Рикатијева једначина

$y' + f(x)y^2 + \varphi(x)y + \psi(x) = 0; \quad (f(x) \neq 0)$
Једначина у општем случају, за разне вриједности функција $f(x);\varphi(x);\psi(x)$ није решива помоћу квадратура. За неке специјалне случајеве решење можемо тражити на следеће начине:
Методом покушаја тражимо једно партикуларно решење. Облик у коме тражимо решење зависи од функција које учествују у једначини. Ако пронађемо решење y_p за које је $y'_p + f(x)y_p^2 + \varphi(x)y_p + \psi(x) = 0$ тада једначина смјеном $y = y_p + z(x)$ постаје:
$(y_p + z(x))' + f(x)(y_p + z(x))^2 + \varphi(x)(y_p + z(x)) + \psi(x) = 0$
$y'_p + z'(x) + f(x)(y_p^2 + 2y_p z(x) + z^2(x)) + \varphi(x)(y_p + z(x)) + \psi(x) = 0$
$y'_p + f(x)y_p^2 + \varphi(x)y_p + \psi(x) + z' + (2f(x)y_p + \varphi(x))z + f(x)z^2 = 0$. Добијена Бернулијева једначина $z' + (2f(x)y_p + \varphi(x))z + f(x)z^2 = 0$ тј $-\frac{z'}{z^2} - \frac{2f(x)y_p + \varphi(x)}{z} - f(x) = 0$ се даље смјеном $z^{-1} = u(x)$ своди на $u' - (2f(x)y_p + \varphi(x))u - f(x) = 0$. Решење добијене линеарне једначине $u = u(x,C)$ даје опште решење полазне једначине $y = y_p + u^{-1}(x,C)$. У случају да се партикуларно решење y_p не може добити из општег решења ни за коју вриједност константе C то је сингуларно решење, које заједно са општим решењем чини скуп свих решења полазне једначине.
У случају да не можемо да одредимо ниједно партикуларно решење које би на претходни начин водило до општег решења можемо покушати да до решења дођемо у два корака на следећи начин: Решење тражимо у облику $y = u(x) + v(x)$. Једначину $(u+v)' + f(x)(u+v)^2 + \varphi(x)(u+v) + \psi(x) = 0$ запишемо у облику сређеном по једној од непознатих функција $v' + f(x)v^2 + (\varphi(x) + 2f(x)u)v + (u' + f(x)u^2 + \varphi(x)u + \psi(x)) = 0$.
Избор функције $u(x)$ вршимо тако да добијена једначина по преосталој непознатој функцији $u(x)$ буде што лакша за решавање.

<u>Примјер:</u> $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$

<u>решење:</u> функције које учествују у једначини су полиноми па партикуларно решење тражимо у облику $y_p = C$, $y_p = ax$, $y_p = ax^2 + bx + c$, $y_p = \frac{a}{x}$, ... На примјер за $y_p = ax$ добијамо замјеном у једначину $x^2a + xax + x^2a^2x^2 = 4$ што није идентитет, па $y_p = ax$ није решење. Замјеном $y_p = \frac{a}{x}$ добијамо $x^2(-\frac{a}{x^2}) + x\frac{a}{x} + x^2\frac{a^2}{x^2} \equiv 4$ тј $a^2 \equiv 4$ што је задовољено за $a = \pm 2$ па добијамо два партикуларна решења $y_1 = \frac{2}{x}$ и $y_2 = -\frac{2}{x}$. Смјеном $y = \frac{2}{x} + z(x)$ добијамо $x^2(-\frac{2}{x^2} + z') + x(\frac{2}{x} + z) + x^2(\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}z + z^2) = 4$
$x^2z' + 5xz + x^2z^2 = 0$. $-z^{-2}z' - 5x^{-1}z^{-1} - 1 = 0$. Смјена $z^{-1} = u(x)$ даје $u' - 5x^{-1}u - 1 = 0$,
$u = e^{-\int -5x^{-1}dx}[\widetilde{C} - \int -e^{\int -5x^{-1}dx}dx]$, $u = x^5[\widetilde{C} + \int x^{-5}dx]$ $u = x^5[\frac{C}{4} - \frac{x^{-4}}{4}]$, $u = \frac{Cx^5 - x}{4}$ па је опште решење $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$. Из општег решења се очигледно за $C = 0$ може добити решење $y_2 = -\frac{2}{x}$. Решење $y_1 = \frac{2}{x}$ се ни за једну вриједност константе C не може

добити јер не може бити $\frac{4}{Cx^5 - x} \equiv 0$, па је то сингуларно решење. Скуп свих решења је $\begin{cases} y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x} \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$.

Примјер:

$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$

решење: партикуларно решење тражимо у облику $y = ae^{2x} + be^x$

$(2ae^{2x} + be^x) + 2(ae^{2x} + be^x)e^x - (a^2e^{4x} + 2abe^{3x} + b^2e^{2x}) \equiv e^{2x} + e^x$

$$(b-1)e^x + (2a + 2b - b^2 - 1)e^{2x} + (2a - 2ab)e^{3x} - a^2e^{4x} \equiv 0 \quad \left.\begin{matrix} b - 1 = 0 \\ 2a + 2b - b^2 - 1 = 0 \\ 2a - 2ab = 0 \\ -a^2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 1 \end{matrix} \Rightarrow y_p = e^x .$$

Смјена $y = e^x + z(x)$ даје опште решење $y = e^x - \frac{1}{x + C}$ и сингуларно $y = e^x$.

Примјер: $xy' - xy^2 - (2x^2 + 1)y - x^3 = 0$

решење: партикуларно решење тражимо у облику $y = ax$

$xa - xa^2x^2 - (2x^2 + 1)ax - x^3 \equiv 0 \Rightarrow -a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ Партикуларно решење је $y_p = -x$. Примјеном смјене $y = -x + \frac{1}{u(x)}$ тј. $y' = -1 - \frac{u'}{u^2}$ добијамо

$x(-1 - \frac{u'}{u^2}) - x(x^2 - 2\frac{x}{u} + \frac{1}{u^2}) - (2x^2 + 1)(-x + \frac{1}{u}) - x^3 = 0$; $-x\frac{u'}{u^2} - \frac{x}{u^2} - \frac{1}{u} = 0 \Rightarrow \quad u' + \frac{1}{x}u + 1 = 0$

$u = e^{-\int \frac{dx}{x}}[C - \int e^{\int \frac{dx}{x}} dx] \Rightarrow \quad u = \frac{1}{x}[C - \frac{x^2}{2}] \quad y = -x + \frac{x}{C - \frac{x^2}{2}} \Rightarrow \quad y = \frac{x^3 + x(2 - 2C)}{2C - x^2}$ па је скуп свих решења $\begin{cases} y = \frac{x^3 + x(2 - 2C)}{2C - x^2} \\ y = -x \end{cases}$

Примјер: $y' + y^2 + (xy - 1)\frac{1}{x^2} = 0$

решење: $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{2Cx^3 - x}$; $y = \frac{1}{x}$

Примјер: $x^3y' - x^4y^2 + x^2y + 20 = 0$

решење: $y = \frac{4}{x^2} + \frac{9x^7}{C - x^9}$; $y = \frac{4}{x^2}$

Примјер: $y' = y^2 - 2x^2y + x^4 + 2x + 4$

решење: Решење тражимо у облику $y = u(x) + v(x)$.

$u' + v' = u^2 + 2uv + v^2 - 2x^2u - 2x^2v + x^4 + 2x + 4$ Једначину средимо по једној од непознатих функција: $u' = u^2 + (2v - 2x^2)u + (-v' + v^2 - 2x^2v + x^4 + 2x + 4)$ Функцију $v(x)$ бирамо тако да једначина по $u(x)$ буде што једноставнија. Не можемо изабрати $v(x)$ тако да буде $-v' + v^2 - 2x^2v + x^4 + 2x + 4 = 0$ јер се то своди на решавање полазне једначине. Стога бирамо $v(x)$ тако да буде $2v - 2x^2 = 0$ тј $v = x^2$. Једначина постаје

$u' = u^2 + 4$. Из $\frac{du}{u^2+4} = dx$ добијамо $\frac{1}{2} arctg \frac{u}{2} = x + C$ тј $u = 2tg(2x + 2C)$ па је опште решење $y = x^2 + 2tg(2x + 2C)$.

<u>коментар:</u> У неким случајевима једначине можемо решавати једноставније него иначе, ако прије примјене стандардних поступака уочимо неке ствари које конкретну једначину поједностављују и примијенимо их. Овдје се ј-на може записати као $y' = (y - x^2)^2 + 2x + 4$ и примијенити смјена $y - x^2 = u(x)$ која брже и лакше доводи до ј-не $u' = u^2 + 4$.

Једначине облика $F(x; y; y') = 0$

Ако једначина $(y')^n + p_1(x; y)(y')^{n-1} + ... + p_{n-1}(x; y)y' + p_n(x; y) = 0$ има $k \le n$ реалних решења $y' = f_1(x; y)$, $y' = f_2(x; y)$, ... $y' = f_k(x; y)$ тада њихова решења $\varphi_1(x; y; C) = 0$, $\varphi_2(x; y; C) = 0$, ... $\varphi_k(x; y; C) = 0$ записана у облику производа $\varphi_1(x; y; C)\varphi_2(x; y; C)...\varphi_k(x; y; C) = 0$ представљају опште решење полазне једначине.

<u>Примјер:</u> $yy'^2 + (x - y)y' - x = 0$

<u>решење:</u> $y'^2 + \frac{x-y}{y} y' - \frac{x}{y} = 0$ има решења $y'_{1/2} = \frac{-\frac{x-y}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{x-y}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y}}}{2}$ тј.

$y'_{1/2} = \frac{-\frac{x-y}{y} \pm \frac{x+y}{y}}{2}$. Из $y'_1 = 1$ добијамо решење $y = x + C$. Из $y'_2 = -x/y$ добијамо решење $y^2 = -x^2 + C$. Опште решење је $(y - x - C)(y^2 + x^2 - C) = 0$.

<u>Примјер:</u> $y'^3 - yy'^2 - x^2 y' + x^2 y = 0$

<u>решење:</u> $y'^2(y' - y) - x^2(y' - y) = 0$; $(y' - y)(y'^2 - x^2) = 0$; $(y' - y)(y' - x)(y' + x) = 0$ има опште решење $(y - Ce^x)(y - \frac{x^2}{2} - C)(y + \frac{x^2}{2} - C) = 0$.

Ако се једначина облика $F(x; y; y') = 0$ не може ријешити по y' али се може записати у облику $y = f(x; y')$ или $x = f(y; y')$ можемо примијенити метод увођења параметра.

<u>Примјер:</u> $y = x + y' - \ln y'$

<u>решење:</u> Параметар уводимо смјеном $y' = p$; $dy = pdx$. Добијамо $y = x + p - \ln p$. Нађемо тотални диференцијал лијеве и десне стране: $dy = dx + dp - \frac{1}{p}dp$. Како је $dy = pdx$ добијамо $(p-1)dx = \frac{p-1}{p}dp$ тј $(p-1)(dx - \frac{dp}{p}) = 0$. Из $dx - \frac{dp}{p} = 0$ добијамо $x = \ln p + C$ што са већ добијеним $y = x + p - \ln p$ даје решење у параметарском облику: $\begin{cases} x = \ln p + C \\ y = p + C \end{cases}$. Ако је могуће елиминисати параметар, и прећи на експлицитно решење пожељно је то и урадити. Из $x = \ln p + C$ имамо $p = e^{x-C}$ па је опште решење $y = e^{x-C} + C$. Из $p - 1 = 0$ добијамо $p = 1$ што са $y = x + p - \ln p$ даје $y = x + 1$ што очигледно јесте сингуларно решење.

<u>Примјер:</u> $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$

<u>решење:</u> Из $\ln y' = \dfrac{xy'}{y}$ тј. $y = \dfrac{xy'}{\ln y'}$ и $y' = p$; $dy = pdx$ добијамо $y = \dfrac{xp}{\ln p}$. Нађемо тотални диференцијал лијеве и десне стране: $dy = \dfrac{p}{\ln p}dx + x\dfrac{\ln p - 1}{\ln^2 p}dp$. Како је $dy = pdx$ добијамо $(p - \dfrac{p}{\ln p})dx = x\dfrac{\ln p - 1}{\ln^2 p}dp$ тј $p(\dfrac{\ln p - 1}{\ln p})dx = x\dfrac{\ln p - 1}{\ln^2 p}dp$. Опште решење тражимо из $\dfrac{p}{\ln p}dx = \dfrac{x}{\ln^2 p}dp$. Добијамо $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dp}{p\ln p}$ тј. $\ln x + \ln C = \ln\ln p$.

Елиминацијом параметра добијамо $p = e^{Cx}$ па је опште решење $y = \dfrac{xe^{Cx}}{\ln e^{Cx}}$ тј. $y = \dfrac{1}{C}e^{Cx}$. Сингуларно решење $y = ex$ добијамо из $\ln p = 1$ тј. $p = e$ и $y = \dfrac{xp}{\ln p}$.

Лагранжова једначина

$y = f(y')x + \varphi(y')$

Параметар p се уводи смјеном $y' = p$; $dy = pdx$.Једначина добија облик $y = f(p)x + \varphi(p)$. Из $dy = f(p)dx + xf'(p)dp + \varphi'(p)dp$ и $dy = pdx$ добија се $(p - f(p))dx = xf'(p)dp + \varphi'(p)dp$ тј. $\dfrac{dx}{dp} = x\dfrac{f'(p)}{p - f(p)} + \dfrac{\varphi'(p)}{p - f(p)}$. Решавањем ове линеарне једначине добија се опште решење $\begin{cases} x = x(p;C) \\ y = f(p)x(p;C) + \varphi(p) \end{cases}$.

<u>Примјер:</u> $y = 2xy' + \ln y'$

<u>решење:</u> Уводимо $y' = p$; $dy = pdx$. Добијамо $y = 2xp + \ln p$. Нађемо тотални диференцијал лијеве и десне стране: $dy = 2pdx + 2xdp + \dfrac{1}{p}dp$. Како је $dy = pdx$ добијамо $pdx + 2xdp + \dfrac{1}{p}dp = 0$ тј $\dfrac{dx}{dp} + \dfrac{2}{p}x + \dfrac{1}{p^2} = 0$. Опште решење ове линеарне једначине је $x = e^{-\int\frac{2}{p}dp}[C - \int\dfrac{1}{p^2}e^{\int\frac{2}{p}dp}dp]$ тј. $x = \dfrac{C - p}{p^2}$ па је опште решење полазне једначине $\begin{cases} x = \dfrac{C - p}{p^2} \\ y = 2\dfrac{C - p}{p} + \ln p \end{cases}$.

<u>Примјер:</u> $y = x(1 + y') + y'^2$

<u>решење:</u> Уводимо $y' = p$; $dy = pdx$. Добијамо $y = x(1 + p) + p^2$. Нађемо тотални диференцијал лијеве и десне стране: $dy = (1 + p)dx + xdp + 2pdp$. Како је $dy = pdx$ добијамо $dx + xdp + 2pdp = 0$ тј $\dfrac{dx}{dp} + x + 2p = 0$. Опште решење ове линеарне

једначине је $x = e^{-\int dp}[C - \int 2pe^{\int dp}dp]$ тј. $x = e^{-p}[C - 2(p-1)e^{p}]$ па је опште решење полазне једначине $\begin{cases} x = Ce^{-p} - 2p + 2 \\ y = (Ce^{-p} - 2p + 2)(1+p) + p^2 \end{cases}$

Клероова једначина

$y = xy' + \varphi(y')$

Параметар p се уводи смјеном $y' = p$; $dy = pdx$.Једначина добија облик $y = xp + \varphi(p)$. Из $dy = pdx + xdp + \varphi'(p)dp$ и $dy = pdx$ добија се $0 = (x + \varphi'(p))dp$. Из $dp = 0$ добија се $p = C$ па је опште решење $y = Cx + \varphi(C)$. Осим тога једначина може имати и сингуларно решење које се добија елиминацијом параметра из $x + \varphi'(p) = 0$ и $y = xp + \varphi(p)$.

<u>Примјер:</u> $y = xy' + y'^2$

<u>решење:</u> Уводимо $y' = p$; $dy = pdx$. Добијамо $y = xp + p^2$. Нађемо тотални диференцијал лијеве и десне стране: $dy = pdx + xdp + 2pdp$. Како је $dy = pdx$ добијамо $(x + 2p)dp = 0$. Из $dp = 0$ добијамо опште решење $y = Cx + C^2$. Из $x + 2p = 0$ и $y = xp + p^2$ елиминацијом параметра добијамо сингуларно решење $y = -\frac{x^2}{4}$.

<u>Примјер:</u> Наћи једначину криве чији одсјечак тангенте међу координатним осама има сталну дужину a.

<u>решење:</u> Ако тачке пресјека произвољне тангенте са x и y осама означимо са $A(\alpha, 0)$ и $B(0, \beta)$ услов који крива треба да задовољи постаје $d(A;B) = a$ тј. $\sqrt{(\alpha - 0)^2 + (0 - \beta)^2} = a$. Једначина тангенте има облик $t:\ Y - y = y'(X - x)$ гдје су (x, y) координате додирне тачке а (X, Y) координате произвољне тачке тангенте. Из услова $A \in t$ добијамо $0 - y = y'(\alpha - x)$ тј. $\alpha = x - \frac{y}{y'}$. Из услова $B \in t$ добијамо $\beta - y = y'(0 - x)$ тј. $\beta = y - xy'$. Услов $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$ даје диференцијалну једначину $(x - \frac{y}{y'})^2 + (y - xy')^2 = a^2$ која се може записати као $(y - xy')^2(1 + \frac{1}{y'^2}) = a^2$ тј. као $(y - xy')^2 = a^2 \frac{y'^2}{1 + y'^2}$. Послије кореновања добијамо $y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$. Послије $y' = p$; $dy = pdx$ добија се $y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$. Послије диференцирања добија се $dy = xdp + pdx \pm \frac{a}{\sqrt{(1 + p^2)^3}}dp$ тј. $0 = (x \pm \frac{a}{\sqrt{(1 + p^2)^3}})dp$. Из $dp = 0$ добијамо опште решење $y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$. Из $x \pm \frac{a}{\sqrt{(1 + p^2)^3}} = 0$ и $y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$ добијамо $x = \mp \frac{a}{\sqrt{(1 + p^2)^3}}$ и $y = \mp \frac{a}{\sqrt{(1 + p^2)^3}} p \pm \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$ тј. $y = \pm \frac{ap^3}{\sqrt{(1 + p^2)^3}}$. Елиминацијом параметра добијамо сингуларно решење $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Примјер: Наћи једначину криве код које тангента образује са координатним осама троугао површине $2a^2$.
решење: $xy = a^2$

Једначине облика $F(x, y^{(n)}) = 0$

a. Може се ријешити по $y^{(n)}$ тј. довести на облик $y^{(n)} = f(x)$. Узастопним интеграцијама добија се опште решење
$$y = \int\int ... \int f(x)dxdx...dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + C_{n-1}x + C_n \ .$$
b. Једначина се не може ријешити по $y^{(n)}$ али се може параметризовати: $x = \varphi(t)$; $y^{(n)} = \psi(t)$. Тада се из $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$ добија
$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt = \psi_1(t, C_1)$; $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)dt$;
$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\varphi'(t)dt = \psi_2(t, C_1, C_2)$ ... Решење у параметарском облику ће бити: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, ..., C_n) \end{cases}$.

примјер:
Наћи решење једначине $y'' = xe^x$ које задовољава услове $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$
решење:
$y' = \int xe^x dx + C_1 = (x-1)e^x + C_1$; $y = \int (x-1)e^x dx + C_1x + C_2 = (x-2)e^x + C_1x + C_2$ је опште решење. Из $y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 1$ и $y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 3$ па је тражено партикуларно решење: $y = (x-2)e^x + x + 3$.
примјер:
$e^{y''} + y'' = x$
решење:
Параметризацијом једначине добијамо $y'' = t$; $x = e^t + t$. Тада је $dx = (e^t + 1)dt$ па је
$dy' = y''dx = t(e^t + 1)dt$ и $y' = \int t(e^t + 1)dt + C_1 = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1$;
$dy = y'dx = \left((t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right)(e^t + 1)dt$; $y = \int \left((t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right)(e^t + 1)dt + C_2$ ... Решење у параметарском облику ће бити: $\begin{cases} x = e^t + t \\ y = (\frac{t}{2} - \frac{3}{4})e^{2t} + (\frac{t^2}{2} - 1 + C_1)e^t + \frac{t^3}{6} + C_1t + C_2 \end{cases}$.

Једначине облика $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

a. Може се ријешити по $y^{(n)}$ тј. довести на облик $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$. Смјена $y^{(n-1)} = z(x)$ доводи до облика $z' = f(z)$. Решење те једначине је $\alpha(x, z, C_1) = 0$ тј. $\alpha(x, y^{(n-1)}, C_1) = 0$ чиме се једначина своди на претходни тип.
b. Једначина се не може ријешити по $y^{(n)}$ али се може параметризовати: $y^{(n-1)} = \varphi_1(t)$; $y^{(n)} = \psi(t)$. Тада се из $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ тј. $\varphi_1'(t)dt = \psi(t)dx$ добија
$dx = \frac{\varphi_1'(t)}{\psi(t)}dt$ и $x = \int \frac{\varphi_1'(t)}{\psi(t)}dt + C_1 = \lambda(t, C_1)$; $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \varphi_1(t)\frac{\varphi_1'(t)}{\psi(t)}dt$;

$y^{(n-2)} = \int \varphi_1(t)\dfrac{\varphi_1'(t)}{\psi(t)}dt + C_2 = \varphi_2(t,C_2)\ldots$ Решење у параметарском облику ће бити: $\begin{cases} x = \lambda(t,C_1) \\ y = \varphi_n(t,C_2,\ldots,C_n) \end{cases}$.

<u>примјер</u>:

$y'''' = \sqrt{y'''}$

<u>решење</u>:

смјена $y''' = z(x)$ доводи до једначине облика $z' = \sqrt{z}$ тј $z^{-1/2}dz = dx$ која има решење $2z^{1/2} = x + 2C_1$ тј. $z = (\dfrac{x}{2} + C_1)^2$. Тиме се добија једначина $y''' = (\dfrac{x}{2} + C_1)^2$ која послије три интеграције даје опште решење полазне једначине

$y = \dfrac{2}{15}(\dfrac{x}{2} + C_1)^5 + \dfrac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$;

Једначине облика $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

Смјена $y^{(n-2)} = z(x)$ доводи до једначине $F(z, z'') = 0$. Ако се може ријешити по другом изводу добијамо $z'' = f(z)$. Тада је $2z'z'' = 2f(z)z'$, $(z'^2)' = 2f(z)z'$, $d(z'^2) = 2f(z)dz$,

$z'^2 = \int 2f(z)dz + C_1$, $z' = \sqrt{\int 2f(z)dz + C_1}$, $\dfrac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz + C_1}} = dx$, $\int \dfrac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz + C_1}} = x + C_2$.

Из решења $\Phi(z, x, C_1, C_2) = 0$ добијамо $\Phi(y^{(n-2)}, x, C_1, C_2) = 0$ што је једначина првог типа.

<u>примјер</u>:

$y'''' = y''$

<u>решење</u>:

смјена $y'' = z(x)$ доводи до једначине облика $z'' = z$ тј $2z'z'' = 2zz'$, $d(z'^2) = d(z^2)$,

$z'^2 = z^2 + C_1^2$, $z' = \sqrt{z^2 + C_1^2}$, $\int \dfrac{dz}{\sqrt{z^2 + C_1^2}} = x + C_2$ која има решење $arcsh\dfrac{z}{C_1} = x + C_2$ тј. $z = C_1 sh(x + C_2)$. Из $y'' = z(x)$ добијамо $y'' = C_1 sh(x + C_2)$, $y' = C_1 ch(x + C_2) + C_3$,

$y = C_1 sh(x + C_2) + C_3x + C_4$.

Једначине облика $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Код једначине која не садржи аргумент, улогу аргумента преузима непозната функција y, а нова функција $p = p(y)$ се уводи смјеном $y' = p(y)$. Изводи вишег реда функције y се у једначини замјењују на следећи начин:

$y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy}y' = pp'$, $y''' = \dfrac{dy''}{dx} = \dfrac{dy''}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dpp'}{dy}y' = (p'p' + pp'')p$, ... Очигледно, оваква смјена снижава ред полазне једначине за 1. Решавање добијене једначине настављамо неком од метода зависно од облика добијене једначине. Из решења $\Phi(p, y, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0$ добијамо $\Phi(y', y, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0$ што послије још једне интеграције даје опште решење.

<u>примјер</u>:

Наћи оно решење једначине $yy'y'' = y'^3 + y''^2$ које пролази кроз тачку $(0;0)$ и у њој има тангенту праву $x + y = 0$

<u>решење</u>:

Услови које тражено решење треба да задовољи су очигледно: $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. Ако уведемо $y' = p(y)$ и $y'' = pp'$ једначина добија облик $ypp p' = p^3 + p^2 p'^2$. Послије дијељења са p^2 (што иначе можемо да урадимо јер за $p = 0$ би добили константну функцију која не задовољава почетне услове) добијамо $yp' = p + p'^2$ тј $p = yp' - p'^2$. То је Клерова једначина коју решавамо увођењем параметра $p' = t$, тј $dp = tdy$. Из $p = yt - t^2$ добијамо $dp = ydt + tdy - 2tdt$, тј $0 = (y - 2t)dt$. Из $0 = y - 2t$ тј. $t = \dfrac{y}{2}$ добијамо сингуларно решење $p = \dfrac{y^2}{4}$ које даље даје $y' = \dfrac{y^2}{4}$ тј. скуп решења од којих ниједно не задовољава почетне услове. Из $0 = dt$ тј. $t = C_1$ добијамо опште решење $p = C_1 y - C_1^2$ које даље даје $\dfrac{dy}{y - C_1} = C_1 dx$ тј. $\ln|y - C_1| = C_1 x + \ln C_2$, $y = C_1 + C_2 e^{C_1 x}$. Из почетних услова добијамо $C_1 + C_2 = 0$ и $C_1 C_2 = -1$. Те вриједности одређују два партикуларна решења $y = 1 - e^x$ и $y = -1 + e^{-x}$.

<u>примјер</u>:

$yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y^2 + y'^2}$

<u>решење</u>:

Једначина не садржи аргумент x па се може решавати смјеном $y' = p(y)$, $y'' = pp'$. Добијена хомогена једначина $ypp' = p^2 + p\sqrt{y^2 + p^2}$ тј. $p' = \dfrac{p}{y} + \sqrt{1 + (p/y)^2}$ се смјеном $\dfrac{p}{y} = u(y)$ своди на $u + yu' = u + \sqrt{1 + u^2}$ тј. на једначину са раздвојеним промјенљивим $\dfrac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \dfrac{dy}{y}$. Из $\ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \ln y + \ln C_1$ добијамо $p + \sqrt{p^2 + y^2} = C_1 y^2$. Послије квадрирања $\sqrt{p^2 + y^2} = C_1 y^2 - p$ имамо $p^2 + y^2 = C_1^2 y^4 - 2C_1 y^2 p + p^2$ тј. $p = \dfrac{C_1^2 y^2 - 1}{2C_1}$. Из $\dfrac{2C_1 dy}{C_1^2 y^2 - 1} = dx$ добијамо $\ln\dfrac{1 + C_1 y}{1 - C_1 y} = -x + \ln C_2$ и коначно решење $y = \dfrac{C_2 e^{-x} - 1}{C_1(C_2 e^{-x} + 1)}$.

Једначине облика $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Код једначине која не садржи непознату функцију и првих неколико њених извода користимо смјену $y^{(k)} = p(x)$. Изводи вишег реда функције y се у једначини замјењују на следећи начин: $y^{(k+1)} = p'(x)$, $y^{(k+2)} = p''(x)$, ... , $y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$. Очигледно, оваква смјена снижава ред полазне једначине за k. Решавање добијене једначине настављамо неком од метода зависно од облика добијене једначине. Из решења $\Phi(x, p, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0$ добијамо $\Phi(x, y^{(k)}, C_1, \ldots, C_{n-k}) = 0$ што послије још k интеграција даје опште решење.

<u>примјер</u>:

$xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$

<u>решење</u>:

Послије смјене $y^{(4)} = p(x)$, $y^{(5)} = p'(x)$ једначина добија облик $xp' - p = 0$, $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$, $p = C_1 x$. Из $y^{(4)} = C_1 x$ узастопним интеграцијама добијамо $y''' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$, $y'' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3$, $y' = C_1 \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$. Опште решење $y' = C_1 \frac{x^5}{120} + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$ се може записати и у облику $y' = Ax^5 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$.

примјер:

$y'' - xy''' + y''^2 = 0$

решење:

Смјена $y'' = z(x)$ нам даје $z - xz' + z^2 = 0$ тј. $z' - \frac{1}{x} z - \frac{1}{x} z^2 = 0$. Добијену Бернулијеву ј-ну послије дијељења са $z^2 \neq 0$ пишемо у облику $\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 0$ и решавамо смјеном $\frac{1}{z} = u(x)$. $u' + \frac{1}{x} u + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ $u = \frac{1}{x}[C_1 - x] \Rightarrow$ $z = \frac{x}{C_1 - x} \Rightarrow$ $y'' = \frac{x}{C_1 - x} \Rightarrow$

$y' = \int \frac{x}{C_1 - x} dx + C_2 \Rightarrow$ $y' = -x - C_1 \ln(C_1 - x) + C_2 \Rightarrow$ $y = \int (-x - C_1 \ln(C_1 - x) + C_2) dx + C_3 \Rightarrow$

$y = -\frac{x^2}{2} - C_1[x \ln(C_1 - x) - x - C_1 \ln(C_1 - x)] + C_2 x + C_3$ Провјером услова $z^2 = 0$ добијамо $y = ax + b$ што очигледно представља сингуларно решење јер задовољава једначину и не може се добити из општег решења ни за једну вриједност константи C_1, C_2, C_3.

Једначине хомогене по y, y', y'', ..., $y^{(n)}$

Код једначине која је хомогена по функцији и њеним изводима тј. која задовољава услов $F(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n-1)}, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)})$ користимо смјену $y' = yz(x)$. Изводи вишег реда функције y се у једначини замјењују на следећи начин: $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$, $y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$, ... Очигледно, оваква смјена снижава ред полазне једначине за 1. Решавање добијене једначине настављамо неком од метода зависно од облика добијене једначине. Из решења $z = z(x, C_1, \ldots, C_{n-1})$ и $y' = yz(x)$ добијамо $\frac{dy}{y} = z(x, C_1, \ldots, C_{n-1}) dx$ што послије још једне интеграције даје опште решење.

примјер:

$x^2 yy'' = (y - xy')^2$

решење:

Ако једначину запишемо у облику $x^2 yy'' = y^2 - 2xyy' + x^2 y'^2$ видимо да јесте хомогена по функцији и њеним изводима. Послије смјене $y' = yz(x)$, $y'' = y(z^2 + z')$ добијамо $x^2 yy(z^2 + z') = y^2 - 2xyyz + x^2 y^2 z^2$ тј. $x^2 z' + 2xz - 1 = 0$. Решење добијене линеарне једначине је $z=\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}$ па је $y'=y\left(\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$ тј. $\frac{dy}{y}=\left(\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$. Послије интеграције је $\ln y=-\frac{C_1}{x}+\ln x+\ln C_2$ тј. $y=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$.

примјер:

$3y'^2=4yy''+y^2$

решење:

Једначина је хомогена по функцији и њеним изводима. Послије смјене $y'=yz(x)$, $y''=y(z^2+z')$ добијамо $3y^2z^2=4y^2(z^2+z')+y^2$ тј. $3z^2=4(z^2+z')+1$. Из $4z'=-(z^2+1)$ тј. $\frac{dz}{z^2+1}=-\frac{dx}{4}$ добијамо $arctgz=-\frac{x}{4}+\frac{C_1}{4}$, $z=tg\frac{C_1-x}{4}$, $\frac{dy}{y}=tg\frac{C_1-x}{4}dx$. Послије интеграције: $\ln y=-4\ln\frac{1}{\cos\frac{C_1-x}{4}}+\ln C_2$, $\ln y=\ln C_2\cos^4\frac{C_1-x}{4}$, $y=C_2\cos^4\frac{C_1-x}{4}$.

Једначине записане у облику диференцијала

За једначину $F(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ код које је $F(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)},y^{(n)})=\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ кажемо да је записана у облику диференцијала. Интеграцијом $\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})=0$ добијамо $\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})=C_1$ чиме се ред једначине снижава за 1. Добијену једначину решавамо неком од метода, зависно од њеног облика.

примјер:

$y'y'''-y''^2=0$

решење:

Ако једначину подијелимо са $y'y''$ добијамо $\frac{y'''}{y''}-\frac{y''}{y'}=0$ тј. $(\ln y'')'-(\ln y')'=0$, $(\ln y''-\ln y')'=0$. Послије интеграције $\ln y''-\ln y'=\ln C_1$ једначина добија облик $\frac{y''}{y'}=C_1$. Добијена једначина се опет може представити у облику диференцијала: $(\ln y'-C_1x)'=0$. Још једна интеграција даје $\ln y'-C_1x=\ln C_2$ па је $y'=C_2e^{C_1x}$ и коначно $y=\frac{C_2}{C_1}e^{C_1x}+C_3$ што можемо записати и у облику $y=Ae^{Bx}+C$. Због дијељења са $y'y''$ провјеравамо да ли за $y'y''=0$ постоје решења која се не могу добити из општег решења. Из $y''=0$ добијамо $y=C_1x+C_2$ што јесте решење , а не може се добити из општег решења. Скуп свих решења једначине је $\begin{cases} y=Ae^{Bx}+C \\ y=C_1x+C_2 \end{cases}$.

примјер:

$y'y^2+yy''-y'^2=0$

решење:

Једначина се може записати у облику $y' + \frac{yy'' - y'^2}{y^2} = 0$ тј. $y' + \left(\frac{y'}{y}\right)' = 0$ па је

$y + \frac{y'}{y} = C_1$. Из $\frac{dy}{y(C_1 - y)} = dx$ тј. $\int (\frac{1}{C_1}\frac{1}{y} + \frac{1}{C_1}\frac{1}{C_1 - y})dy = \int dx$ добијамо

$\ln y - \ln(C_1 - y) = C_1 x + \ln C_2$ тј. $\frac{y}{C_1 - y} = C_2 e^{C_1 x}$ па је коначно решење $y = \frac{C_1 C_2 e^{C_1 x}}{1 + C_2 e^{C_1 x}}$.

<u>примјер</u>:
Наћи оно решење једначине $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$ које задовољава услов: $y(0) = y'(0) = e$.
<u>решење</u>:

Ако једначину подијелимо са y^2 добијамо $\frac{yy'' - y'^2}{y} = \ln y$ тј. $\left(\frac{y'}{y}\right)' = \ln y$, тј.

$\left((\ln y)'\right)' = \ln y$. Једначину не можемо решавати као једначину у облику диференцијала, али можемо искористити добијени облик за увођење нове функције $z = z(x)$ смјеном $z = \ln y$. Једначину $z'' = z$ ћемо касније решавати једноставнијим поступком. За сада можемо је ријешити: $2z'z'' = 2zz'$, $(z'^2)' = (z^2)'$, $z'^2 = z^2 + C$. За одређивање константе C одређујемо вриједности: $(y(0) = e) \wedge (z = \ln y) \Rightarrow z(0) = 1$,

$(y(0) = e) \wedge (y'(0) = e) \wedge (z' = \frac{y'}{y}) \Rightarrow z'(0) = 1$. Добијамо $1 = 1 + C$ тј. $C = 0$. Из $z'^2 = z^2$

добијамо $z' = z$, $\frac{dz}{z} = dx$, $\ln z = x + C$. Како је $z(0) = 1$ то је $C = 0$ па је $\ln z = x$ тј. $z = e^x$

и с обзиром на смјену $z = \ln y$ тражено решење је $y = e^{e^x}$