Једначина са раздвојеним промјенљивим

Једначина облика $y' = f(x)g(y)$ се решава интеграцијом послије свођења на облик $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

<u>примјер</u>: $(1+e^x)yy' = e^x$; $y(0)=1$

<u>решење</u>: $yy' = \frac{e^x}{(1+e^x)}$; $ydy = \frac{e^x}{(1+e^x)}dx$; $\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x)+C$

$y(0)=1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \ln(1+e^0)+C \Rightarrow C = \frac{1}{2} - \ln 2 \Rightarrow y = \sqrt{2\ln(1+e^x)+1-2\ln 2}$

Једначина облика $y' = f(ax+by+c)$ се смјеном $ax+by+c = z(x)$ своди на $\frac{z'-a}{b} = f(z)$ тј на $z' = a+bf(z)$ што је једначина са раздвојеним промјенљивим.

<u>примјер</u>: $(x+y)^2 y' = r^2$

<u>решење</u>: $y' = \frac{r^2}{(x+y)^2}$; смјена $x+y=z(x)$; $1+y' = z'(x)$;

$z'-1 = \frac{r^2}{z^2}$; $\frac{z^2}{r^2+z^2}dz = dx$ Интеграцијом се добија $z - r^2\frac{1}{r}arctg\frac{z}{r} = x+C$;

$x+y-rarctg\frac{x+y}{r} = x+C$ $x+y = rtg\frac{y-C}{r}$

Хомогена једначина

Једначина облика $y' = f(x,y)$ гдје је $f(x,y)$ хомогена функција (тј. функција која задовољава услов $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$) се може записати у облику $y' = F(\frac{y}{x})$. Смјеном $\frac{y}{x} = z(x)$ тј $y' = z + xz'$ ј-на добија облик $z + xz' = F(z)$ тј. $\frac{dz}{F(z)-z} = \frac{dx}{x}$ и може се решавати као ј-на са раздвојеним промјенљивим. Евентуална сингуларна решења се могу добити из услова $F(z)-z=0$.

<u>примјер</u>: $xy' = \sqrt{x^2-y^2}+y$

<u>решење</u>: $y' = \sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}+\frac{y}{x}$; смјена $\frac{y}{x} = z(x)$; $y' = z+xz'$; $z+xz' = \sqrt{1-z^2}+z$;

$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = dx$, $\arcsin z = \ln|x| + \ln C$; $z = \sin\ln Cx$. Опште решење је $y = x\sin\ln Cx$.

Вршимо провјеру да ли $\sqrt{1-z^2}=0$ даје сингуларна решења. $z=\pm 1 \Rightarrow y = \pm x$ а то јесу решења, и не могу се добити ни за једну вриједност константе из општег решења па представљају сингуларна решења.

<u>примјер</u>: Наћи једначину фамилије кривих код којих свака тангента сијече ординатну осу у тачки подједнако удаљеној од додирне тачке и координатног почетка.

<u>решење</u>: Нека су: $M(x;y)$ - додирна тачка; $A(0;\alpha)$ - тачка пресјека са ординатном осом; $O(0;0)$ - координатни почетак. Услов који треба да буде задовољен

је $d(A;M)=d(A;O)$, тј. $\sqrt{(0-x)^2+(\alpha-y)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(\alpha-0)^2}$. Вриједност α одређујемо из једначине тангенте $Y-y=y'(X-x)$ и услова да тачка $A(0;\alpha)$ припада тангенти. Када умјесто координата произвољне тачке тангенте $T(X;Y)$ ставимо $A(0;\alpha)$ добијамо $\alpha-y=y'(0-x)$, тј. $\alpha=y-xy'$. Из $x^2+(\alpha-y)^2=\alpha^2$ добијамо $x^2+x^2y'^2=y^2-2xyy'+x^2y'^2$. Добијена једначина има облик: $y'=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$, тј.

$y'=\dfrac{(y/x)^2-1}{2\,y/x}$ па је решавамо смјеном $\dfrac{y}{x}=z(x)$; $y'=z+xz'$. $z+xz'=\dfrac{z^2-1}{2z}$;

$\dfrac{2z}{z^2+1}dz=-\dfrac{dx}{x}$; $\ln(z^2+1)=-\ln x+\ln C$; $(z^2+1)x=C$; $(\dfrac{y^2}{x^2}+1)x=C$; $(x^2+y^2)=Cx$.

Тражена фамилија кривих је фамилија кружница са центром на x оси које пролазе кроз координатни почетак.

Једначина облика $y'=f(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ се своди на хомогену на следећи начин:

- Ако систем једначина $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ има јединствено решење $\begin{cases}x=\alpha\\y=\beta\end{cases}$ уводе се нови аргумент и нова функција смјенама $\begin{cases}x=u+\alpha\\y=v+\beta\end{cases}$ гдје је $v=v(u)$.
- Ако систем нема јединствено решење (тј. ако је $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$) користи се смјена $a_1x+b_1y=z(x)$

<u>примјер</u>: $y'=-\dfrac{2x+3y+1}{3x+4y+1}$

<u>решење</u>: $\begin{cases}2x+3y+1=0\\3x+4y+1=0\end{cases}$ има јединствено решење $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ па се уводе нови аргумент u и нова функција $v=v(u)$ смјенама $\begin{cases}x=u+1\\y=v-1\end{cases}$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3y+1}{3x+4y+1}\Rightarrow\frac{dv}{du}=-\frac{2(u+1)+3(v-1)+1}{3(u+1)+4(v-1)+1}$$

$\dfrac{dv}{du}=-\dfrac{2+3\frac{v}{u}}{3+4\frac{v}{u}}$; смјена $\dfrac{v}{u}=z(u)$; $v'=z+uz'$; $z+uz'=-\dfrac{2+3z}{3+4z}$; $uz'=-\dfrac{3z+4z^2+2+3z}{3+4z}$;

$\dfrac{3+4z}{2z^2+3z+1}dz=-\dfrac{2}{u}du$; $\ln(2z^2+3z+1)=-2\ln u+\ln C$; $2z^2+3z+1=\dfrac{C}{u^2}$. Опште решење је $\left(2(\dfrac{y+1}{x-1})^2+3\dfrac{y+1}{x-1}+1\right)(x-1)^2=C$.

<u>примјер</u>: $y'=-\dfrac{x+y+1}{2x+2y-1}$

<u>решење</u>: $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$ нема решење па се уводи нова функција $z=z(x)$ смјеном $x+y=z(x)$. Опште решење је $2x+2y+3\ln|x+y-2|=x+C$

<u>примјер</u>: $3x+y-2+y'(x-1)=0$
<u>решење</u>: $(x-1)(3x+2y-1)=C$

Квазихомогена једначина се некада може свести на хомогену смјеном $y=z^{\alpha}$.

<u>Примјер:</u> $y'=-\dfrac{2xy^3}{x^2y^2-1}$

<u>Решење:</u> $y=z^{\alpha}$; $y'=\alpha z^{\alpha-1}z'$; $\alpha z^{\alpha-1}z'=-\dfrac{2xz^{3\alpha}}{x^2z^{2\alpha}-1}$; послије множења са $\dfrac{1}{z^{\alpha-1}}$ добија се $\alpha z'=-\dfrac{2xz^{3\alpha}}{x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1}}$. Ако постоји α тако да збир експонената свих чланова који учествују у једначини буде једнак једначина ће бити хомогена. Ако такво α не постоји једначина се не може свести на хомогену тј. не може се решавати на овај начин. У овом случају треба да буде $1+3\alpha=2+3\alpha-1=\alpha-1$ а то је еквивалентно систему од двије једначине са једном непознатом: $\begin{cases} 1+3\alpha=2+3\alpha-1 \\ 1+3\alpha=\alpha-1 \end{cases}$ који може имати или немати решење. Овај систем има решење $\alpha=-1$ па се ова једначина може свести на хомогену смјеном $y=z^{-1}$. Добијамо $-z'=-\dfrac{2xz^{-3}}{x^2z^{-4}-z^{-2}}$ што послије множења бројиоца и имениоца са $\dfrac{z^4}{x^2}$ даје $z'=\dfrac{2\frac{z}{x}}{1-(\frac{z}{x})^2}$ што јесте хомогена једначина која се даље решава смјеном $\dfrac{z}{x}=u(x)$. Опште решење је $\dfrac{xy}{x^2y^2+1}=Cx$.

<u>Примјер:</u> $(y^4-3x^2)dy=-xydx$

<u>Решење</u>: послије одређивања $\alpha=\dfrac{1}{2}$ добија се опште решење $x^2=y^4+Cy^6$.

<u>Примјер:</u> $(x+y^3)dx+(3y^5-3y^2x)dy=0$

<u>Решење</u>: послије одређивања $\alpha=\dfrac{1}{3}$ добија се опште решење

$$arctg\frac{y^3}{x}=\frac{1}{2}\ln(y^6+x^2)+\ln C$$

Линеарна једначина

Једначина облика $y'+f(x)y+\varphi(x)=0$ се може решавати тако што

- Решење тражимо у облику производа $y=u(x)v(x)$ при чему се једна од непознатих функција одабере тако да једначина по преосталој непознатој функцији буде што једноставнија.

- Примијенимо формулу $y = e^{-\int f(x)dx}\left[C - \int \varphi(x) e^{\int f(x)dx} dx\right]$

<u>Примјер:</u> $y' + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0$

<u>Решење</u>: $y = u(x)v(x)$ даје $u'v + uv' + 2xuv - 2xe^{-x^2} = 0$ тј. $u'v + u(v' + 2xv) - 2xe^{-x^2} = 0$.
Ако функцију $v(x)$ одредимо тако да буде $v' + 2xv = 0$ тј. $v = e^{-x^2}$ добијамо $u'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} = 0$ тј. $u = x^2 + C$ па је опште решење $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$

<u>Примјер:</u> Површина троугла образованог радијус вектором произвољне тачке криве, тангентом у тој тачки и апсцисном осом једнака је 2. Наћи једначину те криве ако она пролази кроз тачку (1;2).

<u>Решење</u>: Једначина тангенте има облик $t:\ Y - y = y'(X - x)$ гдје су (x, y) координате додирне тачке а (X, Y) координате произвољне тачке тангенте. Задати троугао означимо са OAM гдје су тачке : $O(0,0)$ - координатни почетак; $A(\alpha,0)$ - пресјек тангенте и апсцисне осе; $M(x, y)$ - додирна тачка тангенте и криве. Из услова $A \in t$ добијамо $0 - y = y'(\alpha - x)$ тј. $\alpha = x - \frac{y}{y'}$. Услов за површину троугла $P_{OAM} = \frac{\alpha y}{2} = 2$ тј. $\alpha y = 4$ даје диференцијалну једначину која одговара фамилији кривих које задовољавају дати услов. Из $(x - \frac{y}{y'})y = 4$ добијамо једначину $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - 4}$.
Ако у тој једначини замијенимо улоге аргумента и функције тј. ако је третирамо као једначину по непознатој функцији $x = x(y)$ добијамо линеарну једначину $x'_y - \frac{1}{y}x + \frac{4}{y^2} = 0$ која има решење $x = e^{-\int -\frac{dy}{y}}\left[C - \int \frac{4}{y^2} e^{\int -\frac{dy}{y}} dy\right]$ тј. $x = y\left[C + \frac{2}{y^2}\right]$. Из општег решења и задатог услова добијамо $y(1) = 2 \Rightarrow 1 = 2\left[C + \frac{2}{2^2}\right]$ тј. $C = 0$ па је партикуларно решење $y = \frac{2}{x}$

<u>Примјер:</u> У базену се налази 100л раствора који садржи 10кг соли. У базен утиче 5л воде у минути, а истом брзином раствор истиче у други столитарски базен који је у почетку напуњен чистом водом. Вишак течности из њега се прелива. Послије колико времена ће количина соли у другом базену достићи максимум и колики ће он бити?

<u>Решење</u>: Количина соли у првом базену ће се за мали временски интервал Δt смањити за дио који директно пропорционално зависи од дужине интервала, количине воде која притиче у базен, и количине соли која се у том тренутку налази у базену, а обратно пропорционално од величине базена. Ако са $x(t)$ означимо количину соли у првом базену тада ће бити $x(t + \Delta t) = x(t) - \frac{\Delta t 5x(t)}{100}$ тј. $\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -\frac{x(t)}{20}$. Гранична вриједност кад $\Delta t \to 0$ даје нам диференцијалну једначину $x'(t) = -\frac{x(t)}{20}$ која има опште решење $x(t) = Ce^{-t/20}$. Из почетног услова

$x(0)=10$ добија се $C=10$ па је $x(t)=10e^{-t/20}$. Ако са $y(t)$ означимо количину соли у другом базену тада ће промјена за временски интервал Δt бити $y(t+\Delta t)=y(t)+\frac{\Delta t5x(t)}{100}-\frac{\Delta t5y(t)}{100}$ тј. $\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\frac{x(t)}{20}-\frac{y(t)}{20}$. Гранична вриједност кад $\Delta t\to 0$ даје нам диференцијалну једначину $y'(t)+\frac{y(t)}{20}-\frac{1}{2}e^{-t/20}=0$ која има опште решење $y=e^{-\int\frac{dt}{20}}\left[C+\int\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{20}}e^{\int\frac{dt}{20}}dt\right]$ тј. $y=e^{-\frac{t}{20}}\left[C+\frac{1}{2}t\right]$. Из почетног услова $y(0)=0$ добија се $C=0$ па је $y=\frac{te^{-t/20}}{2}$. Како је $y'=\frac{e^{-t/20}}{2}(1-\frac{t}{20})$ то је $y_{\max}=y(20)=\frac{10}{e}\approx 3.68$ тј. Максимална количина соли у другом базену ће бити 3.68кг послије 20 минута.

Бернулијева једначина

Једначина облика $y'+f(x)y+\varphi(x)y^n=0;\quad n\notin\{0,1\}$ се смјеном $z(x)=y^{1-n}$ своди на линеарну на следећи начин: $y'+f(x)y+\varphi(x)y^n=0\ \ /y^{-n}$

$$y'y^{-n}+f(x)y^{1-n}+\varphi(x)=0\ ;\ z(x)=y^{1-n};\ z'(x)=(1-n)y^{-n}y'$$

$$\frac{z'}{1-n}+f(x)z+\varphi(x)=0$$

$$z'+(1-n)f(x)z+(1-n)\varphi(x)=0$$

<u>примјер</u>: $xy'+y-y^2\ln x=0$

<u>решење</u>: $y'y^{-2}+\frac{1}{x}y^{-1}-\frac{\ln x}{x}=0$; $z=y^{-1}$; $z'=-y^{-2}y'$; $-z'+\frac{1}{x}z-\frac{\ln x}{x}=0$;

$z'-\frac{1}{x}z+\frac{\ln x}{x}=0$; $z=e^{\int\frac{dx}{x}}[C-\int\frac{\ln x}{x}e^{-\int\frac{dx}{x}}dx]\ =x[C-\int\ln x\frac{dx}{x^2}]=x[C+\frac{\ln x+1}{x}]$ тј.

$z=Cx+\ln x+1$; $y=\frac{1}{Cx+\ln x+1}$.

<u>примјер</u>: $(2x^2y\ln y-x)y'=y$

<u>решење</u>: Обзиром да облик $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x^2y\ln y-x}$ није погодан за решавање можемо замијенити улоге независне промјенљиве и функције тј. прећи на облик $\frac{dx}{dy}=\frac{2x^2y\ln y-x}{y}$; $x'_y+\frac{1}{y}x-(2\ln y)x^2=0$. Једначина сада има облик Бернулијеве: $x'_y+f(y)x+\varphi(y)x^2=0$

$x^{-2}x'_y+\frac{1}{y}x^{-1}-(2\ln y)=0$; $z(y)=x^{-1}$; $z'=-x^{-2}x'$; $-z'+\frac{1}{y}z-(2\ln y)=0$;

$z'-\frac{1}{y}z+(2\ln y)=0$; $z=e^{\int\frac{dy}{y}}[C-\int 2\ln ye^{-\int\frac{dy}{y}}dy]\ =y[C-\ln^2 y]$; $z=\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}=y[C-\ln^2 y]$

$1=xy[C-\ln^2 y]$.

<u>примјер</u>: $y'\cos y-\cos x\sin^2 y-\sin y=0$, $y(0)=\pi/2$.

<u>решење</u>: Послије смјене $\sin y=z$ једначина добија облик $z'-z-\cos xz^2=0$;

$-z^{-2}z'+z^{-1}+\cos x=0$; смјена $u(x)=z^{-1}$ даје $u'+u+\cos x=0$; $u=e^{-\int dx}[C-\int\cos xe^{\int dx}dx]$

$=e^{-x}[C-\int\cos xe^xdx]$; $u=e^{-x}[C-\frac{e^x\sin x+e^x\cos x}{2}]\ =Ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}$

$z=\dfrac{1}{Ce^{-x}-\dfrac{\sin x+\cos x}{2}}$; $\sin y=\dfrac{1}{Ce^{-x}-\dfrac{\sin x+\cos x}{2}}$; $y=\arcsin\dfrac{2}{2Ce^{-x}-\sin x-\cos x}$. За партикуларно решење имамо: $\dfrac{\pi}{2}=\arcsin\dfrac{2}{2C-1}$; $1=\dfrac{2}{2C-1}$; $y=\arcsin\dfrac{2}{3e^{-x}-\sin x-\cos x}$.

примјери за вјежбање:

$y'+2ax^3y^3+2xy=0$; решење: $y=[\sqrt{e^{2x^2}C-a(x^2+0.5)}]^{-1}$

Једначина са тоталним диференцијалом

Ако је у једначини $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ лијева страна диференцијал функције $U(x,y)$ тј. ако је $dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ тада је решење $U(x,y)=C$. Услов који треба да буде задовољен да би једначина била са тоталним диференцијалом је $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Ако је услов задовољен треба одредити непознату функцију $U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y) \qquad \Rightarrow \quad U=\int P(x,y)dx+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y) \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+\varphi'(y)$$

$$Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+\varphi'(y);\ \varphi'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx;$$

$$\varphi(y)=\int(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx)dy$$

$$U=\int P(x,y)dx+\int(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx)dy$$

опште решење је: $U(x,y)=C$.

<u>примјер:</u> Ријешити диф. ј-ну: $y'=\dfrac{(a-x^2-y^2)x}{(a+x^2+y^2)y}$.

<u>решење:</u> Једначина се може записати у облику:
$(x^2+y^2-a)xdx+(a+x^2+y^2)ydy=0$,тј. $Pdx+Qdy=0$ Како је задовољен услов $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ имамо једначину са тоталним диференцијалом чиме се задатак своди на налажење функције $U=U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из $\dfrac{\partial U}{\partial x}=x^3+xy^2-ax$ имамо $U=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2y^2}{2}-\dfrac{ax^2}{2}+\varphi(y)$. Како је $\dfrac{\partial U}{\partial y}=x^2y+\varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\dfrac{\partial U}{\partial y}=y^3+x^2y+ay$ то је $\varphi'(y)=y^3+ay$; $\varphi(y)=\dfrac{y^4}{4}+\dfrac{ay^2}{2}$;
$U=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2y^2}{2}-\dfrac{ax^2}{2}+\dfrac{y^4}{4}+\dfrac{ay^2}{2}$. Опште решење је $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2y^2}{2}-\dfrac{ax^2}{2}+\dfrac{y^4}{4}+\dfrac{ay^2}{2}=\dfrac{C}{4}$ тј $(x^2+y^2)^2-2a(x^2-y^2)=C$.

<u>примјер:</u> $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0$

<u>решење:</u> $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial(x^3+xy^2)}{\partial y}=2xy$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial(x^2y+y^3)}{\partial x}=2xy$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=(x^3+xy^2)\Rightarrow U=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y)\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial y}=x^2y+\varphi'(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=(x^2y+y^3)\wedge\frac{\partial U}{\partial y}=x^2y+\varphi'(y)\Rightarrow\varphi'(y)=y^3\Rightarrow\varphi(y)=\frac{y^4}{4}$$

$U=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}$ па је опште решење: $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C$.

Интеграциони множитељ

Ако код једначине $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ није задовољен услов $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ можемо покушати да множењем једначине неком функцијом $\lambda=\lambda(x,y)$ добијемо једначину $\lambda P(x,y)dx+\lambda Q(x,y)dy=0$ код које ће услов бити задовољен. Овдје ћемо размотрити само најједноставније облике функције $\lambda=\lambda(x,y)$, коју називамо интеграциони множитељ, који дозвољавају њено лако налажење.

Нека је $\lambda=\lambda(x)$. Тада из $\frac{\partial\lambda P}{\partial y}=\frac{\partial\lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{d\lambda}{dx}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$ то јест $\lambda(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=Q\frac{d\lambda}{dx}$. Добијену једнакост $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx=\frac{d\lambda}{\lambda}$ можемо интегралити ако је члан уз dx функција која зависи само од x. То представља услов за постојање интеграционог множитеља $\lambda=\lambda(x)$ и истовремено даје начин за његово одређивање.

Слично се из једнакости $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy=\frac{d\lambda}{\lambda}$ може добити интеграциони множитељ $\lambda=\lambda(y)$ ако је члан уз dy функција која зависи само од y.

<u>примјер:</u> $(x+y^2)dx-2xydy=0$

<u>решење:</u> Једначина није једначина са тоталним диференцијалом јер је $\frac{\partial P}{\partial y}=2y$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y$. Како је $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{2y+2y}{-2xy}=-\frac{2}{x}$ то из $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx$ можемо одредити функцију $\lambda=\lambda(x)$ као интеграциони множитељ која ј-ну своди на ј-ну са тоталним диференцијалом. $\frac{d\lambda}{\lambda}=-\frac{2}{x}dx\Rightarrow\ \ln\lambda=-2\ln x\Rightarrow\ \lambda=\frac{1}{x^2}$. Послије множења: $(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2})dx-2\frac{y}{x}dy=0$ па је $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ чиме се задатак своди на налажење функције $U=U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}$ имамо $U=\ln x-\frac{y^2}{x}+\varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{2y}{x}+\varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{2y}{x}$ то је $\varphi'(y)=0$. $U=\ln x-\frac{y^2}{x}$ Опште решење је $\ln x-\frac{y^2}{x}=C$.

<u>примјер:</u> Ријешити диф. j-ну: $y' = \frac{xy}{y^3 + x^2 y + x^2}$.

<u>решење:</u> $xydx - (y^3 + x^2 y + x^2)dy = 0$. Како је $\frac{\partial P}{\partial y} = x$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy - 2x$ тада је

$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{-2xy - 2x - x}{xy} = \frac{-2y - 3}{y}$ па из $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy$ можемо одредити функцију $\lambda = \lambda(y)$ као интеграциони множитељ која j-ну своди на j-ну са тоталним диференцијалом. $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-2y - 3}{y} dy \Rightarrow \ln \lambda = -2y - 3\ln y \Rightarrow \lambda = \frac{e^{-2y}}{y^3}$. Послије множења:

$\frac{x}{e^{2y} y^2} dx - \frac{y^3 + x^2 y + x^2}{e^{2y} y^3} dy = 0$ па је $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2x(y+1)}{e^{2y} y^3} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ чиме се задатак своди на налажење функције $U = U(x, y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{e^{2y} y^2}$ имамо $U = \frac{x^2}{2e^{2y} y^2} + \varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 \frac{-4y^2 - 4y}{4e^{2y} y^4} + \varphi'(y)$ и

истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{y^3 + x^2 y + x^2}{e^{2y} y^3}$ то је $\varphi'(y) = -e^{-2y}$ па је $\varphi(y) = \frac{e^{-2y}}{2}$.

$U = \frac{x^2}{2e^{2y} y^2} + \frac{1}{2e^{2y}}$. Опште решење је $\frac{x^2 + y^2}{2e^{2y} y^2} = C$. Због множења са $\lambda = \frac{e^{-2y}}{y^3}$ вршимо провјеру да ли је $y = 0$ решење. Очигледно јесте, и не може се добити ни за једну вриједност константе из општег решења па представља сингуларно решење.

примјери за вјежбање:
$(2x^2 y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$; $2xy + 5arctgx = C$.

У ситуацијама када се не може одредити интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве можемо покушати, зависно од облика функција $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ да одредимо множитељ у облику $\lambda = \lambda(x + y)$ или $\lambda = \lambda(x^2 + y^2)$...

<u>примјер:</u> $x(xy - 3)y' + (xy^2 - y) = 0$.

<u>решење:</u> Из $y(xy - 1)dx + x(xy - 3)dy = 0$ имамо $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy - 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3$. Како не постоји интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве тражимо, обзиром на облик функција $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ функцију $\lambda = \lambda(xy)$. Ако означимо $t = xy$ тада је $\lambda = \lambda(t) = \lambda(t(x; y))$. Из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \lambda}{\partial x}$. Како је $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dt} y$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt} x$ то је $\lambda \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{d\lambda}{dt} x = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{d\lambda}{dt} y$. Из

$P \frac{d\lambda}{dt} x - Q \frac{d\lambda}{dt} y = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} - \lambda \frac{\partial P}{\partial y}$ тј. $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy} dt$ закључујемо да ако је $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy} = F(t)$ онда постоји интеграциони множитељ $\lambda = \lambda(xy)$. Овдје је

$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Px - Qy} = \frac{2xy - 3 - 2xy + 1}{xy(xy - 1) - xy(xy - 3)}$ па имамо $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-2}{2xy} dt$ тј. $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-dt}{t}$. Послије одређивања множитеља $\lambda = \frac{1}{t}$ тј. $\lambda = \frac{1}{xy}$ добија се једначина $\frac{xy-1}{x}dx + \frac{xy-3}{y}dy = 0$ код које је $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Опште решење једначине се може записати у облику $xy - \ln xy^3 = C.$ Осим тога, због множења са $\lambda = \frac{1}{xy}$ имамо и сингуларно решење $y = 0$. (Задатак се може ријешити и смјеном $y = z^\alpha$)

<u>примјер:</u> ријешити $(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0$ знајући да је интеграциони множитељ облика $\lambda = \lambda(x + y^2)$.

<u>решење:</u> смјена $z = x + y^2$ даје $\lambda = \lambda(z)$ па из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \lambda}{\partial y} = Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$. Како је $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dz}$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dz}2y$ то је

$\lambda(2 + 2y) + (3x + 2y + y^2)\frac{d\lambda}{dz}2y = (x + 4xy + 5y^2)\frac{d\lambda}{dz} + \lambda(1 + 4y)$

$\frac{d\lambda}{dz}(6xy + 4y^2 + 2y^3 - x - 4xy - 5y^2) = \lambda(1 + 4y - 2 - 2y)$; $\frac{d\lambda}{dz}(2xy - y^2 + 2y^3 - x) = \lambda(-1 + 2y)$

$\frac{d\lambda}{dz}(x + y^2)(-1 + 2y) = \lambda(-1 + 2y)$; $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dz}{x + y^2}$; $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dz}{z}$ интеграцијом добијамо $\lambda = z$ то јест $\lambda = x + y^2$. Послије множења добијамо

$(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)dx + (x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 8xy + 6y^2 + 4y^3 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ па добијена једначина јесте са тоталним диференцијалом. Из $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4$ имамо

$U = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + \varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + \varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4$ то је $\varphi'(y) = 5y^4$,

$\varphi(y) = y^5$, $U = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5$ Опште решење је

$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = C$.

<u>примјер:</u> ријешити $(x - 2y^3)dx + (2x - y^3)3y^2dy = 0$

<u>решење:</u> $\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6y^2$. Једначина није са тоталним диференцијалом и не постоји интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве. Обзиром на облик функција $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ функцију $\lambda = \lambda(x; y)$ можемо тражити у неком од облика $\lambda = \lambda(x - y^3)$ или $\lambda = \lambda(x + y^3)$ или $\lambda = \lambda(2x + y^3)$... Ако постоји множитељ који на неки начин зависи од x и y^3, да не би нагађали какав је тај облик можемо га потражити као $\lambda = \lambda(ax + by^3)$. Ако означимо $t = ax + by^3$ тада је $\lambda = \lambda(t) = \lambda(t(x; y))$.

Из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \lambda}{\partial x}$. Како је $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dt}a$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt}3by^2$ то је $\lambda\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{d\lambda}{dt}3by^2 = \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{d\lambda}{dt}a$. Из

$(P3by^2 - Qa)\frac{d\lambda}{dt} = \lambda(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$ тј. $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P3by^2 - Qa} dt$ закључујемо да ако је $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P3by^2 - Qa} = F(t) = F(ax + by^3)$ онда постоји интеграциони множитељ $\lambda = \lambda(ax + by^3)$.

Из $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P3by^2 - Qa} = \frac{6y^2 + 6y^2}{3by^2(x - 2y^3) - 3ay^2(2x - y^3)}$ имамо $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{12y^2}{3y^2((b-2a)x + (-2b+a)y^3)} dt$ тј. $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{4dt}{(-2a+b)x + (a-2b)y^3}$. Ако можемо одредити константе a и b тако да буде $(-2a+b)x + (a-2b)y^3 = K(ax + by^3)$ тада ће бити $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{4dt}{K(ax + by^3)}$. То значи да за те вриједности a и b постоји множитељ $\lambda = \lambda(ax + by^3)$. Из $(-2a+b)x + (a-2b)y^3 = K(ax + by^3)$ добијамо систем за одређивање a и b

$\begin{cases} -2a + b = Ka \\ a - 2b = Kb \end{cases}$ тј. $\begin{cases} (-2-K)a + b = 0 \\ a + (-2-K)b = 0 \end{cases}$. Детерминанта система је једнака нули (тј. систем има нетривијална решења) за $K = -3$ и $K = -1$. То значи да можемо одредити двије функције које множењем једначину доводе на жељени облик. Коју од њих је боље користити? За $K = -3$ добија се $b = -a$ па за $a = 1$ добијамо $t = x - y^3$ и $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{4dt}{-3(x - y^3)}$ па је $\lambda = (x - y^3)^{-4/3}$. За $K = -1$ добија се $b = a$ па за $a = 1$ добијамо $t = x + y^3$ и $\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{4dt}{-(x + y^3)}$ па је $\lambda = (x + y^3)^{-4}$. Послије множења са $\lambda = (x + y^3)^{-4}$ добијамо једначину $\frac{x - 2y^3}{(x + y^3)^4} dx + \frac{(2x - y^3)3y^2}{(x + y^3)^4} dy = 0$ за коју је $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{18y^2(-x + y^3)}{(x + y^3)^5} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Из $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x - 2y^3}{(x + y^3)^4} = \frac{x + y^3 - 3y^3}{(x + y^3)^4} = \frac{1}{(x + y^3)^3} - 3y^3 \frac{1}{(x + y^3)^4}$ добија се $U(x;y) = \frac{-x + y^3}{2(x + y^3)^3} + \varphi(y)$. Послије диференцирања и одређивања $\varphi(y)$ добија се опште решење $\frac{-x + y^3}{2(x + y^3)^3} = \frac{C}{2}$.(За $y = z^\alpha$ се послије одређивања $\alpha = \frac{1}{3}$ једначина своди на хомогену.)

Рикатијева једначина

$y' + f(x)y^2 + \varphi(x)y + \psi(x) = 0; \quad (f(x) \neq 0)$

Једначина у општем случају, за разне вриједности функција $f(x);\varphi(x);\psi(x)$ није решива помоћу квадратура. За неке специјалне случајеве решење можемо тражити на следеће начине:

Методом покушаја тражимо једно партикуларно решење. Облик у коме тражимо решење зависи од функција које учествују у једначини. Ако пронађемо решење y_p за које је $y_p' + f(x)y_p^2 + \varphi(x)y_p + \psi(x) = 0$ тада једначина смјеном $y = y_p + z(x)$ постаје:

$(y_p+z(x))'+f(x)(y_p+z(x))^2+\varphi(x)(y_p+z(x))+\psi(x)=0$

$y_p'+z'(x)+f(x)(y_p^2+2y_pz(x)+z^2(x))+\varphi(x)(y_p+z(x))+\psi(x)=0$

$y_p'+f(x)y_p^2+\varphi(x)y_p+\psi(x)+z'+(2f(x)y_p+\varphi(x))z+f(x)z^2=0$. Добијена Бернулијева једначина $z'+(2f(x)y_p+\varphi(x))z+f(x)z^2=0$ тј $-\dfrac{z'}{z^2}-\dfrac{2f(x)y_p+\varphi(x)}{z}-f(x)=0$ се даље смјеном $z^{-1}=u(x)$ своди на $u'-(2f(x)y_p+\varphi(x))u-f(x)=0$. Решење добијене линеарне једначине $u=u(x,C)$ даје опште решење полазне једначине $y=y_p+u^{-1}(x,C)$. У случају да се партикуларно решење y_p не може добити из општег решења ни за коју вриједност константе C то је сингуларно решење, које заједно са општим решењем чини скуп свих решења полазне једначине.

У случају да не можемо да одредимо ниједно партикуларно решење које би на претходни начин водило до општег решења можемо покушати да до решења дођемо у два корака на следећи начин: Решење тражимо у облику $y=u(x)+v(x)$. Једначину $(u+v)'+f(x)(u+v)^2+\varphi(x)(u+v)+\psi(x)=0$ запишемо у облику сређеном по једној од непознатих функција $v'+f(x)v^2+(\varphi(x)+2f(x)u)v+(u'+f(x)u^2+\varphi(x)u+\psi(x))=0$.
Избор функције $u(x)$ вршимо тако да добијена једначина по преосталој непознатој функцији $u(x)$ буде што лакша за решавање.

<u>Примјер:</u> $x^2y'+xy+x^2y^2=4$

<u>решење:</u> функције које учествују у једначини су полиноми па партикуларно решење тражимо у облику $y_p=C$, $y_p=ax$, $y_p=ax^2+bx+c$, $y_p=\dfrac{a}{x}$, ... На примјер за $y_p=ax$ добијамо замјеном у једначину $x^2a+xax+x^2a^2x^2=4$ што није идентитет, па $y_p=ax$ није решење. Замјеном $y_p=\dfrac{a}{x}$ добијамо $x^2(-\dfrac{a}{x^2})+x\dfrac{a}{x}+x^2\dfrac{a^2}{x^2}\equiv 4$ тј $a^2\equiv 4$ што је задовољено за $a=\pm 2$ па добијамо два партикуларна решења $y_1=\dfrac{2}{x}$ и $y_2=-\dfrac{2}{x}$. Смјеном $y=\dfrac{2}{x}+z(x)$ добијамо $x^2(-\dfrac{2}{x^2}+z')+x(\dfrac{2}{x}+z)+x^2(\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x}z+z^2)=4$

$x^2z'+5xz+x^2z^2=0$. $-z^{-2}z'-5x^{-1}z^{-1}-1=0$. Смјена $z^{-1}=u(x)$ даје $u'-5x^{-1}u-1=0$,

$u=e^{-\int -5x^{-1}dx}[\tilde{C}-\int -e^{\int -5x^{-1}dx}dx]$, $u=x^5[\tilde{C}+\int x^{-5}dx]$ $u=x^5[\dfrac{C}{4}-\dfrac{x^{-4}}{4}]$, $u=\dfrac{Cx^5-x}{4}$ па је опште решење $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{Cx^5-x}$. Из општег решења се очигледно за $C=0$ може добити решење $y_2=-\dfrac{2}{x}$. Решење $y_1=\dfrac{2}{x}$ се ни за једну вриједност константе C не може добити јер не може бити $\dfrac{4}{Cx^5-x}\equiv 0$, па је то сингуларно решење. Скуп свих решења је $\begin{cases} y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{Cx^5-x} \\ y=\dfrac{2}{x}\end{cases}$.

<u>Примјер:</u>

$y'+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x$

<u>решење:</u> партикуларно решење тражимо у облику $y=ae^{2x}+be^x$

$(2ae^{2x}+be^x)+2(ae^{2x}+be^x)e^x-(a^2e^{4x}+2abe^{3x}+b^2e^{2x})\equiv e^{2x}+e^x$

$(b-1)e^x+(2a+2b-b^2-1)e^{2x}+(2a-2ab)e^{3x}-a^2e^{4x}\equiv 0$

$$\left.\begin{array}{c} b-1=0 \\ 2a+2b-b^2-1=0 \\ 2a-2ab=0 \\ -a^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a=0 \\ b=1 \end{array} \Rightarrow y_p=e^x$$

. Смјена $y=e^x+z(x)$ даје опште решење

$y=e^x-\frac{1}{x+C}$ и сингуларно $y=e^x$.

Примјер: $xy'-xy^2-(2x^2+1)y-x^3=0$

решење: партикуларно решење тражимо у облику $y=ax$

$xa-xa^2x^2-(2x^2+1)ax-x^3\equiv 0\Rightarrow -a^2-2a-1=0\Rightarrow a=-1$ Партикуларно решење је $y_p=-x$. Примјеном смјене $y=-x+\frac{1}{u(x)}$ тј. $y'=-1-\frac{u'}{u^2}$ добијамо

$x(-1-\frac{u'}{u^2})-x(x^2-2\frac{x}{u}+\frac{1}{u^2})-(2x^2+1)(-x+\frac{1}{u})-x^3=0$; $-x\frac{u'}{u^2}-\frac{x}{u^2}-\frac{1}{u}=0\Rightarrow\quad u'+\frac{1}{x}u+1=0$

$u=e^{-\int\frac{dx}{x}}[C-\int e^{\int\frac{dx}{x}}dx]\Rightarrow\quad u=\frac{1}{x}[C-\frac{x^2}{2}]\quad y=-x+\frac{x}{C-\frac{x^2}{2}}\Rightarrow\quad y=\frac{x^3+x(2-2C)}{2C-x^2}$ па је скуп

свих решења $\left\{\begin{array}{c} y=\frac{x^3+x(2-2C)}{2C-x^2} \\ y=-x \end{array}\right.$

Примјер: $y'+y^2+(xy-1)\frac{1}{x^2}=0$

решење: $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{2Cx^3-x}$; $y=\frac{1}{x}$

Примјер: $x^3y'-x^4y^2+x^2y+20=0$

решење: $y=\frac{4}{x^2}+\frac{9x^7}{C-x^9}$; $y=\frac{4}{x^2}$

Примјер: $y'=y^2-2x^2y+x^4+2x+4$

решење: Решење тражимо у облику $y=u(x)+v(x)$.

$u'+v'=u^2+2uv+v^2-2x^2u-2x^2v+x^4+2x+4$ Једначину средимо по једној од непознатих функција: $u'=u^2+(2v-2x^2)u+(-v'+v^2-2x^2v+x^4+2x+4)$ Функцију $v(x)$ бирамо тако да једначина по $u(x)$ буде што једноставнија. Не можемо изабрати $v(x)$ тако да буде $-v'+v^2-2x^2v+x^4+2x+4=0$ јер се то своди на решавање полазне једначине. Стога бирамо $v(x)$ тако да буде $2v-2x^2=0$ тј $v=x^2$. Једначина постаје $u'=u^2+4$. Из $\frac{du}{u^2+4}=dx$ добијамо $\frac{1}{2}arctg\frac{u}{2}=x+C$ тј $u=2tg(2x+2C)$ па је опште решење $y=x^2+2tg(2x+2C)$.

коментар: У неким случајевима једначине можемо решавати једноставније него иначе, ако прије примјене стандардних поступака уочимо неке ствари које конкретну једначину поједностављују и примијенимо их. Овдје се j-на може записати као $y'=(y-x^2)^2+2x+4$ и примијенити смјена $y-x^2=u(x)$ која брже и лакше доводи до j-не $u'=u^2+4$.

Једначине облика $F(x;y;y')=0$

Ако једначина $(y')^n + p_1(x;y)(y')^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x;y)y' + p_n(x;y) = 0$ има $k \le n$ реалних решења $y' = f_1(x;y)$, $y' = f_2(x;y)$, ... $y' = f_k(x;y)$ тада њихова решења $\varphi_1(x;y;C)=0$, $\varphi_2(x;y;C)=0$, ... $\varphi_k(x;y;C)=0$ записана у облику производа $\varphi_1(x;y;C)\varphi_2(x;y;C)\ldots\varphi_k(x;y;C)=0$ представљају опште решење полазне једначине.

<u>Примјер:</u> $yy'^2 + (x-y)y' - x = 0$

<u>решење:</u> $y'^2 + \frac{x-y}{y}y' - \frac{x}{y} = 0$ има решења $y'_{1/2} = \frac{-\frac{x-y}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{x-y}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y}}}{2}$ тј.
$y'_{1/2} = \frac{-\frac{x-y}{y} \pm \frac{x+y}{y}}{2}$. Из $y'_1 = 1$ добијамо решење $y = x + C$. Из $y'_2 = -x/y$ добијамо решење $y^2 = -x^2 + C$. Опште решење је $(y-x-C)(y^2+x^2-C)=0$.

<u>Примјер:</u> $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0$

<u>решење:</u> $y'^2(y'-y) - x^2(y'-y) = 0$; $(y'-y)(y'^2-x^2)=0$; $(y'-y)(y'-x)(y'+x)=0$ има опште решење $(y-Ce^x)(y-\frac{x^2}{2}-C)(y+\frac{x^2}{2}-C)=0$.

Ако се једначина облика $F(x;y;y')=0$ не може ријешити по y' али се може записати у облику $y = f(x;y')$ или $x = f(y;y')$ можемо примијенити метод увођења параметра.

<u>Примјер:</u> $y = x + y' - \ln y'$

<u>решење:</u> Параметар уводимо смјеном $y' = p$; $dy = pdx$. Добијамо $y = x + p - \ln p$. Нађемо тотални диференцијал лијеве и десне стране: $dy = dx + dp - \frac{1}{p}dp$. Како је $dy = pdx$ добијамо $(p-1)dx = \frac{p-1}{p}dp$ тј $(p-1)(dx - \frac{dp}{p}) = 0$. Из $dx - \frac{dp}{p} = 0$ добијамо $x = \ln p + C$ што са већ добијеним $y = x + p - \ln p$ даје решење у параметарском облику: $\begin{cases} x = \ln p + C \\ y = p + C \end{cases}$. Ако је могуће елиминисати параметар, и прећи на експлицитно решење пожељно је то и урадити. Из $x = \ln p + C$ имамо $p = e^{x-C}$ па је опште решење $y = e^{x-C} + C$. Из $p - 1 = 0$ добијамо $p = 1$ што са $y = x + p - \ln p$ даје $y = x + 1$ што очигледно јесте сингуларно решење.

<u>Примјер:</u> $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$

<u>решење:</u> Из $\ln y' = \frac{xy'}{y}$ тј. $y = \frac{xy'}{\ln y'}$и $y' = p$; $dy = pdx$ добијамо $y = \frac{xp}{\ln p}$. Нађемо тотални диференцијал лијеве и десне стране: $dy = \frac{p}{\ln p}dx + x\frac{\ln p - 1}{\ln^2 p}dp$. Како је $dy = pdx$ добијамо $(p - \frac{p}{\ln p})dx = x\frac{\ln p - 1}{\ln^2 p}dp$ тј $p(\frac{\ln p - 1}{\ln p})dx = x\frac{\ln p - 1}{\ln^2 p}dp$. Опште решење тражимо из $\frac{p}{\ln p}dx = \frac{x}{\ln^2 p}dp$. Добијамо $\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p\ln p}$ тј. $\ln x + \ln C = \ln\ln p$.

Елиминацијом параметра добијамо $p = e^{Cx}$ па је опште решење $y = \dfrac{xe^{Cx}}{\ln e^{Cx}}$ тј. $y = \dfrac{1}{C}e^{Cx}$. Сингуларно решење $y = ex$ добијамо из $\ln p = 1$ тј. $p = e$ и $y = \dfrac{xp}{\ln p}$.

Лагранжова једначина

$y = f(y')x + \varphi(y')$

Параметар p се уводи смјеном $y' = p$; $dy = pdx$.Једначина добија облик $y = f(p)x + \varphi(p)$. Из $dy = f(p)dx + xf'(p)dp + \varphi'(p)dp$ и $dy = pdx$ добија се $(p - f(p))dx = xf'(p)dp + \varphi'(p)dp$ тј. $\dfrac{dx}{dp} = x\dfrac{f'(p)}{p - f(p)} + \dfrac{\varphi'(p)}{p - f(p)}$. Решавањем ове линеарне једначине добија се опште решење $\begin{cases} x = x(p;C) \\ y = f(p)x(p;C) + \varphi(p) \end{cases}$.

<u>Примјер:</u> $y = 2xy' + \ln y'$

<u>решење:</u> Уводимо $y' = p$; $dy = pdx$. Добијамо $y = 2xp + \ln p$. Нађемо тотални диференцијал лијеве и десне стране: $dy = 2pdx + 2xdp + \dfrac{1}{p}dp$. Како је $dy = pdx$ добијамо $pdx + 2xdp + \dfrac{1}{p}dp = 0$ тј $\dfrac{dx}{dp} + \dfrac{2}{p}x + \dfrac{1}{p^2} = 0$. Опште решење ове линеарне једначине је $x = e^{-\int \frac{2}{p}dp}[C - \int \dfrac{1}{p^2}e^{\int \frac{2}{p}dp}dp]$ тј. $x = \dfrac{C-p}{p^2}$ па је опште решење полазне једначине $\begin{cases} x = \dfrac{C-p}{p^2} \\ y = 2\dfrac{C-p}{p} + \ln p \end{cases}$.

<u>Примјер:</u> $y = x(1 + y') + y'^2$

<u>решење:</u> Уводимо $y' = p$; $dy = pdx$. Добијамо $y = x(1+p) + p^2$. Нађемо тотални диференцијал лијеве и десне стране: $dy = (1+p)dx + xdp + 2pdp$. Како је $dy = pdx$ добијамо $dx + xdp + 2pdp = 0$ тј $\dfrac{dx}{dp} + x + 2p = 0$. Опште решење ове линеарне једначине је $x = e^{-\int dp}[C - \int 2pe^{\int dp}dp]$ тј. $x = e^{-p}[C - 2(p-1)e^{p}]$ па је опште решење полазне једначине $\begin{cases} x = Ce^{-p} - 2p + 2 \\ y = (Ce^{-p} - 2p + 2)(1+p) + p^2 \end{cases}$

Клероова једначина

$y = xy' + \varphi(y')$

Параметар p се уводи смјеном $y' = p$; $dy = pdx$.Једначина добија облик $y = xp + \varphi(p)$. Из $dy = pdx + xdp + \varphi'(p)dp$ и $dy = pdx$ добија се $0 = (x + \varphi'(p))dp$. Из $dp = 0$ добија се $p = C$ па је опште решење $y = Cx + \varphi(C)$. Осим тога једначина може имати и сингуларно решење које се добија елиминацијом параметра из $x+\varphi'(p)=0$ и $y=xp+\varphi(p)$.

Примјер: $y=xy'+y'^2$

решење: Уводимо $y'=p$; $dy=pdx$. Добијамо $y=xp+p^2$. Нађемо тотални диференцијал лијеве и десне стране: $dy=pdx+xdp+2pdp$. Како је $dy=pdx$ добијамо $(x+2p)dp=0$. Из $dp=0$ добијамо опште решење $y=Cx+C^2$. Из $x+2p=0$ и $y=xp+p^2$ елиминацијом параметра добијамо сингуларно решење $y=-\frac{x^2}{4}$.

Примјер: Наћи једначину криве чији одсјечак тангенте међу координатним осама има сталну дужину a.

решење: Ако тачке пресјека произвољне тангенте са x и y осама означимо са $A(\alpha,0)$ и $B(0,\beta)$ услов који крива треба да задовољи постаје $d(A;B)=a$ тј. $\sqrt{(\alpha-0)^2+(0-\beta)^2}=a$. Једначина тангенте има облик $t:\ Y-y=y'(X-x)$ гдје су (x,y) координате додирне тачке а (X,Y) координате произвољне тачке тангенте. Из услова $A\in t$ добијамо $0-y=y'(\alpha-x)$ тј. $\alpha=x-\frac{y}{y'}$. Из услова $B\in t$ добијамо $\beta-y=y'(0-x)$ тј. $\beta=y-xy'$. Услов $\alpha^2+\beta^2=a^2$ даје диференцијалну једначину $(x-\frac{y}{y'})^2+(y-xy')^2=a^2$ која се може записати као $(y-xy')^2(1+\frac{1}{y'^2})=a^2$ тј. као $(y-xy')^2=a^2\frac{y'^2}{1+y'^2}$. Послије кореновања добијамо $y=xy'\pm\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Послије $y'=p$; $dy=pdx$ добија се $y=xp\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$. Послије диференцирања добија се $dy=xdp+pdx\pm\frac{a}{\sqrt{(1+p^2)^3}}dp$ тј. $0=(x\pm\frac{a}{\sqrt{(1+p^2)^3}})dp$. Из $dp=0$ добијамо опште решење $y=Cx\pm\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$. Из $x\pm\frac{a}{\sqrt{(1+p^2)^3}}=0$ и $y=xp\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ добијамо $x=\mp\frac{a}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$ и $y=\mp\frac{a}{\sqrt{(1+p^2)^3}}p\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ тј. $y=\pm\frac{ap^3}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$. Елиминацијом параметра добијамо сингуларно решење $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Примјер: Наћи једначину криве код које тангента образује са координатним осама троугао површине $2a^2$.

решење: $xy=a^2$

Једначине облика $F(x,y^{(n)})=0$

a. Може се ријешити по $y^{(n)}$ тј. довести на облик $y^{(n)}=f(x)$. Узастопним интеграцијама добија се опште решење

$$y=\int\int...\int f(x)dxdx...dx+C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+...+C_{n-1}x+C_n .$$

b. Једначина се не може ријешити по $y^{(n)}$ али се може параметризовати:
$x=\varphi(t)$; $y^{(n)}=\psi(t)$. Тада се из $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=\psi(t)\varphi'(t)dt$ добија
$y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi'(t)dt=\psi_1(t,C_1)$; $dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=\psi_1(t,C_1)\varphi'(t)dt$;
$y^{(n-2)}=\int\psi_1(t,C_1)\varphi'(t)dt=\psi_2(t,C_1,C_2)\ldots$ Решење у параметарском облику ће бити: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi_n(t,C_1,\ldots,C_n) \end{cases}$.

<u>примјер</u>:
Наћи решење једначине $y''=xe^x$ које задовољава услове $y(0)=1$; $y'(0)=0$
<u>решење</u>:
$y'=\int xe^x dx+C_1=(x-1)e^x+C_1$; $y=\int(x-1)e^x dx+C_1x+C_2=(x-2)e^x+C_1x+C_2$ је опште решење. Из $y'(0)=0\Rightarrow C_1=1$ и $y(0)=1\Rightarrow C_2=3$ па је тражено партикуларно решење: $y=(x-2)e^x+x+3$.
<u>примјер</u>:
$e^{y''}+y''=x$
<u>решење</u>:
Параметризацијом једначине добијамо $y''=t$; $x=e^t+t$. Тада је $dx=(e^t+1)dt$ па је

$dy'=y''dx=t(e^t+1)dt$ и $y'=\int t(e^t+1)dt+C_1=(t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+C_1$;

$dy=y'dx=\left((t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+C_1\right)(e^t+1)dt$; $y=\int\left((t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+C_1\right)(e^t+1)dt+C_2\ldots$ Решење у параметарском облику ће бити: $\begin{cases} x=e^t+t \\ y=(\frac{t}{2}-\frac{3}{4})e^{2t}+(\frac{t^2}{2}-1+C_1)e^t+\frac{t^3}{6}+C_1t+C_2 \end{cases}$.

Једначине облика $F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$

a. Може се ријешити по $y^{(n)}$ тј. довести на облик $y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$. Смјена $y^{(n-1)}=z(x)$ доводи до облика $z'=f(z)$. Решење те једначине је $\alpha(x,z,C_1)=0$ тј. $\alpha(x,y^{(n-1)},C_1)=0$ чиме се једначина своди на претходни тип.
b. Једначина се не може ријешити по $y^{(n)}$ али се може параметризовати:
$y^{(n-1)}=\varphi_1(t)$; $y^{(n)}=\psi(t)$. Тада се из $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$ тј. $\varphi_1'(t)dt=\psi(t)dx$ добија
$dx=\frac{\varphi_1'(t)}{\psi(t)}dt$ и $x=\int\frac{\varphi_1'(t)}{\psi(t)}dt+C_1=\lambda(t,C_1)$; $dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=\varphi_1(t)\frac{\varphi_1'(t)}{\psi(t)}dt$;
$y^{(n-2)}=\int\varphi_1(t)\frac{\varphi_1'(t)}{\psi(t)}dt+C_2=\varphi_2(t,C_2)\ldots$ Решење у параметарском облику ће бити: $\begin{cases} x=\lambda(t,C_1) \\ y=\varphi_n(t,C_2,\ldots,C_n) \end{cases}$.

<u>примјер</u>:
$y''''=\sqrt{y'''}$
<u>решење</u>:
смјена $y'''=z(x)$ доводи до једначине облика $z'=\sqrt{z}$ тј $z^{-1/2}dz=dx$ која има решење $2z^{1/2}=x+2C_1$ тј. $z=(\frac{x}{2}+C_1)^2$. Тиме се добија једначина $y'''=(\frac{x}{2}+C_1)^2$ која послије

три интеграције даје опште решење полазне једначине
$y=\frac{2}{15}(\frac{x}{2}+C_1)^5+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$;

Једначине облика $F(y^{(n-2)},y^{(n)})=0$

Смјена $y^{(n-2)}=z(x)$ доводи до једначине $F(z,z'')=0$. Ако се може ријешити по другом изводу добијамо $z''=f(z)$. Тада је $2z'z''=2f(z)z'$, $(z'^2)'=2f(z)z'$, $d(z'^2)=2f(z)dz$,
$z'^2=\int 2f(z)dz+C_1$, $z'=\sqrt{\int 2f(z)dz+C_1}$, $\frac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz+C_1}}=dx$, $\int\frac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz+C_1}}=x+C_2$.
Из решења $\Phi(z,x,C_1,C_2)=0$ добијамо $\Phi(y^{(n-2)},x,C_1,C_2)=0$ што је једначина првог типа.
<u>примјер</u>:
$y''''=y''$
<u>решење</u>:
смјена $y''=z(x)$ доводи до једначине облика $z''=z$ тј $2z'z''=2zz'$, $d(z'^2)=d(z^2)$,
$z'^2=z^2+C_1^2$, $z'=\sqrt{z^2+C_1^2}$, $\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+C_1^2}}=x+C_2$ која има решење $arcsh\frac{z}{C_1}=x+C_2$ тј.
$z=C_1sh(x+C_2)$. Из $y''=z(x)$ добијамо $y''=C_1sh(x+C_2)$, $y'=C_1ch(x+C_2)+C_3$,
$y=C_1sh(x+C_2)+C_3x+C_4$.

Једначине облика $F(y,y',y'',...,y^{(n-1)},y^{(n)})=0$

Код једначине која не садржи аргумент, улогу аргумента преузима непозната функција y, а нова функција $p=p(y)$ се уводи смјеном $y'=p(y)$. Изводи вишег реда функције y се у једначини замјењују на следећи начин:
$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}y'=pp'$, $y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{dy''}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dpp'}{dy}y'=(p'p'+pp'')p$, ... Очигледно, оваква смјена снижава ред полазне једначине за 1. Решавање добијене једначине настављамо неком од метода зависно од облика добијене једначине. Из решења $\Phi(p,y,C_1,...,C_{n-1})=0$ добијамо $\Phi(y',y,C_1,...,C_{n-1})=0$ што послије још једне интеграције даје опште решење.
<u>примјер</u>:
Наћи оно решење једначине $yy'y''=y'^3+y''^2$ које пролази кроз тачку $(0;0)$ и у њој има тангенту праву $x+y=0$
<u>решење</u>:
Услови које тражено решење треба да задовољи су очигледно: $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.
Ако уведемо $y'=p(y)$ и $y''=pp'$ једначина добија облик $yppp'=p^3+p^2p'^2$. Послије дијељења са p^2 (што иначе можемо да урадимо јер за $p=0$ би добили константну функцију која не задовољава почетне услове) добијамо $yp'=p+p'^2$ тј $p=yp'-p'^2$.
То је Клерова једначина коју решавамо увођењем параметра $p'=t$, тј $dp=tdy$. Из $p=yt-t^2$ добијамо $dp=ydt+tdy-2tdt$, тј $0=(y-2t)dt$. Из $0=y-2t$ тј. $t=\frac{y}{2}$

добијамо сингуларно решење $p=\frac{y^2}{4}$ које даље даје $y'=\frac{y^2}{4}$ тј. скуп решења од којих ниједно не задовољава почетне услове. Из $0=dt$ тј. $t=C_1$ добијамо опште решење $p=C_1y-C_1^{\ 2}$ које даље даје $\frac{dy}{y-C_1}=C_1dx$ тј. $\ln|y-C_1|=C_1x+\ln C_2$, $y=C_1+C_2e^{C_1x}$. Из почетних услова добијамо $C_1+C_2=0$ и $C_1C_2=-1$. Те вриједности одређују два партикуларна решења $y=1-e^x$ и $y=-1+e^{-x}$.

<u>примјер</u>:

$yy''=y'^2+y'\sqrt{y^2+y'^2}$

<u>решење</u>:

Једначина не садржи аргумент x па се може решавати смјеном $y'=p(y)$, $y''=pp'$. Добијена хомогена једначина $ypp'=p^2+p\sqrt{y^2+p^2}$ тј. $p'=\frac{p}{y}+\sqrt{1+(p/y)^2}$ се смјеном $\frac{p}{y}=u(y)$ своди на $u+yu'=u+\sqrt{1+u^2}$ тј. на једначину са раздвојеним промјенљивим $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dy}{y}$. Из $\ln(u+\sqrt{u^2+1})=\ln y+\ln C_1$ добијамо $p+\sqrt{p^2+y^2}=C_1y^2$. Послије квадрирања $\sqrt{p^2+y^2}=C_1y^2-p$ имамо $p^2+y^2=C_1^2y^4-2C_1y^2p+p^2$ тј. $p=\frac{C_1^2y^2-1}{2C_1}$. Из $\frac{2C_1dy}{C_1^2y^2-1}=dx$ добијамо $\ln\frac{1+C_1y}{1-C_1y}=-x+\ln C_2$ и коначно решење $y=\frac{C_2e^{-x}-1}{C_1(C_2e^{-x}+1)}$.

Једначине облика $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n-1)},y^{(n)})=0$

Код једначине која не садржи непознату функцију и првих неколико њених извода користимо смјену $y^{(k)}=p(x)$. Изводи вишег реда функције y се у једначини замјењују на следећи начин: $y^{(k+1)}=p'(x)$, $y^{(k+2)}=p''(x)$, ... , $y^{(n)}=p^{(n-k)}(x)$. Очигледно, оваква смјена снижава ред полазне једначине за k. Решавање добијене једначине настављамо неком од метода зависно од облика добијене једначине. Из решења $\Phi(x,p,C_1,...,C_{n-k})=0$ добијамо $\Phi(x,y^{(k)},C_1,...,C_{n-k})=0$ што послије још k интеграција даје опште решење.

<u>примјер</u>:

$xy^{(5)}-y^{(4)}=0$

<u>решење</u>:

Послије смјене $y^{(4)}=p(x)$, $y^{(5)}=p'(x)$ једначина добија облик $xp'-p=0$, $\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$, $p=C_1x$. Из $y^{(4)}=C_1x$ узастопним интеграцијама добијамо $y'''=C_1\frac{x^2}{2}+C_2$, $y''=C_1\frac{x^3}{6}+C_2x+C_3$, $y'=C_1\frac{x^4}{24}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4$. Опште решење $y'=C_1\frac{x^5}{120}+C_2\frac{x^3}{6}+C_3\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5$ се може записати и у облику $y'=Ax^5+Bx^3+Cx^2+Dx+E$.

<u>примјер</u>:

$y'' - xy''' + y''^2 = 0$

решење:

Смјена $y'' = z(x)$ нам даје $z - xz' + z^2 = 0$ тј. $z' - \frac{1}{x}z - \frac{1}{x}z^2 = 0$. Добијену Бернулијеву ј-ну послије дијељења са $z^2 \neq 0$ пишемо у облику $\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 0$ и решавамо смјеном $\frac{1}{z} = u(x)$. $u' + \frac{1}{x}u + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{x}[C_1 - x] \Rightarrow z = \frac{x}{C_1 - x} \Rightarrow y'' = \frac{x}{C_1 - x} \Rightarrow$

$y' = \int \frac{x}{C_1 - x}dx + C_2 \Rightarrow y' = -x - C_1 \ln(C_1 - x) + C_2 \Rightarrow y = \int(-x - C_1 \ln(C_1 - x) + C_2)dx + C_3 \Rightarrow$

$y = -\frac{x^2}{2} - C_1[x\ln(C_1 - x) - x - C_1 \ln(C_1 - x)] + C_2 x + C_3$ Провјером услова $z^2 = 0$ добијамо $y = ax + b$ што очигледно представља сингуларно решење јер задовољава једначину и не може се добити из оштег решења ни за једну вриједност константи C_1, C_2, C_3.

Једначине хомогене по y, y', y'', ..., $y^{(n)}$

Код једначине која је хомогена по функцији и њеним изводима тј. која задовољава услов $F(x, ty, ty', ty'', ..., ty^{(n-1)}, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)})$ користимо смјену $y' = yz(x)$. Изводи вишег реда функције y се у једначини замјењују на следећи начин: $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$, $y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$, ...
Очигледно, оваква смјена снижава ред полазне једначине за 1. Решавање добијене једначине настављамо неком од метода зависно од облика добијене једначине. Из решења $z = z(x, C_1, ..., C_{n-1})$ и $y' = yz(x)$ добијамо $\frac{dy}{y} = z(x, C_1, ..., C_{n-1})dx$ што послије још једне интеграције даје опште решење.

примјер:

$x^2 yy'' = (y - xy')^2$

решење:

Ако једначину запишемо у облику $x^2 yy'' = y^2 - 2xyy' + x^2 y'^2$ видимо да јесте хомогена по функцији и њеним изводима. Послије смјене $y' = yz(x)$, $y'' = y(z^2 + z')$ добијамо $x^2 yy(z^2 + z') = y^2 - 2xyyz + x^2 y^2 z^2$ тј. $x^2 z' + 2xz - 1 = 0$. Решење добијене линеарне једначине је $z = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}$ па је $y' = y\left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$ тј. $\frac{dy}{y} = \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx$. Послије интеграције је $\ln y = -\frac{C_1}{x} + \ln x + \ln C_2$ тј. $y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$.

примјер:

$3y'^2 = 4yy'' + y^2$

решење:

Једначина је хомогена по функцији и њеним изводима. Послије смјене $y' = yz(x)$, $y'' = y(z^2 + z')$ добијамо $3y^2 z^2 = 4y^2(z^2 + z') + y^2$ тј. $3z^2 = 4(z^2 + z') + 1$. Из $4z' = -(z^2 + 1)$

тј. $\frac{dz}{z^2+1}=-\frac{dx}{4}$ добијамо $arctgz=-\frac{x}{4}+\frac{C_1}{4}$, $z=tg\frac{C_1-x}{4}$, $\frac{dy}{y}=tg\frac{C_1-x}{4}dx$. Послије интеграције: $\ln y=-4\ln\frac{1}{\cos\frac{C_1-x}{4}}+\ln C_2$, $\ln y=\ln C_2\cos^4\frac{C_1-x}{4}$, $y=C_2\cos^4\frac{C_1-x}{4}$.

Једначине записане у облику диференцијала

За једначину $F(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ код које је $F(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)},y^{(n)})=\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ кажемо да је записана у облику диференцијала. Интеграцијом $\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})=0$ добијамо $\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})=C_1$ чиме се ред једначине снижава за 1. Добијену једначину решавамо неком од метода, зависно од њеног облика.

<u>примјер</u>:

$y'y'''-y''^2=0$

<u>решење</u>:

Ако једначину подијелимо са $y'y''$ добијамо $\frac{y'''}{y''}-\frac{y''}{y'}=0$ тј. $(\ln y'')'-(\ln y')'=0$, $(\ln y''-\ln y')'=0$. Послије интеграције $\ln y''-\ln y'=\ln C_1$ једначина добија облик $\frac{y''}{y'}=C_1$. Добијена једначина се опет може представити у облику диференцијала: $(\ln y'-C_1x)'=0$. Још једна интеграција даје $\ln y'-C_1x=\ln C_2$ па је $y'=C_2e^{C_1x}$ и коначно $y=\frac{C_2}{C_1}e^{C_1x}+C_3$ што можемо записати и у облику $y=Ae^{Bx}+C$. Због дијељења са $y'y''$ провјеравамо да ли за $y'y''=0$ постоје решења која се не могу добити из општег решења. Из $y''=0$ добијамо $y=C_1x+C_2$ што јесте решење , а не може се добити из општег решења. Скуп свих решења једначине је $\begin{cases} y=Ae^{Bx}+C \\ y=C_1x+C_2 \end{cases}$.

<u>примјер</u>:

$y'y^2+yy''-y'^2=0$

<u>решење</u>:

Једначина се може записати у облику $y'+\frac{yy''-y'^2}{y^2}=0$ тј. $y'+\left(\frac{y'}{y}\right)'=0$ па је $y+\frac{y'}{y}=C_1$.

Из $\frac{dy}{y(C_1-y)}=dx$ тј. $\int(\frac{1}{C_1}\frac{1}{y}+\frac{1}{C_1}\frac{1}{C_1-y})dy=\int dx$ добијамо $\ln y-\ln(C_1-y)=C_1x+\ln C_2$ тј. $\frac{y}{C_1-y}=C_2e^{C_1x}$ па је коначно решење $y=\frac{C_1C_2e^{C_1x}}{1+C_2e^{C_1x}}$.

<u>примјер</u>:

Наћи оно решење једначине $yy''-y'^2=y^2\ln y$ које задовољава услов: $y(0)=y'(0)=e$.

<u>решење</u>:

Ако једначину подијелимо са y^2 добијамо $\frac{yy''-y'^2}{y}=\ln y$ тј. $\left(\frac{y'}{y}\right)'=\ln y$, тј. $\left((\ln y)'\right)'=\ln y$. Једначину не можемо решавати као једначину у облику диференцијала, али можемо искористити добијени облик за увођење нове функције $z=z(x)$ смјеном $z=\ln y$. Једначину $z''=z$ ћемо касније решавати једноставнијим поступком. За сада можемо је ријешити: $2z'z''=2zz'$, $(z'^2)'=(z^2)'$, $z'^2=z^2+C$. За одређивање константе C одређујемо вриједности: $(y(0)=e)\wedge(z=\ln y)\Rightarrow z(0)=1$, $(y(0)=e)\wedge(y'(0)=e)\wedge(z'=\frac{y'}{y})\Rightarrow z'(0)=1$. Добијамо $1=1+C$ тј. $C=0$. Из $z'^2=z^2$ добијамо $z'=z$, $\frac{dz}{z}=dx$, $\ln z=x+C$. Како је $z(0)=1$ то је $C=0$ па је $\ln z=x$ тј. $z=e^x$ и с обзиром на смјену $z=\ln y$ тражено решење је $y=e^{e^x}$

Линеарне хомогене једначине са константним кофицијентима

Једначини облика $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ придружујемо карактеристичну једначину $k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0$. Та алгебарска једначина има укључујући вишеструкост, и коњуговано комплексна решења тачно n решења. При томе

- Сваком реалном простом (једноструком) коријену k_i одговара једно партикуларно решење $y_i=e^{k_ix}$.
- Сваком реалном $m-$тоструком коријену $k_1=k_2=\ldots=k_m$ одговара m партикуларних решења $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=xe^{k_1x}$, $y_3=x^2e^{k_1x}$,..., $y_m=x^{m-1}e^{k_1x}$.
- Сваком пару простих комплексних коријена $k_{1/2}=\alpha\pm i\beta$ одговарају два партикуларна решења $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.
- Сваком пару $m-$тоструких комплексних коријена $k_{1/2}=k_{3/4}=\ldots=k_{2m-1/2m}=\alpha+i\beta$ одговара $2m$ партикуларних решења $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x$,..., $y_{2m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Опште решење је линеарна комбинација n независних партикуларних решења.

примјер:

$y'''-5y''+6y'=0$

решење:

Карактеристична једначина има облик $k^3-5k^2+6k=0$ тј. $k(k-2)(k-3)=0$. Решењима $k_1=0$, $k_2=2$, $k_3=3$ одговарају партикуларна решења $y_1=e^{0x}$, $y_2=e^{2x}$, $y_3=e^{3x}$. Опште решење једначине је $y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$ тј. $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$.

примјер:

$y'''-5y''+8y'-4y=0$

решење:

Карактеристична једначина има облик $k^3-5k^2+8k-4=0$ тј. $(k-1)(k-2)^2=0$. Решењима $k_1=1$, $k_2=k_3=2$ одговарају партикуларна решења $y_1=e^{1x}$, $y_2=e^{2x}$, $y_3=xe^{2x}$. Опште решење једначине је $y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$ тј. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$.

<u>примјер</u>:

$y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$

<u>решење</u>:

Карактеристична једначина има облик $k^3 + 3k^2 + 9k - 13 = 0$. Решењима $k_1 = 1$, $k_{2/3} = -2 \pm 3i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{1x}$, $y_2 = e^{-2x}\cos 3x$, $y_3 = e^{-2x}\sin 3x$. Опште решење једначине је $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ тј.

$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}\cos 3x + C_3e^{-2x}\sin 3x$.

<u>примјер</u>:

$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$

<u>решење</u>:

Карактеристична једначина има облик $k^3 - 2k^2 + 4k - 8 = 0$. Решењима $k_1 = 2$, $k_{2/3} = \pm 2i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = \sin 2x$. Опште решење једначине је $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ тј. $y = C_1e^{2x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$.

<u>примјер</u>:

$y'''' + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$

<u>решење</u>:

Карактеристична једначина има облик $k^4 + 4k^3 + 8k^2 + 8k + 4 = 0$ тј. $(k^2 + 2k + 2)^2 = 0$. Решењима $k_{1/2} = k_{3/4} = -1 \pm i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{-x}\cos x$, $y_2 = e^{-x}\sin x$, $y_3 = xe^{-x}\cos x$, $y_4 = xe^{-x}\sin x$. Опште решење једначине је $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4$ тј. $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + C_3xe^{-x}\cos x + C_4xe^{-x}\sin x$.

<u>примјер</u>:

$y'''' + 2y'' + y = 0$

<u>решење</u>:

Карактеристична једначина има облик $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ тј. $(k^2 + 1)^2 = 0$. Решењима $k_{1/2} = k_{3/4} = \pm i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = x\cos x$, $y_4 = x\sin x$. Опште решење једначине је $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4$ тј.

$y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3x\cos x + C_4x\sin x$.

Линеарне нехомогене једначине са константним кофицијентима

Једначину облика $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$ решавамо тако што у првом кораку нађемо решење одговарајуће хомогене једначине. У другом кораку до решења нехомогене можемо доћи на два начина. Први начин је примјена Лагранжовог метода варијације константи, и тај поступак ће бити детаљније описан касније, код једначине са неконстантним коефицијентима. Други начин, који ће овдје бити описан заснован је на томе да се опште решење нехомогене једначине може представити као збир општег решења хомогене и једног партикуларног решења нехомогене. Ако можемо да пронађемо једно партикуларно решење нехомогене једначине тиме у потпуности решавамо полазну једначину. Метод покушаја налажења једног решења је овдје олакшан тиме што за неке облике функције $f(x)$ тачно знамо како треба да изгледа тражено партикуларно решење. Ако се функција може представити у облику $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ тада постоји партикуларно решење облика $y_p = x^s e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$ гдје је број s вишеструкост броја $\alpha \pm i\beta$ као коријена карактеристичне једначине, и $k = \max\{m, n\}$.

У следећој табели можемо видјети неке типове функција и одговарајућа партикуларна решења:

$f(x)$	Коријен карактеристичне једначине	y_p
$P_n(x)$	0 није коријен	$R_n(x)$
	0 јесте коријен реда s	$x^s R_n(x)$
$e^{\alpha x} P_n(x)$	α није коријен	$e^{\alpha x} R_n(x)$
	α јесте коријен реда s	$x^s e^{\alpha x} R_n(x)$
$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$	$\pm i\beta$ није коријен	$R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x$
	$\pm i\beta$ јесте коријен реда s	$x^s(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$	$\alpha \pm i\beta$ није коријен	$e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$
	$\alpha \pm i\beta$ јесте кор. реда s	$x^s e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$

<u>примјер</u>:
$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$
<u>решење</u>:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$ са решењима $k_1 = 1, k_2 = i, k_3 = -i$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. За одређивање партикуларног решења битно је то да је функција $f(x)$ у облику полинома. Како 0 није коријен карактеристичне једначине партикуларно решење ће бити полином истог степена као $f(x)$. Када функцију $y_p = Ax^2 + Bx + C$ и њене изводе $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$, $y_p''' = 0$ замијенимо у једначини добијамо идентитет $0 - 2A + 2Ax + B - Ax^2 - Bx - C \equiv x^2 + x$. Из њега добијамо $A = -1, B = -3, C = -1$. Партикуларно решење је $y_p = -x^2 - 3x - 1$. Опште решење је $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1$.
<u>примјер</u>:
$y''' - y'' = 12x^2 + 6x$
<u>решење</u>:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^3 - k^2 = 0$ са решењима $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$. Функција $f(x)$ је у облику полинома. Како је 0 двоструки коријен карактеристичне једначине партикуларно решење ће бити облика $y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C)$. Замјеном у једначини добијамо идентитет из кога одређујемо $A = -1, B = -5, C = -15$. Партикуларно решење је $y_p = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$. Опште решење је
$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2$.
<u>примјер</u>:
$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x$
<u>решење</u>:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2 - k = 0$ са решењима $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 + C_2 e^x$. Функција $f(x)$ је састављена од три дијела $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$. Сваком од њих одговара један дио партикуларног решења $y_p = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$. Како је $f_1(x) = e^x$ и број 1 јесте коријен карактеристичне једначине то је $y_1 = xAe^x$. Како је $f_2(x) = e^{2x}$ и број 2 није

коријен карактеристичне једначине то је $y_2 = Be^{2x}$. Како је $f_3(x) = x$ и број 0 јесте коријен карактеристичне једначине то је $y_3 = x(Cx + D)$. Замјеном $y_p = xAe^x + Be^{2x} + x(Cx + D)$ у једначини добијамо идентитет из кога одређујемо $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = -1$. Партикуларно решење је $y_p = xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x$. Опште решење је $y = y_h + y_p = C_1 + C_2e^x + xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x$.

<u>примјер</u>:
$y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)e^{2x}$
<u>решење</u>:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2 + k - 2 = 0$ са решењима $k_1 = 1$, $k_2 = -2$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Функција $f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}$ и број 2 није коријен карактеристичне једначине па је $y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$.... Опште решење је

$$y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2e^{-2x} + (\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{13}{32})e^{2x}.$$

<u>примјер</u>:
$y''' - y'' = xe^x$
<u>решење</u>:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^3 - k^2 = 0$ са решењима $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_2e^{-2x}$. Функција $f(x) = xe^x$ и број 1 јесте коријен карактеристичне једначине па је $y_p = x(Ax + B)e^x$.... Опште решење је

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_2e^{-2x} + (\frac{1}{2}x^2 - 2x)e^x.$$

<u>примјер</u>:
$y'' + y = \sin 2x$
<u>решење</u>:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2 + 1 = 0$ са решењима $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Функција $f(x) = \sin 2x$ и број $\pm 2i$ није коријен карактеристичне једначине па је $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$.... Опште решење је $y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$.

<u>примјер</u>:
$y'' + y = \sin x$
<u>решење</u>:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2 + 1 = 0$ са решењима $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Функција $f(x) = \sin x$ и број $\pm i$ јесте коријен карактеристичне једначине па је $y_p = x(A\cos x + B\sin x)$.... Опште решење је $y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x$.

<u>примјер</u>:
$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$
<u>решење</u>:

Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2-6k+9=0$ са решењима $k_1=k_2=3$. Опште решење хомогене једначине је $y_h=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$. Функција $f(x)=25e^x\sin x$ и број $1\pm i$ није коријен карактеристичне једначине па је $y_p=e^x(A\cos x+B\sin x)$.... Опште решење је $y=y_h+y_p=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+e^x(4\cos x+3\sin x)$.

Линеарне нехомогене једначине са неконстантним кофицијентима

Решавање једначина облика $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ илустроваћемо на примјеру једначина другог реда $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$. Од више начина за решавање овдје ће бити приказана три.

Први начин састоји се у томе да се прво ријеши одговарајућа хомогена једначина $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$. До њеног решења можемо доћи методом покушаја за налажење партикуларних решења. Ако за једначину другог реда нађемо два независна партикуларна решења, онда имамо и опште решење које је линеарна комбинација та два решења. Ако нађемо само једно партикуларно решење y_p једначину даље решавамо смјеном $y=y_pz(x)$. Нова једначина по $z(x)$ садржи z'' и z' а не садржи z па се решава смјеном $z'=u(x)$. Када добијемо решење хомогене једначине $y_h=C_1y_1+C_2y_2$ за налажење решења нехомогене примјењујемо Лагранжов метод варијације константи. Константе C_1,C_2 третирамо као функције од x и одређујемо их из система једначина $\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0 \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)\end{cases}$. У случају једначине вишег реда $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ опште решење има облик $y_h=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$ а систем за одређивање константи има облик:

$$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2+...+C_n'y_n=0 \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'+...+C_n'y_n'=0 \\ \vdots \\ C_1'y_1^{(n-2)}+C_2'y_2^{(n-2)}+...+C_n'y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+...+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x)\end{cases}$$

<u>примјер</u>:
$(x^2-x)y''+(2x-3)y'-2y=12(x-1)^2$
<u>решење</u>:
Прво решавамо одговарајућу хомогену једначину $(x^2-x)y''+(2x-3)y'-2y=0$. Методом покушаја тражимо партикуларно решење у облику $y_p=ax+b$. Добијамо $y_p=2x-3$. Смјеном $y=(2x-3)z(x)$, $y'=2z+(2x-3)z'$, $y''=4z'+(2x-3)z''$ добијамо једначину $(x^2-x)(2x-3)z''+(4(x^2-x)+(2x-3)^2)z'=0$ која се смјеном $z'=u(x)$ своди на $x(x-1)(2x-3)u'=-(4(x^2-x)+(2x-3)^2)u$ тј. $\frac{du}{u}=-\frac{8x^2-16x+9}{x(x-1)(2x-3)}dx$. Интеграцијом $\frac{du}{u}=(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{4}{2x-3})dx$ добијамо $u=\frac{C_1(x-1)}{(2x-3)^2x^3}$ тј. $z'=C_1(-\frac{1}{27}\frac{1}{x^2}-\frac{3}{27}\frac{1}{x^3}+\frac{4}{27}\frac{1}{(2x-3)^2})$.

Интеграцијом се добија $z=-\frac{C_1}{6}\frac{1}{x^2(2x-3)}+C_2$ па је решење хомогене једначине

$y_h=-\frac{C_1}{6}\frac{1}{x^2}+C_2(2x-3)$ што се једноставније може записати као $y_h=A\frac{1}{x^2}+B(2x-3)$.
Претходни поступак се може скратити на следећи начин: Прво одређујемо све могуће вриједности за степене полинома који могу бити партикуларна решења. Парт. решења тражимо у облику $y_p=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots$ Замјеном у једначини

$(x^2-x)y''+(2x-3)y'-2y=0$ добијамо

$(x^2-x)(n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+\dots)+(2x-3)(nx^{n-1}+\dots)-2(x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots)\equiv 0$

У добијеној једначини сви коефицијенти осим оног уз највећи степен зависе од коефицијената $a_1,a_2,a_3\dots$ полазног полинома.

$(n(n-1)+2n-2)x^n+\varphi_1(n,a_1)x^{n-1}+\varphi_2(n,a_1,a_2)x^{n-2}+\varphi_3(n,a_1,a_2,a_3)x^{n-3}+\dots\equiv 0$ То значи да повољним избором коефицијената $a_1,a_2,a_3\dots$траженог полинома који учествују у кофицијентима уз степене $x^{n-1},x^{n-2},x^{n-3}\dots$ у једначини можемо постићи да буде $\varphi_1(n,a_1)x^{n-1}+\varphi_2(n,a_1,a_2)x^{n-2}+\varphi_3(n,a_1,a_2,a_3)x^{n-3}+\dots\equiv 0$ али на кофицијент $(n(n-1)+2n-2)$ који стоји уз x^n не можемо утицати на тај начин. Решавањем једначине $n(n-1)+2n-2=0$ добијамо вриједности $n_1=1$ и $n_2=-2$. То значи да једино полиноми степена 1 и –2 могу бити партикуларна решења. Провјером за полиноме $y_1=ax+b$ и $y_2=\frac{a}{x^2}$ добијамо $y_1=2x-3$ и $y_2=\frac{1}{x^2}$. Како су то двије линеарно независне функције то се опште решење може написати као њихова линеарна комбинација $y_h=C_1(2x-3)+C_2\frac{1}{x^2}$. За налажење решења нехомогене једначине морамо је прво записати у облику $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ тј. у облику гдје је коефицијент уз најстарији извод једнак јединици, јер то даје правилан облик за функцију $f(x)$ у систему једначина за одређивање функција $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Овдје је то: $y''+\frac{2x-3}{x^2-x}y'-\frac{2}{x^2-x}y=\frac{12(x-1)^2}{x^2-x}$ тј. $y''+\frac{2x-3}{x^2-x}y'-\frac{2}{x^2-x}y=\frac{12(x-1)}{x}$. Систем ће имати облик: $\begin{cases} C_1'(2x-3)+C_2'\frac{1}{x^2}=0 \\ C_1'(2x-3)'+C_2'(\frac{1}{x^2})'=\frac{12(x-1)}{x}\end{cases}$ тј. $\begin{cases} C_1'(2x-3)+C_2'\frac{1}{x^2}=0 \\ C_1'2-C_2'\frac{2}{x^3}=\frac{12(x-1)}{x}\end{cases}$. Елиминацијом C_2' добијамо $C_1'=2$ тј. $C_1=2x+A$ па затим и $C_2'=-4x^3+6x^2$ тј. $C_2=-x^4+2x^3+B$.

Када у општем решењу хомогене једначине $y_h=C_1(2x-3)+C_2\frac{1}{x^2}$ константе C_1,C_2 замијенимо функцијама $C_1(x),C_2(x)$ добијамо опште решење нехомогене једначине које се може записати у облику $y=(2x+A)(2x-3)+(-x^4+2x^3+B)\frac{1}{x^2}$ или као

$y=A(2x-3)+B\frac{1}{x^2}+3x^2-4x$. Из последњег облика решења видимо да се до њега могло доћи и тако што би методом покушаја нашли једно партикуларно решење нехомогене једначине $y_p=3x^2-4x$, што сабирањем са општим решењем хомогене једначине даје опште решење нехомогене једначине.

<u>примјер</u>:

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1$$

<u>решење</u>:

Прво решавамо одговарајућу хомогену једначину $(1-x)y'' + xy' - y = 0$. Методом покушаја тражимо партикуларно решење у облику $y_p = ax + b$. Добијамо $y_p = x$. Када је збир коефицијената уз $y''; y'; y$ једнак нули тада функција има партикуларно решење $y_p = e^x$ јер $(1-x)e^x + xe^x - e^x \equiv 0$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 x + C_2 e^x$. За налажење решења нехомогене једначине константе C_1, C_2 третирамо као функције $C_1(x), C_2(x)$. Систем једначина за одређивање функција $C_1(x)$ и $C_2(x)$ ће имати облик: $\begin{cases} C_1' x + C_2' e^x = 0 \\ C_1'(x)' + C_2'(e^x)' = x - 1 \end{cases}$ тј. $\begin{cases} C_1' x + C_2' e^x = 0 \\ C_1' + C_2' e^x = x - 1 \end{cases}$. Елиминацијом C_2' добијамо $C_1' = -1$ тј. $C_1 = -x + A$ па затим и $C_2' = xe^{-x}$ тј. $C_2 = -(x+1)e^{-x} + B$. Када у општем решењу хомогене једначине $y_h = C_1 x + C_2 e^x$ константе C_1, C_2 замијенимо функцијама $C_1(x), C_2(x)$ добијамо опште решење нехомогене једначине $y_h = Ax + Be^x - x^2 - x - 1$.

Други начин решавања је да решење тражимо у облику производа $y = u(x)v(x)$. Ако послије избора једне од функција једначина по другој функцији добија једноставан облик који се може ријешити, онда је овај начин решавања погодан за полазну једначину.

<u>примјер</u>:

$$x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^6$$

<u>решење</u>:

Решење тражимо у облику $y = u(x)v(x)$. Добијамо $x^2(u''v + 2u'v' + uv'') - 2x(u'v + uv') + (x^2 + 2)uv = x^6$ или послије сређивања по $u(x)$ $x^2 vu'' + (2x^2 v' - 2xv)u' + (x^2 v'' - 2xv' + (x^2 + 2)v)u = x^6$. Избор функције $v(x)$ вршимо тако да једначина послије тога добије што једноставнији облик. То може да значи да неки од коефицијената буде једнак нули, или да коефицијенти уз u' и u буду једнаки, или да зависно од облика једначине коефицијенти добију неке повољне вриједности. У овом случају не можемо изабрати $v(x)$ тако да кофицијент уз $u(x)$ буде једнак нули јер се то своди на решавање полазне једначине са новом функцијом. Стога бирамо $v(x)$ тако да кофицијент уз $u'(x)$ буде једнак нули. Из $2x^2 v' - 2xv = 0$ добијамо $v = x$. То доводи до једначине $x^3 u'' + x^3 u = x^6$ тј. $u'' + u = x^3$. Решење нехомогене једначине са константним коефицијентима је $u = u_h + u_p$ тј. $u = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^3 - 6x$ па је решење полазне једначине $y = u(x)v(x)$ тј. $y = C_1 x \cos x + C_2 x \sin x + x^4 - 6x^2$.

<u>примјер</u>:

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 6)y = 0$$

<u>решење</u>:

Решење тражимо у облику $y = u(x)v(x)$. Једначина добија облик $u''v + 2u'v' + uv'' + 2x(u'v + uv') + (x^2 + 6)uv = 0$. Послије сређивања по једној од функција добијамо $uv'' + (2u' + 2xu)v' + (u'' + 2xu' + (x^2 + 6)u)v = 0$. Функцију $u(x)$ бирамо тако да буде $2u' + 2xu = 0$. Послије избора $u = e^{-x^2/2}$ једначина добија облик

$v'' + 5v = 0$. Њено решење је $v = C_1 \cos\sqrt{5}x + C_2 \sin\sqrt{5}x$. Опште решење је $y = C_1 e^{-x^2/2} \cos\sqrt{5}x + C_2 e^{-x^2/2} \sin\sqrt{5}x$.

Трећи начин решавања једначине $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ је да уведемо нови аргумент смјеном $t = \varphi(x)$ гдје се функција $\varphi(x)$ добија из: $\varphi(x) = \int \sqrt{Ca_2(x)}dx$. Константу C бирамо тако да се омогући једноставнија интеграција. У случају једначине $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ одговарајућа смјена је $\varphi(x) = \int \sqrt[n]{Ca_n(x)}dx$. Ако послије увођења новог аргумента једначина постаје једначина са константним кофицијентима онда је овај начин решавања погодан за полазну једначину.

<u>примјер</u>:
Наћи опште решење једначине $y'' - (2e^x + 1)y' + e^{2x}y = e^{3x}$ и оно које задовољава услове $y(0) = 3, y'(0) = 1$.
<u>решење</u>:
Једначину решавамо смјеном аргумента $t = \varphi(x) = \int \sqrt{Ce^{2x}}dx$. Бирамо $C = 1$ и добијамо $t = \int e^x dx = e^x$. Из $t = e^x$ имамо $dt = e^x dx$ тј. $\frac{dt}{dx} = t$ па је $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t t$ и $y''_x = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'_t t}{dt}\frac{dt}{dx} = (y''_t t + y'_t)t$. Послије смјене једначина постаје $(y''_t t + y'_t)t - (2t+1)y'_t t + t^2 y = t^3$ тј. $y''_t t^2 - 2t^2 y'_t t + t^2 y = t^3$. Добијена једначина са константним коефицијентима $y''_t - 2y'_t t + y = t$ има решење $y(t) = C_1 e^t + C_2 te^t + t + 2$ па је опште решење полазне једначине $y(x) = C_1 e^{e^x} + C_2 e^x e^{e^x} + e^x + 2$. Тражено партикуларно решење је $y = e^x + 2$.
<u>примјер</u>:
$x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0$
<u>решење</u>:
$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{1}{x^4}y = 0$ Једначину решавамо смјеном аргумента $t = \varphi(x) = \int \sqrt{C(-1/x^4)}dx$.
Бирамо $C = -1$ и добијамо $t = \int \sqrt{1/x^4}dx = -1/x$. Из $t = -1/x$ имамо $dt = dx/x^2$ тј. $\frac{dt}{dx} = t^2$ па је $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t t^2$ и $y''_x = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'_t t^2}{dt}\frac{dt}{dx} = (y''_t t^2 + y'_t 2t)t^2 = y''_t t^4 + y'_t 2t^3$. Послије смјене једначина постаје $y''_t t^4 + y'_t 2t^3 - 2ty'_t t^2 - t^4 y = 0$ тј. $y''(t) - y(t) = 0$. Решење је $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ тј. $y(x) = C_1 e^{-1/x} + C_2 e^{1/x}$.

Ојлерова једначина

Специјалан случај линеарне једначине са неконстантним коефицијентима је једначина облика $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = f(x)$. Ојлерова једначина се смјеном $x = e^t$ своди на једначину са константним коефицијентима.

примјер:
$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$
решење:
Ојлерова једначина. Послије смјене $x = e^t$ добијамо $dx = e^t dt$ тј. $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$. Тада је

$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t e^{-t}$ и $y''_x = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'_t e^{-t}}{dt}\frac{dt}{dx} = (y''_t e^{-t} - y'_t e^{-t})e^{-t} = (y''_t - y'_t)e^{-2t}$. Једначина постаје $e^{2t}(y''_t - y'_t)e^{-2t} - 2e^t y'_t e^{-t} + 2y = e^{3t}$ тј. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t}$. Њено решење је $y(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$. Опште решење је $y(x) = C_1x + C_2x^2 + \frac{1}{2}x^3$

примјер:
$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$
решење:
Осим наведеног начина Ојлерову једначину можемо решавати и налажењем партикуларних решења. Ако потражимо сва решења ове једначине облика $y_p = x^k$ добићемо $x^2k(k-1)x^{k-2} + 2xkx^{k-1} - 6x^k \equiv 0$, $(k^2 + k - 6)x^k \equiv 0$. Једначина $k^2 + k - 6 = 0$ има решења $k = 2$ и $k = -3$ што значи да постоје два независна партикуларна решења $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^{-3}$. Опште решење је $y(x) = C_1x^2 + C_2x^{-3}$.
примјер:
$(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$
решење:
Смјена $x + 2 = e^t$. Опште решење је $y(x) = C_1(x+2) + C_2(x+2)^{-3}$.

Системи линеарних диф. једначина са константним коефицијентима

Обрадићемо метод елиминације за системе линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима. Поступак се састоји у свођењу система на једну једначину у којој учествује само једна од непознатих функција из система. То постижемо диференцирањем неке од једначина и замјењивањем осталих функција и њихових извода из преосталих једначина.

примјер:
Ријешити систем диф. ј-на: $x' = 3x - y + z$; $y' = x + y + z$; $z' = 4x - y + 4z$.
решење:
Диференцирањем прве једначине и елиминисањем извода y' и z' из друге двије једначине добијамо:
$x'' = 3x' - y' + z' \Rightarrow x'' - 3x' = -(x + y + z) + (4x - y + 4z) \Rightarrow x'' - 3x' - 3x = -2y + 3z$.
Добијену једначину два пута комбинујемо са првом једначином система. Када прву једначину помножимо са -3 и саберемо са њом добијамо $y = x'' - 6x' + 6x$. Када прву једначину помножимо са -2 и саберемо са њом добијамо $z = x'' - 5x' + 3x$. Овим смо припремили одређивање функција y и z када одредимо функцију x. За одређивање непознате функције x формирамо једначину која ће садржати само x тако што у другој или трећој једначини система елиминишемо y и z и њихов извод користећи добијене везе. $y' = x + y + z \Rightarrow x''' - 6x'' + 6x' = x + (x'' - 6x' + 6x) + (x'' - 5x' + 3x) \Rightarrow$
$x''' - 8x'' + 17x' - 10x = 0$. Добијена једначина по једној непознатој функцији има решење: $k^3 - 8k^2 + 17k - 10 = 0 \Rightarrow (k-1)(k-2)(k-5) = 0 \Rightarrow k_1 = 1; k_2 = 2; k_3 = 5$.

$x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$. Користећи добијене везе одређујемо

$y = x'' - 6x' + 6x \Rightarrow y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$ и $z = x'' - 5x' + 3x \Rightarrow z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}$

<u>примјер</u>:

Ријешити систем диф. ј-на: $x' = -x + y$; $y' = -y + 4z$; $z' = x - 4z$.

<u>решење</u>:

Из прве једначине већ имамо изражено $y = x' + x$. Диференцирањем прве једначине и елиминисањем извода y' и саме функције y добијамо везу између z и x:

$x'' = -x' + y' \Rightarrow x'' + x' = -y + 4z \Rightarrow x'' + x' = -(x' + x) + 4z \Rightarrow z = \frac{1}{4}(x'' + 2x' + x)$. Када имамо изражене функције y и z преко x, то користимо да добијемо једначину која ће садржати само непознату функцију x. Укључујемо и трећу једначину која до сада није коришћена: Из $z' = x - 4z$ и $z = \frac{1}{4}(x'' + 2x' + x)$ имамо

$\frac{1}{4}(x''' + 2x'' + x') = x - (x'' + 2x' + x) \Rightarrow x''' + 2x'' + x' = -4x'' - 8x' \Rightarrow x''' + 6x'' + 9x' = 0$.

Добијена једначина по једној непознатој функцији има решење:

$k^3 + 6k^2 + 9k = 0 \Rightarrow k(k+3)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0; k_2 = k_3 = 3$. $x(t) = C_1 + C_2e^{-3t} + C_3te^{-3t}$.

Послије тога преостаје само да се искористе већ добијене везе између y, z и x

Како је $y = x' + x$ то је: $y(t) = C_1 + (-2C_2 + C_3)e^{-3t} - 2C_3te^{-3t}$.

Из $z = \frac{x'' + 2x' + x}{4} \Rightarrow$ $z(t) = \frac{C_1}{4} + (C_2 - C_3)e^{-3t} + C_3te^{-3t}$.

<u>примјер</u>:

Ријешити систем диф. ј-на: $x' = 4x - y - z$; $y' = x + 2y - z$; $z' = x - y + 2z$.

<u>решење</u>:

Диференцирањем прве једначине $x' = 4x - y - z$ и замјеном y' и z' из друге и треће једначине добијамо:

$x'' = 4x' - y' - z' \Rightarrow x'' - 4x' = -(x + 2y - z) - (x - y + 2z) \Rightarrow x'' - 4x' + 2x = -y - z \Rightarrow$

$x'' - 4x' + 2x = x' - 4x \Rightarrow x'' - 5x' + 6x = 0 \Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$.

У претходним задацима смо за добијање прве непознате функције приликом елиминисања осталих функција добили једначину трећег реда. При томе смо такође до добијања те једначине добили везе између осталих непознатих функција и прве функције коју тражимо. То је омогућило да налажењем прве непознате функције практично ријешимо систем. У овом случају су већ код једначине другог реда елиминисане друге двије функције. То има за последицу да сада не можемо одмах добити преостале функције, већ морамо вршити још једну интеграцију. Да би то урадили морамо комбиновати двије једначине тако да из њих елиминишемо једну од још неизрачунатих функција и добијемо једначину која ће садржати једну непознату функцију и једну коју смо већ одредили. Овдје то постижемо из прве двије једначине одузимањем.

$$\left.\begin{aligned} x' &= 4x - y - z \\ y' &= x + 2y - z \end{aligned}\right\} \quad x' - y' = 3x - 3y \Rightarrow y' - 3y + C_1e^{2t} = 0 \Rightarrow \quad y(t) = C_1e^{2t} + C_3e^{3t}.$$

Послије одређивања двије функције трећу одређујемо из једне од једначина без нове интеграције.

$x' = 4x - y - z \Rightarrow z = -x' + 4x - y \Rightarrow$ $z(t) = C_1e^{2t} + (C_2 - C_3)e^{3t}$

Други домаћи задатак

1. Наћи опште решење диференцијалне једначине: $yy'' = y'^2 - y'^3$ и оно партикуларно које задовољава услове: $y(0) = 1; y'(0) = 0$.
2. Ријешити диференцијалну једначину $xy'' = y' \ln(y'/x)$.
3. Ријешити диференцијалну једначину $xyy'' - xy'^2 = yy'$.
4. Ријешити диференцијалну једначину $5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0$.
5. Ријешити диференцијалну једначину $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = (3x^2 - 7x)e^x$.
6. Ријешити диференцијалну једначину $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$.
7. Ријешити диференцијалну једначину $x^2 \ln^2 xy'' - 2x \ln xy' + (\ln x + 2 + x^2 \ln^2 x)y = 0$.
8. Ријешити диференцијалну једначину $2xy'' - (8x^2 + 2)y' + 8x^3 y = 0$.
9. Ријешити диференцијалну једначину $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$.
10. Ријешити систем диф. j-на: $x' = 2x - y + 2z$; $y' = x + 2z$; $z' = -2x + y - z$.