Једначина облика $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ се своди на хомогену на следећи начин:

- Ако систем једначина $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ има јединствено решење $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$ уводе се нови аргумент и нова функција смјенама $\begin{cases} x=u+\alpha \\ y=v+\beta \end{cases}$ гдје је $v=v(u)$.
- Ако систем нема јединствено решење (тј. ако је $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$) користи се смјена $a_1x+b_1y=z(x)$

<u>примјер</u>: $y' = -\frac{2x+3y+1}{3x+4y+1}$

<u>решење</u>: $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ 3x+4y+1=0 \end{cases}$ има јединствено решење $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ па се уводе нови аргумент u и нова функција $v=v(u)$ смјенама $\begin{cases} x=u+1 \\ y=v-1 \end{cases}$.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y+1}{3x+4y+1} \Rightarrow \frac{dv}{du} = -\frac{2(u+1)+3(v-1)+1}{3(u+1)+4(v-1)+1}$

$\frac{dv}{du} = -\frac{2+3\frac{v}{u}}{3+4\frac{v}{u}}$; смјена $\frac{v}{u}=z(u)$; $v'=z+uz'$; $z+uz' = -\frac{2+3z}{3+4z}$; $uz' = -\frac{3z+4z^2+2+3z}{3+4z}$;

$\frac{3+4z}{2z^2+3z+1}dz = -\frac{2}{u}du$; $\ln(2z^2+3z+1) = -2\ln u + \ln C$; $2z^2+3z+1 = \frac{C}{u^2}$. Опште решење је $\left(2(\frac{y+1}{x-1})^2 + 3\frac{y+1}{x-1}+1\right)(x-1)^2 = C$.

<u>примјер</u>: $y' = -\frac{x+y+1}{2x+2y-1}$

<u>решење</u>: $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$ нема решење па се уводи нова функција $z=z(x)$ смјеном $x+y=z(x)$. Опште решење је $2x+2y+3\ln|x+y-2| = x+C$

<u>примјер</u>: $3x+y-2+y'(x-1)=0$

<u>решење</u>: $(x-1)(3x+2y-1)=C$

Квазихомогена једначина се некада може свести на хомогену смјеном $y = z^{\alpha}$.

Примјер: $y' = -\dfrac{2xy^3}{x^2y^2 - 1}$

Решење: $y = z^{\alpha}$; $y' = \alpha z^{\alpha-1}z'$; $\alpha z^{\alpha-1}z' = -\dfrac{2xz^{3\alpha}}{x^2z^{2\alpha} - 1}$; послије множења са $\dfrac{1}{z^{\alpha-1}}$ добија се $\alpha z' = -\dfrac{2xz^{3\alpha}}{x^2z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1}}$. Ако постоји α тако да збир експонената свих чланова који учествују у једначини буде једнак једначина ће бити хомогена. Ако такво α не постоји једначина се не може свести на хомогену тј. не може се решавати на овај начин. У овом случају треба да буде $1+3\alpha = 2+3\alpha-1 = \alpha-1$ а то је еквивалентно систему од двије једначине са једном непознатом: $\begin{cases} 1+3\alpha = 2+3\alpha-1 \\ 1+3\alpha = \alpha-1 \end{cases}$ који може имати или немати решење. Овај систем има решење $\alpha = -1$ па се ова једначина може свести на хомогену смјеном $y = z^{-1}$. Добијамо $-z' = -\dfrac{2xz^{-3}}{x^2z^{-4} - z^{-2}}$ што послије множења бројиоца и имениоца са $\dfrac{z^4}{x^2}$ даје $z' = \dfrac{2\dfrac{z}{x}}{1-(\dfrac{z}{x})^2}$ што јесте хомогена једначина која се даље решава смјеном $\dfrac{z}{x} = u(x)$. Опште решење је $\dfrac{xy}{x^2y^2+1} = Cx$.

Примјер: $(y^4 - 3x^2)dy = -xydx$

Решење: послије одређивања $\alpha = \dfrac{1}{2}$ добија се опште решење $x^2 = y^4 + Cy^6$.

Примјер: $(x+y^3)dx + (3y^5 - 3y^2x)dy = 0$

Решење: послије одређивања $\alpha = \dfrac{1}{3}$ добија се опште решење

$$arctg\,\frac{y^3}{x} = \frac{1}{2}\ln(y^6 + x^2) + \ln C$$

Линеарна једначина

Једначина облика $y' + f(x)y + \varphi(x) = 0$ се може решавати тако што

- Решење тражимо у облику производа $y = u(x)v(x)$ при чему се једна од непознатих функција одабере тако да једначина по преосталој непознатој функцији буде што једноставнија.
- Примијенимо формулу $y = e^{-\int f(x)dx}\left[C - \int \varphi(x)e^{\int f(x)dx}dx\right]$

Примјер: $y' + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0$

Решење: $y = u(x)v(x)$ даје $u'v + uv' + 2xuv - 2xe^{-x^2} = 0$ тј. $u'v + u(v' + 2xv) - 2xe^{-x^2} = 0$. Ако функцију $v(x)$ одредимо тако да буде $v' + 2xv = 0$ тј. $v = e^{-x^2}$ добијамо $u'e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} = 0$ тј. $u = x^2 + C$ па је опште решење $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$

<u>Примјер:</u> Површина троугла образованог радијус вектором произвољне тачке криве, тангентом у тој тачки и апсцисном осом једнака је 2. Наћи једначину те криве ако она пролази кроз тачку (1;2).

<u>Решење</u>: Једначина тангенте има облик $t:\ \ Y-y=y'(X-x)$ гдје су (x,y) координате додирне тачке а (X,Y) координате произвољне тачке тангенте. Задати троугао означимо са OAM гдје су тачке : $O(0,0)$ - координатни почетак; $A(\alpha,0)$ - пресјек тангенте и апсцисне осе; $M(x,y)$ - додирна тачка тангенте и криве. Из услова $A\in t$ добијамо $0-y=y'(\alpha-x)$ тј. $\alpha=x-\dfrac{y}{y'}$. Услов за површину троугла $P_{OAM}=\dfrac{\alpha y}{2}=2$ тј. $\alpha y=4$ даје диференцијалну једначину која одговара фамилији кривих које задовољавају дати услов. Из $(x-\dfrac{y}{y'})y=4$ добијамо једначину $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{xy-4}$. Ако у тој једначини замијенимо улоге аргумента и функције тј. ако је третирамо као једначину по непознатој функцији $x=x(y)$ добијамо линеарну једначину $x'_y-\dfrac{1}{y}x+\dfrac{4}{y^2}=0$ која има решење $x=e^{-\int-\frac{dy}{y}}\left[C-\int\dfrac{4}{y^2}e^{\int-\frac{dy}{y}}dy\right]$ тј. $x=y\left[C+\dfrac{2}{y^2}\right]$. Из општег решења и задатог услова добијамо $y(1)=2\Rightarrow 1=2\left[C+\dfrac{2}{2^2}\right]$ тј. $C=0$ па је партикуларно решење $y=\dfrac{2}{x}$

<u>Примјер:</u> У базену се налази 100л раствора који садржи 10кг соли. У базен утиче 5л воде у минути, а истом брзином раствор истиче у други столитарски базен који је у почетку напуњен чистом водом. Вишак течности из њега се прелива. Послије колико времена ће количина соли у другом базену достићи максимум и колики ће он бити?

<u>Решење</u>: Количина соли у првом базену ће се за мали временски интервал Δt смањити за дио који директно пропорционално зависи од дужине интервала, количине воде која притиче у базен, и количине соли која се у том тренутку налази у базену, а обратно пропорционално од величине базена. Ако са $x(t)$ означимо количину соли у првом базену тада ће бити $x(t+\Delta t)=x(t)-\dfrac{\Delta t5x(t)}{100}$ тј. $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=-\dfrac{x(t)}{20}$. Гранична вриједност кад $\Delta t\to 0$ даје нам диференцијалну једначину $x'(t)=-\dfrac{x(t)}{20}$ која има опште решење $x(t)=Ce^{-t/20}$. Из почетног услова $x(0)=10$ добија се $C=10$ па је $x(t)=10e^{-t/20}$. Ако са $y(t)$ означимо количину соли у другом базену тада ће промјена за временски интервал Δt бити $y(t+\Delta t)=y(t)+\dfrac{\Delta t5x(t)}{100}-\dfrac{\Delta t5y(t)}{100}$ тј. $\dfrac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\dfrac{x(t)}{20}-\dfrac{y(t)}{20}$. Гранична вриједност кад $\Delta t\to 0$ даје нам диференцијалну једначину $y'(t)+\dfrac{y(t)}{20}-\dfrac{1}{2}e^{-t/20}=0$ која има опште решење $y=e^{-\int\frac{dt}{20}}\left[C+\int\dfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{20}}e^{\int\frac{dt}{20}}dt\right]$ тј. $y=e^{-\frac{t}{20}}\left[C+\dfrac{1}{2}t\right]$. Из почетног услова $y(0)=0$

добија се $C=0$ па је $y=\frac{te^{-t/20}}{2}$. Како је $y'=\frac{e^{-t/20}}{2}(1-\frac{t}{20})$ то је $y_{\max}=y(20)=\frac{10}{e}\approx 3.68$ тј. Максимална количина соли у другом базену ће бити 3.68кг послије 20 минута.

Бернулијева једначина

Једначина облика $y'+f(x)y+\varphi(x)y^n=0;\quad n\notin\{0,1\}$ се смјеном $z(x)=y^{1-n}$ своди на линеарну на следећи начин: $y'+f(x)y+\varphi(x)y^n=0\ \ /y^{-n}$

$$y'y^{-n}+f(x)y^{1-n}+\varphi(x)=0\ ;\ z(x)=y^{1-n};\ z'(x)=(1-n)y^{-n}y'$$

$$\frac{z'}{1-n}+f(x)z+\varphi(x)=0$$

$$z'+(1-n)f(x)z+(1-n)\varphi(x)=0$$

<u>примјер</u>: $xy'+y-y^2\ln x=0$

<u>решење</u>: $y'y^{-2}+\frac{1}{x}y^{-1}-\frac{\ln x}{x}=0$; $z=y^{-1}$; $z'=-y^{-2}y'$; $-z'+\frac{1}{x}z-\frac{\ln x}{x}=0$;

$z'-\frac{1}{x}z+\frac{\ln x}{x}=0$; $z=e^{\int\frac{dx}{x}}[C-\int\frac{\ln x}{x}e^{-\int\frac{dx}{x}}dx]\ =x[C-\int\ln x\frac{dx}{x^2}]=x[C+\frac{\ln x+1}{x}]$ тј.

$z=Cx+\ln x+1$; $y=\frac{1}{Cx+\ln x+1}$.

<u>примјер</u>: $(2x^2y\ln y-x)y'=y$

<u>решење</u>: Обзиром да облик $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x^2y\ln y-x}$ није погодан за решавање можемо замијенити улоге независне промјенљиве и функције тј. прећи на облик $\frac{dx}{dy}=\frac{2x^2y\ln y-x}{y}$; $x'_y+\frac{1}{y}x-(2\ln y)x^2=0$. Једначина сада има облик Бернулијеве: $x'_y+f(y)x+\varphi(y)x^2=0$

$x^{-2}x'_y+\frac{1}{y}x^{-1}-(2\ln y)=0$; $z(y)=x^{-1}$; $z'=-x^{-2}x'$; $-z'+\frac{1}{y}z-(2\ln y)=0$;

$z'-\frac{1}{y}z+(2\ln y)=0$; $z=e^{\int\frac{dy}{y}}[C-\int 2\ln y e^{-\int\frac{dy}{y}}dy]\ =y[C-\ln^2 y]$; $z=\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}=y[C-\ln^2 y]$

$1=xy[C-\ln^2 y]$.

<u>примјер</u>: $y'\cos y-\cos x\sin^2 y-\sin y=0$, $y(0)=\pi/2$.

<u>решење</u>: Послије смјене $\sin y=z$ једначина добија облик $z'-z-\cos xz^2=0$;

$-z^{-2}z'+z^{-1}+\cos x=0$; смјена $u(x)=z^{-1}$ даје $u'+u+\cos x=0$; $u=e^{-\int dx}[C-\int\cos xe^{\int dx}dx]$

$=e^{-x}[C-\int\cos xe^x dx]$; $u=e^{-x}[C-\frac{e^x\sin x+e^x\cos x}{2}]\ =Ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}$

$z=\frac{1}{Ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}}$; $\sin y=\frac{1}{Ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}}$; $y=\arcsin\frac{2}{2Ce^{-x}-\sin x-\cos x}$. За партикуларно решење имамо: $\frac{\pi}{2}=\arcsin\frac{2}{2C-1}$; $1=\frac{2}{2C-1}$; $y=\arcsin\frac{2}{3e^{-x}-\sin x-\cos x}$.

примјери за вјежбање:

$y'+2ax^3y^3+2xy=0$; решење: $y=[\sqrt{e^{2x^2}C-a(x^2+0.5)}]^{-1}$

Једначина са тоталним диференцијалом

Ако је у једначини $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ лијева страна диференцијал функције $U(x,y)$ тј. ако је $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ тада је решење $U(x,y) = C$. Услов који треба да буде задовољен да би једначина била са тоталним диференцијалом је $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Ако је услов задовољен треба одредити непознату функцију $U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \qquad \Rightarrow \quad U = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + \varphi'(y)$$

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + \varphi'(y); \;\; \varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx;$$

$$\varphi(y) = \int (Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx)dy$$

$$U = \int P(x,y)dx + \int (Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx)dy$$

опште решење је: $U(x,y) = C$.

<u>примјер:</u> Ријешити диф. ј-ну: $y' = \frac{(a - x^2 - y^2)x}{(a + x^2 + y^2)y}$.

<u>решење:</u> Једначина се може записати у облику: $(x^2 + y^2 - a)xdx + (a + x^2 + y^2)ydy = 0$,тј. $Pdx + Qdy = 0$ Како је задовољен услов $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$ имамо једначину са тоталним диференцијалом чиме се задатак своди на налажење функције $U = U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из $\frac{\partial U}{\partial x} = x^3 + xy^2 - ax$ имамо $U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + \varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + \varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y} = y^3 + x^2y + ay$ то је $\varphi'(y) = y^3 + ay$; $\varphi(y) = \frac{y^4}{4} + \frac{ay^2}{2}$;

$U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{ay^2}{2}$. Опште решење је $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{ay^2}{2} = \frac{C}{4}$ тј $(x^2 + y^2)^2 - 2a(x^2 - y^2) = C$.

<u>примјер:</u> $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$

<u>решење:</u> $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial (x^3 + xy^2)}{\partial y} = 2xy$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (x^2y + y^3)}{\partial x} = 2xy$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (x^3 + xy^2) \Rightarrow U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = (x^2y + y^3) \wedge \frac{\partial U}{\partial y} = x^2y + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = y^3 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^4}{4}$$

$U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}$ па је опште решење: $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = C$.

Интеграциони множитељ

Ако код једначине $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ није задовољен услов $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ можемо покушати да множењем једначине неком функцијом $\lambda=\lambda(x,y)$ добијемо једначину $\lambda P(x,y)dx+\lambda Q(x,y)dy=0$ код које ће услов бити задовољен. Овдје ћемо размотрити само најједноставније облике функције $\lambda=\lambda(x,y)$, коју називамо интеграциони множитељ, који дозвољавају њено лако налажење.

Нека је $\lambda=\lambda(x)$. Тада из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y}=\frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{d\lambda}{dx}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$ то јест $\lambda(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=Q\frac{d\lambda}{dx}$. Добијену једнакост $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx=\frac{d\lambda}{\lambda}$ можемо интегралити ако је члан уз dx функција која зависи само од x. То представља услов за постојање интеграционог множитеља $\lambda=\lambda(x)$ и истовремено даје начин за његово одређивање.

Слично се из једнакости $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy=\frac{d\lambda}{\lambda}$ може добити интеграциони множитељ $\lambda=\lambda(y)$ ако је члан уз dy функција која зависи само од y.

<u>примјер:</u> $(x+y^2)dx-2xydy=0$

<u>решење:</u> Једначина није једначина са тоталним диференцијалом јер је $\frac{\partial P}{\partial y}=2y$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y$. Како је $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{2y+2y}{-2xy}=-\frac{2}{x}$ то из $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx$ можемо одредити функцију $\lambda=\lambda(x)$ као интеграциони множитељ која ј-ну своди на ј-ну са тоталним диференцијалом. $\frac{d\lambda}{\lambda}=-\frac{2}{x}dx\Rightarrow \ln\lambda=-2\ln x\Rightarrow \lambda=\frac{1}{x^2}$. Послије множења: $(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2})dx-2\frac{y}{x}dy=0$ па је $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ чиме се задатак своди на налажење функције $U=U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}$ имамо $U=\ln x-\frac{y^2}{x}+\varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{2y}{x}+\varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{2y}{x}$ то је $\varphi'(y)=0$. $U=\ln x-\frac{y^2}{x}$ Опште решење је $\ln x-\frac{y^2}{x}=C$.

<u>примјер:</u> Ријешити диф. ј-ну: $y'=\frac{xy}{y^3+x^2y+x^2}$.

<u>решење:</u> $xydx-(y^3+x^2y+x^2)dy=0$. Како је $\frac{\partial P}{\partial y}=x$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2xy-2x$ тада је $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\frac{-2xy-2x-x}{xy}=\frac{-2y-3}{y}$ па из $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy$ можемо одредити функцију $\lambda=\lambda(y)$ као интеграциони множитељ која ј-ну своди на ј-ну са тоталним

диференцијалом. $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{-2y-3}{y}dy\Rightarrow\ \ln\lambda=-2y-3\ln y\Rightarrow\ \lambda=\frac{e^{-2y}}{y^3}$. Послије множења: $\frac{x}{e^{2y}y^2}dx-\frac{y^3+x^2y+x^2}{e^{2y}y^3}dy=0$ па је $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2x(y+1)}{e^{2y}y^3}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ чиме се задатак своди на налажење функције $U=U(x,y)$ када су познати њени парцијални изводи. Из $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x}{e^{2y}y^2}$ имамо $U=\frac{x^2}{2e^{2y}y^2}+\varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y}=x^2\frac{-4y^2-4y}{4e^{2y}y^4}+\varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{y^3+x^2y+x^2}{e^{2y}y^3}$ то је $\varphi'(y)=-e^{-2y}$ па је $\varphi(y)=\frac{e^{-2y}}{2}$.

$U=\frac{x^2}{2e^{2y}y^2}+\frac{1}{2e^{2y}}$. Опште решење је $\frac{x^2+y^2}{2e^{2y}y^2}=C$. Због множења са $\lambda=\frac{e^{-2y}}{y^3}$ вршимо провјеру да ли је $y=0$ решење. Очигледно јесте, и не може се добити ни за једну вриједност константе из општег решења па представља сингуларно решење.

примјери за вјежбање:
$(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$; $2xy+5arctgx=C$.

У ситуацијама када се не може одредити интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве можемо покушати, зависно од облика функција $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ да одредимо множитељ у облику $\lambda=\lambda(x+y)$ или $\lambda=\lambda(x^2+y^2)$...

<u>примјер:</u> $x(xy-3)y'+(xy^2-y)=0$.

<u>решење:</u> Из $y(xy-1)dx+x(xy-3)dy=0$ имамо $\frac{\partial P}{\partial y}=2xy-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy-3$. Како не постоји интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве тражимо, обзиром на облик функција $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ функцију $\lambda=\lambda(xy)$. Ако означимо $t=xy$ тада је $\lambda=\lambda(t)=\lambda(t(x;y))$. Из $\frac{\partial\lambda P}{\partial y}=\frac{\partial\lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial\lambda}{\partial y}=\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial\lambda}{\partial x}$. Како је $\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dt}y$ и $\frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{d\lambda}{dt}x$ то је $\lambda\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{d\lambda}{dt}x=\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{d\lambda}{dt}y$. Из $P\frac{d\lambda}{dt}x-Q\frac{d\lambda}{dt}y=\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}-\lambda\frac{\partial P}{\partial y}$ тј. $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Px-Qy}dt$ закључујемо да ако је $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Px-Qy}=F(t)$ онда постоји интеграциони множитељ $\lambda=\lambda(xy)$. Овдје је
$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Px-Qy}=\frac{2xy-3-2xy+1}{xy(xy-1)-xy(xy-3)}$ па имамо $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{-2}{2xy}dt$ тј. $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{-dt}{t}$. Послије одређивања множитеља $\lambda=\frac{1}{t}$ тј. $\lambda=\frac{1}{xy}$ добија се једначина $\frac{xy-1}{x}dx+\frac{xy-3}{y}dy=0$ код које је $\frac{\partial P}{\partial y}=1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$. Опште решење једначине се може записати у облику $xy-\ln xy^3=C.$ Осим тога, због множења са $\lambda=\frac{1}{xy}$ имамо и сингуларно решење $y=0$.

(Задатак се може ријешити и смјеном $y=z^{\alpha}$)

примјер: ријешити $(3x+2y+y^2)dx+(x+4xy+5y^2)dy=0$ знајући да је интеграциони множитељ облика $\lambda=\lambda(x+y^2)$.

решење: смјена $z=x+y^2$ даје $\lambda=\lambda(z)$ па из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y}=\frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо

$\lambda\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \lambda}{\partial y}=Q\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$. Како је $\frac{\partial \lambda}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dz}$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial y}=\frac{d\lambda}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{d\lambda}{dz}2y$ то је

$$\lambda(2+2y)+(3x+2y+y^2)\frac{d\lambda}{dz}2y=(x+4xy+5y^2)\frac{d\lambda}{dz}+\lambda(1+4y)$$

$\frac{d\lambda}{dz}(6xy+4y^2+2y^3-x-4xy-5y^2)=\lambda(1+4y-2-2y)$; $\frac{d\lambda}{dz}(2xy-y^2+2y^3-x)=\lambda(-1+2y)$

$\frac{d\lambda}{dz}(x+y^2)(-1+2y)=\lambda(-1+2y)$; $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{dz}{x+y^2}$; $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{dz}{z}$ интеграцијом добијамо $\lambda=z$ то јест $\lambda=x+y^2$. Послије множења добијамо

$$(3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)dx+(x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4)dy=0$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=2x+8xy+6y^2+4y^3=\frac{\partial Q}{\partial x}$ па добијена једначина јесте са тоталним диференцијалом. Из $\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4$ имамо

$U=x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+\varphi(y)$. Како је $\frac{\partial U}{\partial y}=x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+\varphi'(y)$ и истовремено из једначине $\frac{\partial U}{\partial y}=x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4$ то је $\varphi'(y)=5y^4$,

$\varphi(y)=y^5$, $U=x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+y^5$ Опште решење је

$x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+y^5=C$.

примјер: ријешити $(x-2y^3)dx+(2x-y^3)3y^2dy=0$

решење: $\frac{\partial P}{\partial y}=-6y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=6y^2$. Једначина није са тоталним диференцијалом и не постоји интеграциони множитељ као функција само једне промјенљиве. Обзиром на облик функција $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ функцију $\lambda=\lambda(x;y)$ можемо тражити у неком од облика $\lambda=\lambda(x-y^3)$ или $\lambda=\lambda(x+y^3)$ или $\lambda=\lambda(2x+y^3)$... Ако постоји множитељ који на неки начин зависи од x и y^3, да не би нагађали какав је тај облик можемо га потражити као $\lambda=\lambda(ax+by^3)$. Ако означимо $t=ax+by^3$ тада је $\lambda=\lambda(t)=\lambda(t(x;y))$.

Из $\frac{\partial \lambda P}{\partial y}=\frac{\partial \lambda Q}{\partial x}$ добијамо $\lambda\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \lambda}{\partial y}=\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \lambda}{\partial x}$. Како је $\frac{\partial \lambda}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{d\lambda}{dt}a$ и

$\frac{\partial \lambda}{\partial y}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{d\lambda}{dt}3by^2$ то је $\lambda\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{d\lambda}{dt}3by^2=\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{d\lambda}{dt}a$. Из

$(P3by^2-Qa)\frac{d\lambda}{dt}=\lambda(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$ тј. $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P3by^2-Qa}dt$ закључујемо да ако је

$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P3by^2-Qa}=F(t)=F(ax+by^3)$ онда постоји интеграциони множитељ $\lambda=\lambda(ax+by^3)$.

Из $\dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P3by^2-Qa}=\dfrac{6y^2+6y^2}{3by^2(x-2y^3)-3ay^2(2x-y^3)}$ имамо $\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{12y^2}{3y^2((b-2a)x+(-2b+a)y^3)}dt$

тј. $\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{4dt}{(-2a+b)x+(a-2b)y^3}$. Ако можемо одредити константе a и b тако да буде

$(-2a+b)x+(a-2b)y^3=K(ax+by^3)$ тада ће бити $\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{4dt}{K(ax+by^3)}$. То значи да за те

вриједности a и b постоји множитељ $\lambda=\lambda(ax+by^3)$. Из

$(-2a+b)x+(a-2b)y^3=K(ax+by^3)$ добијамо систем за одређивање a и b

$\begin{cases}-2a+b=Ka\\ a-2b=Kb\end{cases}$ тј. $\begin{cases}(-2-K)a+b=0\\ a+(-2-K)b=0\end{cases}$. Детерминанта система је једнака нули (тј. систем има нетривијална решења) за $K=-3$ и $K=-1$. То значи да можемо одредити двије функције које множењем једначину доводе на жељени облик. Коју од њих је боље користити? За $K=-3$ добија се $b=-a$ па за $a=1$ добијамо $t=x-y^3$ и

$\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{4dt}{-3(x-y^3)}$ па је $\lambda=(x-y^3)^{-4/3}$. За $K=-1$ добија се $b=a$ па за $a=1$ добијамо

$t=x+y^3$ и $\dfrac{d\lambda}{\lambda}=\dfrac{4dt}{-(x+y^3)}$ па је $\lambda=(x+y^3)^{-4}$. Послије множења са $\lambda=(x+y^3)^{-4}$

добијамо једначину $\dfrac{x-2y^3}{(x+y^3)^4}dx+\dfrac{(2x-y^3)3y^2}{(x+y^3)^4}dy=0$ за коју је $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{18y^2(-x+y^3)}{(x+y^3)^5}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Из $\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{x-2y^3}{(x+y^3)^4}=\dfrac{x+y^3-3y^3}{(x+y^3)^4}=\dfrac{1}{(x+y^3)^3}-3y^3\dfrac{1}{(x+y^3)^4}$ добија се

$U(x;y)=\dfrac{-x+y^3}{2(x+y^3)^3}+\varphi(y)$. Послије диференцирања и одређивања $\varphi(y)$ добија се

опште решење $\dfrac{-x+y^3}{2(x+y^3)^3}=\dfrac{C}{2}$.(За $y=z^\alpha$ се послије одређивања $\alpha=\dfrac{1}{3}$ једначина своди на хомогену.)