Једначине записане у облику диференцијала

За једначину $F(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ код које је $F(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)},y^{(n)})=\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ кажемо да је записана у облику диференцијала. Интеграцијом $\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})=0$ добијамо $\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})=C_1$ чиме се ред једначине снижава за 1. Добијену једначину решавамо неком од метода, зависно од њеног облика.

<u>примјер</u>:

$y'y'''-y''^2=0$

<u>решење</u>:

Ако једначину подијелимо са $y'y''$ добијамо $\frac{y'''}{y''}-\frac{y''}{y'}=0$ тј. $(\ln y'')'-(\ln y')'=0$, $(\ln y''-\ln y')'=0$. Послије интеграције $\ln y''-\ln y'=\ln C_1$ једначина добија облик $\frac{y''}{y'}=C_1$. Добијена једначина се опет може представити у облику диференцијала: $(\ln y'-C_1x)'=0$. Још једна интеграција даје $\ln y'-C_1x=\ln C_2$ па је $y'=C_2e^{C_1x}$ и коначно $y=\frac{C_2}{C_1}e^{C_1x}+C_3$ што можемо записати и у облику $y=Ae^{Bx}+C$. Због дијељења са $y'y''$ провјеравамо да ли за $y'y''=0$ постоје решења која се не могу добити из општег решења. Из $y''=0$ добијамо $y=C_1x+C_2$ што јесте решење , а не може се добити из општег решења. Скуп свих решења једначине је $\begin{cases} y=Ae^{Bx}+C \\ y=C_1x+C_2 \end{cases}$.

<u>примјер</u>:

$y'y^2+yy''-y'^2=0$

<u>решење</u>:

Једначина се може записати у облику $y'+\frac{yy''-y'^2}{y^2}=0$ тј. $y'+\left(\frac{y'}{y}\right)'=0$ па је $y+\frac{y'}{y}=C_1$.

Из $\frac{dy}{y(C_1-y)}=dx$ тј. $\int(\frac{1}{C_1}\frac{1}{y}+\frac{1}{C_1}\frac{1}{C_1-y})dy=\int dx$ добијамо $\ln y-\ln(C_1-y)=C_1x+\ln C_2$ тј. $\frac{y}{C_1-y}=C_2e^{C_1x}$ па је коначно решење $y=\frac{C_1C_2e^{C_1x}}{1+C_2e^{C_1x}}$.

<u>примјер</u>:

Наћи оно решење једначине $yy''-y'^2=y^2\ln y$ које задовољава услов: $y(0)=y'(0)=e$.

<u>решење</u>:

Ако једначину подијелимо са y^2 добијамо $\frac{yy''-y'^2}{y}=\ln y$ тј. $\left(\frac{y'}{y}\right)'=\ln y$, тј. $\left((\ln y)'\right)'=\ln y$. Једначину не можемо решавати као једначину у облику диференцијала, али можемо искористити добијени облик за увођење нове функције $z=z(x)$ смјеном $z=\ln y$. Једначину $z''=z$ ћемо касније решавати једноставнијим поступком. За сада можемо је ријешити: $2z'z''=2zz'$, $(z'^2)'=(z^2)'$, $z'^2=z^2+C$. За одређивање константе C одређујемо вриједности: $(y(0)=e)\wedge(z=\ln y)\Rightarrow z(0)=1$, $(y(0)=e)\wedge(y'(0)=e)\wedge(z'=\dfrac{y'}{y})\Rightarrow z'(0)=1$. Добијамо $1=1+C$ тј. $C=0$. Из $z'^2=z^2$ добијамо $z'=z$, $\dfrac{dz}{z}=dx$, $\ln z=x+C$. Како је $z(0)=1$ то је $C=0$ па је $\ln z=x$ тј. $z=e^x$ и с обзиром на смјену $z=\ln y$ тражено решење је $y=e^{e^x}$

Линеарне хомогене једначине са константним кофицијентима

Једначини облика $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ придружујемо карактеристичну једначину $k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0$. Та алгебарска једначина има укључујући вишеструкост, и коњуговано комплексна решења тачно n решења. При томе

- Сваком реалном простом (једноструком) коријену k_i одговара једно партикуларно решење $y_i=e^{k_ix}$.
- Сваком реалном $m-$товструком коријену $k_1=k_2=\ldots=k_m$ одговара m партикуларних решења $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=xe^{k_1x}$, $y_3=x^2e^{k_1x}$,..., $y_m=x^{m-1}e^{k_1x}$.
- Сваком пару простих комплексних коријена $k_{1/2}=\alpha\pm i\beta$ одговарају два партикуларна решења $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.
- Сваком пару $m-$товструких комплексних коријена $k_{1/2}=k_{3/4}=\ldots=k_{2m-1/2m}=\alpha+i\beta$ одговара $2m$ партикуларних решења $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x$,..., $y_{2m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Опште решење је линеарна комбинација n независних партикуларних решења.

<u>примјер</u>:

$y'''-5y''+6y'=0$

<u>решење</u>:

Карактеристична једначина има облик $k^3-5k^2+6k=0$ тј. $k(k-2)(k-3)=0$. Решењима $k_1=0, k_2=2, k_3=3$ одговарају партикуларна решења $y_1=e^{0x}$, $y_2=e^{2x}$, $y_3=e^{3x}$. Опште решење једначине је $y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$ тј. $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$.

<u>примјер</u>:

$y'''-5y''+8y'-4y=0$

<u>решење</u>:

Карактеристична једначина има облик $k^3-5k^2+8k-4=0$ тј. $(k-1)(k-2)^2=0$. Решењима $k_1=1, k_2=k_3=2$ одговарају партикуларна решења $y_1=e^{1x}$, $y_2=e^{2x}$,

$y_3 = xe^{2x}$. Опште решење једначине је $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ тј.
$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$.

примјер:
$y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$

решење:
Карактеристична једначина има облик $k^3 + 3k^2 + 9k - 13 = 0$. Решењима $k_1 = 1$, $k_{2/3} = -2 \pm 3i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{1x}$, $y_2 = e^{-2x}\cos 3x$, $y_3 = e^{-2x}\sin 3x$. Опште решење једначине је $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ тј.
$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}\cos 3x + C_3e^{-2x}\sin 3x$.

примјер:
$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$

решење:
Карактеристична једначина има облик $k^3 - 2k^2 + 4k - 8 = 0$. Решењима $k_1 = 2$, $k_{2/3} = \pm 2i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = \sin 2x$. Опште решење једначине је $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ тј. $y = C_1e^{2x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$.

примјер:
$y'''' + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$

решење:
Карактеристична једначина има облик $k^4 + 4k^3 + 8k^2 + 8k + 4 = 0$ тј. $(k^2 + 2k + 2)^2 = 0$. Решењима $k_{1/2} = k_{3/4} = -1 \pm i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = e^{-x}\cos x$, $y_2 = e^{-x}\sin x$, $y_3 = xe^{-x}\cos x$, $y_4 = xe^{-x}\sin x$. Опште решење једначине је $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4$ тј. $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x + C_3xe^{-x}\cos x + C_4xe^{-x}\sin x$.

примјер:
$y'''' + 2y'' + y = 0$

решење:
Карактеристична једначина има облик $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ тј. $(k^2 + 1)^2 = 0$. Решењима $k_{1/2} = k_{3/4} = \pm i$ одговарају партикуларна решења $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $y_3 = x\cos x$, $y_4 = x\sin x$. Опште решење једначине је $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4$ тј.
$y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3x\cos x + C_4x\sin x$.

Линеарне нехомогене једначине са константним кофицијентима

Једначину облика $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$ решавамо тако што у првом кораку нађемо решење одговарајуће хомогене једначине. У другом кораку до решења нехомогене можемо доћи на два начина. Први начин је примјена Лагранжовог метода варијације константи, и тај поступак ће бити детаљније описан касније, код једначине са неконстантним коефицијентима. Други начин, који ће овдје бити описан заснован је на томе да се опште решење нехомогене једначине може представити као збир општег решења хомогене и једног партикуларног решења нехомогене. Ако можемо да пронађемо једно партикуларно решење нехомогене једначине тиме у потпуности решавамо полазну једначину. Метод покушаја налажења једног решења је овдје олакшан тиме што за неке облике функције $f(x)$ тачно знамо како треба да изгледа тражено партикуларно решење. Ако се функција може представити у облику $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ тада постоји партикуларно решење облика $y_p = x^s e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$ где је број s

вишеструкост броја $\alpha \pm i\beta$ као коријена карактеристичне једначине, и $k = \max\{m,n\}$.
У следећој табели можемо видјети неке типове функција и одговарајућа партикуларна решења:

$f(x)$	Коријен карактеристичне једначине	y_p
$P_n(x)$	0 није коријен	$R_n(x)$
	0 јесте коријен реда s	$x^s R_n(x)$
$e^{\alpha x} P_n(x)$	α није коријен	$e^{\alpha x} R_n(x)$
	α јесте коријен реда s	$x^s e^{\alpha x} R_n(x)$
$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$	$\pm i\beta$ није коријен	$R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x$
	$\pm i\beta$ јесте коријен реда s	$x^s(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$	$\alpha \pm i\beta$ није коријен	$e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$
	$\alpha \pm i\beta$ јесте кор. реда s	$x^s e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x)$

примјер:
$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$
решење:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$ са решењима $k_1 = 1, k_2 = i, k_3 = -i$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. За одређивање партикуларног решења битно је то да је функција $f(x)$ у облику полинома. Како 0 није коријен карактеристичне једначине партикуларно решење ће бити полином истог степена као $f(x)$. Када функцију $y_p = Ax^2 + Bx + C$ и њене изводе $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$, $y_p''' = 0$ замијенимо у једначини добијамо идентитет $0 - 2A + 2Ax + B - Ax^2 - Bx - C \equiv x^2 + x$. Из њега добијамо $A = -1, B = -3, C = -1$. Партикуларно решење је $y_p = -x^2 - 3x - 1$. Опште решење је $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1$.
примјер:
$y''' - y'' = 12x^2 + 6x$
решење:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^3 - k^2 = 0$ са решењима $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$. Функција $f(x)$ је у облику полинома. Како је 0 двоструки коријен карактеристичне једначине партикуларно решење ће бити облика $y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C)$. Замјеном у једначини добијамо идентитет из кога одређујемо $A = -1, B = -5, C = -15$. Партикуларно решење је $y_p = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$. Опште решење је
$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2$.
примјер:
$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x$
решење:
Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2 - k = 0$ са решењима $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 + C_2 e^x$. Функција $f(x)$ је састављена од три дијела $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$. Сваком од њих одговара један дио партикуларног решења $y_p = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$. Како је $f_1(x) = e^x$ и број 1 јесте

корijен карактеристичне jедначине то je $y_1 = xAe^x$. Како je $f_2(x) = e^{2x}$ и броj 2 ниje корijен карактеристичне jедначине то je $y_2 = Be^{2x}$. Како je $f_3(x) = x$ и броj 0 jесте корijен карактеристичне jедначине то je $y_3 = x(Cx + D)$. Замjеном $y_p = xAe^x + Be^{2x} + x(Cx + D)$ у jедначини добиjамо идентитет из кога одређуjемо $A = 1, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = -1$. Партикуларно решење je $y_p = xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x$. Опште решење je $y = y_h + y_p = C_1 + C_2e^x + xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x$.

<u>примjер</u>:

$y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)e^{2x}$

<u>решење</u>:

Одговараjућа хомогена има карактеристичну jедначину $k^2 + k - 2 = 0$ са решењима $k_1 = 1$, $k_2 = -2$. Опште решење хомогене jедначине je $y_h = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Функциjа $f(x) = (x^2 - 1)e^{2x}$ и броj 2 ниje корijен карактеристичне jедначине па je $y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$.... Опште решење je

$$y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2e^{-2x} + (\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{13}{32})e^{2x}.$$

<u>примjер</u>:

$y''' - y'' = xe^x$

<u>решење</u>:

Одговараjућа хомогена има карактеристичну jедначину $k^3 - k^2 = 0$ са решењима $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$. Опште решење хомогене jедначине je $y_h = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_2e^{-2x}$. Функциjа $f(x) = xe^x$ и броj 1 jесте корijен карактеристичне jедначине па je $y_p = x(Ax + B)e^x$.... Опште решење je

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_2e^{-2x} + (\frac{1}{2}x^2 - 2x)e^x.$$

<u>примjер</u>:

$y'' + y = \sin 2x$

<u>решење</u>:

Одговараjућа хомогена има карактеристичну jедначину $k^2 + 1 = 0$ са решењима $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Опште решење хомогене jедначине je $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Функциjа $f(x) = \sin 2x$ и броj $\pm 2i$ ниje корijен карактеристичне jедначине па je $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$.... Опште решење je $y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$.

<u>примjер</u>:

$y'' + y = \sin x$

<u>решење</u>:

Одговараjућа хомогена има карактеристичну jедначину $k^2 + 1 = 0$ са решењима $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Опште решење хомогене jедначине je $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Функциjа $f(x) = \sin x$ и броj $\pm i$ jесте корijен карактеристичне jедначине па je $y_p = x(A\cos x + B\sin x)$.... Опште решење je $y = y_h + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x$.

<u>примjер</u>:

$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$

<u>решење</u>:

Одговарајућа хомогена има карактеристичну једначину $k^2-6k+9=0$ са решењима $k_1=k_2=3$. Опште решење хомогене једначине је $y_h=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$. Функција $f(x)=25e^x\sin x$ и број $1\pm i$ није коријен карактеристичне једначине па је $y_p=e^x(A\cos x+B\sin x)$.... Опште решење је $y=y_h+y_p=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+e^x(4\cos x+3\sin x)$.

Линеарне нехомогене једначине са неконстантним кофицијентима

Решавање једначина облика $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ илустроваћемо на примјеру једначина другог реда $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$. Од више начина за решавање овдје ће бити приказана три.

Први начин састоји се у томе да се прво ријеши одговарајућа хомогена једначина $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$. До њеног решења можемо доћи методом покушаја за налажење партикуларних решења. Ако за једначину другог реда нађемо два независна партикуларна решења, онда имамо и опште решење које је линеарна комбинација та два решења. Ако нађемо само једно партикуларно решење y_p једначину даље решавамо смјеном $y=y_pz(x)$. Нова једначина по $z(x)$ садржи z'' и z' а не садржи z па се решава смјеном $z'=u(x)$. Када добијемо решење хомогене једначине $y_h=C_1y_1+C_2y_2$ за налажење решења нехомогене примјењујемо Лагранжов метод варијације константи. Константе C_1, C_2 третирамо као функције од x и одређујемо их из система једначина $\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0 \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x) \end{cases}$. У случају једначине вишег реда $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ опште решење има облик $y_h=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ а систем за одређивање константи има облик:

$$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2+\ldots+C_n'y_n=0 \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'+\ldots+C_n'y_n'=0 \\ \vdots \\ C_1'y_1^{(n-2)}+C_2'y_2^{(n-2)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x) \end{cases}$$

<u>примјер</u>:
$(x^2-x)y''+(2x-3)y'-2y=12(x-1)^2$
<u>решење</u>:
Прво решавамо одговарајућу хомогену једначину $(x^2-x)y''+(2x-3)y'-2y=0$. Методом покушаја тражимо партикуларно решење у облику $y_p=ax+b$. Добијамо $y_p=2x-3$. Смјеном $y=(2x-3)z(x)$, $y'=2z+(2x-3)z'$, $y''=4z'+(2x-3)z''$ добијамо једначину $(x^2-x)(2x-3)z''+(4(x^2-x)+(2x-3)^2)z'=0$ која се смјеном $z'=u(x)$ своди на $x(x-1)(2x-3)u'=-(4(x^2-x)+(2x-3)^2)u$ тј. $\frac{du}{u}=-\frac{8x^2-16x+9}{x(x-1)(2x-3)}dx$. Интеграцијом $\frac{du}{u}=(-\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{4}{2x-3})dx$ добијамо $u=\frac{C_1(x-1)}{(2x-3)^2x^3}$ тј. $z'=C_1(-\frac{1}{27}\frac{1}{x^2}-\frac{3}{27}\frac{1}{x^3}+\frac{4}{27}\frac{1}{(2x-3)^2})$.

Интеграцијом се добија $z=-\frac{C_1}{6}\frac{1}{x^2(2x-3)}+C_2$ па је решење хомогене једначине

$y_h=-\frac{C_1}{6}\frac{1}{x^2}+C_2(2x-3)$ што се једноставније може записати као $y_h=A\frac{1}{x^2}+B(2x-3)$.

Претходни поступак се може скратити на следећи начин: Прво одређујемо све могуће вриједности за степене полинома који могу бити партикуларна решења. Парт. решења тражимо у облику $y_p=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots$ Замјеном у једначини

$(x^2-x)y''+(2x-3)y'-2y=0$ добијамо

$(x^2-x)(n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+\dots)+(2x-3)(nx^{n-1}+\dots)-2(x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots)\equiv 0$

У добијеној једначини сви коефицијенти осим оног уз највећи степен зависе од коефицијената $a_1,a_2,a_3\dots$ полазног полинома.

$(n(n-1)+2n-2)x^n+\varphi_1(n,a_1)x^{n-1}+\varphi_2(n,a_1,a_2)x^{n-2}+\varphi_3(n,a_1,a_2,a_3)x^{n-3}+\dots\equiv 0$ То значи да повољним избором коефицијената $a_1,a_2,a_3\dots$траженог полинома који учествују у кофицијентима уз степене $x^{n-1},x^{n-2},x^{n-3}\dots$ у једначини можемо постићи да буде $\varphi_1(n,a_1)x^{n-1}+\varphi_2(n,a_1,a_2)x^{n-2}+\varphi_3(n,a_1,a_2,a_3)x^{n-3}+\dots\equiv 0$ али на кофицијент $(n(n-1)+2n-2)$ који стоји уз x^n не можемо утицати на тај начин. Решавањем једначине $n(n-1)+2n-2=0$ добијамо вриједности $n_1=1$ и $n_2=-2$. То значи да једино полиноми степена 1 и –2 могу бити партикуларна решења. Провјером за полиноме $y_1=ax+b$ и $y_2=\frac{a}{x^2}$ добијамо $y_1=2x-3$ и $y_2=\frac{1}{x^2}$. Како су то двије линеарно независне функције то се опште решење може написати као њихова линеарна комбинација

$y_h=C_1(2x-3)+C_2\frac{1}{x^2}$. За налажење решења нехомогене једначине морамо је прво записати у облику $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ тј. у облику гдје је коефицијент уз најстарији извод једнак јединици, јер то даје правилан облик за функцију $f(x)$ у систему једначина за одређивање функција $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Овдје је то: $y''+\frac{2x-3}{x^2-x}y'-\frac{2}{x^2-x}y=\frac{12(x-1)^2}{x^2-x}$ тј. $y''+\frac{2x-3}{x^2-x}y'-\frac{2}{x^2-x}y=\frac{12(x-1)}{x}$. Систем ће имати облик: $\begin{cases} C_1'(2x-3)+C_2'\frac{1}{x^2}=0 \\ C_1'(2x-3)'+C_2'(\frac{1}{x^2})'=\frac{12(x-1)}{x}\end{cases}$ тј. $\begin{cases} C_1'(2x-3)+C_2'\frac{1}{x^2}=0 \\ C_1'2-C_2'\frac{2}{x^3}=\frac{12(x-1)}{x}\end{cases}$. Елиминацијом

C_2' добијамо $C_1'=2$ тј. $C_1=2x+A$ па затим и $C_2'=-4x^3+6x^2$ тј. $C_2=-x^4+2x^3+B$.

Када у општем решењу хомогене једначине $y_h=C_1(2x-3)+C_2\frac{1}{x^2}$ константе C_1,C_2 замијенимо функцијама $C_1(x),C_2(x)$ добијамо опште решење нехомогене једначине које се може записати у облику $y=(2x+A)(2x-3)+(-x^4+2x^3+B)\frac{1}{x^2}$ или као

$y=A(2x-3)+B\frac{1}{x^2}+3x^2-4x$. Из последњег облика решења видимо да се до њега могло доћи и тако што би методом покушаја нашли једно партикуларно решење нехомогене једначине $y_p=3x^2-4x$, што сабирањем са општим решењем хомогене једначине даје опште решење нехомогене једначине.

<u>примјер</u>:

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x-1$$

<u>решење</u>:

Прво решавамо одговарајућу хомогену једначину $(1-x)y'' + xy' - y = 0$. Методом покушаја тражимо партикуларно решење у облику $y_p = ax + b$. Добијамо $y_p = x$. Када је збир коефицијената уз $y''; y'; y$ једнак нули тада функција има партикуларно решење $y_p = e^x$ јер $(1-x)e^x + xe^x - e^x \equiv 0$. Опште решење хомогене једначине је $y_h = C_1 x + C_2 e^x$. За налажење решења нехомогене једначине константе C_1, C_2 третирамо као функције $C_1(x), C_2(x)$. Систем једначина за одређивање функција $C_1(x)$ и $C_2(x)$ ће имати облик: $\begin{cases} C_1' x + C_2' e^x = 0 \\ C_1'(x)' + C_2'(e^x)' = x-1 \end{cases}$ тј. $\begin{cases} C_1' x + C_2' e^x = 0 \\ C_1' + C_2' e^x = x-1 \end{cases}$. Елиминацијом C_2'

добијамо $C_1' = -1$ тј. $C_1 = -x + A$ па затим и $C_2' = xe^{-x}$ тј. $C_2 = -(x+1)e^{-x} + B$. Када у општем решењу хомогене једначине $y_h = C_1 x + C_2 e^x$ константе C_1, C_2 замијенимо функцијама $C_1(x), C_2(x)$ добијамо опште решење нехомогене једначине $y_h = Ax + Be^x - x^2 - x - 1$.

Други начин решавања је да решење тражимо у облику производа $y = u(x)v(x)$. Ако послије избора једне од функција једначина по другој функцији добија једноставан облик који се може ријешити, онда је овај начин решавања погодан за полазну једначину.

<u>примјер</u>:

$$x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^6$$

<u>решење</u>:

Решење тражимо у облику $y = u(x)v(x)$. Добијамо $x^2(u''v + 2u'v' + uv'') - 2x(u'v + uv') + (x^2+2)uv = x^6$ или послије сређивања по $u(x)$ $x^2 vu'' + (2x^2 v' - 2xv)u' + (x^2 v'' - 2xv' + (x^2+2)v)u = x^6$. Избор функције $v(x)$ вршимо тако да једначина послије тога добије што једноставнији облик. То може да значи да неки од коефицијената буде једнак нули, или да коефицијенти уз u' и u буду једнаки, или да зависно од облика једначине коефицијенти добију неке повољне вриједности. У овом случају не можемо изабрати $v(x)$ тако да кофицијент уз $u(x)$ буде једнак нули јер се то своди на решавање полазне једначине са новом функцијом. Стога бирамо $v(x)$ тако да кофицијент уз $u'(x)$ буде једнак нули. Из $2x^2 v' - 2xv = 0$ добијамо $v = x$. То доводи до једначине $x^3 u'' + x^3 u = x^6$ тј. $u'' + u = x^3$. Решење нехомогене једначине са константним коефицијентима је $u = u_h + u_p$ тј. $u = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^3 - 6x$ па је решење полазне једначине $y = u(x)v(x)$ тј. $y = C_1 x \cos x + C_2 x \sin x + x^4 - 6x^2$.

<u>примјер</u>:

$$y'' + 2xy' + (x^2 + 6)y = 0$$

<u>решење</u>:

Решење тражимо у облику $y = u(x)v(x)$. Једначина добија облик $u''v + 2u'v' + uv'' + 2x(u'v + uv') + (x^2+6)uv = 0$. Послије сређивања по једној од функција добијамо $uv'' + (2u' + 2xu)v' + (u'' + 2xu' + (x^2+6)u)v = 0$. Функцију $u(x)$ бирамо тако да буде $2u' + 2xu = 0$. Послије избора $u = e^{-x^2/2}$ једначина добија облик $v'' + 5v = 0$. Њено решење је $v = C_1 \cos\sqrt{5}x + C_2 \sin\sqrt{5}x$. Опште решење је $y = C_1 e^{-x^2/2} \cos\sqrt{5}x + C_2 e^{-x^2/2} \sin\sqrt{5}x$.

Трећи начин решавања једначине $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ је да уведемо нови аргумент смјеном $t = \varphi(x)$ гдје се функција $\varphi(x)$ добија из: $\varphi(x) = \int \sqrt{Ca_2(x)}dx$. Константу C бирамо тако да се омогући једноставнија интеграција. У случају једначине $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ одговарајућа смјена је $\varphi(x) = \int \sqrt[n]{Ca_n(x)}dx$. Ако послије увођења новог аргумента једначина постаје једначина са константним кофицијентима онда је овај начин решавања погодан за полазну једначину.

<u>примјер</u>:
Наћи опште решење једначине $y'' - (2e^x + 1)y' + e^{2x}y = e^{3x}$ и оно које задовољава услове $y(0) = 3, y'(0) = 1$.
<u>решење</u>:
Једначину решавамо смјеном аргумента $t = \varphi(x) = \int \sqrt{Ce^{2x}}dx$. Бирамо $C = 1$ и добијамо $t = \int e^x dx = e^x$. Из $t = e^x$ имамо $dt = e^x dx$ тј. $\frac{dt}{dx} = t$ па је $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t t$ и $y''_x = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'_t t}{dt}\frac{dt}{dx} = (y''_t t + y'_t)t$. Послије смјене једначина постаје $(y''_t t + y'_t)t - (2t+1)y'_t t + t^2 y = t^3$ тј. $y''_t t^2 - 2t^2 y'_t + t^2 y = t^3$. Добијена једначина са константним коефицијентима $y''_t - 2y'_t + y = t$ има решење $y(t) = C_1 e^t + C_2 te^t + t + 2$ па је опште решење полазне једначине $y(x) = C_1 e^{e^x} + C_2 e^x e^{e^x} + e^x + 2$. Тражено партикуларно решење је $y = e^x + 2$.
<u>примјер</u>:
$x^4 y'' + 2x^3 y' - y = 0$
<u>решење</u>:
$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{1}{x^4}y = 0$ Једначину решавамо смјеном аргумента $t = \varphi(x) = \int \sqrt{C(-1/x^4)}dx$.
Бирамо $C = -1$ и добијамо $t = \int \sqrt{1/x^4}dx = -1/x$. Из $t = -1/x$ имамо $dt = dx/x^2$ тј. $\frac{dt}{dx} = t^2$ па је $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t t^2$ и $y''_x = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'_t t^2}{dt}\frac{dt}{dx} = (y''_t t^2 + y'_t 2t)t^2 = y''_t t^4 + y'_t 2t^3$. Послије смјене једначина постаје $y''_t t^4 + y'_t 2t^3 - 2ty'_t t^2 - t^4 y = 0$ тј. $y''(t) - y(t) = 0$. Решење је $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ тј. $y(x) = C_1 e^{-1/x} + C_2 e^{1/x}$.

Ојлерова једначина

Специјалан случај линеарне једначине са неконстантним коефицијентима је једначина облика $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$. Ојлерова једначина се смјеном $x = e^t$ своди на једначину са константним коефицијентима.

<u>примјер</u>:
$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$
<u>решење</u>:
Ојлерова једначина. Послије смјене $x = e^t$ добијамо $dx = e^t dt$ тј. $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$. Тада је $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t e^{-t}$ и $y''_x = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'_t e^{-t}}{dt}\frac{dt}{dx} = (y''_t e^{-t} - y'_t e^{-t})e^{-t} = (y''_t - y'_t)e^{-2t}$. Једначина постаје $e^{2t}(y''_t - y'_t)e^{-2t} - 2e^t y'_t e^{-t} + 2y = e^{3t}$ тј. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t}$. Њено решење је $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$. Опште решење је $y(x) = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}x^3$

<u>примјер</u>:
$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$
<u>решење</u>:
Осим наведеног начина Ојлерову једначину можемо решавати и налажењем партикуларних решења. Ако потражимо сва решења ове једначине облика $y_p = x^k$ добићемо $x^2 k(k-1)x^{k-2} + 2xkx^{k-1} - 6x^k \equiv 0$, $(k^2 + k - 6)x^k \equiv 0$. Једначина $k^2 + k - 6 = 0$ има решења $k = 2$ и $k = -3$ што значи да постоје два независна партикуларна решења $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^{-3}$. Опште решење је $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^{-3}$.

<u>примјер</u>:
$(x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$
<u>решење</u>:
Смјена $x + 2 = e^t$. Опште решење је $y(x) = C_1(x+2) + C_2(x+2)^{-3}$.

Системи линеарних диф. једначина са константним коефицијентима

Обрадићемо метод елиминације за системе линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима. Поступак се састоји у свођењу система на једну једначину у којој учествује само једна од непознатих функција из система. То постижемо диференцирањем неке од једначина и замјењивањем осталих функција и њихових извода из преосталих једначина.

<u>примјер</u>:
Ријешити систем диф. ј-на: $x' = 3x - y + z$; $y' = x + y + z$; $z' = 4x - y + 4z$.
<u>решење</u>:
Диференцирањем прве једначине и елиминисањем извода y' и z' из друге двије једначине добијамо:
$x'' = 3x' - y' + z' \Rightarrow x'' - 3x' = -(x + y + z) + (4x - y + 4z) \Rightarrow x'' - 3x' - 3x = -2y + 3z$.
Добијену једначину два пута комбинујемо са првом једначином система. Када прву једначину помножимо са -3 и саберемо са њом добијамо $y = x'' - 6x' + 6x$. Када прву једначину помножимо са -2 и саберемо са њом добијамо $z = x'' - 5x' + 3x$. Овим смо припремили одређивање функција y и z када одредимо функцију x. За одређивање

непознате функције x формирамо једначину која ће садржати само x тако што у другој или трећој једначини система елиминишемо y и z и њихов извод користећи добијене везе. $y' = x + y + z \Rightarrow x''' - 6x'' + 6x' = x + (x'' - 6x' + 6x) + (x'' - 5x' + 3x) \Rightarrow$
$x''' - 8x'' + 17x' - 10x = 0$. Добијена једначина по једној непознатој функцији има решење: $k^3 - 8k^2 + 17k - 10 = 0 \Rightarrow (k-1)(k-2)(k-5) = 0 \Rightarrow k_1 = 1; k_2 = 2; k_3 = 5$.
$x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$. Користећи добијене везе одређујемо
$y = x'' - 6x' + 6x \Rightarrow y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$ и $z = x'' - 5x' + 3x \Rightarrow z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}$

<u>примјер</u>:
Ријешити систем диф. j-на: $x' = -x + y$; $y' = -y + 4z$; $z' = x - 4z$.
<u>решење</u>:
Из прве једначине већ имамо изражено $y = x' + x$. Диференцирањем прве једначине и елиминисањем извода y' и саме функције y добијамо везу између z и x:
$x'' = -x' + y' \Rightarrow x'' + x' = -y + 4z \Rightarrow x'' + x' = -(x' + x) + 4z \Rightarrow z = \frac{1}{4}(x'' + 2x' + x)$. Када имамо изражене функције y и z преко x, то користимо да добијемо једначину која ће садржати само непознату функцију x. Укључујемо и трећу једначину која до сада није коришћена: Из $z' = x - 4z$ и $z = \frac{1}{4}(x'' + 2x' + x)$ имамо
$\frac{1}{4}(x''' + 2x'' + x') = x - (x'' + 2x' + x) \Rightarrow x''' + 2x'' + x' = -4x'' - 8x' \Rightarrow x''' + 6x'' + 9x' = 0$.
Добијена једначина по једној непознатој функцији има решење:
$k^3 + 6k^2 + 9k = 0 \Rightarrow k(k+3)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0; k_2 = k_3 = 3$. $x(t) = C_1 + C_2e^{-3t} + C_3te^{-3t}$.
Послије тога преостаје само да се искористе већ добијене везе између y, z и x
Како је $y = x' + x$ то је: $y(t) = C_1 + (-2C_2 + C_3)e^{-3t} - 2C_3te^{-3t}$.
Из $z = \frac{x'' + 2x' + x}{4} \Rightarrow$ $z(t) = \frac{C_1}{4} + (C_2 - C_3)e^{-3t} + C_3te^{-3t}$.

<u>примјер</u>:
Ријешити систем диф. j-на: $x' = 4x - y - z$; $y' = x + 2y - z$; $z' = x - y + 2z$.
<u>решење</u>:
Диференцирањем прве једначине $x' = 4x - y - z$ и замјеном y' и z' из друге и треће једначине добијамо:
$x'' = 4x' - y' - z' \Rightarrow x'' - 4x' = -(x + 2y - z) - (x - y + 2z) \Rightarrow x'' - 4x' + 2x = -y - z \Rightarrow$
$x'' - 4x' + 2x = x' - 4x \Rightarrow x'' - 5x' + 6x = 0 \Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$.
У претходним задацима смо за добијање прве непознате функције приликом елиминисања осталих функција добили једначину трећег реда. При томе смо такође до добијања те једначине добили везе између осталих непознатих функција и прве функције коју тражимо. То је омогућило да налажењем прве непознате функције практично ријешимо систем. У овом случају су већ код једначине другог реда елиминисане друге двије функције. То има за последицу да сада не можемо одмах добити преостале функције, већ морамо вршити још једну интеграцију. Да би то урадили морамо комбиновати двије једначине тако да из њих елиминишемо једну од још неизрачунатих функција и добијемо једначину која ће садржати једну непознату функцију и једну коју смо већ одредили. Овдје то постижемо из прве двије једначине одузимањем.

$$\left.\begin{array}{l} x' = 4x - y - z \\ y' = x + 2y - z \end{array}\right\} \quad x' - y' = 3x - 3y \Rightarrow y' - 3y + C_1e^{2t} = 0 \Rightarrow \quad y(t) = C_1e^{2t} + C_3e^{3t}.$$

Послије одређивања двије функције трећу одређујемо из једне од једначина без нове интеграције.

$x' = 4x - y - z \Rightarrow z = -x' + 4x - y \Rightarrow$ $\qquad$ $z(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 - C_3) e^{3t}$