1. Pronaći odziv idealnog filtra propusnika opsega učestanosti na pobudu u vidu:

a) Dirakovog impulsa
b) Hevisajdove funkcije,

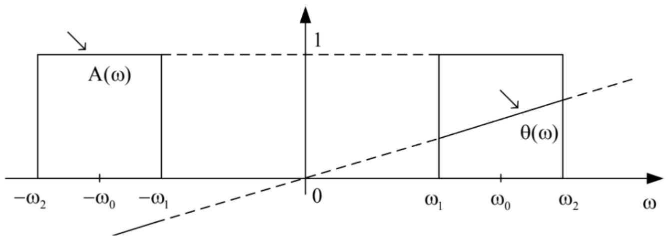
pod uslovom da između graničnih učestanosti ω_1 i ω_2 i srednje učestanosti ω_o propusnog opsega važi relacija:

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2}=\omega_o >> \omega_2-\omega_1$$

<u>Rešenje</u>:

Funkcija prenosa svakog sistema se može zapisati u obliku: $H(j\omega)=A(\omega)e^{j\Theta(\omega)}$

Za idealni filtar važi: $A(\omega)=const$, $\Theta(\omega)=-\omega t_o$.



Slika 1. Primjer amplitudske i fazne karakteristike idealnog filtra propusnika opsega učestanosti.

Odziv tražimo primjenom inverzne Furijeove transformacije:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{+\omega_1}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{+\omega_2}H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

gdje je $X(j\omega)$ Furijeova transformacija ulaznog signala $x(t)$.

Ako je filtar idealan, možemo uzeti da je: $A(\omega)=1=const$, $\Theta(\omega)=-\omega t_o$, tj. $H(j\omega)=e^{-j\omega t_o}$.

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{-j\omega t_o}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{+\omega_1}X(j\omega)e^{j\omega(t-t_o)}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{+\omega_2}X(j\omega)e^{j\omega(t-t_o)}d\omega$$

a) Kada je ulazni signal Dirakov impuls:

$$x(t)=\delta(t)$$
$$X(j\omega)=1$$

Na izlazu se dobija signal:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{+\omega_1}1\cdot e^{j\omega(t-t_o)}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{+\omega_2}1\cdot e^{j\omega(t-t_o)}d\omega$$

S obzirom da važi: $e^{j\omega(t-t_o)}=\cos(\omega(t-t_o))+j\sin(\omega(t-t_o))$, prethodni izraz je identičan sledećem:

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos\omega(t-t_o)d\omega=\frac{1}{\pi(t-t_o)}(\sin\omega_2(t-t_o)-\sin\omega_1(t-t_o))$$

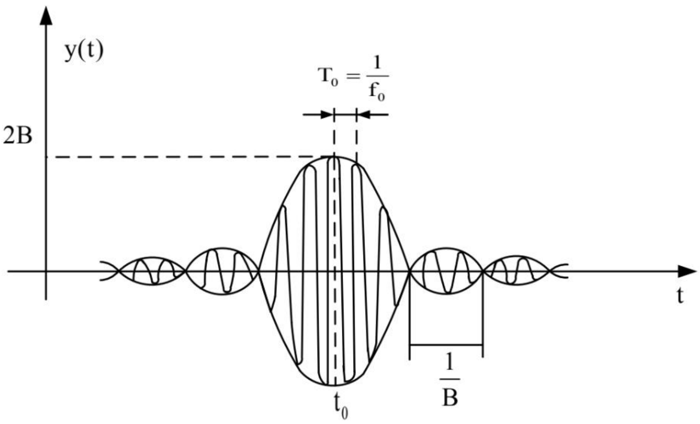
Iskoristićemo trigonometrijsku formulu: $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$$y(t)=\frac{2}{\pi(t-t_o)}\cos((\omega_2+\omega_1)(t-t_o)/2)\sin((\omega_2-\omega_1)(t-t_o)/2)$$, ili:

$$y(t)=\frac{2}{\pi(t-t_o)}\cos(2\pi(f_2+f_1)(t-t_o)/2)\sin(2\pi(f_2-f_1)(t-t_o)/2)$$

Ako sa $B=f_2-f_1$ označimo propusni opseg filtra, izraz se može svesti na:

$$y(t)=2B\frac{\sin\pi B(t-t_o)}{\pi B(t-t_o)}\cos\omega_o(t-t_o)$$



Slika 2. Odziv u vremenskom domenu.

b) Kada je pobuda u vidu Hevisajdove funkcije:

$$X(j\omega)=\begin{cases}\pi\delta(\omega), & za \quad \omega=0\\ \dfrac{1}{j\omega}, & za \quad \omega\neq 0\end{cases}$$

Signal na izlazu iz filtra je:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{+\omega_1}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega(t-t_o)}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega(t-t_o)}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-t_o)d\omega$$

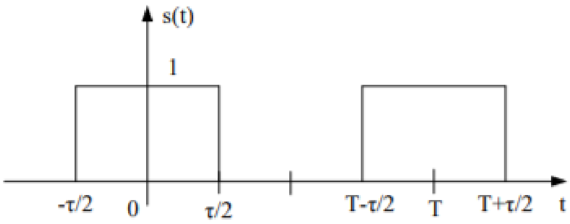
S obzirom da je $\omega_o>>\omega_2-\omega_1$, prethodni izraz je približno jednak:

$$y(t)=\frac{1}{\pi\omega_o}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\sin\omega(t-t_o)d\omega=\frac{2B}{\omega_o}\frac{\sin\pi B(t-t_o)}{\pi B(t-t_o)}\cos\left[\omega_o(t-t_o)-\frac{\pi}{2}\right]$$

Zaključuje se da se odzivi razlikuju samo u faktoru $\frac{1}{\omega_o}$ po amplitudi i za $-\pi/2$ u fazi.

Dakle, kada je propusni opseg filtra mali u odnosu na centralnu učestanost ω_o odzivi filtara propusnika opsega učestanosti na pobudu Dirakovim impulsom i Hevisajdovom funkcijom su sličnog vremenskog oblika.

2. Spektar F(jω) signala f(t) ograničen je i zauzima opseg $|\omega| \le \omega_m$. Pronaći spektar X(jω) signala x(t)=f(t)s(t), ako s(t) predstavlja periodičnu povorku pravougaonih impulsa prikazanih na Slici3.



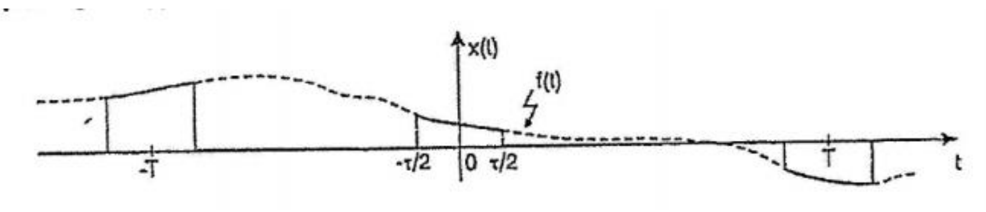
Slika 3. Povorka pravougaonih impulsa.

Signal x(t) se dovodi na idealan filtar propusnik niskih učestanosti koji ima funkciju prenosa:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1; & |\omega| \le \omega_m \\ 0; & |\omega| > \omega_m \end{cases}$$

Pokazati da se na izlazu iz filtra dobija neizobličen signal f(t), ako je $T \le 1/(2f_m)$.

<u>Rešenje</u>:



Slika 4. Primjer diskretizacije signala x(t) množenjem sa pravougaonom povorkom s(t).

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn\omega_o t}$$

$$S_n = \frac{1}{T}\int_0^T s(t) e^{-jn\omega_o t} dt = ... = \frac{\tau}{T}\frac{\sin n\omega_o \tau/2}{n\omega_o \tau/2} \Rightarrow s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T}\frac{\sin n\omega_o \tau/2}{n\omega_o \tau/2} e^{jn\omega_o t}$$

$$x(t) = f(t)s(t)$$

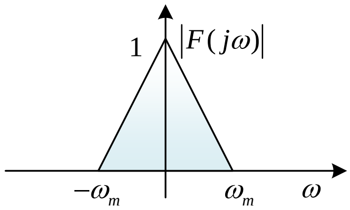
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)s(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T}\frac{\sin n\omega_o \tau/2}{n\omega_o \tau/2} e^{jn\omega_o t} e^{-j\omega t} dt$$

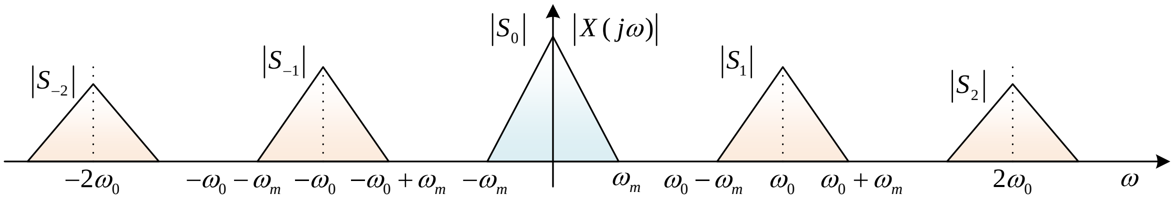
$$X(j\omega) = \frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin n\omega_o\tau/2}{n\omega_o\tau/2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega-n\omega_o)t}dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega-n\omega_o)t}dt = F\left[j(\omega-n\omega_o)\right]$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n F\left[j(\omega-n\omega_o)\right]$$



(a)



(b)

Slika 4. Spekar signala f(t) prije (a) i nakon odabiranja (b).

Ako se na ulaz idealnog filtra propusnika niskih učestanosti dovede signal x(t), spektar signala na njegovom izlazu biće jenak onom dijelu spektra $X(j\omega)$ koji zauzima opseg $|\omega| \le \omega_m$. Iz datog dijela spektra se može rekonstruisati signal f(t) bez izobličenja ako je učestanost ω_o tako izabrana da nema preklapanja spektra $S_oF\left[j(\omega)\right]$ sa najbližim transponovanim spektrima $S_{\pm1}F\left[j(\omega-\omega_o)\right]$. Do preklapanja neće doći ukoliko je:

$$\omega_o - \omega_m \ge \omega_m \quad tj. \quad \omega_o \ge 2\omega_m$$

3. Dvije prostoperiodične komponente čije su učestanosti f_1=100Hz i f_2=600Hz obrazuju signal f(t) = $U_1\cos(2\pi f_1 t)$ + $U_2\cos(2\pi f_2 t)$. Signal f(t) diskretizovan je po vremenu, tako da je x(t)=f(t)s(t), gdje je s(t) signal oblika sa Slike 3. Ako učestanost odabiranja f_0=1/T iznosi:

a) f_0=1000 Hz, pronaći spektar X(jω) signala x(t) i pokazati da se pomoću idealnog filtra propusnika niskih učestanosti ne može izdvojiti signal f(t) iz x(t).
b) f_0=1300 Hz, pokazati da se pomoću istog filtra u ovom slučaju može izdvojiti signal f(t) iz x(t).

Rešenje:

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn\omega_o t}$$

$$S_n=\frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{-jn\omega_o t}dt=\ldots=\frac{\tau}{T}\frac{\sin n\omega_o\tau/2}{n\omega_o\tau/2}$$

$$s(t)=S_o+\sum_{n=1}^{+\infty}2S_n\cos n\omega_o t$$

$$x(t)=f(t)\cdot s(t)=S_o f(t)+\sum_{n=1}^{+\infty}2S_n f(t)\cos n\omega_o t$$

$$x(t)=S_oU_1\cos\omega_1 t+S_oU_2\cos\omega_2 t+\sum_{n=1}^{+\infty}2S_n\left[U_1\cos\omega_1 t+U_2\cos\omega_2 t\right]\cos n\omega_o t$$

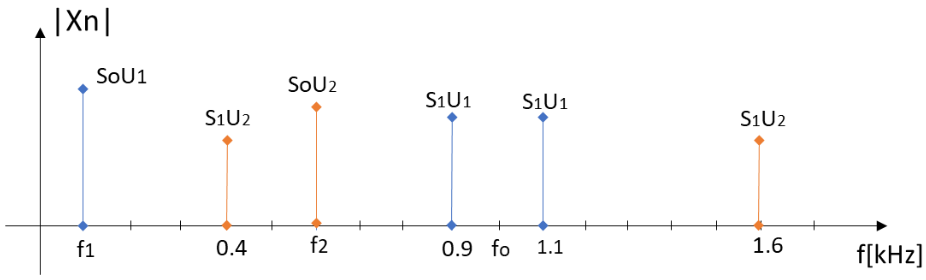
$$x(t)=S_oU_1\cos\omega_1 t+S_oU_2\cos\omega_2 t+\sum_{n=1}^{+\infty}2S_nU_1\cos\omega_1 t\cos n\omega_o t+\sum_{n=1}^{+\infty}2S_nU_2\cos\omega_2 t\cos n\omega_o t$$

Ako iskorisimo trigonometrijsku formulu za proizvod dva kosinusa:

$$x(t)=S_oU_1\cos\omega_1 t+S_oU_2\cos\omega_2 t+\sum_{n=1}^{+\infty}S_n\left[U_1\cos(n\omega_o+\omega_1)t+U_1\cos(n\omega_o-\omega_1)t\right]+\sum_{n=1}^{+\infty}S_n\left[U_2\cos(n\omega_o+\omega_2)t+U_1\cos(n\omega_o-\omega_2)t\right]$$

Sada možemo skicirati spekar izlaznog signala:

a)



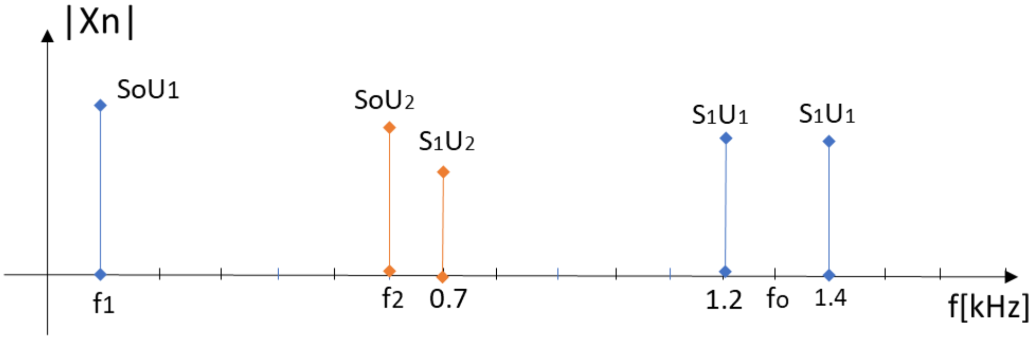
Slika 5. Dio amplitudskog spektra signal x(t).

Propuštanjem signala x(t) kroz idealni filtar propusnik niskih učestanosti dobija se signal:

$$y(t)=S_o f(t)+S_1U_2\cos(\omega_o-\omega_2)t$$

Dakle, pored skaliranog originalnog signala f(t) imamo i signal izobličenja. Ovo je očekivano jer nije ispunjen uslov teoreme o odabiranju.

b)



Slika 6. Dio amplitudskog spektra signal x(t).

Ispunjen je uslov teoreme o odabiranju pa na izlazu idealnog niskopropusnog filtra dobijamo:

$$y(t) = S_o f(t)$$