\left(\frac{1200}{1200 - K_2 \cdot (q_3 - 1)}\right) \\
n \cdot \ln q_3 &= \ln 1200 - \ln(1200 - K_2 \cdot (q_3 - 1)) \\
n &= \frac{\ln 1200 - \ln(1200 - K_2 \cdot (q_3 - 1))}{\ln q_3} = 19.51670774
\end{aligned}$$

Kako izračunato n nije prirordan broj, zaključujemo da je plaćeno 19 anuiteta po 1200€. Preostali dug nakon devetnaestog anuiteta (od promjene kamatne stope) je:

$$K_2 \cdot q_3^{19} - 1200\frac{q_3^{19} - 1}{q_3 - 1} = 611.0609672$$

Nepotpuni anuitet a je jednak vrijednosti preostalog duga akumuliranoj za još jedan kvartal, tj:

$$a = 611.0609672 \cdot q_3 = 622.9317717$$

Dakle kredit je otplaćen nakon tačno 7 godina: dvije godine prije promjene kamatne stope i pet godina, tj. dvadeset kvartala (19 potpunih i 1 nepotpuni anuitet) nakon promjene kamatne stope.

6. Osoba je ulagala po 450€ na kraju svakog mjeseca u periodu od 4 godine. Sa posljednjom uplatom osoba je uplatila dodatnih 4.000€. Na osnovu ovih ulaganja, osoba želi da joj se isplaćuje 10 godišnjih renti, pri čemu se prva isplaćuje 2 godine nakon posljednjeg ulaganja. Naći rentu ako je stvarna godišnja kamatna stopa 6%.

Rješenje:

Neka je $q = 1.06$ godišnji akumulacioni faktor koji odgovara datoj kamatnoj stopi od 6%. Tada je $q_1 = \sqrt[12]{q} = 1.004867551$ odgovarajući mjesečni akumulacioni faktor.

Akumulirana vrijednost mjesečnih (dekurzivnih) uplata od po 450€ nakon četiri godine, tj 36. mjeseci, iznosi:

$$450q_1^{35} + 450q_1^{34} + \ldots 450q_1 + 450 = 450\frac{q_1^{35} - 1}{q_1 - 1} = 17125.87$$

Neka je K_4 stanje na računu na kraju četrvte godine – ta vrijednost jednaka je zbiru akumuliranih mjesečnih uplata i dodatne uplate od 4000€:

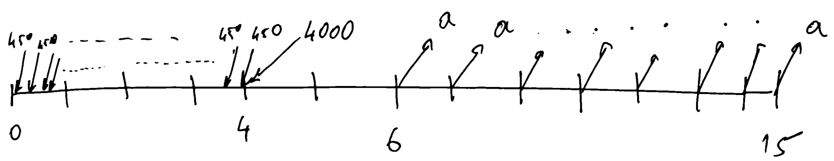
$$K_4 = 17125.87 + 4000 = 21125.87$$

Označimo sa K_6 stanje na računu nakon šeste godine. Kako od kraja četvrte do kraja šeste godine nije bilo ni uplata ni isplata važiće

$$K_6 = q^2 \cdot K_4 = 23737.02753$$

Uzimajući u obzir da se prva (od ukupno deset) renti isplaćuje na kraju šeste godine i koristeći formulu za anticipativni anuitet[2] vrijednost rente a je:

$$a = K_6 \cdot q^9 \cdot \frac{q-1}{q^{10}-1} = 3042.548551$$

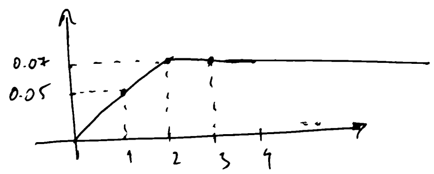


Zadatak smo mogli riješiti i metodom sadašnje vrijednosti (svođenjem priliva i odliva na trenutak $t = 0$).

[2] U našem slučaju: $K_6 = \frac{a}{q^9}\frac{q^{10}-1}{q-1}$.

7. Poznato je da je neprekidna funkcija $\delta(t)$ linearna na intervalu [0,2], i konstantna za $t > 2$, kao i da je $\delta(1) = 0,05$, a $\delta(3) = 0,07$. Ako je početkom 4 godine osoba uplaćivala po 2.000€, koliki je ukupan akumulirani iznos na kraju trećeg kvartala šeste godine?

Rješenje:



U prvom dijelu rješenja ćemo odrediti eksplicitni izraz za funciju $\delta(t)$.

Funkcija $\delta(t)$ je konstantna na intervalu $(2, +\infty)$, a na osnovu formulacije zadatka poznata nam je vrijednost u jednoj tački tog intervala: $\delta(3) = 0.07$. Zaključujemo da jednakost $\delta(t) = 0.07$ na cijelom tom intervalu, tj. za sve vrijednosti $t > 2$. Kako je funkcija neprekidna, možemo zaključiti da je i $\delta(2) = 0.07$.

Funkcija $\delta(t)$ je linearna na intervalu $[0, 2]$ i poznate su njene vrijednosti u dvije tačke tog intervala: $\delta(1) = 0.05$ i $\delta(2) = 0.07$. Na osnovu toga možemo napisati izraz za funkciju na tom intervalu[3]:

$$\delta(t) = \delta(1) + \frac{\delta(2) - \delta(1)}{2 - 1}(t - 1) = 0.05 + 0.02(t - 1) = 0.02t + 0.03$$

Dakle, izraz za funkciju $\delta(t)$ glasi:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.02t + 0.03, & t \in [0, 2] \\ 0.07, & t > 2 \end{cases}$$

Kako trenutak kada se završava treći kvartal šeste godine odgovara vrijednosti $t = 5.75$, ukupna akumuliarana vrijednost datih uplata u tom trenutku je:

$$2000e^{\int_0^{5.75} \delta(t)\, dt} + 2000e^{\int_1^{5.75} \delta(t)\, dt} + 2000e^{\int_2^{5.75} \delta(t)\, dt} + 2000e^{\int_3^{5.75} \delta(t)\, dt}$$

[3]Koristimo činjenicu da je jednačina prave koja prolazi kroz dvije tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) je data sa $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_1 - x)$.
Mogli smo i zapisati da je $\delta(t) = at + b$, pa nepoznate koeficijente a i b odrediti iz uslova $\delta(1) = 0.05 = a + b$, $\delta(2) = 0.07 = 2a + b$.

U gornjem izrazu prvi sabirak odgovara akumuliranoj vrijednosti prve uplate od 2000€ (vrijednost se akumuliarala od trenutka $t = 0$ do trenutka $t = 5.75$), drugi sabirak odgovara akumuliarnoj vrijednosti druge uplate(vrijednost se akumuliarala od trenutka $t = 1$ do trenutka $t = 5.75$), i tako redom; koristili smo teoremu o faktoru akumulacije[4].

U sljedećem koraku računamo vrijednosti eksponenata iz posljednjeg izraza:

$$\begin{aligned}
\int_0^{5.75} \delta(t)\,dt &= \int_0^2 \delta(t)\,dt + \int_0^{5.75} \delta(t)\,dt = \int_0^2 0.02t + 0.03\,dt + \int_2^{5.75} 0.07\,dt \\
&= (0.02\frac{t^2}{2} + 0.03t)\Big|_0^2 + 0.07t\Big|_2^{5.75} = 0.3625 \\
\int_1^{5.75} \delta(t)\,dt &= \int_1^2 \delta(t)\,dt + \int_0^{5.75} \delta(t)\,dt = \int_1^2 0.02t + 0.03\,dt + \int_2^{5.75} 0.07\,dt \\
&= (0.02\frac{t^2}{2} + 0.03t)\Big|_1^2 + 0.07t\Big|_2^{5.75} = 0.3225 \\
\int_2^{5.75} \delta(t)\,dt &= \int_2^{5.75} 0.07\,dt = 0.07t\Big|_2^{5.75} = 0.2625 \\
\int_3^{5.75} \delta(t)\,dt &= \int_3^{5.75} 0.07\,dt = 0.07t\Big|_3^{5.75} = 0.1925
\end{aligned}$$

Dakle, traženi iznos je:

$$2000e^{0.3625} + 2000e^{0.3225} + 2000e^{0.2625} + 2000e^{0.1925} = 10659.89017$$

Zadatak se mogao uraditi i korišćenjem diskontnog faktora $V(t)$, tj. svođenjem novčanih tokova na trenutak $t = 0$, kao što je urađeno u sljedećem zadatku.

[4] Ako je intenzitet kamate $\delta(t)$, a K vrijednost kapitala u trenutku t_1, onda je vrijednost kapitala u trenutku t_2 data sa $Ke^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\,dt}$.

8. Dat je intenzitet kamate:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.04, & t \in [0,2) \\ 0.05, & t \in [2,4] \\ 0.6e^{-0.04t}, & t \in (4,+\infty) \end{cases}$$

Odrediti funkciju sadašnje vrijednosti. Ako osoba želi da prima po 4.000€, krajem trećih kvartala treće, četvrte i pete godine, koliko treba da uplati novca danas?

Rješenje:
Funkcija sadašnje vrijednosti glasi:

$$V(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds}$$

S obzirom da je funkcija $\delta(t)$ definisana dio po dio, izraz za $V(t)$ će zavisiti od vrijednosti t.

Za vrijednosti $t \in [0,2)$ izraz za $\int_0^t \delta(s)\,ds$, glasi:

$$\int_0^t \delta(s)\,ds = \int_0^t 0.04\,ds = 0.04t,$$

pa je na tom intervalu

$$V(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds} = e^{-0.04t}. \tag{1}$$

Za vrijednosti $t \in [2,4]$ izraz za $\int_0^t \delta(s)\,ds$ glasi:

$$\begin{aligned}\int_0^t \delta(s)\,ds &= \int_0^2 \delta(s)\,ds + \int_2^t \delta(s)\,ds \\ &= \int_0^2 0.04\,ds + \int_2^t 0.05\,ds = 0.04s\Big|_0^2 + 0.05s\Big|_2^t \\ &= 0.08 + 0.05t - 2\cdot 0.05 = 0.05t - 0.02,\end{aligned}$$

pa je na tom intervalu

$$V(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds} = e^{-0.05t+0.02}.$$

Za vrijednosti $t \in (4, +\infty)$ izraz za $\int_0^t \delta(s)\,ds$ glasi:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \delta(s)\,ds &= \int_0^2 \delta(s)\,ds + \int_2^4 \delta(s)\,ds + \int_4^t \delta(s)\,ds \\
&= \int_0^2 0.04\,ds + \int_2^4 0.05\,ds + \int_4^t 0.6e^{-0.04s}\,ds \\
&= 0.04s\Big|_0^2 + 0.05s\Big|_2^4 + 0.6 \cdot \frac{e^{-0.04s}}{-0.04}\Big|_4^t \\
&= 0.08 + 0.2 - 0.1 + \frac{0.6}{-0.04}(e^{-0.04t} - e^{-0.04\cdot 4}) \\
&= 0.18 - 15(e^{-0.04t} - e^{-0.16}) = 12.96215683 - 15e^{-0.04t},
\end{aligned}$$

pa je na tom intervalu:

$$V(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)\,ds} = e^{-12.96215683 + 15e^{-0.04t}}.$$

Izraz za funkciju sadašnje vrijednosti sada možemo kompaktno zapisati na sljedeći način:

$$V(t) = \begin{cases} e^{-0.04t}, & t \in [0,2) \\ e^{-0.05t+0.02}, & t \in [2,4] \\ e^{-12.96215683+15e^{-0.04t}}, & t \in (4, +\infty) \end{cases}$$

Konačno, ako osoba želi da prima po 4.000€ , krajem trećih kvartala treće, četvrte i pete godine (odnosno u trenucima $t = 2.75$, $t = 3.75$ i $t = 4.75$) danas treba da uplati iznos K koji je jednak zbiru sadašnjih vrijednosti svih budućih isplata, tj:

$$\begin{aligned}
K &= 4000 \cdot V(2.75) + 4000 \cdot V(3.75) + 4000 \cdot V(4.75) = \\
&= 4000 \cdot e^{-0.05\cdot 2.75+0.02} + 4000 \cdot e^{-0.05\cdot 3.75+0.02} + 4000 \cdot e^{-12.96215683+15e^{-0.04\cdot 4.75}} \\
&= 9229.606052
\end{aligned}$$

9. Investitor razmatra projekat kome su početni troškovi 40.000 €, kao i krajem svake godine po 1.000€, u toku 10 godina koliko i traje projekat. Prihodi su po 2.000€ krajem svakog kvartala u toku trajanja projekta.

Naći profit/gubitak na kraju projekta uz stopu od 5%, a zatim odrediti IRR i dati tumačenje.

Rješenje:

Neka je i tražena kamatna stopa i $v = \frac{1}{1+i}$ odgovarajući godišnji diskontni faktor. Tada je $v_1 = \sqrt[4]{v}$ odgovarajući kvartalni diskontni.

Neto sadašnja vrijednost projekta jednaka je razlici sadašnjih vrijednosti ulaganja i prihoda. Sadašnja vrijednost svih ulaganja je zbir početnog troška i svih (diskontovanih) godišnjh troškova. Za deset godina investitor će imati 40 kvartalnih prihoda, pa je sadašnja vrijednost svih prihoda jednaka zbiru (diskontovanih) kvartalnih prihoda. Dakle, izraz za neto sadašnju vrijednost projekta $NSV(i)$ glasi:

$$\begin{aligned} NSV(i) &= -40000 - 1000v - 1000v^2 + \ldots - 1000v^{10} \\ &\qquad + 2000v_1 + 2000v_1^2 + \ldots + 2000v_1^{40} \\ &= -40000 - 1000v\frac{v^{10}-1}{v-1} + 2000v_1\frac{v_1^{40}-1}{v_1-1} \end{aligned}$$

Kako neto sadašnja vrijednost projekta pri kamatnoj stopi od 5% iznosi $NSV(0.05) = 15198.63197$ € možemo zaključiti da je projekat isplativ po toj kamatnoj stopi. U tom slučaju će profit na kraju projekta (nakon desetogodišnje akumulacije) iznositi $15198.63197 \cdot 1.05^{10} = 24756.96995$ €.

Da bismo našli IRR potrebno je riješiti jednačinu

$$\boxed{NSV(i) = 0}$$

Jednačinu rješavamo metodom pokušaja. Direktnom provjerom se možemo uvjeriti da je $V(0.13) = 46.0699462 > 0$, a $V(0.14) = -1356.206355 < 0$.

Na osnovu ovih vrijednosti IRR možemo procijeniti linearnom aproksimacijom (linearnom interpolacijom) kao tačku u kojoj prava koja sadrži tačke

$$(0.13, 46.0699462) \text{ i } (0.14, -1356.206355)$$

siječe Ox osu, tj. tačku oblika $(IRR, 0)$ koja leži na pravoj koja prolazi kroz te tačke[5]:

$$
\begin{aligned}
\frac{IRR - 0.13}{0.14 - 0.13} &= \frac{0 - 46.0699462}{-1356.206355 - 46.0699462} \\
\frac{IRR - 0.13}{0.01} &= \frac{-46.0699462}{-1402.276301} = 0.03285368666 \\
IRR &= 0.13 + 0.01 \cdot 0.03285368666 = 0.1303285369
\end{aligned}
$$

Primijetimo da je $NSV(0) = 30000$. Kako je $IRR = 0.1303285369 = 13.03285369\%$ zaključujemo da je projekat isplativ ako se investitor zadužuje po stopi manjoj od IRR (inače je neisplativ).

[5]Koristimo sljedeći oblik jednačine prave kroz tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2): $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

10. a) Koristeći metodu EGT odrediti prosječni godišnji trošak sljedeće investicije koja traje 8 godina: početno ulaganje je 8.000 €, a zatim krajem svake godine u toku narednih 5 godina po 900 eura. Kamatna stopa je 7%.

b) Ako su prihodi po 1100 € krajem svake godine za 8 godina, a vrijednost investicije na kraju 8. godine 6.000€, koliki je prosječni godišnji prihod uz kamatnu stopu 7%?

c) Koliko iznosi prosječni godišnji neto efekat ove investicije?

Rješenje:

a) Neka je $q = 1.07$ faktor akumulacije koji odgovara datoj kamatnoj stopi.

Ukupnu sadašnja vrijednost troškova SV_T dobijamo kada saberemo početni trošak i sadašnje vrijednosti godišnjih troškova:

$$SV_T = 8000 + \frac{900}{q} + \frac{900}{q^2} + \ldots + \frac{900}{q^5} = 8000 + \frac{900}{q^5}\frac{q^5-1}{q-1} = 11690.17769$$

Prosječni godišnji trošak a_T dobijamo kao visinu anuiteta od ukupne sadašnje vrijednosti troškova, tj. iz jednakosti:

$$\begin{aligned} SV_T &= \frac{a_T}{q} + \frac{a_T}{q^2} + \ldots + \frac{a_T}{q^8} \\ SV_T &= \frac{a_T}{q^8}\frac{q^8-1}{q-1} \\ a_T &= SV_T \cdot q^8 \frac{q-1}{q^8-1} = 1957.727901 \end{aligned}$$

Primijetimo da smo posmatrali prosješnje godišnje troškove do osme godine, jer je u formulaciji zadatka naglašeno da projekat traje osam godina.

Vrijednost a_T mogli smo izračunati kao zbir anuiteta izračunatog od nabavne vrijednosti (troška za $t = 0$) i anuiteta od zbirne sadašnje vrijednosti troškova održavanja (tj. troškova za $t > 0$).

b) Ukupnu sadašnja vrijednost prihod SV_P dobijamo slično kao u prethodnom dijelu zadatka: kada saberemo sadašnje vrijednosti godišnjih prihoda i sadašnju vrijednost investicije na kraju osme godine:

$$SV_P = \frac{1100}{q} + \frac{1100}{q^2} + \ldots + \frac{1100}{q^8} + \frac{6000}{q^8} = \frac{1100}{q^8}\frac{q^8-1}{q-1} + \frac{6000}{q^8} = 10060.48298$$

Analogno sa prethodnim dijelom zadatka, prosječni godišnji prihod a_P dobijamo kao visinu anuiteta od ukupne sadašnje vrijednosti prihoda, tj. iz jednakosti:

$$\begin{aligned} SV_P &= \frac{a_P}{q} + \frac{a_P}{q^2} + \ldots + \frac{a_P}{q^8} \\ SV_P &= \frac{a_P}{q^8}\frac{q^8-1}{q-1} \\ a_P &= SV_P \cdot q^8 \frac{q-1}{q^8-1} = 1684.806575 \end{aligned}$$

c) Prosječni neto godišnji efekat investicije a jednak je razlici prosječnog godišnjeg prihoda i prosječnog gogišnjeg troška: $a = a_P - a_T = 272.9213263$.

Vrijednost a smo mogli izračunati i kao visinu anuiteta od neto efekte investicije $NEI = SV_P - SV_T$ sličnim postupkom kao u prethodnom dijelu zadatka.