Elementi teorije slučajnih procesa u telekomunikacijama

Prof.dr Igor Radusinović

igorr@ucg.ac.me

Prof.dr Enis Kočan

enisk@ucg.ac.me

dr Slavica Tomović

slavicat@ucg.ac.me

Elementi teorije slučajnih procesa u telekomunikacijama

- Elementi teorije vjerovatnoće
- Slučajne promjenljive
- Normalna (Gauss-ova) raspodjela
- Slučajni procesi

Elementi teorije vjerovatnoće

Teorija vjerovatnoće sa bavi slučajnim događajima

Eksperiment se može opisati:

- Skupom mogućih rezultata
- Podskupovima skupa mogućih rezultata
- Učestanošću sa kojom se pojedini podskupovi skupa mogućih rezultata javljaju kada se eksperiment ponavlja

Elementi teorije vjerovatnoće

Relativna učestanost pojavljivanja podskupa (klase) *A*

Broj pojavljivanja klase *A* u *n* ponavljanja

$$f_A = \frac{m_{A,n}}{n}$$

Broj ponavljanja

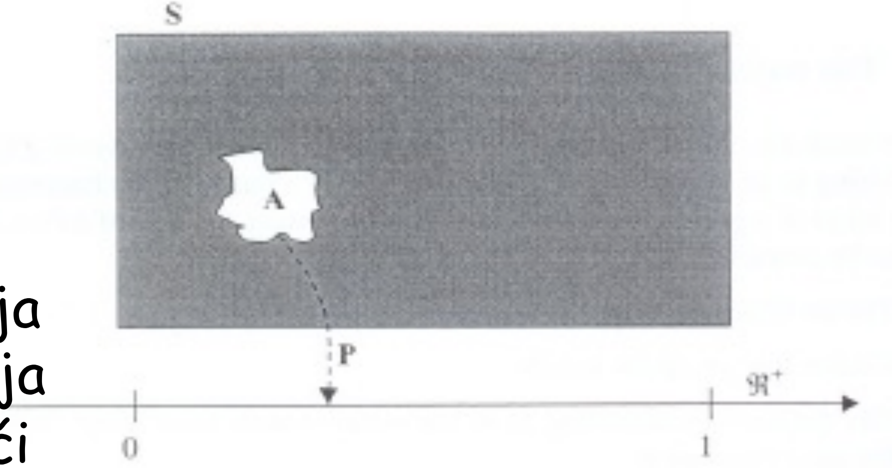
Kada n teži beskonačnosti, zaočekivati je da pojavljivanje konvergira "regularnosti" statističkog ponašanja eksperimenta

Elementi teorije vjerovatnoće

Matematički model eksperimenta

- Prostor (skup) S elementarnih događaja (rezultata eksperimenta): S={ω}
- Na bilo kojem skupu događaja mogu se primijeniti operacije nad skupovima (∩,\,...)
- Mjera vjerovatnoće je preslikavanje elementarnih događaja iz prostora S na pozitivnu realnu osu u intervalu od 0 do1
- Kolmogorovljev pristup

$$\lim_{n \to +\infty} f_A = P(A)$$



Za dovoljno velik broj ponavljanja relativna učestanost pojavljivanja događaja jednaka je vjerovatnoći pojavljivanja tog događaja

Elementi teorije vjerovatnoće

Aksiome vjerovatnoće

$$0 \le P(A) \le 1, \quad \forall A \subseteq S$$

$$P(S) = 1$$

$$Ako \;\; je \;\; A \cap B = 0, \; tada \;\; je \; P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right), \; ako \;\; je \;\; A_i \cap A_j = \varnothing \; za \; i \ne j$$

- Vjerovatnoća nemogućeg događaja je jednaka 0
- Vjerovatnoća komplementa događaja A
  - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Ako su događaji A i B zavisni
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- Važe komutativnost, asocijativnost i distributivnost.

Elementi teorije vjerovatnoće

Aksiome vjerovatnoće

- Uslovna vjerovatnoća

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$Ako\ su\ A\ i\ B\ nezavisni\ P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$P(A|B)=P(A)$$

- Bayes-ova formula
  - Ako je $A \subset H_1 \subset H_2 \subset H_3 \ldots \subset H_n$ i za $\forall i \neq j\ H_i \cap H_j = \emptyset$

Formula totalne vjerovatnoće

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

Apriori vjerovatnoća događaja H_i

$$P(H_j|A)=\frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)}=\frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$$

Bayes-ova formula za izračunavanje aposteriori vjerovatnoće događaja Hj

Slučajna promjenljiva

Definicija

- Slučajna promjenljiva X se definiše na slučajnom eksperimentu za koji je definisana matematička vjerovatnoća.
- Radi se o funkciji koja preslikava skup elementarnih događaja S u skup realnih brojeva R
- Sa Ω se označava skup vrijednosti slučajne promjenljive X
- Ako je Ω konačan skup onda je slučajna promjenljiva X diskretna
- Ako Ω nije konačan skup onda je slučajna promjenljiva X kontinualna
- Slučajna promjenljiva se obično definiše na sledeći način:

$$P(X = x) = P\{s \in S: X(s) = x\}$$

Slučajna promjenljiva

Funkcija slučajne promjenljive

- Funkcija slučajne promjenljive X se definiše kao

$$F_X(x) = P\{(s \in S | X(s) \leq x)\} = P(X \leq x)$$

- $F_X(x)$je monotono neopadajuća funkcija za koju važi $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $F_X(x)$ je kontinualna funkcija
- $F_X(x)$ teži 1 kada x teži +∞, odnosno 0 kada x teži -∞
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, pod uslovom da je a<b
- $P(X > x) = 1 - F(x)$
- Za diskretnu slučajnu promjenljivu X (mogućih vrijednosti x_1, x_2, …, x_n) $F_X(x)$ je stepeničasta funkcija sa koracima jednakim vjerovatnoći diskretnih događaja

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=i}^{n} P(X = x_i) u_H(x - x_i)$$

Slučajna promjenljiva

Funkcija gustine slučajne promjenljive

- Funkcija gustine slučajne promjenljiva X se definiše kao

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- $f_X(x) \geq 0$
- Dimenzija x^{-1}
- Dobijanje funkcije raspodjele iz $f_X(x)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$$

- Uslov normalizovanosti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Slučajna promjenljiva

Funkcija gustine slučajne promjenljive

- Vjerovatnoća i gustina slučajne promjenljive

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$

$$P(x < X \leq x + dx) = f_X(x)dx$$

- Za diskretnu slučajnu promjenljivu

$$f_X(x) = \sum_{i=i}^{n} P(X = x_i)\delta(x - x_i)$$

Slučajna promjenljiva

Združena raspodjela

- Funkcija združene raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y se definiše kao

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

- Funkcija gustine združene raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y se definiše kao

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$$

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)\, dxdy$$

- Marginalna raspodjela

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dy$$

Slučajna promjenljiva

Združena raspodjela

- Ukoliko su slučajne promjenljive X_1, X_2,...X_n statistički nezavisne

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

Slučajna promjenljiva

Uslovna raspodjela

- Funkcija uslovne raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y se definiše kao

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y \leq y)$$

- Funkcija gustine uslovne raspodjele slučajnih promjenljivih X i Y se definiše kao

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy$$

Slučajna promjenljiva i funkcija g( )

- Neka je slučajna promjenljiva $Y = g(X)$
- Funkcija raspodjele slučajne promjenljive Y je

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P\left(X \leq g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

- Ako je funkcija g( ) diferencijabilna, X kontinualna slučajna promjenljiva gustine raspodjele $f_X(x)$, a x_1, x_2,…., x_n nule funkcije y=g(x) onda

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dg(x_i)}{dx}\right|}$$

Momenti slučajne promjenljive

- Matematičko očekivanje slučajne promjenljive se definiše kao

$$E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx & \text{, za kontinualne slučajne promjenljive} \\ \sum_i x_i P(X = x_i) & \text{, za diskretne slučajne promjenljive} \end{cases}$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad \text{, gdje su a i b konstante}$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[XY] = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} \int_{x=-\infty}^{x=\infty} xy f_{XY}(x, y)dxdy$$

- Ako su X i Y statistički nezavisne slučajne promjenljive onda je

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Slučajna promjenljiva

Momenti slučajne promjenljive

- m-ti moment slučajne promjenljive

$$E[X^m] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^m f_X(x)dx & \text{, za kontinualne slučajne promjenljive} \\ \sum_i x_i^m P(X = x_i) & \text{, za diskretne slučajne promjenljive} \end{cases}$$

- Za m=2 moment se naziva srednjom kvadratnom vrijednošću
- Varijansa se definiše kao

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

- Standardna devijacija je

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$$

- Standardna devijacija je jednaka nuli za determinističke slučajne promjenljive
- Kovarijansa slučajnih promjenljivih X i Y je

$$c_{XY} = E\big[(X - E[X])\big(Y - E(Y)\big)\big]$$

- Koeficijent kroskorelacije

$$\rho = \frac{c_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Slučajna promjenljiva

Karakteristična funkcija slučajne promjenljive

- Karakteristična funkcija $\Phi_X(\omega)$ slučajne promjenljive X (kontinualne definisane za x∈{-∞,+∞} ili diskretne) gustine vjerovatnoće $f_X(x)$ je definisana za ω∈{-∞,+∞} kao

$$\Phi_X(\omega) = E\left[e^{j\omega X}\right] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx \\ \sum_i P(X = x_i) e^{j\omega i} \end{cases}$$

- Slična je Furijevoj transformaciji sa razlikom u znaku eksponenta u podintegralnoj funkciji!

Slučajna promjenljiva

Karakteristična funkcija slučajne promjenljive

- Uslov normalizovanosti

$$\Phi_X(\omega = 0) = E\left[e^{j0X}\right] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j0x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \\ \sum_i P(X = x_i) e^{j0i} = \sum_i P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

- Može se pokazati da je $|\Phi_X(\omega)| \leq 1$
- m-ti moment se može izračunati na sledeći način

$$E[X^m] = \frac{1}{j^n} \Phi_X^{(n)}(\omega = 0)$$

n-ti izvod

Normalna ili Gauss-ova raspodjela

- Kontinualna slučajna promjenljvia X čija je gustina raspodjele:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}, x \in (-\infty, \infty)$$

- Funkcija raspodjele je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(\frac{x-\mu_X}{\sqrt{2\sigma_X}}\right)$$

- erf( ) je funkcija greške
- Može se pokazati da su srednja vrijednost i varijansa jednake

$$E[X] = \mu_X$$
$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \sigma_X^2$$

- Karakteristična funkcija

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} e^{j\omega x} dx = e^{j\omega\mu_X} e^{-\frac{\omega^2\sigma_X^2}{2}}$$

Normalna ili Gauss-ova raspodjela

- Funkcija gustine raspodjele dvodimenzionalne Gauss-ova raspodjela data je izrazom:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]}$$

- gdje su
- μ_X i μ_Y srednje vrijednosti slučajnih promjenljivih X i Y
- σ_X^2 i σ_Y^2 varijanse slučajnih promjenljivih X i Y
- ρ je koeficijent kroskorelacije slučajnih promjenljivih X i Y

$$\rho = \frac{c_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{E\left[(X-E[X])\big(Y-E(Y)\big)\right]}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{E\left[(X-\mu_X)\big(Y-E(Y)\big)\right]}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Normalna ili Gauss-ova raspodjela

Centralna granična teorema

- Neka su X_1, X_2,…,X_n nezavisne slučajne promjenljive čije su srednje vrijednosti i varijanse (μ_1, σ_1^2), (μ_2, σ_2^2),…, (μ_n, σ_n^2)
- Slučajna promjenljiva X koja predstavlja njihov zbir

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

je slučajna promjenljiva koja ima normalnu raspodjelu gustine raspodjele

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

čija su srednja vrijednost i varijansa jednake

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Slučajni (stohastički) proces

- Mogu se opisati slučajnim promjenljivim X čije se statističke osobine mijenjaju u vremenu.
- Definisan je:
  - Prostorom stanja, koji predstavlja skup mogućih vrijednosti slučajne promjenljive X(t). Ovaj prostor može biti
    - kontinualan
    - diskretan (u tom slučaju se stohastički proces zove lancem - chain).
  - Promjenljivom vremena koja može pripadati
    - kontinualnom skupu vrijednosti (slučajna promjenljiva kontinualna u vremenu)
    - diskretnom skupu vrijednosti (slučajna promjenljiva diskretna u vremenu)
  - Korelacionim karakteristikama slučajne promjenljive X(t) u različitim trenucima vremena.

Slučajni (stohastički) proces

- Opisuje se funkcijom raspodjele slučajne promjenljive X(t) koja se dobija kao združena raspodjela u različitim trenucima vremena t_i ($X(t_i)$) za različite vrijednosti x_i.
- Za kontinualni slučajni proces

$$F_X(x,t) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n)$$

- Za diskretni slučajni proces

$$F_X(x,t) = P(X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n)$$

- gdje su x=(x_1, x_2,…, x_n) i t =(t_1, t_2,…, t_n)
- Funkcija gustine raspodjele kontinualnog slučajnog procesa je

$$f_X(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{XY}(x,t)$$

- Funkcija raspodjele kontinualnog slučajnog procesa je

$$F_X(x,t) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(y,t)\, dy_1 \dots dy_n$$

- gdje je y=(y_1, y_2,…, y_n)

Slučajni (stohastički) proces

Momenti slučajnog procesa

- Srednja vrijednost slučajnog procesa X(t) je

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x,t)dx$$

- Varijansa slučajnog procesa X(t) je

$$Var_X(t) = E\left[\left(X(t) - \mu_X(t)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu_X(t)\right)^2 f_X(x,t)dx$$

- Autokorelaciona funkcija slučajnog procesa X(t) je

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(t_1)X(t_2)}(x,y)dxdy$$

- gdje je $f_{X(t_1)X(t_2)}(x,y)$ združena funkcija gustine raspodjele slučajnih procesa $X(t_1)$ i $X(t_2)$

Slučajni (stohastički) proces

Momenti slučajnog procesa

- Autokovarijansa je data izrazom

$$C_X(t_1, t_2) = E\left[\left(X(t_1) - \mu_X(t_1)\right)\left(X(t_2) - \mu_X(t_2)\right)\right] = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\ \mu_X(t_2)$$

- Unakrsna korelacija slučajnih procesa X(t) i Y(t)

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(t_1)Y(t_2)}(x, y) dxdy$$

Slučajni (stohastički) proces

Stacionarnost slučajnog procesa

- Slučajni proces je stacionaran ukoliko njegove statističke osobine ne zavise od trenutka posmatranja
- Slučajni proces je stacionaran u užem smislu ako za bilo koji trenutak posmatranja t važe sve sledeće relacije:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \mu$$
$$Var_X(t) = E\left[\left(X(t) - \mu_X(t)\right)^2\right] = \sigma^2$$
$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = R_X(t_1 - t_2)$$
$$C_X(t_1, t_2) = E\left[\left(X(t_1) - \mu_X(t_1)\right)\left(X(t_2) - \mu_X(t_2)\right)\right] = C_X(t_1 - t_2)$$

- Pri tome μ i σ ne zavise od trenutka posmatranja

Slučajni (stohastički) proces

Stacionarnost slučajnog procesa

- Slučajni proces je stacionaran u širem smislu ako za bilo koji trenutak posmatranja t važe sledeće relacije:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \mu$$
$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$$

gdje μ ne zavisi od trenutka posmatranja a $\tau = t_1 - t_2$

- Slučajni procesi X(t) i Y(t) su združeno stacionarni u širem smislu ukoliko
  - su pojedinačno stacionarni u širem smislu
  - njihova uzajamna korelacija zavisi samo od $\tau = t_1 - t_2$ odnosno

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = R_{XY}(t_1 - t_2) = R_{XY}(\tau)$$

Slučajni (stohastički) proces

Odziv linearnog vremensko invarijantnog sistema na pobudu slučajnim procesom stacionarnim u širem smislu

- Neka je $S_X(f)$ spektralna gustina srednje snage slučajnog procesa X(t), a h(t) impulsni odziv linearnog vrmenski invarijantnog sistema
- Ako je $E[X(t)] < \infty$ i $E\left[\left(X(t)\right)^2\right] < \infty$ onda je Y(t) odziv sistema na pobudu slučajnim signalom X(t) takođe stacionaran u širem smislu pri čemu važe sledeće relacije:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

$$E[X(t+\tau)Y(t)] = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

Slučajni (stohastički) proces

Wiener-Khinchine-ova teorema (ponavljanje)

- Neka je X(t) kontinualan slučajan signal koji je stacionaran u širem smislu sa srednjom vrijednošću μ_X i autokorelacionom funkcijom $R_X(\tau)$
- Wiener-Khinchine-ova teorema kaže da je spektralna gustina srednje snage slučajnog signala X(t) jednaka Furijeovoj tranformaciji autokorelacione funkcije $R_X(\tau)$

$$S_X(f) = E[R_X(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

Slučajni (stohastički) proces

Wiener-Khinchine-ova teorema (ponavljanje)

- $S_X(0)$ predstavlja ukupnu snagu slučajnog procesa koja se razvija na potrošaču jedinične otpornosti
- Spektralna gustina srednje snage slučajnog signala je nenegativna parna funkcija
- Normalizovana spektralna gustina srednje snage je

$$p_X(f) = \frac{S_X(f)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(y)dy}$$

Slučajni (stohastički) proces

Srednja snaga slučajnog procesa

$$P_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[X^2(t)]dt$$

- Ukoliko je slučajni signal stacionaran u širem smislu ($E[X^2(t)] = R_X(0)$)

$$P_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_X(0)dt = R_X(0) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df$$

Slučajni (stohastički) proces

Ergodičnost slučajnog procesa

- Slučajni proces je ergodičan ako je njegova srednja vrijednost u vremenu jednaka njegovoj statističkoj srednjoj vrijednosti
- Drugim riječima, ergodičnost znači da vremenska srednja vrijednost mora biti jednaka statističkoj srednjoj vrijednosti odnosno treba da važi

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x,t)dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t)dt$$

- Ergodičnost znači stacionarnost u širem smislu, dok obrnuto ne mora da važi.

Slučajni (stohastički) proces

Gauss-ov slučajni proces

- Slučajni proces X(t) je Gauss-ov slučajni proces ukoliko za bilo koje N, slučajne promjenljive $X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \ldots, X_N = X(t_N)$ definisane u bilo kojim vremenskim trenucima $t_1, t_2, \ldots, t_N$ združeno predstavljaju Gaussove slučajne promjenljive. Odnosno:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N [det(C)]}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)}$$

- gdje je

$$X = [X(t_1), \ldots, X(t_N)]^T$$

$$\mathrm{x} = [x_1, \ldots, x_N]^T$$

$$\mu = [\mu_X(t_1), \ldots, \mu_X(t_N)]^T$$

$$C = E[(X-\mu)(X-\mu)^T] = \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_1) & \cdots & C_X(t_1, t_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_X(t_N, t_1) & \cdots & C_X(t_N, t_N) \end{bmatrix}$$

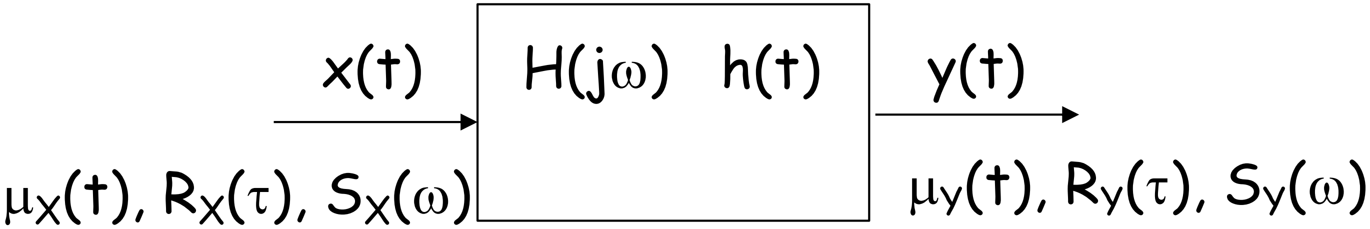
Slučajni (stohastički) proces

Gauss-ov slučajni proces

- Potpuno je određen srednjom vrijednošću $\mu_X(t)$ i autokovarijansnom funkcijom $C_X(t_i, t_j)$
- Stacionarnost u širem smislu povlači stacionarnost i u užem smislu
- Ukoliko Gauss-ov slučajni process dođe na ulaz linearnog sistema na izlazu će takođe biti Gauss-ov process
- Ponderisana suma Gausso-vih slučajnih procesa je Gauss-ov slučajni proces

Slučajni (stohastički) proces

Slučajni procesi i linearni sistemi



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$\mu_Y(t) = E[y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mu_X(t-\tau)d\tau$$

$$R_Y(\tau) = h(-\tau) * h(t) * R_X(\tau)$$

$$S_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega)$$

Slučajni (stohastički) proces

Slučajni procesi i Hilbertov transformator

x(t) → $H(j\omega) = -j sgn(\omega)$, $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ → $y(t) = \hat{x}(t)$

$\mu_X(t), R_X(\tau), S_X(\omega)$ → $\mu_{\hat{X}}(t), R_{\hat{X}}(\tau), S_{\hat{X}}(\omega)$

$$y(t) = \hat{x}(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \left(\frac{1}{\pi t}\right)$$

$$S_{\hat{X}}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega) = S_X(\omega)$$

$$R_{\hat{X}}(\tau) = h(-\tau) * h(t) * R_X(\tau) = R_X(\tau)$$

Spektralne osobine ulaznog slučajnog signala se ne mijenjaju prolaskom kroz Hilbertov transformator

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = h(-\tau) * R_X(\tau) = -R_X(\tau) * h(\tau) = -\widehat{R_X}(\tau)$$

$$R_{\hat{x}x}(\tau) = h(-\tau) * R_X(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) = \widehat{R_X}(\tau)$$

Slučajni (stohastički) proces

Uskopojasni slučajni procesi

- Slučajni proces je uskopojasan ukoliko se njegova spektralna gustina srednje snage može predstaviti izrazom

$$S_X(\omega) = \begin{cases} \neq 0, |\omega \pm \omega_0| \leq \frac{B}{2} \\ 0, |\omega \pm \omega_0| > \frac{B}{2} \end{cases}$$

- Gdje je ω_0 centralna učestanost a $B \ll 2\omega_0$ širina propusnog opsega učestanosti (promjene slučajnog procesa su mnogo sporije od promjena učestanosti ω_0)
- Ukoliko je ovaj slučajni proces stacionaran u širem smislu i ima nultu srednju vrijednost važi sledeća relaziji

$$X(t) = X_I(t)cos(\omega_0 t) - X_Q(t)sin(\omega_0 t)$$

- gdje su
  - $X_I(t)$ - sporopromjenljiva komponenta u fazi
  - $X_Q(t)$ - sporopromjenljiva komponenta u kvadraturi

Slučajni (stohastički) proces

Uskopojasni slučajni procesi

- Primjenjujući Hilbertovu transformaciju na izraz za X(t) dobija se

$$\hat{X}(t) = X_I(t)sin(\omega_0 t) + X_Q(t)cos(\omega_0 t)$$

- Korišćenjem prethodnih relacija dobija se

$$X_I(t) \;= X(t)cos(\omega_0 t) + \hat{X}(t)sin(\omega_0 t)$$

$$X_Q(t) \;= \hat{X}(t)cos(\omega_0 t) - X(t)sin(\omega_0 t)$$

- odnosno

$$R_{X_I}(\tau) \;= R_{X_Q}(\tau) = R_X(\tau)cos(\omega_0 \tau) + \hat{R}_X(\tau)sin(\omega_0 \tau)$$

$$R_{X_I X_Q}(\tau) \;= R_X(\tau)sin(\omega_0 \tau) - \hat{R}_X(\tau)cos(\omega_0 \tau)$$

Slučajni (stohastički) proces

Uskopojasni slučajni procesi

- Korišćenjem prethodnih relcija za autokorelacione funkcije i kroskorelacionu funkciju dobijaju se sledeći izrazi za spektralne gustine srednjih snaga

$$S_{X_I}(\omega) = S_{X_Q}(\omega) = \begin{cases} S_X(\omega - \omega_0) + S_X(\omega + \omega_0), |\omega| \leq \frac{B}{2} \\ 0, |\omega| > \frac{B}{2} \end{cases}$$

$$S_{X_I X_Q}(\omega) = \begin{cases} j[S_X(\omega - \omega_0) - S_X(\omega + \omega_0)], |\omega| \leq \frac{B}{2} \\ 0, |\omega| > \frac{B}{2} \end{cases}$$

- Ako je $S_X(\omega)$ simetrična u odnosu na $\pm\omega_0$ onda je $S_{X_I X_Q}(\omega) = 0$