Ushtrimi nr. 1

Nqs nr. a, b, c tek ekuacioni kuadratik janë tek, atëherë ekuacioni $ax^2+bx+c=0$, nuk mund të ketë rrënjë racionale.

Zgjidhje

Për ekuacionin kuadratik $ax^2+bx+c=0$ dy rrënjët e tij gjenden me formulën ${}_1x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Le të kemi a, b, c nr. tek.

Rrënjët janë ose jo racionale më varësi të nr $\Delta = b^2-4ac$, nqs ai është apo jo katror i plotë.

Supozojmë që, në rastin kur a, b, c janë nr. tek, kemi që dallori $D = b^2-4ac$ është katror i plotë pra $D = s^2$, për ndonjë nr natyror s.

$D = b^2-4ac \Leftrightarrow$

$s^2 = b^2-4ac \Leftrightarrow$

$4ac = b^2-s^2 \Leftrightarrow$

$4ac = (b-s)(b+s)$.

Nr. $b-s$ dhe $b+s$ kanë të njëjtën çiftësi (ose të dyja tek, ose të dyja çift), sepse shuma e tyre $(b-s)+(b+s) = 2b$ është nr. çift dhe $4ac = (b-s)(b+s)$, atëherë

Meqë $(b-s)(b+s)$ kanë të njëjtën çiftësi dhe prodhimi i tyre është çift (shumëfish i 4). Këto nr. janë çift, meqë prodhimi i tyre

Kështu, marrim:

$$\left.\begin{aligned} b-s &= 2p \\ b+s &= 2q \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$4ac = (b-s)(b+s) = 2p \cdot 2q = 4pq \Leftrightarrow ac = pq$. Meqë ac është tek $\Rightarrow$ të dy nr p dhe q janë tek

Marrim:

$$\begin{cases} b-s=2p \\ b+s=2q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=2(p+q) \\ 2s=2(q-p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=p+q \\ s=q-p \end{cases}$$

Megë $s=q-p$, si diferencë dy nr tek, është nr. çift.

Por $\quad s^2 = \underbrace{b^2-4ac}$

s^2: çift, si katrori i nje nr çift

b^2 tek, si katrori i nje nr. tek

$4ac$, çift, megë është shumëfish i 4

Prandaj b^2-4ac është tek, si diferencë e nje nr tek me nje nr. çift

Pra morem që nr. çift s^2 është i barabartë me nr tek b^2-4ac që është absurditet, prandaj supozimi hidhet poshtë. Kështu që $D=b^2-4ac$, nuk është katror i plotë, për rrjedhoje në rastin kur a,b,c jonë nr. tek, ekuacioni $ax^2+bx+c=0$, nuk ka rrënjë racionale.

__Ushtrimi nr. 2__

Rrenjet e ekuacionit $x^2+ax+1-b=0$ janë nr. natyrore. Tregoni që nr. a^2+b^2 nuk është i thjeshtë.

Vërtetim

Nga formulat e Vietes:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{a}{1} \\ x_1\cdot x_2=\frac{1-b}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1\cdot x_2=1-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-(x_1+x_2) \\ b=1-x_1\cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a^2+b^2=[-(x_1+x_2)]^2+(1-x_1\cdot x_2)^2 = x_1^2+\cancel{2x_1x_2}+x_2^2+1-\cancel{2x_1x_2}+x_1^2x_2^2$$

$$= x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1=(x_1^2+x_1^2x_2^2)+(x_2^2+1)$$

$$= x_1^2(1+x_2^2)+(1+x_2^2)=(1+x_2^2)(1+x_1^2)$$

Pra $a^2+b^2=(1+x_1^2)(1+x_2^2)$ ku secili nga faktoret $1+x_1^2$; $1+x_2^2$ eshte nr. natyror, më i madh se $1 \Rightarrow a^2+b^2$ nuk eshte i thjeshte

Ushtrimi nr. 3

Pa zgjidhur ekuacionin $x^2+px+q=0$ të gjenden shuma e kubeve dhe e fuqive te katerta, te rrenjeve të ketij ekuacioni.

Vertetim: Nga formulat e Vietes kemi:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{p}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{q}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\cdot[(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-3x_1x_2]$$

$$=(x_1+x_2)\cdot[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$$

$$=(-p)\cdot[(-p)^2-3q]$$

$$=-p(p^2-3q)$$

$$=3pq-p^3$$

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2\cdot x_2^2=(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2$$

$$=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2(x_1x_2)^2$$

$$=[(-p)^2-2\cdot q]^2-2\cdot q^2$$

$$=(p^2-2q)^2-2q^2$$

$$=p^4-4p^2q+4q^2-2q^2$$

$$=p^4-4p^2q+2q^2$$

Ushtrimi nr. 4

Për ç'vlera të parametrit k, $k \in \mathbb{Z}$, rrënjët e ekuacionit kuadratik $kx^2 - (1-2k)x + k - 2 = 0$, janë nr. racional?

Zgjidhje:

$$kx^2 - (1-2k)x + (k-2) = 0$$

$$D = [-(1-2k)]^2 - 4 \cdot k \cdot (k-2)$$

$$= 1 - 4k + \cancel{4k^2} - \cancel{4k^2} + 8k$$

$$= 1 + 4k$$

Rrënjët e këtij ekuacioni janë nr. racional, atëherë dhe vetëm atëherë kur D është katror i plotë, pra $D = s^2$, $s \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$D = s^2 \Leftrightarrow$$

$$1 + 4k = s^2 \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{s^2 - 1}{4} \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{(s-1)(s+1)}{4}$$

Nqs s do të ishte çift atëherë $s-1$ dhe $s+1$ do ishin tek dhe për rrjedhojë $k = \frac{(s-1)(s+1)}{4} \notin \mathbb{Z}$, në kundërshtim me faktin që $k \in \mathbb{Z}$, prandaj s duhet të jetë tek. Po shënojmë $s = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$ dhe marrim:

$$D = s^2 \Leftrightarrow$$

$$1 + 4k = (2l - 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{1} + 4k = 4l^2 - 4l + \cancel{1} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4}k = \cancel{4}(l^2 - l) \Leftrightarrow$$

$$k = l^2 - l, \quad l \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

Për këto pafundësi vlerash të k ($k = 2, 6, 12, 20, \ldots$), ekuacioni i mësipërm ka rrënjë racionale.

Ushtrumi nr. 5

Të gjendet nr. k për të cilin vlen $3x_1 - 4x_2 = 11$, ku x_1 dhe x_2 janë zgjidhjet e ekuacionit $2x^2 + (2k-1)x + k - 1 = 0$

Zgjidhje

$3x_1 - 4x_2 = 11 \Leftrightarrow$

$3x_1 + 4x_1 - 4(x_1+x_2) = 11 \Leftrightarrow$

$7x_1 - 4(x_1+x_2) = 11 \Leftrightarrow$

$7x_1 = 4(x_1+x_2) + 11 \Leftrightarrow$

$7x_1 = 4 \cdot \frac{1-2k}{2} + 11 \Leftrightarrow$

$7x_1 = 2(1-2k) + 11 \Leftrightarrow$

$7x_1 = 13 - 4k$

$3x_1 - 4x_2 = 11 \Leftrightarrow$

$3(x_1+x_2) - 3x_2 - 4x_2 = 11 \Leftrightarrow$

$3 \cdot (x_1+x_2) - 7x_2 = 11 \Leftrightarrow$

$7x_2 = 3(x_1+x_2) - 11 \Leftrightarrow$

$7x_2 = 3 \cdot \frac{1-2k}{2} - 11 \Leftrightarrow$

$7x_2 = \frac{3(1-2k) - 22}{2} \Leftrightarrow$

$7x_2 = \frac{-6k-19}{2}$

$(7x_1) \cdot (7x_2) = (13-4k) \cdot \frac{-6k-19}{2} \Leftrightarrow$

$49 \cdot x_1 x_2 = \frac{(4k-13)(6k+19)}{2} \Leftrightarrow$

$49 \cdot \frac{k-1}{\cancel{2}} = \frac{(4k-13)(6k+19)}{\cancel{2}} \Leftrightarrow$

$49(k-1) = (4k-13)(6k+19) \Leftrightarrow$

$49k - 49 = 24k^2 - 2k - 247 \Leftrightarrow$

$24k^2 - 51k - 198 = 0$. Gjejmë zgjidhjet e këtij ekuacioni:

$k_{1,2} = \frac{-(-51) \pm \sqrt{(-51)^2 - 4 \cdot 24 \cdot (-198)}}{2 \cdot 24} = \frac{51 \pm \sqrt{21609}}{48}$

$= \frac{51 \pm 147}{48}$ $\begin{cases} \frac{33}{8} \\ -2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ vlerat e kërkuara të k janë $\frac{33}{8}$ dhe -2

Inekuacioni kuadratik

$ax^2+bx+c>0$ $\quad$ $ax^2+bx+c\geq 0$

(<0) $\quad$ (≤ 0)

- Do të studiojmë zgjidhjet e këtyre inekuacioneve në rastin kur trinomi $ax^2+bx+c=0$, ka të paktën një rrënjë $(\Delta \geq 0) \Rightarrow$
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ ku x_1, x_2 janë rrënjët (mundet edhe që $x_1=x_2$)
Dallojmë rastet:

1) Për inekuacionin $ax^2+bx+c>0$ (≥ 0), kur $a>0$, atëherë zgjidhja ndodhet jashtë rrënjëve pra:
$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty) \rightarrow >$
$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty) \rightarrow \geq$

2) Për inekuacionin $ax^2+bx+c>0$ (≥ 0) kur $a<0$ atëherë zgjidhja ndodhet brenda rrënjëve pra:
$(x_1, x_2) \rightarrow >$
$[x_1, x_2] \rightarrow \geq$

3) Për inekuacionin $ax^2+bx+c<0$ (≤ 0) kur $a>0$ atëherë zgjidhja ndodhet brenda rrënjëve pra:
$(x_1, x_2) \rightarrow <$
$[x_1, x_2] \rightarrow \leq$

4) Për inekuacionin $ax^2+bx+c<0$ (≤ 0) kur $a<0$ atëherë zgjidhja ndodhet jashtë rrënjëve pra:
$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty) \rightarrow <$
$(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty) \rightarrow \leq$

- Kur $\Delta<0$, nqs shenja e a përputhet me shenjën e mosbarazimit, zgjidhja është $\mathbb{R}$, përndryshe zgjidhja është bashkësia boshe $\varnothing$.

Ushtrimi nr. 1

Zgjidhni inekuacionet:

a) $x^2 > 0$

$x^2 = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 > 0$, shohim që $a > 0$ prandaj zgjidhja ndodhet jashtë rrënjëve.

Gjejmë rrënjët:

$x^2 = 0 \iff x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow$ zgjidhja:

$(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

b) $x^2 - (x-1)(2-x) \geq 0$

$x^2 - (x-1)(2-x) \geq 0$

$x^2 - (2x - x^2 - 2 + x) \geq 0$

$2x^2 - 3x + 2 \geq 0$

Shohim që $a = 2 > 0 \Rightarrow$ zgjidhja ndodhet jashtë rrënjëve.

Gjejmë rrënjët:

$2x^2 - 3x + 2 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 2$

$= -7 < 0$

Meqë shenja e $a > 0$, përputhet me shenjën e mosbarazimit zgjidhja është $\mathbb{R}$.

c) $3x^2 - 2x \leq 0$

$3x^2 - 2x \leq 0$

$a = 3 > 0$, prandaj zgjidhja është brenda rrënjëve.

Gjejmë rrënjët:

$3x^2 - 2x = 0 \iff$

$D = 4$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{6}$ $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ zgjidhja është $[0, \frac{2}{3}]$

d) $14 - 5x - x^2 < 0$

$-x^2 - 5x + 14 < 0$

$a = -1 < 0 \Rightarrow$ zgjidhja ndodhet jashtë rrënjëve.

Gjejmë rrënjët:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 14 = 81$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{5 \pm 9}{-2} \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow -7}{\searrow 2} \Rightarrow$

zgjidhja: $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty) = (-\infty, -7) \cup (2, +\infty)$

Ushtrimi nr. 2

Për nr.: $a, b, c \in \mathbb{R}$, vlen barazimi $ab + ac + bc = 8$ dhe $a + b + c = 5$. Vërtetoni që secili nga këto nr. i takon intervalit $[1, \frac{7}{3}]$ (interval i mbyllur)

Vërtetim

Nga të dhënat, kemi:

$\begin{cases} ab + ac + bc = 8 \\ a + b + c = 5 \end{cases}$ (sistemi është simetrik në lidhje me variablat a, b, c, prandaj mjafton të provojmë që $a \in [1, \frac{7}{3}]$)

$a + b + c = 5 \Leftrightarrow c = 5 - (a + b)$

$ab + ac + bc = 8 \Leftrightarrow ab + (a + b) \cdot c = 8 \Leftrightarrow ab + (a + b) \cdot [5 - (a + b)] = 8$

$\Leftrightarrow ab + 5(a + b) - (a + b)^2 = 8 \Leftrightarrow ab + 5a + 5b - a^2 - b^2 - 2ab = 8 \Leftrightarrow$

$-b^2+(ab+5b-2ab)+(5a-a^2)=8 \iff$

$-b^2+(5b-ab)+(5a-a^2)=8 \iff$

$-b^2+(5-a)b+(5a-a^2)=8 \iff$

$-b^2+(5-a)b+(5a-a^2-8)=0 \iff$

$b^2-(5-a)b+(a^2-5a+8)=0$.

Kemi nje ekuacion te fuqise se dyte, me ndryshore b.

Gjejme zgjidhjet:

$$b_{1,2}=\frac{(5-a)\pm\sqrt{(5-a)^2-4\cdot 1\cdot(a^2-5a+8)}}{2}$$

Që b te jete real, duhet qe $\Delta \geq 0$ pra:

$(5-a)^2-4(a^2-5a+8)\geq 0 \iff$

$25-10a+a^2-4a^2+20a-32\geq 0 \iff$

$-3a^2+10a-7\geq 0 \iff$

$3a^2-10a+7\leq 0$

Meqe $3>0$, atehere zgjidhja ndodhet midis rrenjeve a_1, a_2, ku

$$a_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 3\cdot 7}}{2\cdot 3}=\frac{10\pm 4}{6} \begin{cases} \frac{7}{3} \\ 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Zgjidhja eshte: $[a_1,a_2]=[1,\frac{7}{3}]$ pra $a\in[1,\frac{7}{3}]$.

Nga simetria kemi qe $b, c\in[1,\frac{7}{3}]$

Ushtrimi nr. 3

Të gjendet vlera e parametrit real m tek ekuacioni $x^2-(m+3)x+(m+2)=0$ nqs për rrënjët e tij x_1, x_2 vlen:

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{1}{2}$ dhe $x_1^2 \cdot x_2^2<5$

Zgjidhje

Nga formulat e Vietës tek ekuacioni $x^2-(m+3)x+(m+2)=0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{m+3}{1} \\ x_1 \cdot x_2=\frac{m+2}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=m+3 \\ x_1 \cdot x_2=m+2 \end{cases}$$

Tek mosbarazimi:

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{x_1+x_2}{x_1 x_2}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{m+3}{m+2}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{m+3}{m+2}-\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow$

$\frac{2m+6-m-2}{2(m+2)}>0 \Leftrightarrow$

$\frac{m+4}{\cancel{2}(m+2)}>0 \Leftrightarrow$

$\frac{m+4}{m+2}>0$ zgjidhja është $\left\langle \begin{array}{l} \begin{cases} m+4>0 \\ m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-2 \\ \begin{cases} m+4<0 \\ m+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-4 \end{array} \right.$

Tek mosbarazimi:

$x_1^2 \cdot x_2^2<5 \Leftrightarrow$

$(x_1 \cdot x_2)^2<5 \Leftrightarrow$

$(m+2)^2<5 \Leftrightarrow$

$m^2+4m-1<0$

Zgjidhja është brenda rrënjëve:

$[-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}]$

$\Rightarrow m \in [-2-\sqrt{5}, -4) \cup (-2, -2+\sqrt{5}]$

Ushtrimi nr. 4

Zgjidhni ekuacionin : $|x^2+2x|-|3-x|=x^2$ në $\mathbb{R}$.

Zgjidhje

Nga fakti që për një nr. real a, $|a|=\begin{cases} a, & a\geq 0 \\ -a, & a\leq 0 \end{cases}$, dallojmë rastet e mëposhtme:

1) $\begin{cases} x^2+2x \geq 0 \to \text{zgjidhja është jashtë rrënjëve pra } (-\infty,-2]\cup[0,+\infty) \\ 3-x \geq 0 \to \text{zgjidhja është } (-\infty,3] \end{cases}$

$\Rightarrow$ ky sistem përcakton bashkësinë $(-\infty,3]\cap\{(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)\}$
$=(-\infty,-2]\cup[0,3]=A$

Për $x\in A$, ekuacioni merr trajtën:

$(x^2+2x)-(3-x)=x^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}+2x-3+x=\cancel{x^2} \Leftrightarrow$

$3x-3=0 \Leftrightarrow$

$x=1$

Meqë $1\in A \Rightarrow 1$ është zgjidhje e ekuacionit

2) $\begin{cases} x^2+2x<0 \to \text{zgjidhja është brenda rrënjëve pra } (-2,0) \\ 3-x\geq 0 \to \text{zgjidhja është } (-\infty,3] \end{cases}$

$\Rightarrow$ ky sistem përcakton bashkësinë $(-2,0)=(-2,0)\cap(-\infty,3]=B$

Për $x\in B$ kemi:

$-(x^2+2x)-(3-x)=x^2 \Leftrightarrow$

$-x^2-2x-3+x=x^2 \Leftrightarrow$

$2x^2+x+3=0$

$D=1-4\cdot2\cdot3=-23<0$

Në bashkësinë B, ekuacioni nuk ka zgjidhje

3) $\begin{cases} x^2+2x \geq 0 \rightarrow \text{zgjidhje është jashtë rrënjëve pra } (-\infty,-2] \cup [0,+\infty) \\ 3-x<0 \rightarrow \text{zgjidhje është } (3,+\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow$ ky sistem përcakton bashkësinë $C = \{(-\infty,-2] \cup [0,+\infty)\} \cap (3,+\infty)$

$= (3,+\infty)$

Për $x \in C$, kemi:

$(x^2+2x) - [-(3-x)] = x^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}+2x+3-x = \cancel{x^2} \Leftrightarrow$

$x+3=0 \Leftrightarrow$

$x=-3$

Meqe $-3 \notin C$, në këtë bashkësi, ekuacioni nuk ka zgjidhje

4) $\begin{cases} x^2+2x<0 \rightarrow \text{zgjidhje është brenda rrënjëve pra } (-2,0) \\ 3-x<0 \rightarrow \text{zgjidhje është } (3,+\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow$ ky sistem përcakton bashkësinë $D = (-2,0) \cap (3,+\infty) = \Phi$, pra ky rast nuk ndodh.

Përfundim: Zgjidhje e ekuacionit është $x=1$.

<u>Ushtrimi nr. 5</u>

Të gjenden të gjithë vlerat e nr. real k, të tilla që $\forall x \in \mathbb{R}$, të jetë i vërtetë mosbarazimi: $(k-1)x^2 + 2kx + (3k-2) > 0$

<u>Zgjidhje</u>

Që mosbarazimi $(k-1)x^2 + 2kx + (3k-2) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, duhet dhe mjafton që:

$\begin{cases} D<0 \\ k-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2k)^2 - 4\cdot(k-1)(3k-2) < 0 \\ k>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8k^2-20k+8>0 \\ k>1 \end{cases}$

Inekuacioni $8k^2-20k+8>0$ ka zgjidhje jashtë rrënjëve:

$8k^2-20k+8=0$

$\Delta=(-20)^2-4\cdot8\cdot8=144$

$k_{1,2}=\dfrac{20\pm\sqrt{144}}{2\cdot8}=\dfrac{20\pm12}{16}\begin{cases}2\\ \frac{1}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow$ zgjidhja është $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$

Prandaj zgjidhja e sistemit është:

$(1,+\infty)\cap\left[(-\infty,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)\right]=(2,+\infty)$

Përfundim: Për $\forall k\in(2,+\infty)$, mosbarazimi $(k-1)x^2+2k\cdot x+(3k-2)>0$ është i vërtetë $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ekuacioni bikuadratik. Formula e Muavrosë

Ekuacioni i trajtës $ax^4+bx^2+c=0$, ku $a\neq0$ dhe $a,b,c\in\mathbb{R}$ quhet ekuacion bikuadratik. Për zgjidhjen e tij, veprojmë si më poshtë:

Zv. $x^2=t\Rightarrow$ Ekuacioni merr trajtën:

$a(x^2)^2+bx^2+c=0\Leftrightarrow a\cdot t^2+bt+c=0$. Gjejmë rrënjët e këtij ekuacioni të fuqisë së dytë:

$t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Heqe $x^2=t\Rightarrow$

$t_1=x^2\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}$

$t_2=x^2\Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{t_2}$

Ne rastet kur rrënjët e ekuacionit $at^2+bt+c=0$ janë nr. kompleks atëherë përdorim formulën e Muavrosë për paraqitjen e rrënjë të ekuacionit bikuadratik në trajtë standarde.

Formula e Muavrosë është si më poshtë:

$$\boxed{(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^{r} = \cos(r\varphi) + i\cdot\sin(r\varphi)}\ , \ r\in\mathbb{Q},\ \varphi\in\mathbb{R}$$

Ushtrimi nr. 1

Zgjidhni ekuacionin bikuadratik $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

Zgjidhje

$x^4 - x^2 - 2 = 0$

Zv. $x^2 = t \Rightarrow$

$t^2 - t - 2 = 0$. Gjejmë rrënjët e këtij ekuacioni:

$D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9$

$t_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \dfrac{1\pm 3}{2}$ $\begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$x^2 = t_1 = 2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

$x^2 = t_2 = -1 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Ushtrimi nr. 2

Zgjidhi ekuacionin bikuadratik e $x^4 - x^2 + 1 = 0$

Zgjidhje

$x^4 - x^2 + 1 = 0$

Zv. $x^2 = t \Rightarrow t^2 - t + 1 = 0$. Gjejmë rrënjët e këtij ekuacioni

$D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3 \Rightarrow$

$t_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i = \cos\dfrac{\pi}{3} \pm \sin\dfrac{\pi}{3} i$

$x^2 = t_1 = \cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3} i \Rightarrow x_{1,2} = \left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) + i\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right),\ k = 0, 1$

$x^2 = t_2 = \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} i \Rightarrow$

$${}_3x_4 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) - i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right) - i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right), \quad k=0,1.$$

Përfundimisht:

$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$

$x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}$

$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}$

$x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$

Ushtrimi nr.3

Vërtetoni që shuma e rrënjëve te ekuacionit bikuadratik është e barabartë me zero.

Vërtetim

Le te kemi ekuacionin bikuadratik $ax^4+bx^2+c=0$.

Rrenjet janë:

$${}_1x_2 = \pm\sqrt{t_1} = \pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow x_1+x_2=0$$

$${}_3x_4 = \pm\sqrt{t_2} = \pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow x_3+x_4=0$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=0$$

Ushtrimi nr.4

Zgjidhni ekuacionin: $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$

Zgjidhje

$(x^2+x+1)\cdot(x^2+x+2)=12 \Leftrightarrow$

$(x^2+x+1)\cdot\left[(x^2+x+1)+1\right]=12$. Zv. $x^2+x+1=y$ dhe marrim:

$y\cdot(y+1)=12 \Leftrightarrow y^2+y-12=0$

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-12)=49$

$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm7}{2}\begin{cases}3\\-4\end{cases}$

Marrim dy ekuacione:

- $x^2+x+1=y_1 \Leftrightarrow$

  $x^2+x+1=3 \Leftrightarrow$

  $x^2+x-2=0 \Rightarrow$

  $D=1-4\cdot1\cdot(-2)=9$

  $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}\begin{cases}1\\-2\end{cases}$

- $x^2+x+1=y_2 \Leftrightarrow$

  $x^2+x+1=-4 \Leftrightarrow$

  $x^2+x+5=0 \Rightarrow$

  $D=1^2-4\cdot1\cdot5=-19$

  $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{-19}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{19}\cdot i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{19}}{2}\cdot i$

Ushtrimi nr. 5

Zgjidhni ekuacionin : $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$

Zgjidhje:

$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680 \Leftrightarrow$

$[(x-4)(x-7)]\cdot[(x-5)(x-6)]=1680 \Leftrightarrow$

$(x^2-11x+28)(x^2-11x+30)=1680$

zv. $x^2-11x+28=y \Rightarrow$

$y\cdot(y+2)=1680 \Leftrightarrow$

$y^2+2y-1680=0$

$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-1680)=6724$

$_1y_2=\dfrac{-2\pm\sqrt{6724}}{2}=\dfrac{-2\pm 82}{2}$ $\begin{matrix} 40 \\ -42 \end{matrix}$

Marrim dy ekuacione:

- $x^2-11x+28=y_1 \Leftrightarrow$

  $x^2-11x+28=40 \Leftrightarrow$

  $x^2-11x-12=0$

  $\Delta=(-11)^2-4\cdot1\cdot(-12)=169$

  $_1x_2=\dfrac{11\pm\sqrt{169}}{2}=\dfrac{11\pm 13}{2}$ $\begin{matrix} 12 \\ -1 \end{matrix}$

- $x^2-11x+28=y_2 \Leftrightarrow$

  $x^2-11x+28=-42 \Leftrightarrow$

  $x^2-11x+70=0$

  $\Delta=11^2-4\cdot1\cdot70=-159$

  $_3x_4=\dfrac{11\pm\sqrt{-159}}{2}=\dfrac{11\pm\sqrt{159}\cdot i}{2}$

Ushtrimi nr. 6

Zgjidhni ekuacionin: $x^2-(11-7i)x+18-39i=0$

Zgjidhje

$$x_{1,2}=\frac{(11-7i)\pm\sqrt{(11-7i)^2-4\cdot1\cdot(18-39i)}}{2}$$

$$=\frac{(11-7i)\pm\sqrt{121-154i-49-72+156i}}{2}$$

$$=\frac{(11-7i)\pm\sqrt{2i}}{2}=\frac{(11-7i)\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{i}}{2}$$

$$=\frac{(11-7i)\pm\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Formula e Moavrosë

$$=\frac{(11-7i)\pm\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

$$=\frac{11-7i\pm\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}=\frac{11-7i\pm(1+i)}{2}\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{11-7i+1+i}{2}=\frac{12-6i}{2}=6-3i$$

$$x_2=\frac{11-7i-1-i}{2}=\frac{10-8i}{2}=5-4i$$